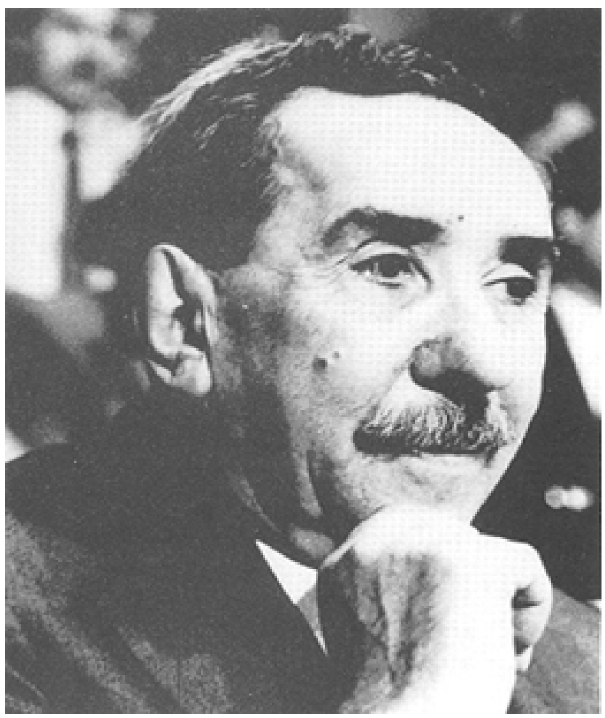
# Elementos básicos de variable compleja

Javier Páez Cárdenas

*A la memoria del profesor Guillermo Torres Díaz (1919-1990).*



Guillermo Torres Díaz (1919-1990).

# Índice general

# Introducción

Todos (o casi todos) sabemos cómo empezó esta historia. La aparición de la raíz cuadrada de un número negativo al aplicar la fórmula general para la solución de algunas ecuaciones de segundo grado, marca el inicio de una rama muy importante de las matemáticas: *la teoría de funciones de variable compleja*. Y este inicio deja huellas en más de un sentido; tal es el caso del nombre de los números a que da origen: "números imaginarios". No podía ser de otra forma; estos números no podían "existir", sólo podían ser "imaginados".

Este texto tiene como intención exponer los elementos básicos de la teoría de funciones de variable compleja; desde la construcción de los números complejos, hasta las destacadas propiedades que poseen este tipo de funciones (pasando, claro está, por el importante teorema de Cauchy). En la medida de lo posible, se intenta desarrollar todo este material tomando en cuenta que el lector acaba de concluir con sus cursos de cálculo diferencial e integral en una y varias variables.

Aún cuando el teorema de Cauchy es uno de los resultados más importantes de la variable compleja, el interés principal de este texto se centra en presentar las propiedades de las funciones de variable compleja y mostrar que la mayoría de ellas se pueden probar a partir de una versión muy sencilla de este teorema.

En el primer capítulo iniciamos con la construcción de los números complejos, abarcando tanto sus propiedades geométricas como algebraicas. Incluimos su representación esférica, lo que nos permite introducir los complejos extendidos. Definimos el concepto de módulo (o norma) de un número complejo y vemos su relación con la aritmética y geometría de los números complejos. Así mismo, hacemos notar que este concepto coincide con el concepto de norma de un vector en $\mathbb{R}^2$, en virtud de lo cual mencionamos que todos los conceptos y resultados topológicos en el plano complejo, y los correspondientes de convergencia de sucesiones en los números complejos, coinciden con los ya abordados y trabajados en $\mathbb{R}^2$ en cursos anteriores, y que por esta razón se dan por conocidos.

En el capítulo 2 se abordan los diferentes tipos de funciones entre conjuntos de números, y que serán el principal objeto de estudio de este texto. Se pone especial énfasis en la definición y análisis geométrico de funciones tales como las funciones de Möbius, la función exponencial, las ramas del logaritmo y las funciones trigonométricas. Apoyados nuevamente en la coincidencia del concepto de módulo (o norma) de un número complejo con el de norma de un vector en $\mathbb{R}^2$, damos por conocidos los conceptos de límite y continuidad para este tipo de funciones, así como todos los resultados relacionados con éstos.

En el capítulo 3 introducimos los conceptos de derivada e integral de funciones de variable compleja. Vemos las propiedades más elementales de estos conceptos y su relación con los correspondientes conceptos de derivada y de integral de línea de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, respectivamente. En este capítulo se prueba la primera versión del teorema de Cauchy (sobre una bola abierta o disco en $\mathbb{C}$) y las primeras consecuencias importantes de este teorema, como lo es el teorema del módulo máximo.

Los capítulos 4 y 5 de este texto son sin duda aquellos en los que de manera más clara queda de manifiesto que los temas que ahí se tratan están guiados por la línea de desarrollo seguida por L. Ahlfors[1] en su muy conocido libro (referencia [1]).

En el capítulo 4 se estudian fundamentalmente aquellas propiedades de las funciones analíticas que tienen un carácter local (lo que se refleja en el nombre del capítulo). Inicia con el análisis de la existencia de las derivadas de orden superior de este tipo de funciones, con base en lo cual se prueba la fórmula integral de Cauchy para las derivadas y resultados tan importantes como el teorema de Liouville, el teorema de Morera y el teorema fundamental del álgebra. A continuación se introducen las llamadas singularidades

[1]Lars Valerian Ahlfors, (Helsinki, 18 de abril de 1907 – Pittsfield, Massachusetts; 11 de octubre de 1996), fue un matemático finlandés. Ahlfors recibió muchos honores por sus contribuciones a las matemáticas. Fue el primer ganador de la medalla Fields (junto a Jesse Douglas del MIT) además del premio Wolf en Matemáticas en 1981. (Fuente: Wikipedia).

aisladas y algunas propiedades que las caracterizan. El estudio de este tipo de singularidades inicia con las singularidades removibles, de cuya caracterización se prueban el lema de Schwarz y el muy importante y útil teorema de Taylor para funciones analíticas. Este teorema permite presentar el primer teorema que relaciona las funciones analíticas con las series de números complejos, lo que a su vez nos lleva a incluir un breve interludio sobre el tema de sucesiones y series de funciones, y en particular sobre las series de potencias. Como un paso previo al análisis de las singularidades aisladas no removibles, se hace un estudio detallado sobre los ceros de una función analítica, lo que permite caracterizar y clasificar al resto de este tipo de singularidades: los polos y las singularidades esenciales. Ya que se cuenta con este material, se formula la primera versión del principio del argumento (para funciones meromorfas en un disco) del que a su vez se desprenden importantes propiedades topológicas, entre las que destacan propiedades sobre la inyectividad e invertibilidad (local) de este tipo de funciones. Este capítulo concluye con la prueba de importantes teoremas como lo son el teorema de Rouché y el teorema de Hurwitz.

En el capítulo 5, el último de este texto, se introducen las nociones de ciclo, ciclos homólogos a cero, y ciclos homólogos entre si, conceptos con base en los cuales se formula y prueba la segunda (y más general) versión del teorema de Cauchy que se da en este trabajo. Una vez que se cuenta con este teorema, se prueban dos importantes resultados: el teorema del desarrollo de Laurent y el teorema del residuo. De este último se desprende la prueba de la segunda versión del principio del argumento que se da en este texto, el correspondiente a funciones meromorfas en regiones arbitrarias. El capítulo concluye con el desarrollo de una de las aplicaciones clásicas del teorema del residuo: el cálculo de integrales.

# Capítulo 1

# Los números complejos

## 1.1. Un primer vistazo

En este capítulo estudiaremos al sistema de los números complejos, y para ello supondremos que se concoce bien al conjunto de los números reales. Los números reales poseen un par de operaciones que satisfacen ciertas propiedades a partir de las cuales decimos que forman un campo. Los números reales también están dotados de un orden, un orden que "se lleva bien" con las operaciones, en virtud de lo cual también decimos que forman un campo ordenado.

A pesar de todas estas propiedades, los números reales fallan en algo: existen ecuaciones polinomiales que no tienen solución dentro de los mismos números reales. El ejemplo más típico está dado por la ecuación $x^2+1=0$. Para enfrentar este problema se tuvo que "crear" un nuevo número que "resolviera" esta ecuación y que se denotó por $i$. Así, este número tiene la propiedad de que $i^2+1=0$ o $i^2=-1$.

Una de la consecuencias más interesantes de la introducción de este número, es que con él no sólo obtenemos una solución para la ecuación $x^2+1=0$, sino que a cualquier ecuación polinomial con coeficientes reales siempre le podremos encontrar una raíz, construida, por supuesto, a partir de este número. Este es un resultado que más adelante estaremos en condiciones de demostrar.

Mientras tanto, por ejemplo, es fácil notar que ecuaciones de la forma $x^2+a=0$ con $a>0$ (que no tienen soluciones en los números reales) tienen como raíces a los números $i\sqrt{a}$ y $-i\sqrt{a}$.

Como se ve, "combinar" este número con los números reales es una buena idea. Esta combinación da lugar a "expresiones" que en general son de la forma $a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, "expresiones" que tienen la particularidad de que si las sumamos y las multiplicamos de acuerdo a las reglas de los números reales, junto con el hecho de que $i^2=-1$, el resultado en ambos casos son "expresiones" de la misma forma:

$$(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d) \tag{1.1}$$

y

$$\begin{aligned}(a+ib)\cdot(c+id) &= a(c+id)+ib(c+id)\\ &= ac+iad+ibc+i^2bd\\ &= (ac-bd)+i(ad+bc).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Es fácil mostrar que además de estas dos propiedades, estas "expresiones" satisfacen la lista completa de propiedades que definen a un campo. Por ejemplo, mostremos que, si $a+ib\neq 0$, es decir, $a\neq 0$ o $b\neq 0$ (o equivalentemente que $a^2+b^2>0$), entonces existe otra "expresión" $x+iy$ con la propiedad de que $(a+ib)(x+iy)=1$. En efecto, nótese que este problema nos conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}ax-by&=1\\ bx+ay&=0\end{aligned}$$

el cual tiene solución única puesto que su determinante $a^2+b^2$ es diferente de 0. De hecho, las soluciones están dadas por

$$x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Estos hechos, sin duda justifican que de aquí en adelante dejemos de hablar de las "expresiones" $a+ib$ para hablar de los números $a+ib$, los números complejos, cuyo conjunto denotaremos por $\mathbb{C}$, y que con la terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ (en donde $+$ y $\cdot$ denotan a las operaciones de suma y producto dadas en 1.1 y 1.2, respectivamente), nos referiremos al campo de los números complejos.

Lo anterior lo dejaremos plasmado en la siguiente

**Definición 1.1** *El conjunto de los números complejos, que denotamos por $\mathbb{C}$, está dado por*

$$\mathbb{C} := \left\{ a + ib \mid \textit{con } a, b \in \mathbb{R}, \textit{ e } i \textit{ tal que } i^2 = -1 \right\}$$

*Además, definimos las operaciones de suma y producto de elementos de $\mathbb{C}$ (que denotamos por $+$ y $\cdot$, respectivamente) como:*

1. $(a+ib) + (c+id) := (a+c) + i(b+d)$
2. $(a+ib) \cdot (c+id) := (ac - bd) + i(ad + bc)$ *(en donde, de aquí en adelante, escribiremos $(a+ib)(c+id)$ en lugar de $(a+ib) \cdot (c+id)$)*

*Con la terna $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ denotaremos al campo de los números complejos (ver problema 1).*

Así pues, los números complejos serán los números de la forma $a+ib$ en donde $a$ y $b$ son números reales e $i$ es tal que $i^2 = -1$. Al número $a$ se le llama la *parte real* y al número $b$ la *parte imaginaria* del complejo $a+ib$. Con frecuencia usaremos una sola letra para referirnos a un número complejo (casi siempre la letra $z$) y en este caso denotaremos por $\mathrm{Re}(z)$ a la parte real de $z$, y por $\mathrm{Im}(z)$ a la parte imaginaria de $z$. De este modo, si $z = a + ib$, entonces tendremos que $a = \mathrm{Re}(z)$ y $b = \mathrm{Im}(z)$.

Por otra parte, obsérvese que los números reales $\mathbb{R}$ están contenidos en los números complejos $\mathbb{C}$ en la medida de que todo número real $a$ se puede escribir como el número complejo de la forma $a + i0$, es decir, los números reales coinciden con el conjunto de los números complejos que tienen parte imaginaria igual a 0. A los números complejos cuya parte real sea 0, es decir, los números de la forma $ib$, los llamaremos *imaginarios puros*. Nótese también que dos números complejos serán iguales sólo si su parte real y su parte imaginaria son iguales, y que el cero de los números complejos (que denotaremos por el mismo símbolo que usamos para los números reales) es el único número complejo cuya parte real y parte imaginaria es 0.

Como decíamos al principio de esta sección, el surgimiento de los números complejos esta intimamente relacionado a cierta insuficiencia de los números reales, a saber, la no existencia de un número real cuyo cuadrado fuera $-1$, o dicho de otra forma, la no existencia de la raíz cuadrada de $-1$ (o de cualquier número negativo).

Para concluir esta sección, mostraremos que esta es una insuficiencia que ya no comparten los números complejos; es decir, mostraremos que si $a+ib$ es cualquier número complejo, entonces siempre existe otro $x+iy$ con la propiedad de que

$$(x+iy)^2 = a + ib \tag{1.3}$$

Para probar esto, obsérvese que la ecuación anterior nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tomando el cuadrado de cada una de estas identidades y sumándolas, tenemos que

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2$$

de manera que

$$x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.5}$$

([1]). Si sumamos y restamos esta última identidad con la primera identidad de 1.4, obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 &= a + \sqrt{a^2+b^2} \\ y^2 &= -a + \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

Dado que los números a la derecha de estas dos identidades siempre son mayores o iguales a cero (ejercicio 4), se tiene que

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{a + \sqrt{a^2+b^2}} \\ y &= \pm\sqrt{-a + \sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned} \tag{1.6}$$

A primera vista pareciera que la ecuación 1.3 tiene cuatro soluciones (las cuatro combinaciones de los signos de $x$ y $y$ en 1.6), pero obsérvese que la segunda identidad de 1.4 sólo permite dos de estas combinaciones, las cuales están determinadas por el signo de $b$. Nótese también que, de las dos soluciones posibles, una es la negativa de la otra (como era de suponer que sucediera).

## 1.2. Otras operaciones con los números complejos

Para un manejo más fluido de la aritmética y el álgebra de los números complejos, se definen un par de conceptos que son de gran utilidad. El primero de ellos es el concepto de conjugación.

**Definición 1.2** *Para cada número complejo $z = a + ib$ definimos* el conjugado de $z$*, que denotaremos por $\bar{z}$, como el número complejo $a - ib$, es decir*

$$\bar{z} := a - ib$$

Con relación a este concepto, se tienen las siguientes propiedades las cuales dejaremos plasmadas en la siguiente proposición y cuya prueba quedará a cargo del lector.

**Proposición 1.3** *Si $z, w \in \mathbb{C}$ entonces:*

1. $\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$
3. si $w \neq 0$, $\overline{(z/w)} = \bar{z}/\bar{w}$
4. $\overline{(\bar{z})} = z$
5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$
6. $z\bar{z} = a^2 + b^2$

El segundo concepto que definiremos es el de valor absoluto o módulo de un número complejo.

**Definición 1.4** *Si $z = a + ib$, definimos* el valor absoluto o módulo de $z$*, que denotaremos por $|z|$, como el número real $\sqrt{a^2+b^2}$, es decir*

$$|z| := \sqrt{a^2+b^2}$$

Aquí vale la pena observar que si $z$ es estrictamente real, es decir si $b = 0$, entonces $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$, lo que justifica el uso de la misma notación que se usa para el concepto de valor absoluto de un número real. Además, esta identidad también muestra que el concepto de valor absoluto o módulo de un número complejo, *extiende* al correspondiente que se tiene para los números reales (esta extensión quedará confirmada aun más cuando tengamos una representación geométrica de los números complejos).

Como en el caso de la conjugación, hay una serie de propiedades importantes relacionadas con el valor absoluto o módulo de un número complejo (propiedades que en la mayoría de los casos, no son más que la extensión de las correspondientes propiedades del valor absoluto de los números reales) y que dejamos establecidas en la siguiente proposición. Como es de esperarse, la prueba queda como un problema para el lector.

[1] En este texto el simbolo $\sqrt{\alpha}$, donde $\alpha$ sea un número real positivo, siempre denotará al único número real positivo cuyo cudrado es $\alpha$; esta convención, por cierto, justifica la identidad 1.5.

**Proposición 1.5** *Si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces*

1. $|z| \geq 0$ y $|z| = 0$ si y sólo si $z = 0$

2. $|z|^2 = z\bar{z}$

3. $|z| = |\bar{z}|$

4. $|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

5. $|zw| = |z|\,|w|$

6. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ si $w \neq 0$.

7. $|z + w| \leq |z| + |w|$

Con relación a este concepto, y del mismo modo que en el caso de los números reales, el número $|z - w|$ será una buena forma de medir la distancia entre los complejos $z$ y $w$. Esto resultará muy importante más adelante, cuando tratemos el tema de la “topología” de $\mathbb{C}$.

## 1.3. La geometría de los números complejos

Hay personas para quienes la idea de “inventarse” un número cuyo cuadrado sea $-1$ y después “combinarlo” con los números reales para así construir los números complejos, es una idea que no los deja dormir tranquilos.

Estas almas atribuladas prefieren construir los números complejos a partir de un conjunto “bien definido” (como por ejemplo el conjunto de parejas ordenadas $(x, y)$ de números reales, es decir $\mathbb{R}^2$) y definir en este conjunto las operaciones de suma y producto que cumplan con las propiedades de campo.

Como es de suponer, dichas operaciones están definidas de la siguiente forma: dadas $(x, y)$ y $(x', y')$

1. $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

2. $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$

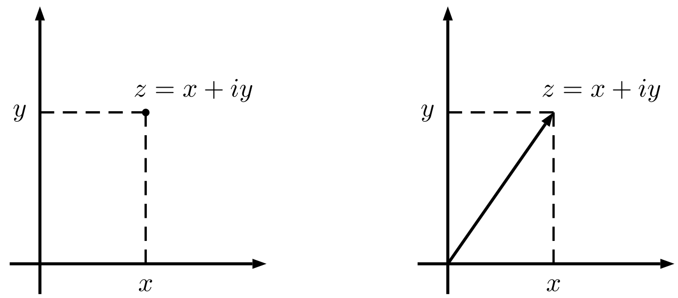
Es fácil darse cuenta que la manera de definir estas operaciones tiene su origen en la idea de asociar a cada pareja $(x, y)$ el número complejo $x + iy$ (y viceversa, a cada complejo $x + iy$, asociarle la pareja $(x, y)$). En esta asociación, por cierto, el número $i$ se corresponde con la pareja $(0, 1)$.

Además de dar tranquilidad a estas almas, esta construcción de los números complejos (más adelante veremos que cuando menos hay otras dos formas más de obtener construcciones “isomorfas”), tiene la importante ventaja de proporcionarnos una representación geométrica de estos números, en la medida de que las parejas ordenadas de números reales se pueden representar como los puntos de un plano que está dotado de un sistema coordenado.

Así pues, un número complejo $z = x + iy$ lo representaremos geométricamente por un punto en el plano (por lo que en muchas ocasiones nos referiremos al *plano complejo* $\mathbb{C}$) y en algunas ocaciones en que resulte conveniente, incluso por un vector (ver figura 1.1).

En esta representación los complejos de la forma $z = iy$, o imaginarios puros (que se corresponden con las parejas $(0, y)$), son los puntos del eje de las $y's$ por lo que de aquí en adelante a dicho eje también lo conoceremos como el *eje imaginario*; análogamente, puesto que un número complejo que sea estrictamente un real $x$ se corresponde con la pareja de la forma $(x, 0)$, que a su vez se representa como un punto del eje de las $x's$, dicho eje también lo conoceremos con el nombre de *eje real*.

Con base en esta representación geométrica de los números complejos, ahora podemos interpretar también geométricamente algunos de los conceptos que hemos definido hasta ahora. Tal es el caso de valor absoluto o módulo de un número complejo. Como se recordará, si $z = x + iy$, definimos el valor absoluto o módulo de $z$ como $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ el cual, en términos geométricos, representa la distancia que hay del punto $z$ al origen (ver figura 1.2 $(a)$). De esta forma, por ejemplo, si $z, w \in \mathbb{C}$, el número $|z - w|$ representará la distancia entre los complejos $z$ y $w$.

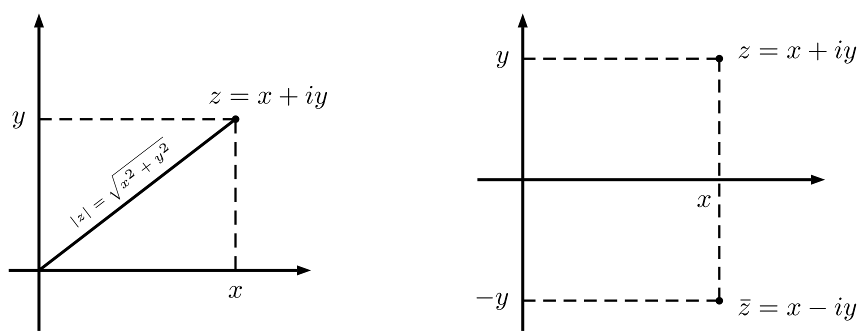



$(a)$ $(b)$

Figura 1.1: El número complejo $z = x + iy$ se puede representar geométricamente por un punto $(a)$, o por un vector $(b)$.

La conjugación también tiene una interpretación geométrica muy simple; recuerde que, si $z = x + iy$ entonces el conjugado de $z$ se define (y se denota) como $\bar{z} = x - iy$, de modo que, si al complejo $z$ le corresponde la pareja $(x, y)$, entonces a $\bar{z}$ le corresponderá la pareja $(x, -y)$, y es claro que dichas parejas se representan geométricamente por un par de puntos que son simétricos con respecto al eje real (o lo que es lo mismo, el punto que representa a la pareja $(x, -y)$ se obtiene de reflejar, con respecto al eje real, al punto que representa a la pareja $(x, y)$ (ver figura 1.2 $(b)$)).

Observe que de esta interpretación algunas propiedades resultan ser geométricamente muy claras, como aquella que establece que $\overline{(\bar{z})} = z$.




$(a)$ $(b)$

Figura 1.2: El módulo de $z$, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, representa la distancia del punto $z$ al origen, $(a)$, y el conjugado de $z$, $\bar{z} = x - iy$, geométricamente es el punto que se obtiene al reflejar el punto $z$ con respecto al eje real $X$, $(b)$.

Las operaciones entre números complejos también son suceptibles de representarse (o realizarse) geométricamente y para ello es más adecuado representar a un número complejo por un vector.

En el caso de la suma tenemos que, si $z = x + iy$ y $w = x' + iy'$ entonces $z + w = (x + x') + i(y + y')$ de modo que a estos números corresponden las parejas $(x, y), (x', y')$ y $(x + x', y + y')$ respectivamente. Por otra parte y en términos de vectores, a esta última pareja también corresponde el vector que se obtiene al sumar, de acuerdo a la regla del paralelogramo, los vectores cuyas coordenadas son $(x, y)$ y $(x', y')$.

En resumen, la suma de números complejos, geométricamente hablando, coincide con la suma de los correspondientes vectores (ver figura 1.3).

El producto de números complejos también puede interpretarse (o realizarse) geométricamente, pero para ello será necesario recurrir a otra representación de los números complejos.

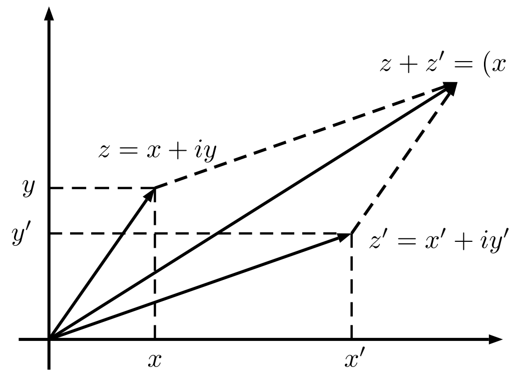



Figura 1.3: Representación geométrica de la suma $z+z' = (x+x')+i(y+y')$ de los números complejos $z = x + iy$ y $z' = x' + iy'$

## 1.4. Representación polar de un número complejo

Esta representación tiene su origen en ese otro sistema coordenado que se utiliza para representar a los puntos de un plano y que conocemos con el nombre de sistema coordenado polar.

Como sabemos, una vez establecido en un plano un punto **O** (llamado polo) y una semirecta $L$ que parte de este punto (llamada eje polar), todo punto $P$ de este plano, excepto el polo, está determinado por un par de números reales $r$ y $\theta$, donde $r$ es la distancia de $P$ a **O** (por lo que $r$ siempre es mayor que 0), y $\theta$ es *un* valor del ángulo dirigido formado por el eje polar y la semirecta que parte de **O** y pasa por $P$ (por lo que basta con que $\theta$ satisfaga las desigualdades $0 \leq \theta < 2\pi$ si dicho ángulo es medido en radianes (ver figura 1.4 $(a)$). En este caso decimos que la pareja $(r, \theta)$ son unas coordenadas polares del punto $P$ en el sistema coordenado polar determinado por **O** y $L$.

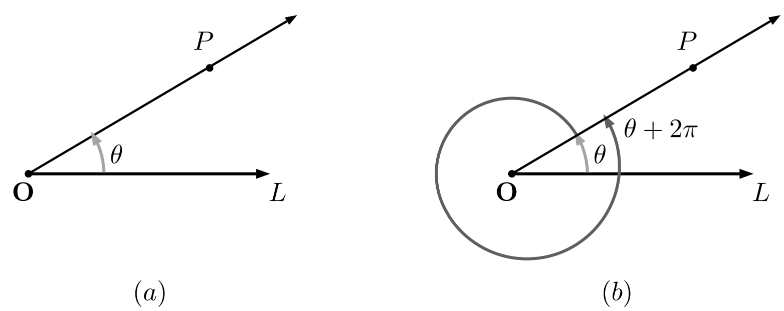



Figura 1.4: Si $\theta$ es *el* valor que satisface la desigualdad $0 \leq \theta < 2\pi$ y que mide el ángulo dirigido formado por el eje polar y la semirecta que parte de **O** y pasa por $P$ (figura $(a)$), $\theta + 2\pi$ es otro valor que sirve para medir al mismo ángulo dirigido (figura $(b)$).

Con relación al número $\theta$ del párrafo anterior, es un hecho conocido que si a éste le sumamos un múltiplo entero de $2\pi$ entonces $\varphi = \theta + 2\pi k$ (con $k \in \mathbb{Z}$) también es un número que nos sirve para medir (en radianes) el ángulo dirigido formado por el eje polar y la semirecta que pasa por $P$ (ver figura 1.4 $(b)$).

De hecho, nótese que estos son todos los posibles números que sirven para medir a dicho ángulo, y si los "marcamos" en la recta real, forman un conjunto discreto de puntos que tienen la particularidad de que la distancia entre cualesquiera dos de ellos es un múltiplo entero de $2\pi$.

Esta característica tendrá especial importancia puesto que de ella se deduce que en cualquier intervalo de la forma $[y_0, y_0 + 2\pi)$, con $y_0$ cualquier número real, existe una única $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta + 2\pi k \in [y_0, y_0 + 2\pi)$; es decir, en cualquier intervalo semiabierto (o semicerrado) de longitud $2\pi$, existe un único valor que representa al ángulo dirigido determinado por $P$.

Entre otras cosas, esta propiedad nos dice que el número $\theta$ no tiene ninguna importancia particular (salvo que es el único número en el intervalo $[0, 2\pi)$ que sirve para medir al ángulo dirigido determinado por $P$).

Nos hemos detenido a explicar con detalle este asunto del ángulo dirigido determinado por un punto $P$ (y todos sus posibles valores), debido a que sobre dicho ángulo descansa un concepto muy importante: el concepto de *argumento* de un número complejo $z$ diferente de cero.

Dado un número complejo $z \neq 0$, por *un argumento* de $z$ entenderemos a uno de los valores $\varphi = \theta + 2\pi k$ (con $\theta \in [0, 2\pi)$ y $k \in \mathbb{Z}$) del ángulo dirigido determinado por $z$.

Aun cuando puede resultar un poco incómodo tener más de un argumento para un número complejo $z \neq 0$, quede el consuelo de que basta conocer a uno de ellos para conocer a todos los restantes, puesto que si $\varphi$ es uno de sus argumentos, todos los demás se escriben de la forma $\varphi + 2\pi k$, variando $k \in \mathbb{Z}$. *A fin de evitar ambigüedades, (y a menos que se mencione lo contrario), cuando digamos que $\theta$ es el argumento de $z$ (o escribamos que $\theta = \arg(z)$), nos estaremos refiriendo a que $\theta$ es el único argumento de $z$ que se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi)$.*

Con relación a las coordenadas polares $(r, \theta)$ de un punto $P$ del plano, también se conoce la forma en que las coordenadas cartesianas $(x, y)$ del mismo punto se pueden "recuperar" a partir de las primeras (claro, si el polo conicide con el origen, y el eje polar coincide con la parte positiva del eje de las $x's$). Sabemos que la forma de recuperar estas coordenadas está dada por las siguientes ecuaciones:

$$x = r\cos(\theta) \qquad \text{y} \qquad y = r\,\text{sen}(\theta)$$

y también sabemos que los valores de $x$ y $y$ no cambian aun cuando en lugar de $\theta$ tomemos cualquiera de sus otros posibles valores ($\theta + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$) puesto que las funciones seno y coseno son funciones de periodo $2\pi$.

De esta forma, si $z = x + iy$ es un número complejo que identificamos con el punto $P$ del plano que tiene coordenadas cartesianas $(x, y)$, y $(r, \theta)$ son *unas* coordenadas polares para dicho punto, tenemos que $z$ también se puede escribir como $z = r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta))$. Esta otra manera de escribir a $z$ se conoce como la *forma polar* del complejo $z$.

**Observación 1.6** *Nótese que en la forma polar de un número complejo $z$, el número $\theta$ puede ser cualquier argumento de $z$, y que en cualquier intervalo de la forma $[y_0, y_0 + 2\pi)$, con $y_0$ cualquier número real, siempre podemos encontrar uno (¡y sólo uno!) de estos argumentos. También observe que el número $r$ que aparece en esta forma de escribir a $z$ cumple con la identidad $r = |z|$.*

Hemos hecho este largo recorrido para llegar a la forma polar de un número complejo con el fin de interpretar (o realizar) geométricamente la operación producto de estos números, con la ventaja adicional de que en dicho recorrido introdujimos el importante concepto de argumento de un número complejo.

Regresando al producto, supongamos que $z, w \in \mathbb{C}$ son dos números complejos cuya representación polar está dada por

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i\,\text{sen}(\theta)) \\ w &= r'(\cos(\varphi) + i\,\text{sen}(\varphi)) \end{aligned}$$

con $\theta, \varphi \in [-\pi, \pi)$, es decir que $\theta = \arg(z)$ y $\varphi = \arg(w)$. Realizando el producto $zw$, obtenemos que

$$zw = rr'[(\cos(\theta)\cos(\varphi) - \text{sen}(\theta)\,\text{sen}(\varphi)) + i(\cos(\theta)\,\text{sen}(\varphi) + \cos(\varphi)\,\text{sen}(\theta))]$$

de modo que, si aplicamos las fórmulas para el seno y el coseno de una suma, obtenemos que

$$zw = rr'(\cos(\theta + \varphi) + i\,\text{sen}(\theta + \varphi))$$

La identidad anterior nos da justo la representación polar del producto $zw$ y de ésta deducimos que $|zw| = rr' = |z|\,|w|$ (lo cual ya sabíamos) y que

$$\begin{aligned} \arg(zw) &= \theta + \varphi \\ &= \arg(z) + \arg(w) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Esta última identidad es muy útil para los fines de obtener geométricamente el producto $zw$. Observe que de ella se deduce que $zw$ debe de ser un punto que está sobre la semirecta que forma un ángulo $\theta + \varphi$ (que se puede construir a partir de la semirecta que pasa por $z$ sumándole un ángulo $\varphi$). Una vez que se tiene dicha semirecta, basta con encontrar el punto sobre ella que diste del origen $rr'$ (que se puede hacer construyendo triángulos semejantes, como se indica en la figura 1.5) con lo cual habremos obtenido el punto que representa a $zw$.

Note que, si $z$ es un complejo de módulo 1 (es decir, que $r = 1$), entonces $zw$ no es más que el punto (o el vector) que se obtiene de rotar al punto (o el vector) $w$ un ángulo $\theta$.

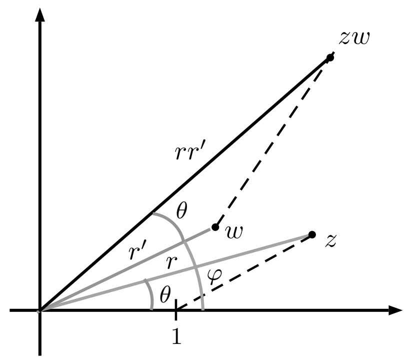


Figura 1.5: Representación geométrica del producto de los números complejos $z = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $w = r'(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))$.

Una vez dicho y hecho todo lo anterior, tenemos que confesar un abuso que hemos cometido y que es importante señalar (abuso que, afortunadamente, no modifica la interpretación geométrica dada).

Observe que la primera identidad de 1.7 no es necesariamente cierta puesto que no podemos asegurar que $\theta + \varphi \in [-\pi, \pi)$. Esto no quiere decir que $\theta + \varphi$ no sea un argumento de $zw$ (ciertamente sí lo es, por lo que nuestra construcción geométrica es correcta); lo único que estamos diciendo es que no es necesariamente *el argumento* de $zw$ que pertenece al intervalo $[-\pi, \pi)$.

Es claro que esta situación se presenta para cualquier elección que hagamos del argumento de $z$ y $w$; es decir, si $\theta$ y $\varphi$ son argumentos de $z$ y $w$, respectivamente, que pertenecen a un intervalo de la forma $[y_0, y_0 + 2\pi)$, no necesariamente $\theta + \varphi$ pertenece al mismo intervalo.

En compensación a la no necesaria veracidad de la identidad 1.7 podemos establecer la siguiente: si denotamos por $Arg(z)$ al conjunto de todos los posibles argumentos de un número complejo $z$ (de los cuales existen tantos como números enteros), entonces se debe cumplir que

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w) \tag{1.8}$$

Observe que esta identidad establece que cualquier argumento de $z$ sumado con cualquier otro argumento de $w$ (no necesariamente en el mismo intervalo) nos da un argumento de $zw$; y recíprocamente, cualquier argumento de $zw$ se puede escribir como la suma de un argumento de $z$ con un argumento de $w$ (claro, no necesariamente ambos en el mismo intervalo, y no de forma única). Se deja al lector la prueba de la identidad 1.8.

## 1.5. Raíces *n-ésimas*

Otras de las "operaciones" que con frecuencia se realizan con los números reales son las de extraer la raíz cuadrada, la raíz cúbica, o en general la raíz *n-ésima* (con $n \in \mathbb{N}$) de un número $y \in \mathbb{R}$, entendiendo por esto el encontrar un número $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^n = y$.

Como se recordará, la extracción de la raíz cuadrada (o de cualquier otra raíz par) tiene dos características importantes: primera, que está restringida a los números positivos (restricción que como ya mencionamos está relacionada con la "invención" del número $i$), y segunda, sólo existen dos soluciones (fácilmente distinguibles): una positiva y otra negativa. Como también se recordará, la extracción de raíces impares se puede hacer para cualquier número real y sólo hay una solución.

La extracción de *raíces $n$-ésimas* es un problema que también se puede plantear en los números complejos y su formulación es exactamente la misma: dado $b \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ encontrar los $a \in \mathbb{C}$ tales que $a^n = b$. Pues bien, es en este problema en donde la representación polar resulta ser una herramienta muy útil.

Primero observe que, si $a = r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a^n = r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) \tag{1.9}$$

Más aun, si $r \neq 0$ nótese que el complejo $r^{-1}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$ multiplicado por $a$ nos da 1, de tal forma que

$$1/a = a^{-1} = r^{-1}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

por lo que la identidad 1.9 permanece válida para toda $n \in \mathbb{Z}$. Si en 1.9 hacemos $r = 1$, obtenemos la identidad

$$(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)$$

conocida como la *fórmula de Moivre*[2] la cual es muy útil para obtener expresiones de $\cos(n\theta)$ y $\mathrm{sen}(n\theta)$ en términos de $\cos(\theta)$ y $\mathrm{sen}(\theta)$.

Ahora bien, si $b$ es un número complejo distinto de cero y $n \in \mathbb{N}$, deseamos encontrar $a$ tal que

$$a^n = b \tag{1.10}$$

(¿cuál es *la* solución para el caso $b = 0$?). Si $a$ y $b$ tienen representaciones polares de la forma $r(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$ y $\rho(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))$, respectivamente, la ecuación 1.10 toma la forma

$$r^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) = \rho(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))$$

de la que se obtienen las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{aligned} r^n &= \rho \\ n\theta &= \varphi \end{aligned} \tag{1.11}$$

por lo que una solución a nuestro problema está dada por $a = \rho^{1/n}(\cos(\varphi/n) + i\,\mathrm{sen}(\varphi/n))$.

Llegados a este punto, vale la pena recordar que en la representación polar de $b$, en el lugar de $\varphi$ también podemos usar todos los números de la forma $\varphi + 2\pi k$, con $k \in \mathbb{Z}$, de tal manera que la segunda ecuación de 1.11 queda como

$$n\theta = \varphi + 2\pi k$$

por lo que entonces los números

$$a_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \tag{1.12}$$

también son soluciones de 1.10. Observe que en la ecuación anterior si tomamos $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, entonces se obtienen todos los posibles números (diferentes) que se pueden conseguir cuando variamos $k \in \mathbb{Z}$. En efecto, si $k$ y $k'$ son cualesquiera dos enteros que difieren por un múltiplo entero de $n$, es decir que

$$k - k' = mn$$

con $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) - \left(\frac{\varphi}{n} + k'\frac{2\pi}{n}\right) &= (k - k')\frac{2\pi}{n} \\ &= (mn)\frac{2\pi}{n} \\ &= 2\pi m \end{aligned}$$

[2]Abraham de Moivre (26 de mayo de 1667, Champagne - 27 de noviembre de 1754, Londres) fue un matemático francés, conocido por su fórmula epónima, por sus aportaciones a la teoría de la probabilidad y porque predijo la fecha de su muerte a través de un cálculo estadístico. (Fuente: Wikipedia).

de modo que

$$\begin{aligned}
a_k &= \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right)\\
&= \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k'\frac{2\pi}{n}+2\pi m\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+k'\frac{2\pi}{n}+2\pi m\right)\right)\\
&= \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}+k'\frac{2\pi}{n}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi}{n}+k'\frac{2\pi}{n}\right)\right)\\
&= a_{k'}
\end{aligned}$$

Por lo anterior, concluimos que si $k$ y $k'$ difieren por un múltiplo entero de $n$, entonces $\frac{\varphi}{n}+k\frac{2\pi}{n}$ y $\frac{\varphi}{n}+k'\frac{2\pi}{n}$ son valores diferentes del argumento de la misma solución de la ecuación 1.10.

Así, *todas* las soluciones de 1.10 están dadas por 1.12 tomando $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ (o en cualquier otro subconjunto de $\mathbb{Z}$ formado por $n$ números consecutivos, o que no sean congruentes módulo $n$). Nótese que todas tienen el mismo módulo y que cualesquiera dos consecutivas difieren por un ángulo de tamaño $\frac{2\pi}{n}$, por lo que geométricamente representan los vértices de un polígono regular de $n$ lados (ver figura 1.6 $(a)$).

En el caso en que $b=1$ a dichas soluciones se les conoce como las *raíces de la unidad*. En este caso, si hacemos

$$\xi=\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

entonces todas las soluciones de la ecuación $a^n=1$ están dadas por $1,\xi,\xi^2,\ldots,\xi^{n-1}$ (ver figura 1.6 $(b)$). Observe que, si $\zeta$ es una solución de 1.10, entonces $\zeta,\zeta\xi,\zeta\xi^2,\ldots,\zeta\xi^{n-1}$ son todas las soluciones de la misma ecuación.

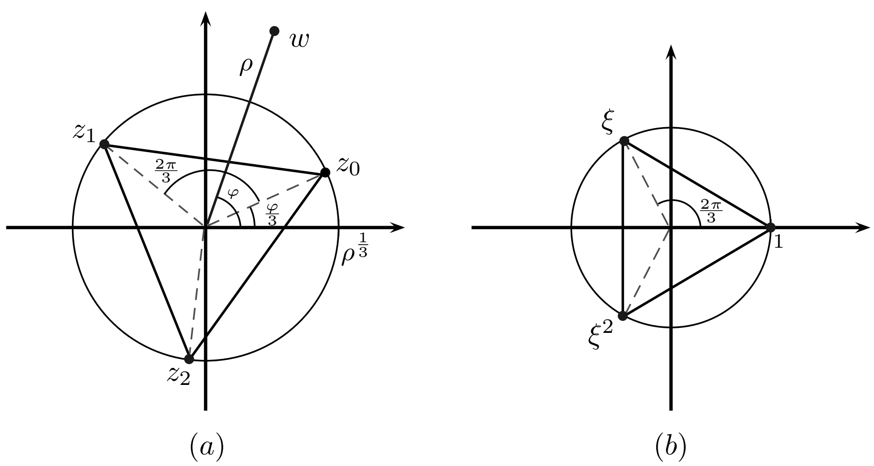



Figura 1.6: Las raíces cúbicas de $w=\rho(\cos(\varphi)+i\operatorname{sen}(\varphi))$ $(a)$, y las raíces cúbicas de la unidad $(b)$.

Ya que hablamos de raíces, es importante recordar que la extracción de la raíz $n$-ésima de un número real $y$ está relacionado con lo que significa exponenciar este número $y$ a la cantidad $1/n$.

De hecho, como se recordará, si $x$ es un número real tal que $x^n=y$ entonces escribimos que $x=y^{1/n}$, aunque esta expresión presenta algunos problemas cuando $n$ es par, ya que la solución a la ecuación $x^n=y$ no es única (o no existe si $y<0$).

Pero incluso en el caso en que $n$ es par, basta con definir la exponenciación de un número $y$ a la cantidad $1/n$ sólo si $y\geq 0$ y convenir en que $y^{1/n}$ representa al único número real positivo que elevado a la $n$ es igual a $y$.

Como se podrá notar, para el caso de los números complejos definir la exponenciación de un número $w\neq 0$ a la cantidad $1/n$ se vuelve un poco complicado en la medida de que los números $z$ que satisfacen la ecuación $z^n=w$, sin importar la paridad de $n$, siempre serán exactamente $n$ (diferentes).

De esta forma, si $n \geq 2$, la expresión $w^{1/n}$ podrá tomar varios valores diferentes (en este caso exactamente $n$) por lo que se suele decir que dicha expresión es *multivaluada*. De manera más específica, la expresión $w^{1/n}$ denotará al conjunto de las raíces $n$-ésimas de $w$, es decir que

$$w^{1/n} := \{a \in \mathbb{C} \mid a^n = w\}.$$

Esta discusión la tendremos que recordar más adelante cuando intentemos definir lo que significa hablar de la función raíz cuadrada (o raíz cúbica o raíz $n$-ésima en general).

Y ya que llegamos a este punto, podemos entonces añadir lo que significará para nosotros la expresión $w^{p/q}$ en donde $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q > 0$:

$$w^{p/q} := \left\{a^p \in \mathbb{C} \mid a \in w^{1/q}\right\}.$$

Por ahora quedará pendiente definir lo que significa exponenciar un número complejo a una cantidad real, o más aun, lo que significará ¡elevar un número complejo a otro número complejo! (por ejemplo: $i^i$). Para ello, como en el caso real, será necesario definir primero una función exponencial y *sus* correspondientes inversas (a las que llamaremos “*ramas del logaritmo*”).

## 1.6. La representación esférica

Más adelante, cuando analicemos las funciones entre conjuntos de números complejos, será de particular interés saber cuál es el comportamiento de estas funciones cuando las evaluamos en puntos muy alejados del origen. El objetivo de esta sección es la de establecer los conceptos y notaciones necesarias para llevar a cabo este análisis.

En el caso de los números reales hay esencialmente dos formas de elegir números muy alejados del origen (el cero): o negativos muy grandes o positivos muy grandes. Estas dos formas de alejarse del origen se expresan usando dos símbolos nuevos: $\infty$ y $-\infty$.

Así, cuando queremos decir que una variable $x$ está tomando valores positivos cada vez más alejados del origen, decimos que la variable tiende a $\infty$ (lo cual sintetizamos escribiendo “$x \to \infty$”), y si queremos decir que $x$ está tomando valores negativos cada vez más alejados del origen, decimos que la variable tiende a $-\infty$ (lo cual sintetizamos escribiendo “$x \to -\infty$”).

Esto no quiere decir que $\infty$ y $-\infty$ sean dos nuevos números reales, aunque cuando estos símbolos se le agregan a $\mathbb{R}$, al nuevo conjunto se le conoce como los reales extendidos y se denota por $\mathbb{R}^*$. No hay una forma de extender la aritmética de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^*$ de tal forma que sigan cumpliéndose las propiedades básicas de las operaciones de la suma y el producto, aunque suele convenirse en que: si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \pm \infty = \pm\infty$; si $x > 0$ entonces $\pm\infty \cdot x = \pm\infty$, y si $x < 0$ entonces $\pm\infty \cdot x = \mp\infty$; si $x \neq 0$ entonces $x / \pm \infty = 0$.

También se suele convenir que, si $x > 0$ entonces $x/0 = \infty$ y si $x < 0$ entonces $x/0 = -\infty$. Lo que no es posible convenir, sin caer en difíciles inconsistencias, es el significado de $\pm\infty \cdot 0, \pm\infty/0, 0/\pm\infty, \pm\infty/\pm\infty$ y $\pm\infty \mp \infty$ (por supuesto que tiene sentido establecer que $\infty + \infty = \infty, -\infty - \infty = -\infty, \pm\infty \cdot \pm\infty = \infty$ y $\pm\infty \cdot \mp\infty = -\infty$).

Toda esta (al parecer exagerada) revisión de los reales extendidos tiene como objetivo definir el concepto análogo para los números complejos. La gran diferencia con el caso real es que hay muchas formas diferentes de “alejarse del origen”: por ejemplo, cualquier recta en el plano complejo que pase por el origen ofrece cuando menos dos maneras esencialmente distintas de hacer esto (ver figura 1.7).

Ante esta diversidad de formas (y como el lector estará de acuerdo), no es posible inventar un símbolo distinto por cada una de ellas. Lo que sí sucede en todos los casos anteriores (o con cualquier otra forma de “alejarse del origen”), es que $|z|$ es un número real positivo cada vez más grande, es decir que $|z| \to \infty$.

Por las razones anteriores, en el caso de los números complejos sólo hablaremos de un infinito y diremos que “$z$ tiende a infinito” (en cuyo caso escribiremos que “$z \to \infty$”) si $|z| \to \infty$. Como en el caso real, $\infty$ no es otro número complejo, aunque cuando este símbolo se lo agregamos a $\mathbb{C}$, obtenemos lo que llamaremos los *complejos extendidos*.

Este conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ lo denotaremos por $\mathbb{C}^*$ y, como sucede para los números reales, no es posible extender la aritmética de $\mathbb{C}$ sin caer, nuevamente, en ineludibles inconsistencias.

Sin embargo, como en el caso de los reales extendidos, se conviene en que, si $z \in \mathbb{C}$ entonces $z + \infty = \infty$ y si $z \neq 0$, entonces $z \cdot \infty = \infty$ y $z/\infty = 0$. Análogamente, no es posible dar sentido “consistente” a expresiones

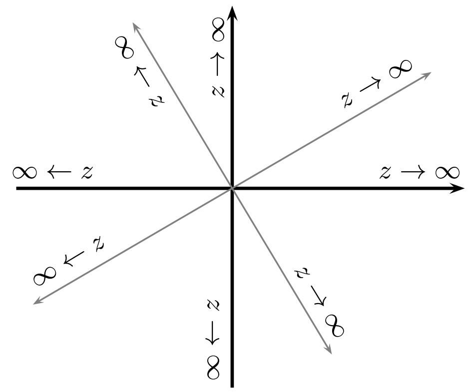



Figura 1.7: Si $z$ se "aleja" del origen (es decir, si $|z| \to \infty$), decimos que "$z$ tiende a infinito" ($z \to \infty$).

tales como $0 \cdot \infty$, $0/\infty$, $\infty/0$, $\infty/\infty$ e incluso la identidad $\infty + \infty = \infty$ ya no siempre es aceptable (aunque $\infty \cdot \infty = \infty$ si lo es).

En una sección previa habíamos visto que los números complejos se pueden representar geométricamente como los puntos del plano. Desafortunadamente en esta representación no hay forma de asignarle algún punto a $\infty$ por lo que el plano ya no es una representación geométrica de los complejos extendidos.

Afortunadamente, los puntos del plano se pueden hacer corresponder con los puntos de una esfera menos un punto, por lo que una esfera completa será una buena representación geométrica de $\mathbb{C}^*$. El método para lograr esta correspondencia se concoce como *proyección estereográfica* y nuestro siguiente objetivo es describirlo.

Considérese a $S \subset \mathbb{R}^3$, la esfera unitaria con centro en el origen. Como se puede observar en la figura 1.8, cualquier semirecta que parte del punto $(0, 0, 1)$ (que de aquí en adelante denotaremos por la letra $N$ y llamaremos el polo norte) y que pasa por algún otro punto de la esfera $S$, interseca al plano $XY$ en un solo punto.

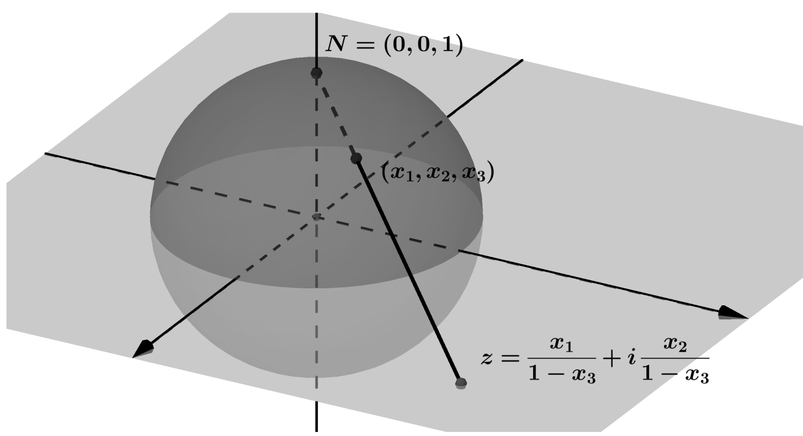



Figura 1.8: Bajo la proyección estereográfica, al punto de la esfera unitaria $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) = N$ le corresponde el complejo $z = \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3}$.

Esta correspondencia (descrita por ahora en forma geométrica) es lo que se conoce como la proyección estereográfica de los puntos de la esfera $S$ (distintos de $N$) en el plano $XY$. Observese que $N$ no se corresponde con ningún punto del plano, por lo que dicho punto es nuestro candidato para representar a $\infty$.

A fin de calcular una expresión para esta proyección, sea $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{(0, 0, 1)\}$. Entonces, los puntos de la forma

$$(0, 0, 1) + t(x_1, x_2, x_3 - 1) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)), \qquad t \in \mathbb{R} \tag{1.13}$$

representan a los puntos de la recta que pasa por $N$ y por $(x_1, x_2, x_3)$. Así, el punto en que dicha recta interseca al plano $XY$ es aquel para el cual

$$1 + t(x_3 - 1) = 0$$

de donde obtenemos que

$$t = \frac{1}{1 - x_3}$$

(recuerdese que $x_3 \neq 1$ puesto que $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1)$). Si sustituimos este valor de $t$ en 1.13 tenemos que

$$\left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

es el punto del plano $XY$ que se corresponde con el punto $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{(0, 0, 1)\}$.

En términos de números complejos, podemos establecer que la proyección estereográfica asocia al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S \setminus \{(0, 0, 1)$ el complejo

$$z = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}. \tag{1.14}$$

Con base en la proyección estereográfica podemos definir una función $E$ de la esfera completa $S$ en $\mathbb{C}^*$, de la siguiente forma

$$E(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \\ \\ \infty & \text{si } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \end{cases} \tag{1.15}$$

La función $E$ es una biyección entre $S$ y $\mathbb{C}^*$. Para probar esto, obsérvese que de la expresión 1.14, se tiene que

$$\begin{aligned} |z|^2 &= \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} \\ &= \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} \\ &= \frac{1 + x_3}{1 - x_3} \end{aligned}$$

de tal forma que tomando la última identidad, despejamos $x_3$, obtenemos que

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \tag{1.16}$$

y por lo tanto

$$1 - x_3 = \frac{2}{|z|^2 + 1}$$

Por otra parte, de la misma expresión 1.14 se tiene que

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - x_3)(z + \bar{z}) = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}$$

y

$$x_2 = \frac{1}{2i}(1 - x_3)(z - \bar{z}) = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}$$

de modo que de éstas dos últimas identidades, junto con la expresión 1.16, obtenemos la expresión inversa de la proyección estereográfica y que $E^{-1} : \mathbb{C}^* \to S$ estaría dada por

$$E^{-1}(z) = \begin{cases} \left( \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right) & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \\ (0, 0, 1) & \text{si } z = \infty \end{cases} \tag{1.17}$$

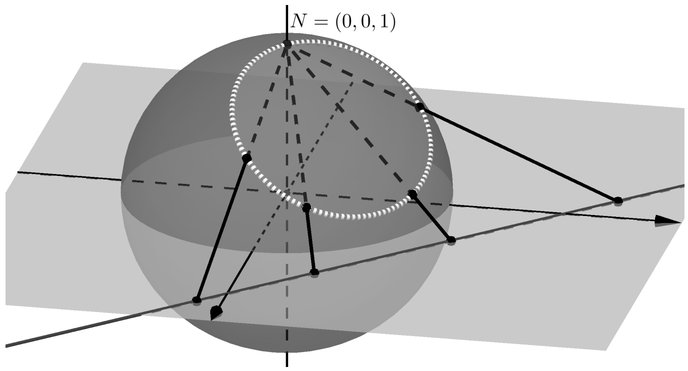



Figura 1.9: Bajo la proyección estereográfica, cualquier circunferencia que pasa por el polo norte $N = (0, 0, 1)$ se proyecta sobre una recta en el plano.

Así, la proyección estereográfica es una biyección entre la esfera $S$ menos el polo norte $N$, y el plano $XY$. Un hecho geométrico muy evidente de esta biyección es que un círculo de la esfera que pasa por el polo norte $N$ se transforma en una recta del plano $XY$, y recíprocamente (ver figura 1.9).

Aunque menos evidente, también se tiene que un círculo de la esfera que *no pasa* por $N$ se corresponde, bajo esta transformación, con un círculo del plano $XY$.

Para probar estas afirmaciones, obsérvese que cualquier circunferencia sobre la esfera $S$ se obtiene como la intersección de este conjunto con un plano cuya ecuación se puede escribir de la forma

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D$$

en donde $0 \leq D < 1$ y $A^2 + B^2 + C^2 = 1$. Si sustituimos en esta ecuación las expresiones que obtuvimos para $x_1, x_2$ y $x_3$ en términos de $z$, tenemos que

$$A(z + \bar{z}) - Bi(z - \bar{z}) + C(|z|^2 - 1) = D(|z|^2 + 1)$$

y si escribimos $z = x + iy$, esta ecuación toma la forma

$$2Ax + 2By + C(x^2 + y^2 - 1) = D(x^2 + y^2 + 1)$$

o, equivalentemente

$$(C - D)(x^2 + y^2) + 2Ax + 2By = C + D \tag{1.18}$$

Nótese que, si $C = D$ (que es justo el caso en que la circunferencia que estamos considerando pasaría por el polo norte $N$), entonces la ecuación 1.18, como habíamos mencionado, representa una recta; y si $C \neq D$ (que es justo el caso en que la circunferencia que estamos considerando no pasaría por el polo norte $N$), entonces esta misma ecuación representa una circunferencia en el plano $XY$.

De lo anterior se concluye que, bajo la proyección estereográfica, las rectas y círculos en el plano $\mathbb{C}$ se corresponden con las circunferencias de la esfera $S$; cada recta en $\mathbb{C}$ se corresponde con una circunferencia que pasa por el polo norte, y cada circunferencia en $\mathbb{C}$ con una circunferencia en $S$ que no pasa por el polo norte.

## 1.7. La topología de $\mathbb{C}$

En virtud de que el conjunto de los números complejos cuenta con el concepto de valor absoluto (o norma o módulo), y que con base en éste podemos medir la distancia entre números complejos, esto nos permitirá definir ciertos conceptos "topológicos" en $\mathbb{C}$.

De hecho, si observamos que el valor absoluto de $z = x + iy$ coincide con la norma del punto (o vector) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es decir que

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$$

la vecindad de radio $r > 0$ de un complejo $z_0 = x_0 + iy_0$ definida como

$$B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < r\}$$

coincide con la vecindad de radio $r > 0$ del punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ que está definida como

$$B_r(x_0, y_0) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r\right\}$$

De esta forma, si $A \subset \mathbb{C}$ (en cuyo caso, dada la identificación que hemos establecido entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, también podemos pensar que $A \subset \mathbb{R}^2$ ), los conceptos de punto interior de $A$, punto frontera de $A$, punto exterior de $A$, y punto de acumulación de $A$, serán exactamente los mismos que definimos si pensamos que $A \subset \mathbb{R}^2$, y por esta razón, los conjuntos $\mathrm{int}(A)$, $\mathrm{ext}(A)$, $\mathrm{Fr}(A)$, $A'$ y $\bar{A}$ serán los mismos.

Y justo por lo anterior, decir que un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, cerrado, conexo o compacto, será equivalente a decir que dicho conjunto es abierto, cerrado, conexo o compacto (respectivamente) si vemos a $A$ como un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Por todo lo anterior, todos los resultados topológicos conocidos de $\mathbb{R}^2$ serán trasladados y tomados por válidos en $\mathbb{C}$ sin mayor prueba o justificación.

## 1.8. La topología de $\mathbb{C}^*$

Si bien es cierto que la estructura aritmética de $\mathbb{C}$ no se puede extender a $\mathbb{C}^*$, con base en la identificación de este conjunto con la esfera unitaria $S \subset \mathbb{R}^3$ (dada por la función $E^{-1}$ definida en 1.17) y la distancia euclideana (de $\mathbb{R}^3$), podemos definir una distancia $d^*$ en $\mathbb{C}^*$ de la siguiente forma: si $z, w \in \mathbb{C}$, como

$$E^{-1}(z) = \left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) = (x_1, x_2, x_3) \in S$$

y

$$E^{-1}(w) = \left(\frac{w + \bar{w}}{|w|^2 + 1}, \frac{w - \bar{w}}{i(|w|^2 + 1)}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1}\right) = (y_1, y_2, y_3) \in S$$

definimos

$$\begin{aligned}
d^*(z, w) &= \left\|E^{-1}(z) - E^{-1}(w)\right\| \\
&= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \\
&= \sqrt{2 - 2(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)} \\
&= \sqrt{2 - 2\frac{\left(|z|^2 + 1\right)\left(|w|^2 + 1\right) - 2|z - w|^2}{\left(|z|^2 + 1\right)\left(|w|^2 + 1\right)}} \\
&= \frac{2|z - w|}{\sqrt{\left(|z|^2 + 1\right)\left(|w|^2 + 1\right)}}.
\end{aligned}$$

Y si $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$\begin{aligned}
d^*(z, \infty) &= \left\|E^{-1}(z) - E^{-1}(\infty)\right\| \\
&= \sqrt{\left(\frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}\right)^2 + \left(\frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} - 1\right)^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{|z|^2 + 1}}
\end{aligned}$$

Con base en esta distancia, las "bolas" abiertas definidas como

$$B_r^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C}^* \mid d^*(z, z_0) < r\} \subset \mathbb{C}^*$$

son como se muestran en las siguientes figuras:

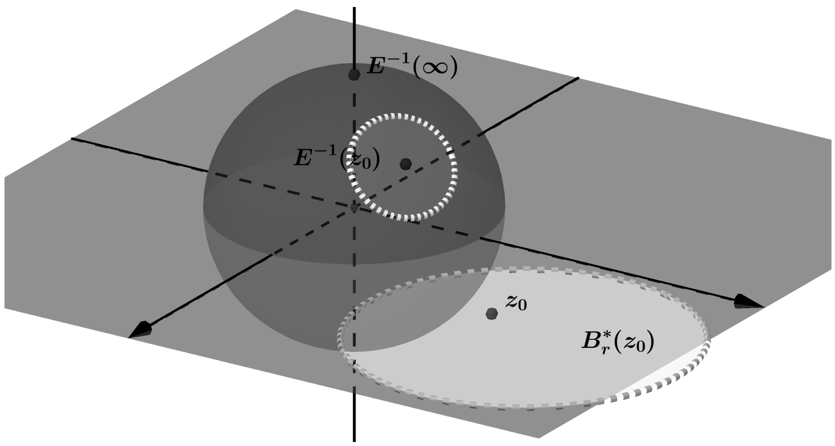



Figura 1.10: Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r < d^*(z_0, \infty)$, entonces $B_r^*(z_0) \subset \mathbb{C}$ y es igual a un círculo (cuyo centro no es $z_0$) que contiene a $z_0$.

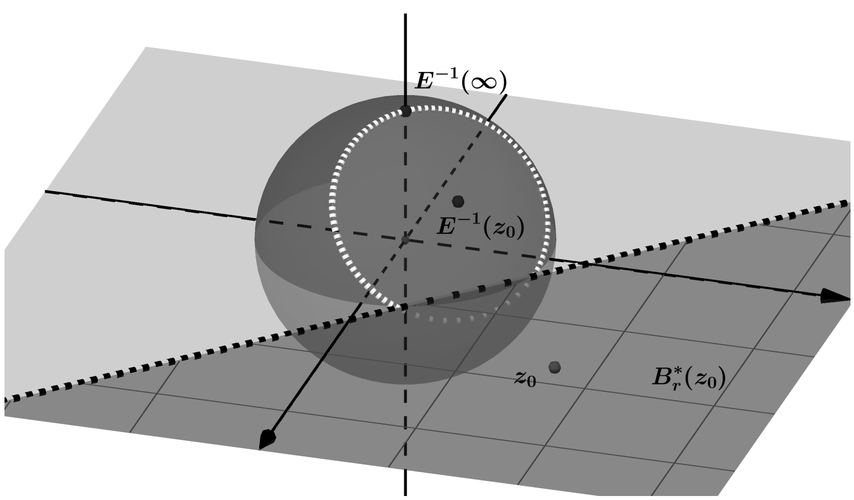



Figura 1.11: Si $d^*(z_0, \infty) = r$, entonces $B_r^*(z_0) \subset \mathbb{C}$ y es igual a un semiplano que contiene a $z_0$.

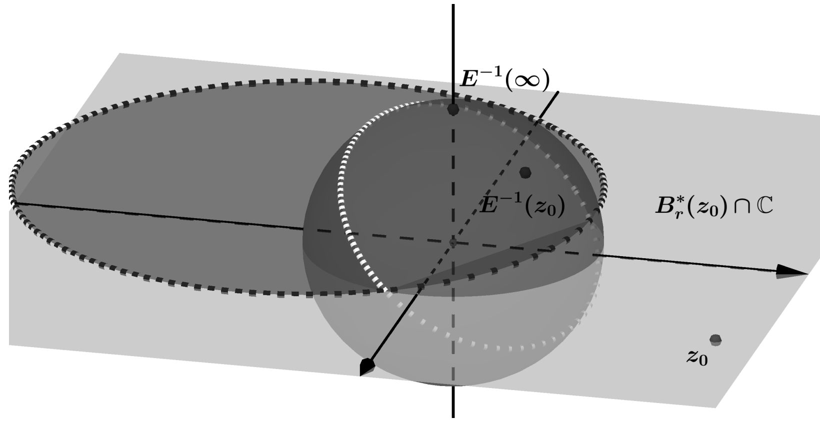



Figura 1.12: si $d^*(z_0, \infty) < r$, entonces $\infty \in B_r^*(z_0)$ y $B_r^*(z_0) \cap \mathbb{C}$ es igual al complemento de un círculo cerrado que no contiene a $z_0$.

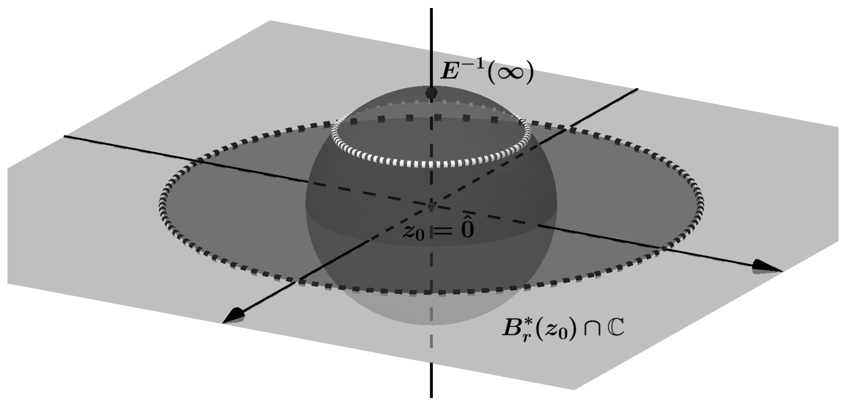



Figura 1.13: Si $z_0 = \infty$, las "bolas"abiertas $B_r^*(\infty) \subset \mathbb{C}^*$ son tales que $B_r^*(\infty) \cap \mathbb{C}$ es igual al complemento de un círculo (cerrado) con centro en el origen ($\hat{0}$).

Una vez que hicimos estas observaciones se puede demostrar (ver problema 30) que si $U^* \subset \mathbb{C}^*$ es un conjunto abierto (de acuerdo con la métrica $d^*$ definida en $\mathbb{C}^*$), entonces $U = U^* \cap \mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. Recíprocamente, si $U \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto (de acuerdo con la métrica usual de $\mathbb{C}$), entonces existe $U^* \subset \mathbb{C}^*$ abierto tal que $U = U^* \cap \mathbb{C}$. Estos hechos resultarán ser muy importantes más adelante, cuando analicemos los conceptos de límite y continuidad de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

## 1.9. Sucesiones y series de números complejos

La inclusión de esta brevísima sección sólo tiene como objetivo aclarar que los conceptos de sucesión y serie de números complejos son completamente análogos a sus correspondientes de números reales. Por esta razón, no nos tomaremos el tiempo ni el espacio para formular definiciones o proposiciones relacionados con estos conceptos.

Asimismo, tampoco estableceremos ni formularemos resultados que relacionan a las sucesiones con conceptos topológicos, ni con conceptos o proposiciones concernientes a funciones, tales como los conceptos de límite y continuidad. Todos ellos se darán por conocidos y probados en virtud de su completa analogía con el caso real.

## 1.10. Problemas

1. Pruebe que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un campo.

2. Pruebe las propocisiones 1.3 y 1.5.

3. Pruebe que, si solo "incluimos" al número $i$ al conjunto de los números reales, entonces toda ecuación de segundo grado con coeficientes reales y discriminante negativo, también tiene dos soluciones diferentes.

4. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, pruebe que los números $a + \sqrt{a^2 + b^2}$ y $-a + \sqrt{a^2 + b^2}$ siempre son mayores o iguales a cero.

5. ¿Cuáles son los números complejos $z$ tales que $z^2 = i$? ¿Y cuáles son los que $z^2 = -i$?

6. Encontrar los valores de
$$(1 + i)^n + (1 - i)^n$$
para cada $n \in \mathbb{N}$.

7. Resolver la ecuación cuadrática
$$z^2 + (\alpha + i\beta)z + (\gamma + i\delta) = 0$$
donde $\alpha, \beta, \gamma$ y $\delta \in \mathbb{R}$.

8. Encontrar las condiciones bajo las cuales la ecuación $az + b\bar{z} + c = 0$ tiene exactamente una solución (y encontrar esa solución) si $a, b, c \in \mathbb{C}$.

9. Pruebe que el conjunto de todas las matrices (de entradas reales) de la forma
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$
combinadas con la suma y el producto usual de matrices, es isomorfo al campo de los números complejos.

10. Si cada pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ la identificamos con el complejo $x + iy$, compruebe que la pareja que resulta del producto de matrices
$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
se corresponde con el complejo que se obtiene de multiplicar
$$(\alpha + i\beta)(x + iy).$$

11. Pruebe que el campo de los números complejos es isomorfo al campo que se obtiene al "dividir" al anillo de todos los polinomios con coeficientes reales por el polinomio irreducible $x^2 + 1$ ($\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$).

12. Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Pruebe que
$$p(x) = (x - z_1) \cdots (x - z_n)(x - \bar{z_1}) \cdots (x - \bar{z_n})$$
es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$.

13. Probar que
$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| = 1$$
si $|a| = 1$ o $|b| = 1$ (y claro, $\bar{a}b \neq 1$).

14. Probar que
$$\left| \frac{a - b}{1 - \bar{a}b} \right| < 1$$
si $|a| < 1$ y $|b| < 1$.

15. Si $|a_i| < 1$, $\lambda_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., n$; y $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$, pruebe que
$$|\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_n a_n| < 1$$

16. Sea $\zeta \neq 1$ una raíz $n$-ésima de la unidad. Pruebe que
$$1 + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0.$$

17. Expresar en forma algebraica (no polar) las raíces quintas y décimas de la unidad.

18. Pruebe la identidad 1.8.

19. Use las raíces cuartas de la unidad para encontrar dos polinomios $x^2 + ax + b$ y $x^2 + cx + d$ tales que
$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$
en donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

20. Dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea
$$A_{\alpha,n} = \{z = r\,(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi/n \text{ y } r > 0\}.$$
Si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pruebe que existe una única $z \in A_{\alpha,n}$ tal que $z^n = w$.

21. Si $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, probar que
$$1 + w^h + w^{2h} + ... + w^{(n-1)h} = 0$$
donde $h$ es un entero no múltiplo de $n \in \mathbb{N}$.

22. Pruebe que, si $a_1$, $a_2$ y $a_3 \in \mathbb{C}$, entonces:
    *a)* $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 a_2 + a_2 + a_3 a_1$ si y sólo si $\frac{a_3 - a_1}{a_2 - a_1} = \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3}$
    *b)* $a_1$, $a_2$ y $a_3$ son los vértices de un triángulo equilátero si y sólo si
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1 a_2 + a_2 + a_3 a_1$$

23. Supóngase que $a$,$b \in \mathbb{C}$ son los vértices de un cuadrado. Exprese a los otros dos vértices en términos de $a$ y $b$ en todos los casos posibles.

24. Sean $p, q \in \mathbb{Z}$, con $p$ y $q$ primos relativos, y $q > 0$. Pruebe que los conjuntos (o expresiones multivaluadas) $(w^p)^{1/q}$ y $(w^{1/q})^p$ son iguales (o toman los mismos valores).

25. Sean $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$. Identifique geométricante los siguientes conjuntos:
    *a)* $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \mid (z - a)/(z - b) \in \mathbb{R}\}$
    *b)* $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \mid (z - a)/(z - b) > 0\}$
    *c)* $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{b\} \mid (z - a)/(z - b) < 0\}$

    Pruebe sus respuestas.

26. Si $a, b$ y $c \in \mathbb{R}$, ¿cuándo $az + b\bar{z} + c = 0$ representa una línea?

27. Encuentra la ecuación de una elipse, una hipérbola y una parábola en forma compleja.

28. Muestre que todos los círculos que pasan por $a$ y $\frac{1}{\bar{a}}$ intersectan al círculo $|z| = 1$ en ángulos rectos.

29. Sean $z, z' \in \mathbb{C}$. Pruebe que $E^{-1}(z') = -E^{-1}(z)$ si y sólo si $\bar{z}z' = -1$.

30. Pruebe que: $U^* \subset \mathbb{C}^*$ es un conjunto abierto si y sólo si existe $U \subset \mathbb{C}$ abierto (con la topología usual de $\mathbb{C}$) tal que $U = U^* \cap \mathbb{C}$.

# Capítulo 2

# Funciones

Una vez que hemos definido y establecido las características más importantes del conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos, lo siguiente que haremos será analizar las funciones definidas sobre algún subconjunto de éste, y cuyos valores también están en los complejos. Muchas de estas funciones requieren de un análisis minucioso, análisis que incluye tanto sus aspectos algebraicos como geométricos, y eso es parte de lo que haremos en este capítulo.

Dado que la gráfica de una función $f$ de los complejos en los complejos es un objeto que no podemos esbozar o visualizar gráficamente, el estudio geométrico de este tipo de funciones se concentrará en el análisis de la imagen bajo $f$ de subconjuntos de $\mathbb{C}$, es decir, conjuntos de la forma

$$f(B) := \{f(z) \in \mathbb{C} \mid z \in B\}$$

en donde $B$ es algún subconjunto de $\mathbb{C}$.

## 2.1. Funciones polinomiales y racionales

Sin duda las funciones polinomiales más sencillas serán las de la forma

$$f(z) = az^n$$

con $a \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, las cuales están definidas para toda $z \in \mathbb{C}$.

Para el caso $n = 1$, la función $f(z) = az$, con $a \neq 0$, es una biyección de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que, de acuerdo con la interpretación geométrica del producto de números complejos, se puede ver como una rotación de $\theta = \arg(a) \in [-\pi, \pi)$ radianes, seguida por una homotecia con factor $|a|$ (o viceversa).

La forma más general de este tipo de funciones es

$$f(z) = a(z - z_0) + w_0$$

la cual traslada el punto $z_0$ en el punto $w_0$. Más adelante, cuando introduzcamos el concepto de derivada, este tipo de funciones jugarán un papel muy importante. Nótese que en particular, si $R$ es una recta que pasa por el punto $z_0$ que forma un ángulo (dirigido) $\alpha$ con el eje real, entonces su imagen bajo la función $f$ ($f(R)$) es una recta que pasa por el punto $w_0$ que forma un ángulo (dirigido) $\alpha + \arg(a)$ con el eje real (ver figura 2.1).

En general, una función polinomial de grado $n \in \mathbb{N}$ en la variable compleja $z$ es una función de la forma

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n$$

en donde $z_0 \in \mathbb{C}$ es fijo (y se suele decir que el polinomio está centrado en $z_0$).

De entre los resultados importantes que se probarán en este texto, está el *teorema fundamental del álgebra*, el cual nos asegura que todo polinomio de grado $n > 0$ tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$, de donde después se deduce que tiene exactamente $n$ raíces, contadas con su multiplicidad.

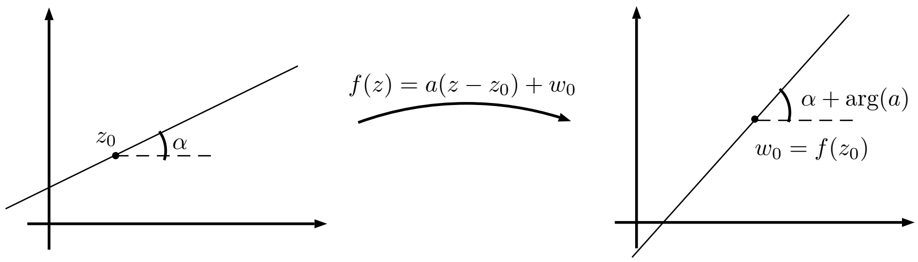



Figura 2.1: La imagen bajo $f$ de una recta que pasa por el punto $z_0$ que forma un ángulo (dirigido) $\alpha$ con el eje real es una recta que pasa por el punto $w_0$ que forma un ángulo (dirigido) $\alpha + \arg(a)$ con el eje real.

Como es de esperarse, las funciones racionales de variable compleja son aquellas que se obtienen al tomar el cociente de dos funciones polinomiales. Es decir, funciones de la forma

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n}{b_0 + b_1(z - w_0) + b_2(z - w_0)^2 + \cdots + b_m(z - w_0)^m}$$

con $n, m \in \mathbb{N}$ y tal que el polinomio denominador no divide al polinomio numerador (en caso contrario, $f$ sería nuevamente una función polinomial). Estas funciones están definidas en casi todo $\mathbb{C}$, salvo por un número finito de números complejos (aquellos en los que el polinomio denominador se anula, es decir, las raíces del polinomio $b_0 + b_1(z - w_0) + b_2(z - w_0)^2 + \cdots + b_m(z - w_0)^m$).

### 2.1.1. Ramas de la raíz $n$-ésima de $z$

Cuando $n \geq 2$, de acuerdo con lo realizado en la sección 1.5 del capítulo 1, la función $f(z) = z^n$ ya no es inyectiva pero sí suprayectiva en $\mathbb{C}$. De hecho, si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tomando $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, las raíces $n$-ésimas del complejo $w$, entonces se tiene que $f(z_i) = w$ para $i \in \{1, \ldots, n\}$, y por lo tanto todas las soluciones de la ecuación $f(z) = w$ son los vértices de un $n-$ágono regular por lo que, para todo $\varphi_i \in Arg(z_i)$ y todo $\varphi_j \in Arg(z_j)$ se tiene que $|\varphi_i - \varphi_j| \geq 2\pi/n$ si $i \neq j$.

Para formalizar la afirmación anterior, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_{\alpha,n} := \{r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \in \mathbb{C} \mid \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi/n \text{ y } r > 0\}.$$

En el problema 20 el lector probará que este conjunto tiene la propiedad de que para cada $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existe una única $z \in A_{\alpha,n}$ tal que $f(z) = w$, lo que significa que la función $f$ es inyectiva en cualquiera de estos conjuntos, además de que $f(A_{\alpha,n}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Como el lector notará también fácilmente, se tiene que $A_{\alpha,n} = A_{\alpha+2\pi,n}$ para toda $\alpha \in \mathbb{R}$, razón por la cual bastará con considerar los conjuntos $A_{\alpha,n}$ para $\alpha \in [0, 2\pi)$. La figura 2.2 muestra uno de estos conjuntos $A_{\alpha,n}$.

Dado que la función $f$ restringida a cada conjunto $A_{\alpha,n}$ es inyectiva, para cada uno de ellos existe la función inversa de $f$ la cual está definida sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (puesto que $f(A_{\alpha,n}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$) y tiene como contradominio al conjunto $A_{\alpha,n}$ (sobre el cual es suprayectiva). Es decir, $f$ restringida al conjunto $A_{\alpha,n}$ (que denotamos por $f_{|A_{\alpha,n}}$) es una biyección entre $A_{\alpha,n}$ y $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, de tal forma que existe su inversa $\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}$.

Con base en la discusión anterior, daremos la definición general de lo que llamaremos una rama de la raíz $n$-ésima de $z$.

**Definición 2.1** *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Decimos que $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una rama de la raíz $n$-ésima de $z$ en $U$ si $g$ tiene la propiedad de que $(g(z))^n = z$ para toda $z \in U$.*

Una vez que tenemos la definición general, veremos que este tipo de ramas se pueden definir en los conjuntos $A_{\alpha,n}$.

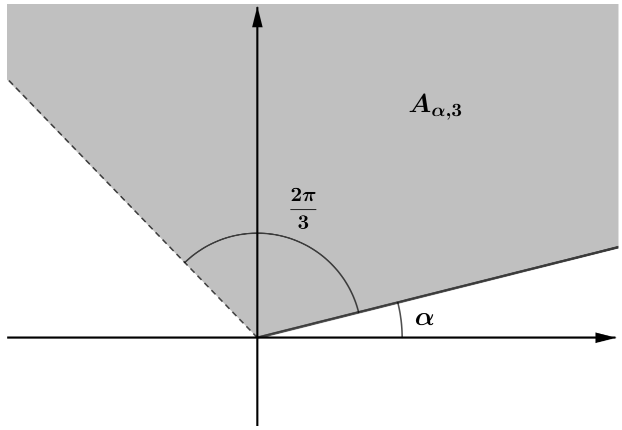



Figura 2.2: La región $A_{\alpha,3}$.

**Definición 2.2** *Sean, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $f(z) = z^n$. A la inversa de la función $f$ restringida al conjunto $A_{\alpha,n}$ ($\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}$) le llamaremos la rama de la raíz n-ésima de $z$ que "cae" en (o que tiene contradominio) $A_{\alpha,n}$.*

*De forma explícita se tiene que, si $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y $\varphi$ es el argumento de $w$ tal que $\varphi \in [n\alpha, n\alpha + 2\pi)$, entonces*

$$\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}(w) = |w|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \in A_{\alpha,n}$$

*ya que $\alpha \leq \varphi/n < 2\pi/n$.*

*A la rama de la raíz n-ésima que tiene como contradominio al conjunto $A_{-\pi/n,n}$ le llamaremos la rama principal de la raíz n-ésima de $z$ y la denotaremos por $\sqrt[n]{z}$.*

**Observación 2.3** *Hay dos observaciones importantes que debemos hacer con relación a estas ramas de la raíz n-ésima de $z$.*

*La primera de ellas es que los conjuntos $A_{\alpha,n}$ tienen la "desventaja" de que si $z, z' \in A_{\alpha,n}$, entonces no necesariamente se tiene que $zz' \in A_{\alpha,n}$. Este hecho tiene una importante consecuencia con relación a las ramas de la raíz n-ésima que podemos expresar de la siguiente forma: si $w, w' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces no necesariamente es cierto que*

$$\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}(ww') = \left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}(w)\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}(w').$$

*Dicho de otra forma y en términos de las ramas de la raíz n-ésima, no necesariamente es cierto que la raíz n-ésima de un producto es el producto de las raíces n-ésimas.*

*La segunda observación tiene que ver con el hecho de que cualquier rama de la raíz n-ésima de $z$ está definida como la función inversa de una función que sólo es inyectiva en algunos subconjuntos de su dominio (la función $f(z) = z^n$, con $n \geq 2$). Esto tiene como consecuencia lo siguiente: cualquier rama de la raíz n-ésima de $z$ sólo es inversa derecha de $f$, pero no inversa izquierda.*

*Dicho de manera más "coloquial", si a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ primero le "sacamos" una raíz n-ésima y después a ésta la "elevamos" a la $n$, regresamos a $z$, es decir, si $\sqrt[n]{z}$ representa el valor de la raíz n-ésima de $z$ cuyo contradominio es alguno de los conjuntos $A_{\alpha,n}$, entonces siempre se cumple que*

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$$

*para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

*Por el contrario, si tomamos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, primero la elevamos a la $n$ y después le aplicamos la rama de la raíz n-ésima que tenga como contradominio el conjunto $A_{\alpha,n}$, sólo regresaremos a $z$, si $z \in A_{\alpha,n}$; es decir,*

$$\sqrt[n]{z^n} = z$$

*si y sólo si $z \in A_{\alpha,n}$.*

Sin duda existen tantas ramas diferentes como conjuntos diferentes $A_{\alpha,n}$ existan, todas definidas en $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Sin embargo, nótese que si $z\in A_{\alpha,n}\cap A_{\alpha',n}$ entonces $w=f(z)\in\mathbb{C}$ es tal que

$$\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}(w)=\left(f_{|A_{\alpha',n}}\right)^{-1}(w)$$

es decir, ambas ramas coinciden en $w$, o lo que es lo mismo, las ramas $\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}$ y $\left(f_{|A_{\alpha',n}}\right)^{-1}$ difieren (o coinciden) en "tantos puntos" como en los que difieran (o coincidan) los conjuntos $A_{\alpha,n}$ y $A_{\alpha',n}$.

En contraste con lo anterior, observe que si $\alpha\in[0,2\pi)$, entonces los conjuntos $A_{\alpha_k,n}$, en donde $\alpha_k=\alpha+k2\pi/n$ para $k\in\{0,\ldots,n-1\}$, son ajenos entre si y además

$$A_{\alpha_0,n}\cup\cdots\cup A_{\alpha_{n-1},n}=A_{\alpha,n}\cup\cdots\cup A_{\alpha+(n-1)2\pi/n,n}=\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Este hecho muestra que, aun cuando existen muchas ramas de la raíz $n-$ésima, sólo se pueden contruir hasta $n$ que no coincidan en ningún punto de su dominio (aunque estas $n$ ramas que no coincidan en ningún punto ¡se pueden construir de muchas formas diferentes!).

Más adelante, cuando veamos el concepto de continuidad, mostraremos que estas ramas $\left(f_{|A_{\alpha,n}}\right)^{-1}$ no son continuas en todo $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, por lo que habrá que restringir a la función $f$ a un subconjunto de $A_{\alpha,n}$, lo que a su vez llevará a modificar el dominio en donde se pueden definir estas ramas de la raíz $n$-ésima de $z$.

### 2.1.2. Transformaciones de Möbius

De entre las funciones racionales, hay un subconjunto de éstas que son de particular importancia, las llamadas transformaciones de Möbius[1].

**Definición 2.4** *Una función de Möbius es una función de la forma*

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d} \tag{2.1}$$

*con* $ad-cb\neq 0$. *Si* $c=0$ *se tiene que* $T$ *está definida en* $\mathbb{C}$, *y si* $c\neq 0$ *entonces* $T$ *está definida en* $\mathbb{C}\setminus\{-d/c\}$.

Como se podrá observar, a la función de Möbius dada por 2.1 se le puede asociar la matriz invertible $M\in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dada por

$$M=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

y la transformación $T$ se puede "recuperar" tomando el cociente de la primera entrada y la segunda entrada del producto de matrices

$$\begin{aligned} M\begin{bmatrix} z\\ 1\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} z\\ 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} az+b\\ cz+d\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nótese también que si $c=0$ (en cuyo caso $d\neq 0$ y $a\neq 0$), entonces para cualquier $w\in\mathbb{C}$ la ecuación $T(z)=w$ tiene una única solución ya que en la identidad

$$\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{d}z+\frac{b}{d}=w$$

podemos despejar a $z$ en términos de $w$, obteniendo que

$$z=\frac{d}{a}w-\frac{b}{a}$$

[1]August Ferdinand Möbius o Moebius (Schulpforta, 17 de noviembre de 1790 - Leipzig, 26 de septiembre de 1868) fue un matemático y astrónomo teórico alemán. (Fuente: Wikipedia).

$$= \frac{\frac{d}{a}w - \frac{b}{a}}{0w+1}$$
$$= \frac{dw-b}{0w+a}.$$

Esta identidad prueba que $T$ es una biyección de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ y que $T^{-1}$ (la función inversa de $T$) está dada por

$$T^{-1}(w) = \frac{d}{a}w - \frac{b}{a} = \frac{dw-b}{0w+a}$$

la cual también es una transformación de Möbius (puesto que $da - 0b = da \neq 0$).

Si ahora suponemos que $c \neq 0$, entonces para toda $w \in \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ la ecuación $T(z) = w$ también tiene una única solución ya que en la identidad

$$\frac{az+b}{cz+d} = w$$

podemos despejar a $z$ en términos de $w$, obteniendo que

$$z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Esta identidad prueba ahora que $T$ es una biyección de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ y que $T^{-1}$ (la función inversa de $T$) está dada por

$$T^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

la cual también es una transformación de Möbius (puesto que $da - (-c)(-b) = da - cb \neq 0$).

Las propiedades probadas anteriormente las dejamos plasmadas en la siguiente

**Proposición 2.5** *Cualquier función de Möbius*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

*es inyectiva. Si $c = 0$, entonces $T$ es una biyección de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ y si $c \neq 0$, entonces $T$ es una biyección de $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ en $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$. En ambos casos se tiene que $T^{-1}$ también es una función de Möbius.*

Nótese que la matriz $M'$ asociada a $T^{-1}$ dada por

$$M' = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

multiplicada por el escalar $(ad - bc)^{-1}$, resulta la matriz inversa de $M$ (la matriz asociada a $T$).

Es importante hacer notar que en ambos casos ($c = 0$ y $c \neq 0$) la transformación $T$ se puede extender a una biyección de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ de la siguiente forma: si $c = 0$, definimos $T^* : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ como

$$T^*(z) = \begin{cases} \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} & \text{si } z \in \mathbb{C} \\ \infty & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

y si $c \neq 0$, como

$$T^*(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{si } z \in \mathbb{C},\ z \neq -d/c \\ \infty & \text{si } z = -d/c \\ a/c & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

Lo anterior también resultará ser un hecho importante y lo dejamos expresado en la siguiente proposición cuya prueba se deja al lector.

**Proposición 2.6** *Cualquier función de Möbius $T$ se puede extender a una función biyectiva $T^*$ de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{C}^*$ para la cual se satisface que $\left(T^{-1}\right)^* = \left(T^*\right)^{-1}$.*

Más adelante, con base en la métrica definida en $\mathbb{C}^*$, mostraremos que esta forma de extender una función de Möbius siempre resulta ser continua.

Con lo que hemos desarrollado hasta ahora sobre las funciones de Möbius, podemos dar el siguiente

**Ejemplo 2.7** *Sean $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq b$. Definimos $T : \mathbb{C} \setminus \{b\} \to \mathbb{C}$ como*

$$T(z) = \frac{z-a}{z-b}.$$

*Observe que $T$ es una función de Möbius ya que*

$$1(-b) - 1(-a) = -b + a \neq 0$$

*pues $a \neq b$.*

*Por otra parte, si escribimos a los puntos de la recta que pasa por $a$ y $b$ como*

$$z = a + t(b-a)$$

*con $t \in \mathbb{R}$, y evaluamos $T$ en estos puntos, obtenemos que*

$$T(z) = \frac{a + t(b-a) - a}{a + t(b-a) - b} = \frac{t}{t-1} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

*De esta identidad concluimos que la función $T$ "envía" a los puntos de esta recta (salvo por el punto $b$) en la recta real (o eje real), salvo el número 1. Específicamente se tiene que:*

1. *si $[a,b) := \{z = a + t(b-a) \mid t \in [0,1)\}$, entonces*

$$T([a,b)) = (-\infty, 0] \subset \mathbb{R};$$

2. *si $(b,\infty) := \{z = a + t(b-a) \mid t \in (1,\infty)\}$, entonces*

$$T((b,\infty)) = (1,\infty) \subset \mathbb{R};$$

3. *si $(\infty, a] := \{z = a + t(b-a) \mid t \in (-\infty, 0]\}$, entonces*

$$T((\infty,a]) = [0,1) \subset \mathbb{R}.$$

*También se concluye fácilmente que $T$ es una biyección entre $\mathbb{C}\setminus\{b\}$ y $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ y que $T^*(b) = \infty$ y $T^*(\infty) = 1$.*

*La figura 2.3 ilustra el comportamiento de esta función.*

Con relación a la composición entre funciones, es importante destacar que las funciones de Möbius se preservan bajo esta operación. En efecto, si $T$ y $L$ están dadas por

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

y

$$L(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

entonces

$$\begin{aligned}(L \circ T)(z) &= L\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\ &= \frac{a'\frac{az+b}{cz+d} + b'}{c'\frac{az+b}{cz+d} + d'}\end{aligned}$$

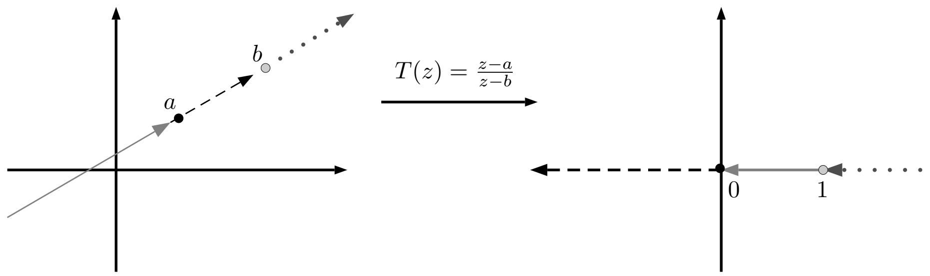



Figura 2.3: La función de Möbius $T$ manda la recta que pasa por $a$ y $b$ en la recta real en la forma descrita en esta figura.

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a'(az+b)+b'(cz+d)}{c'(az+b)+d'(cz+d)} \\
&= \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'd)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}
\end{aligned}
$$

y como

$$(a'a+b'c)(c'b+d'd)-(a'b+b'd)(c'a+d'c)=(ad-bc)(a'd'-b'c')\neq 0$$

entonces $L \circ T$ también es una función de Möbius. Nótese que si

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

y

$$M' = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

son las matrices asociadas a las funciones $T$ y $L$, respectivamente, entonces el producto de las matrices

$$
\begin{aligned}
M'M &= \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a'a+b'c & a'b+b'd \\ c'a+d'c & c'b+d'd \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

es la matriz asociada a la composición $L \circ T$.[2] Con base en este resultado, en el problema 4 el lector probará que si $L$ y $T$ son dos funciones de Möbius, entonces

$$(L \circ T)^* = L^* \circ T^* \tag{2.2}$$

Un hecho importante que se relaciona con la inyectividad de las funciones de Möbius (y la biyectividad de sus correspondientes extensiones a $\mathbb{C}^*$), y con la propiedad de que este tipo de funciones se preservan bajo la operación composición, es que dadas dos ternas de elementos distintos de $\mathbb{C}^*$, digamos $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, siempre existe una función $T$ de Möbius tal que $T^*(z_i) = w_i$ para $i \in \{1,2,3\}$. Esta característica de las funciones de Möbius resultará ser muy útil más adelante por lo que la dejamos expresada en la siguiente

**Proposición 2.8** *Si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ son tales que $z_j \neq z_l$ y $w_j \neq w_l$ si $j \neq l$, entonces existe una función de Möbius $T$ tal que $T^*(z_j) = w_j$ para $j \in \{1,2,3\}$.*

[2] Para quienes tengan conocimientos básicos de teoría de grupos, esta propiedad (y el hecho de que toda función de Möbius tiene una inversa que también es de Möbius) muestra que el conjunto de las funciones de Möbius, junto con la operación composición, satisface las condiciones para ser un grupo. Además, considerando la asociación entre funciones de Möbius y matrices, este grupo resultará isomorfo al subgrupo de las matrices de $2 \times 2$ con entradas complejas y de determinante distinto de 0.

**Demostración.** Primero supondremos que $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Entonces

$$L(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \tag{2.3}$$

es una función de Möbius tal que $L^*(z_1) = L(z_1) = 0$, $L^*(z_2) = L(z_2) = 1$ y $L^*(z_3) = \infty$. Ahora, si en la definición anterior de $L$ "hacemos tender $z_1$ a $\infty$" (lo que formalizaremos más adelante, cuando tratemos el concepto de límite), obtenemos la función

$$L(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3}$$

que es una función de Möbius tal que $L^*(\infty) = 0$, $L^*(z_2) = L(z_2) = 1$ y $L^*(z_3) = \infty$. Si ahora en la expresión 2.3 "hacemos tender a $z_2$ a $\infty$" obtenemos la función

$$L(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

que es una función de Möbius tal que $L^*(z_1) = L(z_1) = 0$, $L^*(\infty) = 1$ y $L^*(z_3) = \infty$. Finalmente, si ahora en la misma expresión 2.3 "hacemos tender a $z_3$ a $\infty$" obtenemos la función

$$L(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

que es una función de Möbius tal que $L^*(z_1) = L(z_1) = 0$, $L^*(z_2) = L(z_2) = 1$ y $L^*(\infty) = \infty$.

Resumiendo, hemos mostrado que si $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ (distintos dos a dos), siempre existe una función de Möbius $L$ tal que $L^*(z_1) = 0$, $L^*(z_2) = 1$ y $L^*(z_3) = \infty$. Es decir, para cualquier terna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ (distintos dos a dos), siempre existe una función de Möbius $L$ tal que $L^*$ envía a la terna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ en la terna $0, 1, \infty \in \mathbb{C}^*$.

Por lo tanto, dadas las ternas $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ y $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ (distintos dos a dos), si $L_1$ es una función de Möbius tal que $L_1^*$ envía a la terna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ en la terna $0, 1, \infty \in \mathbb{C}^*$, y $L_2$ es una función de Möbius tal que $L_2^*$ envía a la terna $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$ en la terna $0, 1, \infty \in \mathbb{C}^*$, entonces $(L_2)^{-1} \circ L_1$ es una función de Möbius tal que $\left((L_2)^{-1} \circ L_1\right)^* = (L_2^*)^{-1} \circ L_1^*$ envía a la terna $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ en la terna $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, que es lo que deseabamos mostrar. ■

Otra característica importante de las funciones de Möbius es la relativa a sus puntos fijos (aquellos puntos para los cuales se tiene que $T(z) = z$).

**Proposición 2.9** *Si $T$ es una función de Möbius distinta de la función identidad, entonces $T$ tiene a lo más dos puntos fijos.*

**Demostración.** Los puntos fijos son aquellos para los cuales se satisface la ecuación

$$z = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

es decir que

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \tag{2.4}$$

Si $c = 0$ hay dos posibles casos: si $d = a \neq 0$, entonces $T(z) = z + b/d$ de tal forma que como $T$ no es la función identidad se debe tener que $b \neq 0$. En este caso $T$ es una traslación por un número distinto de 0 de tal forma que no tiene puntos fijos en $\mathbb{C}$ (aunque $T^*$ tiene como punto fijo a $\infty$). Si $d \neq a$, entonces $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ de modo que si $b \neq 0$, entonces $T$ tampoco tiene puntos fijos en $\mathbb{C}$ (aunque $T^*$ tiene como punto fijo a $\infty$), y si $b = 0$ entonces $z = 0$ es el único punto fijo de $T$ (y nuevamente $T^*$ tiene como punto fijo a $\infty$). Si $c \neq 0$, dado que la ecuación 2.4 es de grado 2, entonces existen a lo más dos soluciones distintas de ésta (observe que en este caso $\infty$ no es un punto fijo de $T^*$). En resumen, cualquier función de Möbius (diferente de la identidad) tiene a lo más dos puntos fijos en $\mathbb{C}$ (y su correspondiente extensión $T^*$ también tiene a lo más dos puntos fijos en $\mathbb{C}^*$). ■

Para continuar con esta serie de propiedades de las funciones de Möbius, mostraremos que cualquier función de este tipo se puede obtener como la composición de a lo más cuatro funciones de Möbius escogidas de entre tres básicas: traslaciones de la forma $T_1(z) = z + a$, rotaciones y/o homotecias de la forma $T_2(z) = az$ ($a \neq 0$) y la "inversión" $T_2(z) = 1/z$. En efecto, si

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $c = 0$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} \\ &= \frac{a}{d}\left(z + \frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

lo que muestra que en este caso $T$ se puede obtener como la traslación $T_1(z) = z + \frac{b}{a}$ seguida de la rotación-homotecia $T_2(w) = \frac{a}{d}w$.

Si $c \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + (bc-ad)/c}{cz+d} \\ &= \frac{(bc-ad)/c}{cz+d} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{(bc-ad)/c}{c\left(z+\frac{d}{c}\right)} + \frac{a}{c} \\ &= \frac{(bc-ad)/c^2}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c} \end{aligned}$$

lo que muestra que en este caso $T$ se puede obtener como la traslación $T_1(z) = z + \frac{d}{c}$, seguida de la inversión $T_2(w) = 1/w$, seguida de la rotación-homotecia $T_3(z') = \left((bc-ad)/c^2\right)z'$ y por último, seguida de la traslación $T_4(w') = w' + a/c$; es decir

$$\begin{aligned} \frac{az+b}{cz+d} &= T(z) \\ &= (T_4 \circ T_3 \circ T_2 \circ T_1)(z) \end{aligned}$$

Una consecuencia geométrica muy importante de esta propiedad de "descomposición" de las funciones de Möbius es la relativa al "efecto" que este tipo de funciones tiene sobre las rectas o circunferencias del plano $\mathbb{C}$. Específicamente, con base en esta propiedad podremos mostrar que si $C \subset \mathbb{C}$ es una recta o una circunferencia en $\mathbb{C}$ y $T$ es una función de Möbius arbitraria, entonces $T(C) \subset \mathbb{C}$ también es una recta o una circunferencia en $\mathbb{C}$.

En el problema 3 de este capítulo, el lector demostrará que esta propiedad (de que las rectas van en rectas y las circunferencias van en circunferencias) se cumple para cualquier traslación y cualquier rotación-homotecia (resultado que sin duda es intuitivamente claro).

Pues bien, dado que en la descomposición de una función de Möbius es posible que aparezca una inversión, para probar nuestra afirmación general sólo hará falta mostrar que la inversión tiene esta misma propiedad.

Para demostrar esto último, probaremos que la función de Möbius $T(z) = 1/z$ se puede "descomponer" en términos de la proyección estereográfica, la inversa de esta proyección, y una rotación de la esfera $S$. Este hecho lo establecemos y probamos en la siguiente

**Proposición 2.10** *Sea $T(z) = 1/z$ y $T^*$ su extensión a $\mathbb{C}^*$. Si $R$ es la rotación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ determinada por la matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*y $E$ es la proyección estereográfica de $S$ en $\mathbb{C}^*$, entonces*

$$T^*(z) = \left(E \circ R \circ E^{-1}\right)(z)$$

*para toda $z \in \mathbb{C}^*$.*

**Demostración.** Si $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, de la fórmula para $E^{-1}$ (identidad 1.17) se tiene que

$$E^{-1}(z) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right)$$

de tal forma que, como

$$R(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x,-y,-z),$$

entonces

$$R\left(E^{-1}(z)\right) = \left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{\bar{z}-z}{i(|z|^2+1)}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}\right).$$

Si ahora llamamos

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1} \\ x_2 &= \frac{\bar{z}-z}{i(|z|^2+1)} \\ x_3 &= \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} 1-x_3 &= \frac{|z|^2+1-\left(1-|z|^2\right)}{|z|^2+1} \\ &= \frac{2|z|^2}{|z|^2+1} \end{aligned}$$

y por lo tanto, por la fórmula 1.15 tenemos que

$$\begin{aligned} E\left(R\left(E^{-1}(z)\right)\right) &= E\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}, \frac{\bar{z}-z}{i(|z|^2+1)}, \frac{1-|z|^2}{|z|^2+1}\right) \\ &= E(x_1,x_2,x_3) \\ &= \frac{x_1}{1-x_3} + i\frac{x_2}{1-x_3} \\ &= \frac{\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}}{\frac{2|z|^2}{|z|^2+1}} + i\frac{\frac{\bar{z}-z}{i(|z|^2+1)}}{\frac{2|z|^2}{|z|^2+1}} \\ &= \frac{z+\bar{z}}{2|z|^2} + \frac{\bar{z}-z}{2|z|^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
$$= \frac{1}{z}$$

Por otra parte, si $z = 0$, entonces

$$\begin{aligned} E\left(R\left(E^{-1}(0)\right)\right) &= E\left(R(0,0,-1)\right) \\ &= E(0,0,1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

y si $z = \infty$, entonces

$$\begin{aligned} E\left(R\left(E^{-1}(\infty)\right)\right) &= E\left(R(0,0,1)\right) \\ &= E(0,0,-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Con esta última identidad hemos probado que

$$T^*(z) = \left(E \circ R \circ E^{-1}\right)(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C}^*$. ■

La ventaja de "descomponer" a la función de Möbius $T(z) = 1/z$ en la forma en que se indica en la proposición anterior, es que ahora es muy sencillo demostrar que si $C \subset \mathbb{C}$ es una recta o circunferencia entonces $T(C)$ también es una recta o una circunferencia. Lo anterior es una consecuencia inmediata del hecho de que las rectas y circunferencias en $\mathbb{C}$ se identifican (a través de la proyección estereográfica $E$) con las circunferencias en la esfera $S$ las cuales, bajo la rotación $R$, también van a dar en circunferencias en la esfera $S$. Estos hechos los dejamos plasmados en el siguiente corolario y su prueba se deja al lector.

**Corolario 2.11** *Sea $T$ la función de Möbius $T(z) = 1/z$. Si $C \subset \mathbb{C}$ es una recta o circunferencia entonces $T(C)$ también es una recta o una circunferencia en $\mathbb{C}$. Específicamente:*

1. *si $C \subset \mathbb{C}$ es una recta que no pasa por el origen, entonces $T(C) \cup \{0\}$ es una circunferencia que pasa por el origen,*
2. *si $C \subset \mathbb{C}$ es una recta que pasa por el origen, entonces $T(C) \cup \{0\}$ es una recta que pasa por el origen,*
3. *si $C \subset \mathbb{C}$ es una circunferencia que no pasa por el origen, entonces $T(C)$ es una circunferencia que no pasa por el origen,*
4. *si $C \subset \mathbb{C}$ es una circunferencia que pasa por el origen, entonces $T(C)$ es una recta que no pasa por el origen.*

## 2.2. Las funciones exponencial y logaritmo

De entre las funciones de variable compleja más importantes, sin duda las funciones exponencial y logaritmo se encuentran entre ellas. Empezaremos por definir la función exponencial.

Imitando la forma en que la función exponencial $e^x$ (en los números reales) se expresa como la serie

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

y dado que la correspondiente serie de números complejos también converge para toda $z \in \mathbb{C}$, nuestro primer intento por definir una función exponencial en los números complejos, a la que denotaremos por la letra $\mathsf{E}$, puede ser de la siguiente forma:

$$\mathsf{E}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Lamentablemente, a partir de esta definición resulta difícil probar que esta función tiene la propiedad más básica que esperamos que tenga la función exponencial, a saber que

$$\mathsf{E}(z+w) = \mathsf{E}(z)\mathsf{E}(w) \tag{2.5}$$

para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$.

Con el fin de encontrar una expresión alternativa de la función $\mathsf{E}$ con la cual podamos probar identidades como la dada en 2.5, por ahora supondremos que esta identidad es cierta (lo que sin duda será un método de dudosa validez, pero que después corregiremos). Procediendo de esta forma podemos deducir lo siguiente: si $z = x + iy$, entonces se debería de tener que

$$\mathsf{E}(z) = \mathsf{E}(x+iy) = \mathsf{E}(x)\mathsf{E}(iy)$$

de modo que, por la definición de la función $\mathsf{E}$ tenemos entonces que

$$\mathsf{E}(x+iy) = \mathsf{E}(x)\mathsf{E}(iy) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}\right) = e^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!}\right).$$

Dado que $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$ y $i^{4k+3} = -i$ para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y usando ahora la representación en series de las funciones coseno y seno, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(iy)^{4k}}{(4k)!} + \frac{(iy)^{4k+1}}{(4k+1)!} + \frac{(iy)^{4k+2}}{(4k+2)!} + \frac{(iy)^{4k+3}}{(4k+3)!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k}}{(4k)!} - \frac{y^{4k+2}}{(4k+2)!}\right) + i\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{y^{4k+1}}{(4k+1)!} - \frac{y^{4k+3}}{(4k+3)!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(y) + i\operatorname{sen}(y)
\end{aligned}$$

de modo que llegamos a la conclusión de que se debería cumplir la identidad:

$$\mathsf{E}(z) = \mathsf{E}(x+iy) = e^x \left(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)\right).$$

Para no caer en cuestionables argumentos circulares, pero apoyados en la identidad anterior, definiremos "otra" función exponencial que, para diferenciarla de la función $\mathsf{E}$, denotaremos por exp.

**Definición 2.12** *Definimos la función exponencial, que denotaremos por* exp*, de la siguiente forma: si* $z = x + iy \in \mathbb{C}$*, entonces*

$$\exp(z) = \exp(x+iy) := e^x \left(\cos(y) + i\operatorname{sen}(y)\right).$$

Una vez que tenemos esta definición, uno de nuestros objetivos será demostrar que

$$\exp(z) = \mathsf{E}(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C}$.

**Observación 2.13** *Antes de probar algunas propiedades de la función exponencial, es importante aclarar la razón por la que, para denotar el valor de esta función en una $z \in \mathbb{C}$, usamos la expresión "$\exp(z)$" y no la expresión "$e^z$". Como el lector recordará, en el capítulo 1, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $z \in \mathbb{C}$, definimos las raíces $n$-ésimas de $z$ y al conjunto de todas ellas justo lo denotamos por $z^{1/n}$. En este sentido, y de acuerdo con esta notación, la expresión $e^{1/n}$, además de que ya denota al valor de la función exponencial (real) en el número $1/n$, también denota al conjunto de las raíces $n$-ésimas de $e$. Por esta razón, y para no agregar un significado más (y un motivo más de confusión), en este texto la expresión $e^z$ denotará al conjunto de todos los posibles valores que se obtengan al exponenciar el número $e$ al complejo $z$ (conjunto que más adelante podremos determinar apoyados precisamente en la función exponencial), mientras que $\exp(z)$ denotará al (único) valor de la función exponencial en el complejo $z$. De hecho, una vez que hayamos probado algunas propiedades de la función exponencial, podremos probar que el número $\exp(1/n)$ es una de las raíces $n$-ésimas de $e$ ya que se tendrá que $(\exp(1/n))^n = e$.*

Una vez dicho lo anterior, lo siguiente que haremos será justo probar una serie de propiedades de la función exp, las cuales entre otras cosas, nos servirán para justificar por qué a esta función le llamamos la *función exponencial*.

**Proposición 2.14** *La función exponencial satisface las siguientes propiedades:*

1. *Para todas* $z, w \in \mathbb{C}$ *se tiene que* $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.
2. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$ *se tiene que* $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$.
3. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$ *se tiene que* $\exp(z) \neq 0$.
4. *Para toda* $z \in \mathbb{C}$ *se tiene que* $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.
5. $\exp(z) = 1$ *si y sólo si* $z = 2k\pi i$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$.
6. $\exp(w) = \exp(z)$ *si y sólo si* $w = z + 2k\pi i$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$.

Todas las afirmaciones de la proposición anterior son muy sencillas de probar a partir de las propiedades de las funciones $e^x, \cos(x)$ y $\mathrm{sen}(x)$ (que se conocen de los cursos de cálculo), razón por la cual dejamos al amable lector la prueba de todas ellas.

Apoyados en algunas de las propiedades anteriores, podemos determinar fácilmente la imagen bajo la función exponencial de las rectas de la forma $x = x_0$ y $y = y_0$, lo que si duda nos será muy útil más adelante (figura 2.4).

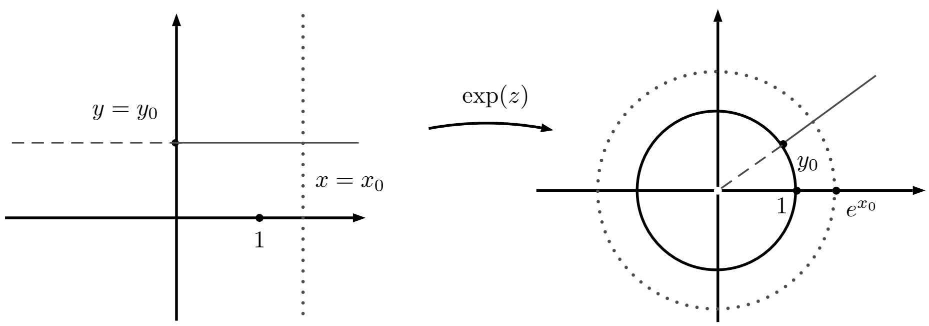



Figura 2.4: La imagen bajo la función exp de la recta $y = y_0$ es una semirecta que parte del origen (sin tocarlo) y que forma un ángulo (dirigido) $y_0$ con el eje real. La imagen de la recta $x = x_0$ es una circunferencia con centro en el origen de radio $e^{x_0}$.

Nuestro siguiente objetivo es mostrar que la función exponencial es suprayectiva sobre el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y que para obtener dicha suprayectividad, basta con restringirla a ciertos conjuntos.

**Proposición 2.15** *Sea* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Definimos el conjunto*

$$L_{y_0} := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}.$$

*Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. *La función exponencial es inyectiva en el conjunto* $L_{y_0}$.
2. *La imagen del conjunto* $L_{y_0}$ *bajo la función exponencial es el conjunto* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *(es decir que* $\exp(L_{y_0}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$*).*

**Demostración.** Que la función exponencial es inyectiva en el conjunto $L_{y_0}$ es inmediato del inciso 6 de la proposición 2.14 puesto que si $z, w \in L_{y_0}$ son tales que $\exp(w) = \exp(z)$, entonces $w$ y $z$ tienen la misma parte real y sus partes imaginarias deben de diferir por un múltiplo de $2\pi$, lo cual no es posible que suceda entre dos elementos del conjunto $L_{y_0}$ a menos que $w = z$.

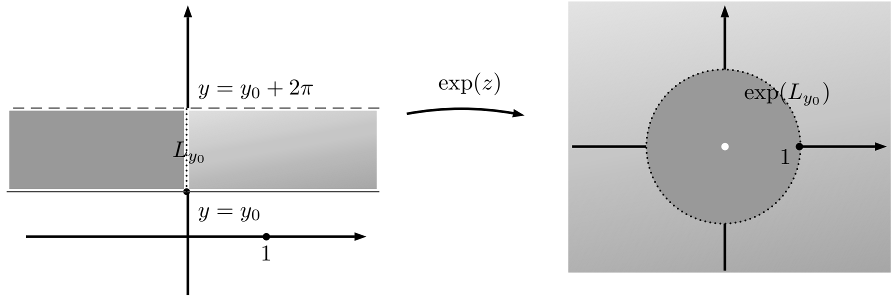



Figura 2.5: La función exponencial es inyectiva en la región $L_{y_0}$ y suprayectiva sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Para probar el inciso 2, tomemos $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dado que nuestro objetivo es mostrar que existe $z = x + iy \in L_{y_0}$ tal que

$$w = \exp(z) = e^x (\cos(y) + i \operatorname{sen}(y))$$

de esta identidad se deduce que $|w| = e^x$, de donde concluimos que $x = \ln(|w|)$. Esta misma identidad también nos dice que $y$ debe ser un argumento de $w$, y como ya lo hicimos notar en la observación 1.6 del capítulo 1, en cualquier intervalo de la forma $[y_0, y_0 + 2\pi)$ siempre existe un argumento de cualquier complejo $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por tanto, podemos asegurar que si tomamos

$$z = \ln(|w|) + i(\arg(w) + 2k_0\pi), \tag{2.6}$$

en donde $k_0 \in \mathbb{Z}$ es tal que $\arg(w) + 2k_0\pi \in [y_0, y_0 + 2\pi)$, entonces $z \in L_{y_0}$ y además $w = \exp(z)$ lo cual prueba que $\exp(L_{y_0}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. ■

Con base en la definición de la función exponencial y de las dos proposiciones anteriores, vamos a definir dos conceptos que es muy importante diferenciar. En el primero se establecerá el concepto de *logaritmo de un número complejo*, mientras que en el segundo estableceremos el concepto de *rama de la función logaritmo*.

Como se puede verificar a partir de la definición de la función exponencial, si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces $b = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi)$ es un número complejo tal que $a = \exp(b)$, para toda $k \in \mathbb{Z}$. Por esta razón, dado $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, hablaremos de *los logaritmos de a*, conjunto que denotaremos por $Log(a)$, y cuyos elementos serán todos los $b \in \mathbb{C}$ tales que $a = \exp(b)$. Es decir, $Log(a)$ nuevamente será una expresión multivaluada.

**Definición 2.16** *Para cada $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definimos*

$$\begin{aligned} Log(a) &:= \{b \in \mathbb{C} \mid a = \exp(b)\} \\ &:= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|a|) + i(\arg(a) + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &:= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|a|) + i\varphi,\ \varphi \in Arg(a)\}. \end{aligned}$$

Observe que $Log(a)$ es un conjunto que tiene tantos elementos como el conjunto $Arg(a)$, el cual sabemos que tiene tantos elementos como el conjunto de los enteros, es decir, una cantidad numerable.

Sin duda, ahora lo que se impone es dar algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.17**

1. *Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} Log(x) &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|x|) + i(\arg(x) + 2k\pi)\ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(x) + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

*Observe que* $\ln(x) \in Log(x)$.

2. *Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x < 0$, entonces*

$$\begin{aligned} Log(x) &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|x|) + i(\arg(x) + 2k\pi) \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|x|) + i(2k-1)\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

3. *Si $y \in \mathbb{R}$ es tal que $y > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} Log(iy) &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|iy|) + i(\arg(iy) + 2k\pi) \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(y) + i(\pi/2 + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(y) + i\frac{4k+1}{2}\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

*En particular, se tiene que*

$$Log(i) = \left\{b \in \mathbb{C} \mid b = i\frac{4k+1}{2}\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

4. *Si $y \in \mathbb{R}$ es tal que $y < 0$, entonces*

$$\begin{aligned} Log(iy) &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|iy|) + i(\arg(iy) + 2k\pi) \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|y|) + i(-\pi/2 + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|y|) + i\frac{4k-1}{2}\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

*En particular, se tiene que*

$$Log(-i) = \left\{b \in \mathbb{C} \mid b = i\frac{4k-1}{2}\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

5.

$$\begin{aligned} Log(1+i) &= \{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln(|1+i|) + i(\arg(1+i) + 2k\pi) \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln\left(\sqrt{2}\right) + i(\pi/4 + 2k\pi), \ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{b \in \mathbb{C} \mid b = \ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{8k+1}{4}\pi, \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Un hecho muy importante es que si $b \in Log(a)$ y $b' \in Log(a')$, entonces $b + b' \in Log(aa')$. De hecho, si hacemos

$$Log(a) + Log(a') := \{b + b' \in \mathbb{C} \mid b \in Log(a) \text{ y } b' \in Log(a')\}$$

entonces se cumple que

$$Log(aa') = Log(a) + Log(a') \tag{2.7}$$

para todas $a, a' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, identidad cuya prueba se deja al lector.

Y ya que contamos con la función exponencial y el concepto de logarítmo de un número complejo, podemos aprovechar para definir el concepto de *exponenciación de un número complejo elevado a otro número complejo*.

Como el lector recordará, en el caso de los números reales, si $x, y \in \mathbb{R}$ con $y > 0$, se define $y^x$ como $y^x = e^{x\ln(y)}$. Siguiendo esta misma idea, dados $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, definimos $a^b$ de la siguiente forma.

**Definición 2.18** *Sean $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$. Definimos $a^b$ como*

$$a^b := \exp\left(bLog(a)\right) := \{\exp(bb') \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid b' \in Log(a)\}$$

De acuerdo con esta definición, y como era de esperarse, $a^b$ es también una expresión multivaluada. A fin de mostrar algunas propiedades de esta expresión, damos el siguiente

**Ejemplo 2.19**

1. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $y > 0$, entonces*

$$\begin{aligned} y^x &= \exp(xLog(y)) \\ &= \{\exp(x(\ln(y) + i2k\pi)) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\exp(x(\ln(y)))\exp(i2k\pi x) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{e^{x\ln(y)}(\cos(2k\pi x) + i\operatorname{sen}(2k\pi x)) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

*Observe que aun cuando $x$ y $y$ sean números reales, en el contexto de la exponenciación compleja la expresión $y^x$ también puede ser multivaluada (si $x$ no es un entero), aunque se tiene que $e^{x\ln(y)} \in y^x$ (tomando $k = 0$), que es el número con el que se define $y^x$ en el caso real.*

2. *Si $x, y \in \mathbb{R}$, con $y \neq 0$, entonces*

$$\begin{aligned} y^{ix} &= \exp(ixLog(y)) \\ &= \{\exp(ix(\ln(|y|) + i2k\pi)) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{\exp(ix\ln(|y|) - 2k\pi x) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{e^{2k\pi x}(\cos(x\ln(|y|)) + i\operatorname{sen}(x\ln(|y|))) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

*Observe que si tomamos $y = e$, entonces*

$$e^{ix} = \left\{e^{2k\pi x}(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)) \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

*Con frecuencia escribiremos (sólo para abreviar) que $e^{ix} = \cos(x) + i\operatorname{sen}(x)$, pero en estricto sentido $e^{ix}$ es una expresión multivaluada para la cual se satisface que $\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) \in e^{ix}$, lo que siempre hay que tener presente.*

3. *Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\begin{aligned} a^{1/n} &= \exp((1/n)Log(a)) \\ &= \{\exp((1/n)(\ln(|a|) + i(\arg(a) + i2k\pi)) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{|a|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n} + ik\frac{2\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\arg(a)}{n} + ik\frac{2\pi}{n}\right)\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{|a|^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\arg(a)}{n} + ik\frac{2\pi}{n}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\arg(a)}{n} + ik\frac{2\pi}{n}\right)\right) \mid k \in \{0, \ldots, n-1\}\right\}. \end{aligned}$$

*Observe que el conjunto $a^{1/n}$ coincide con el conjunto de las raíces $n$-ésimas de $a$ que calculamos en el capítulo 1.*

4. *Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\begin{aligned} a^0 &= \exp(0Log(a)) \\ &= \{1\} \end{aligned}$$

*Es decir, si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, siempre podemos decir que $a^0 = 1$.*

5. *Si $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\begin{aligned} a^i &= \exp(iLog(a)) \\ &= \{\exp(i(\ln(|a| + i(\arg(a) + 2k\pi))) \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

*Observe que si $a = i$, entonces*

$$\begin{aligned} i^i &= \exp(iLog(i)) \\ &= \left\{\exp\left(i\left(i\frac{4k+1}{2}\pi\right)\right) \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{e^{-(4k+1)\pi/2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}, \end{aligned}$$

*es decir que $i^i \subset \mathbb{R}$.*

Aun cuando para $a, b \in \mathbb{C}$, con $a \neq 0$, $a^b$ es una expresión multivaluada (al igual que lo es la expresión $Log(a)$), podemos establecer una identidad que toda "exponenciación" debiera cumplir. Si convenimos que

$$a^b a^{b'} := \left\{\zeta\zeta' \in \mathbb{C} \mid \zeta \in a^b \text{ y } \zeta' \in a^{b'}\right\},$$

entonces se tiene que

$$a^{b+b'} = a^b a^{b'}, \tag{2.8}$$

identidad cuya prueba también queda al lector.

Una vez que ya hemos establecido lo que entenderemos por "logaritmo de un número complejo", ahora estableceremos lo que se entenderá por una "*rama de la función logaritmo*".

Como es de suponerse, una función logaritmo deberá ser la inversa de la función exponencial, pero como vimos en la proposición 2.14 esta función no es inyectiva en $\mathbb{C}$ por lo que no existe tal función inversa.

Sin embargo, como se probó en la proposición 2.15, si restringimos la función exponencial a los conjuntos $L_{y_0}$, que están definidos como

$$L_{y_0} := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}$$

para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, la función exponencial sí es inyectiva.

Con base en lo anterior, definiremos el concepto general de "*rama del logaritmo*" y después definiremos unas ramas específicas basadas en los conjuntos $L_{y_0}$.

**Definición 2.20** *Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n \geq 2$. Decimos que $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una rama del logarítmo de $z$ en $U$ si $g$ tiene la propiedad de que $\exp(g(z)) = z$ para toda $z \in U$.*

**Definición 2.21** *Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Definimos la rama del logaritmo basada en $y_0$, que denotamos por $\log_{y_0}$, como la función inversa de la función exponencial restringida al conjunto $L_{y_0}$. Es decir,*

$$\log_{y_0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longleftrightarrow L_{y_0}$$

*es tal que para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene que $\exp\left(\log_{y_0}(z)\right) = z$.*

*De manera más específica, se tiene que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces*

$$\log_{y_0}(z) = \ln(|z|) + i\varphi$$

*en donde $\varphi$ es el único argumento de $z$ que está en el intervalo $[y_0, y_0 + 2\pi)$.*

*A la rama $\log_{-\pi}$ le llamaremos la rama principal del logaritmo y la denotaremos simplemente por $\log$. Por tanto, para la rama principal se tiene que*

$$\log(z) := \log_{-\pi}(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$$

*para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (recuerde que $\arg(z) \in [-\pi, \pi)$).*

Como en el caso de las ramas de la raíz $n$-ésima de $z$, estas ramas del logaritmo también están determinadas por su contradominio (los conjuntos $L_{y_0}$). Por esta razón, todo parece indicar que hay una gran cantidad de ellas (tantas como números reales), aunque muchas pueden coincidir en subconjuntos "grandes" de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En el problema 15 el lector probará una condición bajo la cual dos ramas del logarítmo no coinciden en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En la figura 2.6 mostramos algunos aspectos "geométricos" de una de estas ramas del logaritmo.

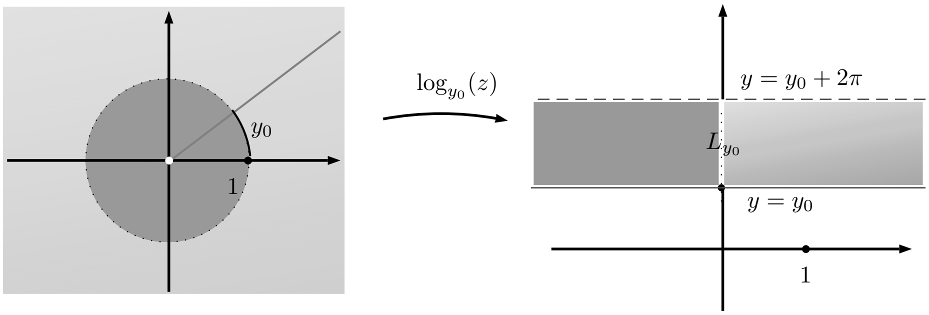



Figura 2.6: La rama del logarítmo $\log_{y_0}$ es una biyección entre los conjuntos $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $L_{y_0}$.

**Observación 2.22** *De la misma forma que lo hicimos para las ramas de la raíz $n$-ésima de $z$, es importante hacer un par de observaciones con relación a estas ramas del logarítmo.*

*La primera de ellas tiene que ver nuevamente con el contradominio de estas funciones, los conjuntos $L_{y_0}$. Estos conjuntos ahora tienen la "desventaja" de que si $w, w' \in L_{y_0}$, entonces no necesariamente se puede asegurar que $w + w' \in L_{y_0}$. Este hecho tiene una importante consecuencia con relación a las ramas del logarítmo que podemos expresar de la siguiente manera: si $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, entonces no necesariamente es cierto que*

$$\log_{y_0}(zz') = \log_{y_0}(z) + \log_{y_0}(z').$$

*Dicho de otra forma y en términos de las ramas del logarítmo, no necesariamente es cierto que el logarítmo de un producto es la suma de los logarítmos.*

*La segunda observación, también es análoga a la que hicimos en el caso de la raíz $n$-ésima de $z$. Nuevamente, cualquier rama del logarítmo sólo es una inversa derecha de la función* exp. *Esto significa de nueva cuenta que para cualquier $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene que*

$$\exp\left(\log_{y_0}(z)\right) = z,$$

*pero la identidad*

$$\log_{y_0}(\exp(z)) = z$$

*sólo se cumple si (y sólo si) $z \in L_{y_0}$.*

Otra propiedad de las ramas del logaritmo es que resultan ser muy útiles para construir de forma explícita las ramas de la raíz $n$-ésima que introdujimos en la subsección 2.1.1. Este hecho lo mostramos en el siguiente

**Ejemplo 2.23** *Mostraremos que la función*

$$f = \exp \circ \left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}\right) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \tag{2.9}$$

*cumple con las propiedades que caracterizan a la rama de la raíz $n$-ésima que tiene como contradominio al conjunto $A_{\alpha,n}$, y que son las siguientes:*

1. *Para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) \in A_{\alpha,n}$. Esta propiedad es fácil de verificar ya que si escribimos $z = r(\cos(\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\varphi))$, en donde $\varphi$ es el argumento de $z$ tal que $\varphi \in [n\alpha, n\alpha + 2\pi)$), entonces*

$$\frac{1}{n}\log_{n\alpha}(z) = \frac{1}{n}(\ln(|z|) + i\varphi) = \ln\left(r^{1/n}\right) + i\frac{\varphi}{n}$$

*de modo que*

$$f(z) = \left(\exp \circ \left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}\right)\right)(z)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp\left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}(z)\right) \\
&= \exp\left(\ln\left(r^{1/n}\right) + i\frac{\varphi}{n}\right) \\
&= r^{1/n}\exp\left(i\frac{\varphi}{n}\right) \\
&= r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \in A_{\alpha,n}
\end{aligned}$$

*ya que* $\alpha \leq \varphi/n < 2\pi/n$.

2. *La función* $f$ *satisface que* $(f(z))^n = z$ *para toda* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, lo cual es inmediato a partir de la expresión que obtuvimos de* $f(z)$ *y de la fórmula de Moivre.*

Como el lector estará de acuerdo, el ejemplo anterior nos da la pauta para definir (en general) las ramas de $z^a$, es decir, de la exponenciación de un complejo (o una variable) $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ a un complejo fijo $a \in \mathbb{C}$.

**Definición 2.24** *Sean,* $y_0 \in \mathbb{R}$ *y* $a \in \mathbb{C}$*. Decimos que la función* $f_{y_0} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *definida como*

$$f_{y_0}(z) = \exp\left(a\log_{y_0}(z)\right)$$

*es la rama basada en* $y_0$ *de* $z^a$*. A la función* $f_{-\pi}$ *le llamaremos la rama principal y escribiremos que*

$$z^a := f_{-\pi}(z) := \exp\left(a\log(z)\right).$$

Y si esta sección la empezamos definiendo la función exponencial (que en la observación 2.13 ya explicamos las razones por las que la denotamos por exp, y no por $e^z$), apoyándonos justo en esta función y en la rama principal del logarítmo, terminamos esta sección definiendo lo que entenderemos por la función que usualmente se denota por $a^z$, con $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pero que para ser congruentes con la notación que hemos decido usar, nosotros denotaremos por $\exp_a$.

**Definición 2.25** *Sea* $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*. Definimos la función* $\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*, como*

$$\begin{aligned}
\exp_a(z) &:= \exp\left(z\log(a)\right) \\
&:= \exp\left(z\left(\ln(|a| + i\arg(a))\right)\right),
\end{aligned}$$

*en donde recuerde que* $\log(a)$ *es el valor en* $a$ *de la rama principal del logarítmo.*

Observe que con base en la definición anterior, en particular se tendrá que

$$\begin{aligned}
\exp_e(z) &:= \exp\left(z\log(e)\right) \\
&:= \exp\left(z\left(\ln(|e| + i\arg(e))\right)\right) \\
&:= \exp\left(z\left(1 + i\cdot 0\right)\right) \\
&:= \exp(z).
\end{aligned}$$

En el problema 19 el lector probará que si $a > 0$ y $z = x \in \mathbb{R}$, entonces

$$\exp_a(z) = e^{x\ln(a)} = a^x$$

con lo cual se mostrará que la función $\exp_a$ que acabamos de definir "extiende" a la función $a^x$ que ya se tenía definida en los números reales (con $a > 0$).

## 2.3. Funciones trigonométricas

El método para definir las funciones trigonómetricas en los números complejos consistirá en tratar de "extender" las correspondientes funciones que ya conocemos en el caso de los números reales. Y esta tarea se facilita por el hecho de que dichas funciones aparecen en la definición que dimos de la función exponencial.

Recordemos que si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, entonces

$$\exp(z) := e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))$$

de modo que

$$\exp(iy) = \cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y) \quad \text{y} \quad \exp(-iy) = \cos(y) - i\,\mathrm{sen}(y).$$

De estas dos identidades es posible despejar $\cos(y)$ y $\mathrm{sen}(y)$, obteniendo que

$$\cos(y) = \frac{\exp(iy) + \exp(-iy)}{2}$$

y

$$\mathrm{sen}(y) = \frac{\exp(iy) - \exp(-iy)}{2i}.$$

Como seguramente el lector estará de acuerdo, estas dos últimas identidades nos permiten definir en los números complejos las dos funciones trigonométricas básicas, con la ventaja inicial de que dicha definición "extiende" a las funciones que ya conocemos en el caso real.

**Definición 2.26** *Definimos las funciones trigonométricas (complejas)* $\mathrm{sen} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(seno) y* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *(coseno) de la siguiente forma:*

$$\mathrm{sen}(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

*y*

$$\cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

*para cada* $z \in \mathbb{C}$.

Como es de esperarse, las funciones trigonométricas (complejas) seno y coseno tienen las mismas propiedades que tiene las correspondientes funciones de los números reales, las cuales dejaremos expresadas en la siguiente proposición y cuya prueba quedará a cargo del lector.

**Proposición 2.27** *Para todos* $z, w \in \mathbb{C}$, *se satisface que:*

1. $\mathrm{sen}^2(z) + \cos^2(z) = 1$
2. $\mathrm{sen}(-z) = -\mathrm{sen}(z)$ *y* $\cos(-z) = \cos(z)$
3. $\mathrm{sen}(z + w) = \mathrm{sen}(z)\cos(w) + \mathrm{sen}(w)\cos(z)$
4. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \mathrm{sen}(w)\,\mathrm{sen}(z)$
5. $\mathrm{sen}(z + \pi/2) = \cos(z)$ *y* $\cos(z - \pi/2) = \mathrm{sen}(z)$
6. $\mathrm{sen}(z) = 0$ *si y sólo si* $z = k\pi$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$
7. $\cos(z) = 0$ *si y sólo si* $z = (2k + 1)\pi/2$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$
8. $\mathrm{sen}(z + w) = \mathrm{sen}(z)$ *si y sólo si* $w = 2k\pi$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$
9. $\cos(z + w) = \cos(z)$ *si y sólo si* $w = 2k\pi$ *para alguna* $k \in \mathbb{Z}$

A continuación haremos un breve análisis del comportamiento geométrico de la función seno (el correspondiente análisis de la función coseno quedará como un ejercicio para el lector).

Si $z = x + iy$, por el inciso 3 de la proposición anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}(z) &= \mathrm{sen}(x + iy) \\
&= \mathrm{sen}(x)\cos(iy) + \mathrm{sen}(iy)\cos(x) \\
&= \mathrm{sen}(x)\frac{\exp(-y) + \exp(y)}{2} + \cos(x)\frac{\exp(-y) - \exp(y)}{2i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{sen}(x)\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + i\cos(x)\frac{e^{y}-e^{-y}}{2} \\ &= \operatorname{sen}(x)\cosh(y) + i\cos(x)\operatorname{senh}(y), \end{aligned} \tag{2.10}$$

en donde senh y cosh son las funciones trigonométricas hiperbólicas que ya conocemos de los números reales.

Con base en esta expresión, tenemos que bajo la función seno cada recta vertical de la forma $x = x_0$, con $x_0 \notin \{k\pi, (2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$, se transforma en una de las ramas de ciertas hipérbolas (por razones de continuidad, no se pueden cubrir ambas ramas), pues si hacemos $u = \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$ y $v = \cos(x)\operatorname{senh}(y)$, las parejas $(u, v)$ satisfacen la ecuación

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2(x_0)} - \frac{v^2}{\cos^2(x_0)} = \cosh^2(y) - \operatorname{senh}^2(y) = 1$$

para toda $y \in \mathbb{R}$. El signo de $\operatorname{sen}(x_0)$ determina en cuál de las ramas de la hipérbola se transforma la recta $x = x_0$: en la rama izquierda si $\operatorname{sen}(x_0) < 0$, y en la rama derecha si $\operatorname{sen}(x_0) > 0$.

Si $x_0 = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $u = 0$ de tal forma que la recta $x = x_0$ se transforma en la recta $u = 0$ ya que $v = (-1)^k \operatorname{senh}(y)$, de modo que $v$ recorre todos los números reales, aunque es importante hacer notar que la orientación con la que los recorre depende de la paridad de $k$.

Si $x_0 = (2k+1)\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, entonces $v = 0$ de tal forma que la recta $x = x_0$ se transforma en la semirecta $\{(u, 0) \mid u \geq 1\}$ si $k$ es par, y en la semirecta $\{(u, 0) \mid u \leq -1\}$ si $k$ es impar, ya que $u = (-1)^k \cosh(y)$. Es importante hacer notar que dicha semirecta se "recorre" dos veces ya que la función cosh recorre dos veces al intervalo $[1, \infty)$.

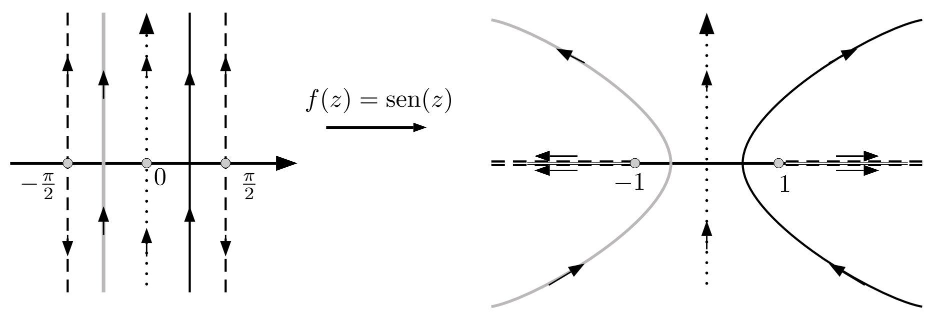



Figura 2.7: La función sen transforma al conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$ en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$.

De los argumentos anteriores (y la figura 2.7) se deduce que la función seno transforma biyectivamente al conjunto $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$ en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. De manera más específica, el conjunto

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x < \pi/2, y > 0\}$$

se transforma biyectivamente en el conjunto $\{w = u + iv \in \mathbb{C} \mid v > 0\}$, y el conjunto

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x < \pi/2, y < 0\}$$

se transforma biyectivamente en el conjunto $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid v < 0\}$.

La observación anterior es muy importante, pues aunque la función seno también transforma biyectivamente al conjunto

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid \pi/2 < x < 3\pi/2\}$$

en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$, ahora lo hace de manera diferente: al conjunto

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid \pi/2 < x < 3\pi/2, y > 0\}$$

lo transforma biyectivamente en el conjunto $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid v < 0\}$, y al conjunto

$$\{x + iy \in \mathbb{C} \mid \pi/2 < x < 3\pi/2, y < 0\}$$

lo transforma biyectivamente en el conjunto $\{u + iv \in \mathbb{C} \mid v > 0\}$.

La razón de este cambio en la forma de transformar a estos conjuntos se debe al cambio de signo que tiene la función coseno en los intervalos $(-\pi/2, \pi/2)$ y $(\pi/2, 3\pi/2)$, pues recuerde que $v = \cos(x)\,\mathrm{senh}(y)$.

La figura 2.8 ilustra las afirmaciones anteriores.

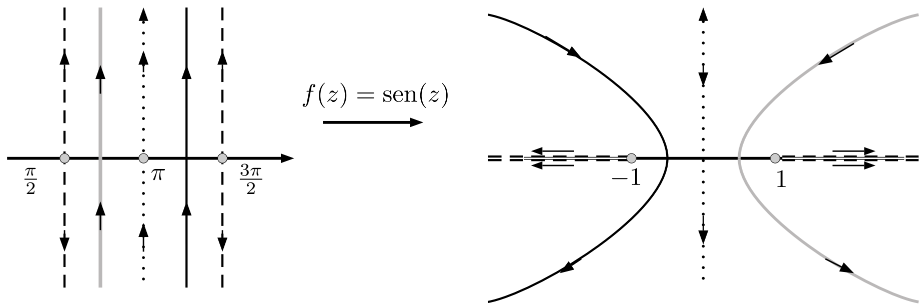



Figura 2.8: La función sen también transforma al conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid \pi/2 < x < 3\pi/2\}$ en el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid \ |x| \geq 1\}$, pero de forma diferente a como transforma la franja "anterior".

Con base en el análisis geométrico que acabamos de hacer, podemos concluir que la función seno es una biyección entre cada uno de los conjuntos

$$B_k := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi/2 < x < (2k+1)\pi/2\}$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, y el conjunto $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$.

De forma análoga a como lo hicimos con la raíz $n$-ésima y el logarítmo, definiremos algunas *ramas de la función arcoseno* de $z$.

**Definición 2.28** *Para cada $k \in \mathbb{Z}$, sea*

$$B_k := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid (2k-1)\pi/2 < x < (2k+1)\pi/2\}.$$

*Decimos que la función $g_k : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} \to B_k$ definida como*

$$g_k(z) := \left(\mathrm{sen}_{|B_k}\right)^{-1}(z)$$

*es la rama del arcoseno de $z$ que "cae" en (o que tiene contradominio) $B_k$. A la rama que tiene contradominio*

$$B_0 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x < \pi/2\}$$

*le llamaremos la rama principal del arcoseno de $z$ y la denotaremos por* arcsen*.*

**Observación 2.29** *Seguramente el lector notó (o podrá notar) que la función seno es inyectiva en conjuntos más grandes que los conjuntos $B_k$. Por ejemplo, sobre el conjunto*

$$B_k \cup \{(2k-1)\pi/2 + iy \in \mathbb{C} \mid 0 \leq y\} \cup \{(2k+1)\pi/2 + iy \in \mathbb{C} \mid y \leq 0\}$$

*la función seno será una biyección entre esta unión y $\mathbb{C}$. Considerando lo anterior, las ramas del arcoseno se pueden definir en todo $\mathbb{C}$, pero el lector probará en el problema 34 que definidas de esta forma no serán continuas en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$. Esta es la razón por la que cada rama del arcoseno la definimos como la función inversa de la función seno restringida al conjunto $B_k$.*

Un hecho importante con relación a estas ramas de la función arcoseno es que también se pueden expresar en términos de algunas ramas del logaritmo de $z$ y de algo más general que llamaremos *ramas del logarítmo de una función $f$*. Y justo por esa razón tendremos que esperar a definir este concepto, lo cual haremos en la siguiente sección de este capítulo.

Sólo para completar el análisis geométrico de la función seno, veremos ahora cómo transforma esta función a las rectas de la forma $y = y_0$.

Nuevamente con base en la expresión 2.10, si $y_0 \neq 0$ se tiene que las parejas $u = \operatorname{sen}(x)\cosh(y_0)$ y $v = \cos(x)\operatorname{senh}(y_0)$ satisfacen la ecuación

$$\frac{u^2}{\cosh^2(y_0)} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2(y_0)} = \cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1$$

la cual describe a una elipse cuyos focos siempre son los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ para cualquier $y_0 \neq 0$.

Observe que la recta $y_0 = 0$ (el eje $X$) se transforma en el segmento que une a los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ el cual se puede considerar como el caso "degenerado" de las mismas elipses. También observe que cada vez que la variable $x$ "recorra" un intervalo de la forma $[x_0, x_0 + 2\pi)$, las parejas $(u, v)$ "recorren" una vez (en el sentido de las manecillas del reloj) a la correspondiente elipse. Este comportamiento geométrico de la función seno lo ilustramos en la figura 2.9.

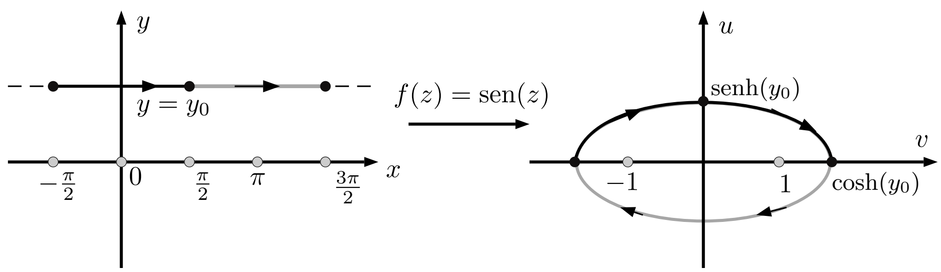



Figura 2.9: Las rectas de la forma $y = y_0$, bajo la función sen se transforman en elipses, las cuales son recorridas una cantidad infinita de veces.

Como el lector se podrá imaginar, el resto de las funciones trigonométricas (tangente, cotangente, secante y cosecante) se definen para los números complejos de manera análoga a como se hace en el caso real. No obstante lo anterior, es importante que se de a la tarea de realizar un análisis cuidadoso del comportamiento de estas funciones, tanto para determinar su dominio, como para determinar los subcojuntos en los que cada una de ellas es inyectiva.

## 2.4. Límite y continuidad

Como lo mencionamos en el capítulo 1, el concepto de distancia en los números complejos definido a través del concepto de módulo (o valor absoluto) de un número complejo coincide con la distancia euclideana de $\mathbb{R}^2$. Por esta razón, dijimos que los conceptos topológicos y de convergencia de sucesiones en los complejos coinciden con los de $\mathbb{R}^2$, de modo que todos los dimos por definidos, así como probados todos los teoremas y resultados relacionados con estos conceptos.

Por la misma razón, los conceptos de límite y continuidad de funciones en los complejos coinciden con los de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, de modo que también estos conceptos los daremos por definidos en los complejos; y por supuesto también daremos por vistos y probados todos los teoremas y resultados relacionados con éstos.

Por lo anterior, se dará como un hecho conocido y probado que las funciones polinomiales, las funciones racionales (en particular las funciones de Möbius), la función exponencial y las funciones trigonométricas, todas ellas son continuas en sus respectivos dominios. Los únicos casos de continuidad que analizaremos más de cerca serán los relacionados con las ramas del logaritmo de $z$, las ramas de la raíz $n$-ésima de $z$, y las ramas del arcoseno de $z$.

Empezaremos por analizar a las ramas del logaritmo de $z$. De acuerdo con la definición 2.21, para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}$ la rama del logaritmo $\log_{y_0}$ está definida en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sin embargo, mostraremos que esta rama no es continua en los puntos de la forma $z = r(\cos(y_0) + i\operatorname{sen}(y_0)) \in \mathbb{C}$, con $r > 0$. Observe que si $z$ pertenece a este conjunto, entonces la sucesión cuyos términos están dados por

$$\{z_n = r(\cos(y_0 - 1/n) + i\operatorname{sen}(y_0 - 1/n))\}$$

es tal que $z_n \neq z$ para toda $n \in \mathbb{N}$, y que $\{z_n\} \to z$. Sin embargo, como $y_0 - 1/n + 2\pi$ es el argumento de $z_n$ que satisface la condición de que

$$y_0 \leq y_0 - \frac{1}{n} + 2\pi < y_0 + 2\pi,$$

se tiene que

$$\log_{y_0}(z_n) = \ln(r) + i\left(y_0 - \frac{1}{n} + 2\pi\right)$$

y por lo tanto obtenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \log_{y_0}(z_n) = \ln(r) + i\,(y_0 + 2\pi) \neq \ln(r) + iy_0 = \log_{y_0}(z),$$

lo que prueba que $\log_{y_0}$ no es continua en $z$. En la figura 2.10 se muestra geométricamente este hecho.

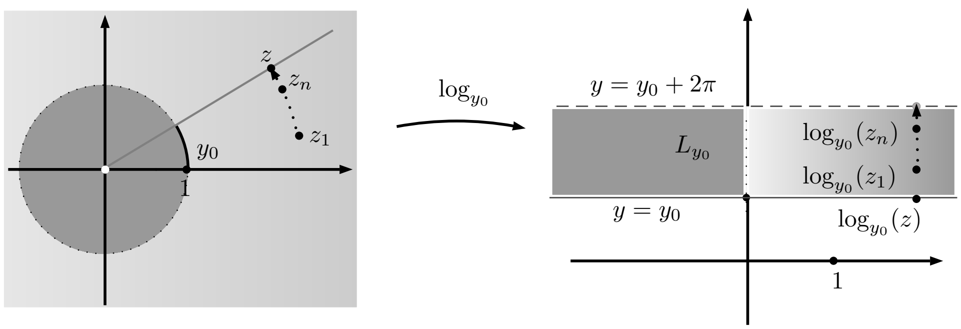



Figura 2.10: La rama del logarítmo $\log_{y_0}$ no es continua en los puntos de la forma $z = r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0))$.

Aplicando lo anterior, y usando que la rama de la raíz $n$-ésima de $z$ que tiene como contradominio al conjunto $A_{\alpha,n}$ se puede escribir en términos de la rama del logaritmo $\log_{n\alpha}$ como

$$\left(\exp \circ \left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}\right)\right)(z), \tag{2.11}$$

también podemos concluir inmediatamente que esta rama no es continua en los puntos de la forma $z = r(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha)) \in \mathbb{C}$, con $r > 0$.

Lo que ahora haremos será mostrar que, salvo por los puntos de la forma $z = r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \in \mathbb{C}$, con $r \geq 0$, la rama del logaritmo $\log_{y_0}$ sí es continua en el resto de los puntos de su dominio. Esta afirmación la dejaremos plasmada en la siguiente

**Proposición 2.30** *Para cada $y_0 \in \mathbb{R}$, la rama del logaritmo $\log_{y_0}$ es continua en el conjunto*

$$\mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}.$$

**Demostración.** Sean, $z \in \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}$, $\theta \in (y_0, y_0 + 2\pi)$ tal que $z = |z|\,(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta))$, y $\{z_n\}$ una sucesión tal que

$$z_n \in \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to z$.

Sea $\theta_n \in (y_0, y_0 + 2\pi)$ tal que $z_n = |z_n|\,(\cos(\theta_n) + i\,\mathrm{sen}(\theta_n))$. Como $\{z_n\} \to z$, entonces $\{|z_n|\} \to |z| > 0$ y por lo tanto $\{\cos(\theta_n)\} \to \cos(\theta)$ y $\{\mathrm{sen}(\theta_n)\} \to \mathrm{sen}(\theta)$. De lo anterior se concluye que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{sen}(\theta_n - \theta) = \lim_{n\to\infty} (\mathrm{sen}(\theta_n)\cos(\theta) - \mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta_n)) = 0 \tag{2.12}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \cos(\theta_n - \theta) = \lim_{n\to\infty} (\cos(\theta_n)\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta_n)) = 1. \tag{2.13}$$

Aseguramos que $\{\theta_n - \theta\} \to 0$. Si esto no fuera así, deben existir $\varepsilon > 0$ y $\{\theta_{n_k} - \theta\}$ una subsucesión tal que $|\theta_{n_k} - \theta| \geq \varepsilon$ para toda $k \in \mathbb{Z}$.

Por otra parte, como $\theta, \theta_n \in (y_0, y_0 + 2\pi)$ también se tiene que

$$|\theta_{n_k} - \theta| \leq \text{máx}\{\theta - y_0, y_0 + 2\pi - \theta\} < 2\pi$$

para toda $k \in \mathbb{Z}$, de modo que debe existir una subsucesión de la subsucesión (que seguiremos denotando por $\{\theta_{n_k} - \theta\}$ para no complicar la notación) que converge a un cierto número $\alpha$ el cual también satisface que

$$0 < \varepsilon \leq |\alpha| \leq \text{máx}\{\theta - y_0, y_0 + 2\pi - \theta\} < 2\pi. \tag{2.14}$$

Ahora, de la identidad 2.12 se concluye que

$$\text{sen}(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \text{sen}(\theta_{n_k} - \theta) = 0$$

de modo que por las desigualdades 2.14 se tiene que $\alpha = \pm\pi$.

Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} \cos(\theta_{n_k} - \theta) = \cos(\pm\pi) = -1$$

lo cual contradice la identidad 2.13.

Del razonamiento anterior, concluimos que $\{\theta_n - \theta\} \to 0$, es decir que $\{\theta_n\} \to \theta$, de donde se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \log_{y_0}(z_n) = \lim_{n\to\infty} (\ln(|z_n|) + i\theta_n) = \ln(|z|) + i\theta = \log_{y_0}(z)$$

lo que prueba que $\log_{y_0}$ es continua en $z$. ■

De la proposición anterior y las identidades 2.9 y 2.16, tenemos los siguientes corolarios.

**Corolario 2.31** *La rama de la raíz n-ésima de z que tiene como contradominio al conjunto $A_{\alpha,n}$ es continua en el conjunto*

$$\mathbb{C} \setminus \{r(\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}.$$

**Corolario 2.32** *La rama del arcoseno de z que tiene como contradominio al conjunto $B_k$, $k \in \mathbb{Z}$, es continua en el conjunto*

$$\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}.$$

Ya que determinamos el dominio sobre el cual es continua cada rama del logarítmo $\log_{y_0}$, y siguiendo un procedimiento como el del ejemplo 2.23, mostraremos una forma de construir algunos ejemplos de lo que llamaremos ramas continuas de la raíz $n$-ésima de una función $f$, y también ramas continuas del logaritmo de $f$.

Para ello, daremos primero la definición general de estos conceptos.

**Definición 2.33** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $U \subset \Omega$.*

1. *Decimos que la función $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una rama de la raíz n-ésima de $f$ en $U$, si*

$$(g(z))^n = f(z)$$

*para toda $z \in U$.*

2. *Decimos que la función $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una rama del logarítmo de $f$ en $U$, si*

$$\exp(g(z)) = f(z)$$

*para toda $z \in U$.*

Una vez definido el concepto general de rama de una función, formularemos una proposición en la que se construyen ramas continuas de la raíz $n$-ésima y del logarítmo de una función $f$, usando ramas continuas del logarítmo de $z$.

**Proposición 2.34** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $\Omega$ y $U \subset \Omega$.*

1. *Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $f$ son tales que*

$$f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)) \mid r \geq 0\},$$

*entonces la función $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$\begin{aligned} g(z) &:= \left(\exp \circ \left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}\right) \circ f\right)(z) \\ &:= \exp\left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}(f(z))\right) \end{aligned}$$

*es una rama continua de la raíz $n$-ésima de $f$ que "cae" en (o que tiene contradominio) $A_{\alpha,n}$. Si $\alpha = -\pi/n$, diremos que $g$ es la rama principal de la raíz $n$-ésima de $f$ (definida en $U$) y la denotaremos por $\sqrt[n]{f}$.*

2. *Si $y_0 \in \mathbb{R}$ y $f$ es tal que*

$$f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\text{sen}(y_0)) \mid r \geq 0\},$$

*entonces la la función $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$\begin{aligned} g(z) &:= \left(\log_{y_0} \circ f\right)(z) \\ &:= \log_{y_0}(f(z)) \end{aligned}$$

*es una rama continua del logaritmo de $f$ que "cae" en (o que tiene contradominio) $L_{y_0}$. Si $y_0 = -\pi$, diremos que $g$ es la rama principal del logaritmo de $f$ (definida en $U$) y la denotaremos por $\log(f)$.*

Ilustraremos la definición y proposición anteriores con el siguiente

**Ejemplo 2.35** *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1 - z^2$. Como $1 - z^2 \in \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ si y sólo si $z \in \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$, se tiene que si $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$, entonces $f(U) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ de tal forma que la función $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por*

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{2}\log_{-\pi}\left(1 - z^2\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\log\left(1 - z^2\right)\right)$$

*será la rama principal de $\sqrt{1 - z^2}$ en $U$.*

*Observe que de la expresión de $g$ se deduce que $\text{Re}(g(z)) > 0$ para toda $z \in U$.*

Una vez que ya definimos el concepto de rama del logarítmo de una función $f$, ahora mostraremos en el siguiente ejemplo que las ramas de la función arcoseno que aparecen en la definición 2.28 también se pueden expresar en términos de estas ramas del logaritmo. Sólo lo haremos para la rama principal, la que tiene contradominio

$$B_0 := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\pi/2 < x < \pi/2\},$$

pues el caso general se resuelve de forma análoga.

**Ejemplo 2.36** *Si $z \in B_0$, sabemos que $w = \text{sen}(z) \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ y lo que haremos para calcular la función inversa será expresar (o despejar) a $z$ en términos de $w$. Tenemos entonces que*

$$w = \text{sen}(z) = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$$

*de modo que multiplicando de ambos lados de esta identidad por* $2i\exp(iz)$*, llegamos a la ecuación*

$$(\exp(iz))^2 - 2iw\exp(iz) - 1 = 0.$$

*Si ahora hacemos el "cambio de variable"* $\zeta = \exp(iz)$ *se obtiene la ecuación cuadrática*

$$\zeta^2 - 2iw\zeta - 1 = 0 \tag{2.15}$$

*cuyas soluciones son de la forma*

$$\zeta_{1,2} = \frac{2iw \pm \sqrt{-4w^2+4}}{2} = iw \pm \sqrt{1-w^2}$$

*en donde tomamos la rama principal de* $\sqrt{1-w^2}$*, la cual está definida para toda* $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ *(como se mostró en el ejemplo 2.35). En decir, las soluciones de la ecuación cuadrática 2.15 son de la forma*

$$\zeta_1(w) = iw - \sqrt{1-w^2} \quad \text{y} \quad \zeta_2(w) = iw + \sqrt{1-w^2}.$$

*y si recordamos que hicimos el cambio de variable* $\zeta = \exp(iz)$*, tenemos entonces que*

$$\exp(iz) = iw \pm \sqrt{1-w^2}. \tag{2.16}$$

*A fin de determinar cuál de las soluciones* $\zeta_1(w)$ *y* $\zeta_2(w)$ *debemos tomar, primero observe que como* $z \in B_0$*, entonces* $iz \in L_{-\pi}$ *y por lo tanto*

$$\operatorname{Re}(\exp(iz)) > 0, \tag{2.17}$$

*desigualdad que por cierto, nos garantiza que podemos aplicar la rama principal del logaritmo al complejo* $\exp(iz)$ *y así asegurar que*

$$\log(\exp(iz)) = iz.$$

*Para ser consistentes con la identidad 2.16 y la desigualdad 2.17, de entre las soluciones* $\zeta_1(w)$ *y* $\zeta_2(w)$ *debemos elegir entonces aquella cuya parte real sea positiva para toda* $w \in \mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$*.*

*Para determinar cuál de ellas cumple con esta condición, observe que*

$$\zeta_1(w)\zeta_2(w) = \left(iw - \sqrt{1-w^2}\right)\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right) = -1$$

*de donde*

$$\zeta_1(w) = -\frac{1}{\zeta_2(w)}$$

*y por lo tanto*

$$\zeta_2(w) + \frac{1}{\zeta_2(w)} = \zeta_2(w) - \zeta_1(w) = 2\sqrt{1-w^2}.$$

*De esta última identidad se sigue que*

$$\operatorname{Re}\left(\zeta_2(w) + \frac{1}{\zeta_2(w)}\right) = \operatorname{Re}\left(2\sqrt{1-w^2}\right) = 2\operatorname{Re}\left(\sqrt{1-w^2}\right) > 0, \tag{2.18}$$

*para toda* $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in R \mid |x| \geq 1\}$*, como se hizo notar en el ejemplo 2.35.*

*Si ahora recordamos que en el problema 2 se prueba que, si* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$*, entonces*

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \operatorname{Re}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0,$$

*por la expresión 2.18 concluimos que*

$$\operatorname{Re}\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right) = \operatorname{Re}(\zeta_2(w)) > 0$$

*para toda* $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in R \mid |x| \geq 1\}$.

*Con base en el análisis anterior se debe tener entonces que*

$$\exp(iz) = \zeta_2(w) = iw + \sqrt{1-w^2}$$

*para toda* $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in R \mid |x| \geq 1\}$ *de modo que, aplicando la rama principal del logaritmo en ambos lados de la identidad anterior obtenemos que*

$$iz = \log(\exp(iz)) = \log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right)$$

*y por lo tanto*

$$z = -i\log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right),$$

*de donde concluimos que la rama del arcoseno que deseamos calcular está dada por*

$$\operatorname{arcsen}(w) = -i\log\left(iw + \sqrt{1-w^2}\right) \tag{2.19}$$

*para cada* $w \in \mathbb{C} \setminus \{x \in R \mid |x| \geq 1\}$.

Por un argumento muy sencillo es fácil probar que la expresión 2.19 es válida para cualquier rama del arcoseno que tenga como contradominio a un conjunto $B_{2k}$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por otra parte, en el problema 33 el lector probará una expresión análoga para cualquier rama del arcoseno que tenga como contradominio a un conjunto $B_{2k-1}$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Concluimos esta sección y este capítulo con un par de definiciones referentes a la noción de límite y la noción de $\infty$ que introdujimos en el capítulo 1 para obtener los complejos extendidos. En particular, formalizaremos dos conceptos; en el primero de ellos formalizaremos lo que significará que el límite de una función en un punto de $\mathbb{C}$ sea igual a $\infty$, y en el segundo formalizaremos lo que significará que una función tenga límite (finito o $\infty$) en $\infty$. Sin duda estas definiciones resultarán ser muy "naturales" para el lector.

**Definición 2.37** *Sea* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *y* $z_0 \in \mathbb{C}$ *un punto de acumulación de* $A$*, es decir,* $z_0 \in A'$*. Diremos que* $f$ *tiene límite* $\infty$ *en* $z_0$ *si para toda* $M > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $z \in (B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}) \cap A$*, entonces* $|f(z)| > M$*. En este caso escribiremos que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Un ejemplo muy clásico y muy claro de un límite como el de la definición anterior, es el siguiente:

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$$

cuya prueba se deja al lector.

**Definición 2.38** *Sean,* $A$ *un conjunto no acotado y* $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. *Decimos que* $f$ *tiene límite* $l \in \mathbb{C}$ *en* $\infty$ *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $R > 0$ *con la propiedad de que, si* $z \in A$ *es tal que* $|z| > R$*, entonces* $|f(z) - l| < \varepsilon$*. En este caso escribimos que*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = l.$$

2. *Decimos que* $f$ *tiene límite* $\infty$ *en* $\infty$ *si para todo* $M > 0$ *existe* $R > 0$ *con la propiedad de que, si* $z \in A$ *es tal que* $|z| > R$*, entonces* $|f(z)| > M$*. En este caso escribimos que*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

En los problemas 35 y 36 el lector tendrá oportunidad de calcular y probar algunos límites relacionados con estas definiciones.

## 2.5. Problemas

1. Muestre que la función $f(z) = z^2$ transforma las líneas paralelas al eje real en parábolas.

2. Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida como
$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$
   *a*) Pruebe que
$$\mathrm{Re}(z) > 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \mathrm{Re}(f(z)) > 0.$$
   *b*) Determine la imagen bajo $f$ de las circunferencias de radio $r > 0$ con centro en el origen.

   (*Sugerencia*: observe que $f(1/z) = f(z)$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y escriba a $z$ en forma polar).

3. Pruebe que si $T(z) = az$, con $a \neq 0$, o $T(z) = z + c$, y $C \subset \mathbb{C}$ es una recta o una circunferencia, entonces $T(C)$ es una recta o una circunferencia, respectivamente.

4. Sean $L, T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones de Möbius. Pruebe que
$$(L \circ T)^* = L^* \circ T^*$$
   (recuerde que el $*$ representa la extensión de una función a $\mathbb{C}^*$).

5. Pruebe la proposición 2.6.

6. Pruebe que: si $T(z) = (az + b)/(cz + d)$ es una función de Möbius que manda al eje real en si mismo, entonces existen $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ tales que $T(z) = (a'z + b')/(c'z + d')$ para toda $z \in \mathbb{C}^*$.

7. Pruebe que, si $T$ es una función de Möbius tal que $T(0) = 0$ y $|T(z) - T(w)| = |z - w|$ para toda $z, w \in \mathbb{C}$ entonces $T(z) = cz$ para alguna $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$.

8. Encuentra una función de Möbius $L$ tal que: $L(0) = 1, L(i) = -1$ y $L(-i) = 0$.

9. Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ tales que $z_0 \in B_R(0)$. Pruebe que la función $T : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definida como
$$T(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}$$
   es una función de Möbius y que $T(B_R(0)) = B_1(0)$. Calcule la función inversa de $T$.

10. Sean, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ y $z_0 \in \Omega$. Pruebe que la función $T : \mathbb{C} \setminus \{\bar{z}_0\} \to \mathbb{C}$ definida como
$$T(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$$
    es una función de Möbius y que $T(\Omega) = B_1(0)$. Calcule la función inversa de $T$.

11. Para que valores de $z \in \mathbb{C}$ se satisface que $\overline{\exp(iz)} = \exp(i\bar{z})$.

12. Pruebe la identidad 2.7.

13. Pruebe la identidad 2.8.

14. Determine cuál es el error en las siguientes igualdades:
$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = i \cdot i = -1.$$
    (*sugerencia*: relea la observación 2.3).

15. Pruebe que: $\log_{y_0}(z) \neq \log_{y_0'}(z')$ para toda $z, z' \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si y sólo si $|y_0 - y_0'| \geq 2\pi$.

16. Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Pruebe que existen $\theta \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$, tales que
$$\log_{y_0}(z) = \log(cz) + i\theta$$
para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

17. Sea $y_0 \in \mathbb{R}$. Pruebe que: $\log_{y_0}(x) = \ln(x)$ para toda $x > 0$ si y sólo si $-2\pi < y_0 \leq 0$.

18. Determine cuál es el error en las siguientes igualdades:
    *a*) $0 = \log(1) = \log((-1)(-1)) = \log(-1) + \log(-1) = -2i\pi$
    *b*) $i\pi = \log(\exp(i\pi)) = \log(\cos(\pi) + i\operatorname{sen}(\pi)) = \log(-1) = -i\pi$

    (*sugerencia*: relea la observación 2.22).

19. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
    *a*) Pruebe que, si $a, x \in \mathbb{R}$, con $a > 0$, entonces $\exp_a(x) = a^x$.
    *b*) Formule y pruebe las propiedades de la función $\exp_a$ equivalentes a las propiedades de la función exp dadas en la proposición 2.14.

20. Encuentre la imagen de las rectas $x = x_0$ y $y = y_0$ bajo la función coseno. ¿En que regiones es inyectiva esta función?

21. Encuentra todas las $z \in \mathbb{C}$ tales que:
    *a*) $\operatorname{sen}(z) = 4$
    *b*) $\cos(z) = (3 + i)/4$.

22. Sean $z, w \in \mathbb{C}$. Prueba las siguientes identidades:
    *a*) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)\cos(w) + \operatorname{sen}(w)\cos(z)$
    *b*) $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(z)$
    *c*) $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$; $\cos(-z) = \cos(z)$ y $\operatorname{sen}(\pi/2 - z) = \cos(z)$
    *d*) $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}(z)$ si y sólo si $w = 2k\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$
    *e*) $\cos(z + w) = \cos(z)$ si y sólo si $w = 2k\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$.

23. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.
    *a*) Muestre que en la región $\Omega$ se puede definir una rama de la función
    $$\sqrt{\frac{z+1}{z-1}}.$$
    *b*) Muestre que en la región $\Omega$ también se puede definir una rama de la función $\sqrt{z^2 - 1}$.

24. Encuentre una región en la que se pueda definir una rama continua de la función $\sqrt{\exp(z) - 1}$. Encuentre una expresión de dicha rama en términos de alguna rama del logaritmo.

25. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$ (abierto). Pruebe que, si $f$ es continua en $z_0$ y $f(z_0) \neq 0$, entonces existe una vecindad de $z_0$ en la cual se puede definir una rama del logarítmo de $f$ y una rama de la raíz $n$-ésima de $f$.

26. Considerando la distancia $d^*$ definida sobre $\mathbb{C}^*$, pruebe que si $T$ es una función de Möbius, entonces $T^*$ (su extesión a $\mathbb{C}^*$) también es una función continua.

27. Pruebe que la rama del logaritmo $\log_{y_0}$ no tiene límite en cualquier punto de la forma $z = r(\cos(y_0) + i\operatorname{sen}(y_0))$, con $r > 0$.

28. Pruebe que la rama de la raíz $n$-ésima de $z$ que tiene como contradominio al conjunto $A_{\alpha,n}$ no tiene límite en cualquier punto de la forma $z = r(\cos(n\alpha) + i\,\mathrm{sen}(n\alpha))$, con $r > 0$.

29. Sea $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in \mathbb{R}, x - \pi < y < x + \pi\}$. Pruebe que la función $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como

$$g(z) = \log_{(2k-1)\pi}(z)$$

si $z \in \Omega \cap L_{(2k-1)\pi}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, es una rama continua (en $\Omega$) del logarítmo.

30. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $U \subset \Omega$ tal que $f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pruebe que, si $U$ es abierto y conexo, y $g_1, g_2 : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son ramas continuas del logarítmo de $f$ en $U$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g_2(z) = g_1(z) + 2k\pi i$ para toda $z \in U$.

31. Sean, $y_0 \in \mathbb{R}$, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua y $U \subset \Omega$ tal que

$$f(U) \subset \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}\,.$$

Pruebe que, si $U$ es abierto y conexo y $g : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una rama continua del logarítmo de $f$ en $U$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $g(z) = \log_{y_0}(f(z)) + 2k\pi i$ para toda $z \in U$.

32. Sea $g : \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\} \to \mathbb{C}$ definida como

$$g(z) = \cos(\mathrm{arcsen}(z))$$

en donde arcsen es cualquier rama de la función arcoseno.

Pruebe que $g$ es una rama continua de la raíz cuadrada de la función $1 - z^2$ en $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$.

33. Pruebe que cualquier rama del arcoseno que tenga como contradominio a un conjunto $B_k$, con $k \in \mathbb{Z}$ impar, es de la forma

$$\mathrm{arcsen}(w) = -i \log\left(iw - \sqrt{1 - w^2}\right).$$

34. Pruebe la afirmación hecha en la observación 2.29 sobre la no continuidad de la rama del arcoseno en el conjunto $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\}$.

35. Sea $T$ una función de Möbius de la forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Pruebe que, si $c \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \to -d/c} T(z) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z \to \infty} T(z) = \frac{a}{c}.$$

36. Pruebe que, si $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función polinomial de grado mayor o igual que 1, entonces

$$\lim_{z \to \infty} p(z) = \infty.$$

37. Sean, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua (en $\mathbb{C}$) y $l \in \mathbb{C}$. Pruebe que si $\lim_{z \to \infty} f(z) = l$, entonces $f$ está acotada (en $\mathbb{C}$).

# Capítulo 3

# Derivada e integral en $\mathbb{C}$

En este capítulo vamos a introducir los conceptos de derivada e integral de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$. En el caso de la derivada, dado que imitaremos la definición de derivada para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, formularemos todas las propiedades que son análogas en ambos casos, además de las propiedades que sólo son válidas para las funciones definidas en los complejos.

También analizaremos la relación del concepto de derivada compleja con el de derivada de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ dado que las funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ también se pueden ver de esta forma.

Por lo que se refiere al concepto de integral de funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, veremos su relación con el de integral de línea de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, así como las propiedades que sólo son válidas en el caso complejo. Este concepto es básico para la formulación de uno de los teoremas más importantes de la variable compleja: *el teorema de Cauchy*[1].

## 3.1. La derivada en $\mathbb{C}$

De aquí en adelante, todas las funciones que consideraremos estarán definidas sobre $\Omega \subset \mathbb{C}$, un conjunto abierto y conexo al que nos referiremos sólo como una *región* en $\mathbb{C}$.

Dada una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$, definiremos el concepto de derivada de $f$ en $z_0$ de forma análoga a como se hace en el caso real.

**Definición 3.1** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Decimos que $f$ es derivable en $z_0$ si*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

*existe. En este caso al valor de dicho límite lo denotaremos por $f'(z_0)$ y le llamaremos la derivada de $f$ en $z_0$.*

Sin duda el lector recordará que tomando $h = z - z_0$, la existencia del límite anterior es equivalente a la existencia de

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h},$$

razón por la cual en algunas ocasiones usaremos que $f'(z_0)$ también se puede calcular de esta forma.

Como en el caso real, la existencia de la derivada $f'(z_0)$ se puede interpretar geométricamente. En el problema 1, el lector probará que la existencia de $f'(z_0)$ es equivalente a la existencia de una función polinomial de grado uno de la forma

$$p_1(z) = a(z - z_0) + f(z_0)$$

[1]Augustin Louis Cauchy (París, 21 de agosto de 1789 - Sceaux, Lion, 23 de mayo de 1857) fue un matemático francés, miembro de la Academia de Ciencias de Francia y profesor en la Escuela politécnica. Cauchy ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos, solo superado por Leonhard Euler, Paul Erdős y Arthur Cayley con cerca de 800 publicaciones y siete trabajos; su investigación cubre el conjunto de áreas matemáticas de la época. Fue pionero en análisis donde se le debe la introducción de las funciones analíticas, los criterios de convergencia de series y las series de potencias. Sus trabajos sobre permutaciones fueron precursores de la teoría de grupos, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. (Fuente: Wikipedia).

que tiene la propiedad de "parecerse mucho a $f$ cerca (o en una vecindad) del punto $z_0$", en donde esto último significa que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-p_1(z)}{z-z_0} = 0.$$

Desde un punto de vista geométrico, si $a \neq 0$, lo anterior significa que "cerca de $z_0$" la función $f$ realiza una traslación (al punto $f(z_0)$), seguida de una rotación por un ángulo de $\arg(a)$, y una homotecia de magnitud $|a|$.

El primer resultado que formularemos con relación al hecho de que una función sea derivable en un punto $z_0$ es que, como en el caso real, ello implica que la función debe ser continua en dicho punto. Como es de suponerse, la sencilla prueba de esta proposición quedará a cargo del lector.

**Proposición 3.2** *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Si $f$ es derivable en $z_0$, entonces $f$ es continua en $z_0$.*

Dada la completa analogía del concepto de derivada para funciones de variable compleja con el concepto de derivada de las funciones de variable real, las propiedades de la primera con relación a la aritmética de funciones son idénticas a las de la segunda, las cuales dejaremos formuladas en la siguiente

**Proposición 3.3** *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Si $f$ y $g$ son derivables en $z_0$, entonces:*

1. $f + g$ es derivable en $z_0$ y además $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.
2. Si $c \in \mathbb{C}$, $cf$ es derivable en $z_0$ y además $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$.
3. $fg$ es derivable en $z_0$ y además $(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0)$.
4. Si $g(z_0) \neq 0$, entonces $f/g$ es derivable en $z_0$ y además

$$(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - g'(z_0)f(z_0)}{g^2(z_0)}.$$

Por supuesto que la composición de funciones complejo derivables también es derivable, pero su formulación merece una proposición aparte.

**Proposición 3.4** *(regla de la cadena) Sean, $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(\tilde{\Omega}) \subset \Omega$, y $z_0 \in \tilde{\Omega}$. Si $f$ es derivable en $z_0$ y $g$ es derivable en $f(z_0) \in \Omega$, entonces $g \circ f$ es derivable en $z_0$ y además*

$$(g\circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0).$$

**Demostración.** Como seguramente el lector recordará del caso real, la prueba de esta propiedad requiere construir una función auxiliar, de la siguiente forma: definimos $h : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(f(z))-g(f(z_0))}{f(z)-f(z_0)} & \text{si } f(z) \neq f(z_0) \\ \\ g'(f(z_0)) & \text{si } f(z) = f(z_0) \end{cases}$$

Es un hecho fácil de probar (problema 2) que

$$\lim_{z\to z_0} h(z) = g'(f(z_0)) = h(z_0),$$

es decir, que $h$ es continua en $z_0$.

También es fácil mostrar que

$$\frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{z-z_0} = h(z)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

para toda $z \in \tilde{\Omega}$, $z \neq z_0$, de modo que

$$(g\circ f)'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{(g\circ f)(z) - (g\circ f)(z_0)}{z-z_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{z\to z_0} h(z)\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\\
&= g'\left(f(z_0)\right) f'(z_0)
\end{aligned}
$$

con lo que concluimos la prueba. ■

Otro resultado que nos será de gran utilidad para demostrar la derivabilidad de las diferentes ramas que definimos en el capítulo 2 es el siguiente.

**Proposición 3.5** *Sean, $g:\Omega\subset\mathbb{C}\to\tilde{\Omega}\subset\mathbb{C}$, $f:\tilde{\Omega}\subset\mathbb{C}\to\Omega\subset\mathbb{C}$ y $r>0$ tales que $f(g(z))=z$ para toda $z\in B_r(z_0)\subset\Omega$. Si $g$ es continua en $z_0$, y $f$ es derivable en $w_0=g(z_0)$, con $f'(w_0)\neq 0$, entonces $g$ es derivable en $z_0$ y además*

$$g'(z_0)=\frac{1}{f'(g(z_0))}.$$

**Demostración.** Lo primero que tenemos que hacer notar es que de la hipótesis de que $f(g(z))=z$ para toda $z\in B_r(z_0)$ se concluye que $g$ es inyectiva en $B_r(z_0)$.

En virtud de lo anterior, se tiene que

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}=\frac{g(z)-g(z_0)}{f(g(z))-f(g(z_0))}=\frac{1}{\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}}$$

para toda $z\in B_r(z_0)$, $z\neq z_0$, de modo que, como $g$ es continua en $z_0$ y $f'(w_0)\neq 0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\frac{1}{\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}}\\
&= \frac{1}{\lim_{z\to z_0}\frac{f(g(z))-f(g(z_0))}{g(z)-g(z_0)}}\\
&= \frac{1}{f'(w_0)}\\
&= \frac{1}{f'(g(z_0))}
\end{aligned}
$$

con lo cual concluimos la prueba. ■

Ahora notemos que, partiendo de la identificación de los números complejos $z=x+iy\in\mathbb{C}$ con las parejas $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, toda función $f$ de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ se puede ver como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Por lo anterior, sin duda es natural preguntarse qué relación existe entre el concepto de derivabilidad de $f$, vista como función de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, y el concepto de derivabilidad de $f$, vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

A fin de analizar esta relación, pensemos primero a $f$ como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, es decir que $f$ está definida en $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ y que es de la forma $f=(u,v)$, en donde se tiene que $u,v:\Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

Recordemos que si $z_0=(x_0,y_0)\in\Omega$, que $f$ sea derivable en $z_0$ significa que existen las derivadas parciales de $u$ y $v$ (con respecto de $x$ y $y$) en $z_0$ y que la función lineal (que denotamos por $Df(z_0)$) asociada a la matriz (que también denotamos por $Df(z_0)$)

$$Df(z_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0)\\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0)\end{bmatrix}$$

es tal que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{\|f(x,y)-(Df(z_0)(x-x_0,y-y_0)+f(x_0,y_0))\|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0. \tag{3.1}$$

Con base en el problema 10 del capítulo 1, sabemos que si la matriz $Df(z_0)$ es de la forma

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{pmatrix},$$

es decir, si se satisfacen las identidades

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0), \tag{3.2}$$

entonces la expresión

$$f(x,y) - (Df(z_0)(x - x_0, y - y_0) + f(x_0, y_0))$$

se puede escribir de "forma compleja" como

$$f(z) - \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)(z - z_0) + f(z_0)\right).$$

De esta forma, por la identidad 3.1 se tendrá que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{z\to z_0} \frac{\left|f(z) - \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)(z - z_0) + f(z_0)\right)\right|}{|z - z_0|} \\ &= \lim_{z\to z_0} \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)\right)\right| \end{aligned}$$

lo cual sabemos que es equivalente a que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

y lo que a su vez nos lleva a concluir que $f$ será (complejo) derivable en $z_0$ y que además

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0).$$

Resumiendo lo que acabamos de hacer, hemos probado que si $f$ es derivable en $z_0$ (vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) y además se satisfacen las identidades 3.2, entonces $f$ es (complejo) derivable en $z_0$ y que además

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

Afortunadamente, lo recíproco también es cierto; es decir, si $f$ es (complejo) derivable en $z_0$, entonces $f$ es derivable en $z_0$ (vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) y además se satisfacen las multicitadas identidades 3.2, que se conocen con el nombre de *ecuaciones de Cauchy-Riemann*[2].

Todo lo anterior lo dejaremos expresado en una proposición, pero antes daremos la definición formal de lo que significa que una función $f$ satisfaga las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**Definición 3.6** *(ecuaciones de Cauchy-Riemann) Sean, $u, v : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ y $z_0 \in \Omega$. Decimos que $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z_0$ si existen sus derivadas parciales $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x$, y $\partial v/\partial y$ en $z_0$ y además satisfacen que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0).$$

**Proposición 3.7** *Sean, $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Se tiene que $f$ es (complejo) derivable en $z_0$ si y sólo si $f$ es derivable en $z_0$ (vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) y $f$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z_0$.*

[2]Georg Friedrich Bernhard Riemann (Breselenz, Alemania, 17 de septiembre de 1826 - Verbania, Italia, 20 de julio de 1866) fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann. (Fuente: Wikipedia).

**Demostración.** Sólo probaremos que si $f$ es (complejo) derivable en $z_0$, entonces $f$ es derivable en $z_0$ (vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) y que además $f$ satisface la ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z_0$ (la implicación recíproca se probó en los párrafos previos).

Del hecho de que $f$ es (complejo) derivable en $z_0$ se tiene que

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$

de modo que si en particular $h \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left( \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i\frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \end{aligned}$$

en donde recuerde que la existencia de los límites del segundo renglón está garantizada por la existencia del límite del primer renglón.

De forma análoga, si $h = ih'$, con $h' \in \mathbb{R}$, también se debe tener que

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h'\to 0} \frac{f(z_0+ih')-f(z_0)}{ih'} \\ &= \lim_{h'\to 0} \left( \frac{u(x_0,y_0+h')-u(x_0,y_0)}{ih'} + i\frac{v(x_0,y_0+h')-v(x_0,y_0)}{ih'} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \end{aligned}$$

de manera que igualando estas dos expresiones para $f'(z_0)$, se debe tener que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(z_0),$$

es decir, que $f$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z_0$.

Una vez que ya sabemos que existen las derivadas parciales de $u$ y $v$ en $z_0$ y que se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z_0$, podemos hacer

$$Df(z_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix}$$

y escribir, como hicimos en los párrafos anteriores, que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\|f(x,y)-(Df(z_0)(x-x_0,y-y_0)+f(x_0,y_0))\|}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} &= \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z_0) \right) \right| \\ &= \lim_{z\to z_0} \left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0) \right| \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que $f$ es derivable (como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) en $z_0$. ■

Con base en la proposición anterior y en un conocido resultado de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tenemos el siguiente

**Corolario 3.8** *Sean, $u, v : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Si $u$ y $v$ son de clase $C^1$ en $\Omega$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en cada punto de $\Omega$, entonces $f = u + iv$ es derivable para toda $z \in \Omega$.*

Y ya que hablamos de funciones que son derivables en todos los puntos de una región $\Omega$, damos la siguiente

**Definición 3.9** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es analítica en $\Omega$ si $f$ es derivable para toda $z \in \Omega$.*

Una vez que contamos con las definiciones y proposiciones anteriores, estamos en condiciones de mostrar que todas las funciones que definimos en el capítulo 2 son derivables (y por tanto analíticas) en sus correspondientes dominios. Eso lo dejaremos plasmado en el siguiente

**Ejemplo 3.10** *Las siguientes funciones son analíticas.*

1. *La función* exp *que está definida como*

$$\exp(x + iy) = e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))$$

*es analítica en $\mathbb{C}$.*

*En efecto, en este caso se tiene que $u(x, y) = e^x \cos(y)$ y $v(x, y) = e^x \,\mathrm{sen}(y)$ las cuales claramente son de clase $C^1$ en $\mathbb{C}$ y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann ya que*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

*y*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \,\mathrm{sen}(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

*para toda $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Además se tiene que*

$$\begin{aligned}\exp'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\\ &= e^x \cos(y) + ie^x \,\mathrm{sen}(y)\\ &= e^x(\cos(y) + i\,\mathrm{sen}(y))\\ &= \exp(z)\end{aligned}$$

*también para toda $z = x + iy \in \mathbb{C}$.*

2. *Por el inciso anterior es inmediato que las funciones seno y coseno son analíticas en $\mathbb{C}$ y que además*

$$\mathrm{sen}'(z) = \cos(z) \quad \text{y} \quad \cos'(z) = \mathrm{sen}(z).$$

3. *Por la proposición 3.5, si $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una rama continua del logaritmo de $z$ (en $\Omega$), entonces $g$ es analítica y además*

$$\begin{aligned}g'(z) &= \frac{1}{\exp'(g(z))}\\ &= \frac{1}{\exp(g(z))}\\ &= \frac{1}{z}\end{aligned}$$

*para toda $z \in \mathbb{C}$. En particular, para cualquier $y_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\log_{y_0}(z) = \frac{1}{z}.$$

*para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \mid r \geq 0\}$.*

4. *Sabemos que si $g$ es la rama de la raíz $n$-ésima de $z$ que tiene como contradominio al conjunto $A_{\alpha,n}$, ésta se puede expresar como*

$$g(z) = \exp\left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}(z)\right)$$

*para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \mid r \geq 0\}$ y que en este conjunto es continua. Por lo tanto $g$ es analítica en este conjunto y además*

$$\begin{aligned} g'(z) &= \exp\left(\frac{1}{n}\log_{n\alpha}(z)\right)\frac{1}{n}\frac{1}{z} \\ &= \frac{g(z)}{nz} \\ &= \frac{1}{n}\frac{g(z)}{(g(z))^n} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{(g(z))^{n-1}}. \end{aligned}$$

*Observe que en el caso de $n = 2$ (la raíz cuadrada) se tiene que*

$$g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$$

*de modo que para la rama principal de la raíz cuadrada se tiene que*

$$\frac{d}{dz}\left(\sqrt{z}\right) = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

*(en donde esperamos que al lector le quede claro que $d/dz$ denota la derivada de la función $\sqrt{z}$).*

5. *Las ramas de la función arcoseno cuyo contradominio es algún $B_k$, con $k \in \mathbb{Z}$ par, son analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. En efecto, de acuerdo con la expresión de la función arcoseno que se dedujo en el ejemplo 2.36 del capítulo 2, se tiene que*

$$\mathrm{arcsen}(z) = -i\log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

*de modo que*

$$\begin{aligned} \mathrm{arcsen}'(z) &= -i\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\left(i + \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) \\ &= -i\left(\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\right) i \left(\frac{\sqrt{1-z^2}-iz}{\sqrt{1-z^2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}. \end{aligned}$$

## 3.2. La integral en $\mathbb{C}$

El concepto de integral en los números complejos es análogo al concepto de integral de línea para funciones (o campos vectoriales) de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. Por esta razón, lo primero que haremos será revisar el concepto de curva parametrizada en $\mathbb{C}$ el cual resultará idéntico al de curva parametrizada en $\mathbb{R}^2$.

Como el lector seguro recuerda, una curva $C$ en $\mathbb{R}^2$ es la imagen de una función continua $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, en donde a las funciones $\gamma_1$ y $\gamma_2$ se les llamó las funciones coordenadas y a la función $\gamma$ una parametrización de $C$. Pues bien, de aquí en adelante lo único que cambiaremos será la notación; en lugar de escribir $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ ahora escribiremos $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ y diremos que $\gamma_1$ es la parte real de $\gamma$ ($\gamma_1 = \mathrm{Re}(\gamma)$) y $\gamma_2$ es la parte imaginaria de $\gamma$ ($\gamma_2 = \mathrm{Im}(\gamma)$).

En cuanto al concepto de derivada de este tipo de funciones, este será el mismo que se tenía en $\mathbb{R}^2$. Como también el lector recordará, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es derivable en $t_0 \in I$ si y sólo si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son derivables $t_0$ y escribimos que $\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(t_0))$. Pues bien, la condición de derivabilidad de $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$ será exactamente la misma ($\gamma$ es derivable en $t_0 \in I$ si y sólo si $\gamma_1$ y $\gamma_2$ son derivables en $t_0$) y ahora simplemente escribiremos que $\gamma'(t_0) = \gamma_1'(t_0) + i\gamma_2'(t_0)$.

En sus cursos de cálculo el lector probó que si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{R}^2$ es derivable en $t_0 \in I$ y $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es derivable en $\gamma(t_0) = z_0 \in \Omega$, entonces $f \circ \gamma$ es derivable en $t_0$ (la regla de la cadena). Pues bien, ahora enunciaremos el resultado equivalente sólo que ahora supondremos que $f$ es (complejo) derivable.

**Proposición 3.11** *Sean $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $\gamma$ es derivable en $t_0 \in I$ y $f$ es derivable en $\gamma(t_0) = z_0 \in \Omega$, entonces $f \circ \gamma$ es derivable en $t_0$ y además*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\, \gamma'(t_0)$$

*(en donde, por supuesto, el término de la derecha de esta igualdad se refiere al producto de los números complejos $f'(\gamma(t_0))$ y $\gamma'(t_0)$).*

La prueba de esta proposición se sigue de manera inmediata de la proposición 3.7 y la correspondiente regla de la cadena para el caso real y su prueba se deja al lector.

Y ya que contamos con la proposición 3.11, podemos aprovechar para introducir un concepto que es muy importante en el ámbito de las funciones analíticas: el concepto de *función* (o *mapeo*) *conforme*. Para ello, lo primero que necesitamos hacer es definir el concepto de ángulo formado por dos curvas en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$, punto en el cual se intesecan.

**Definición 3.12** *Sean, $\gamma : I_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $\sigma : I_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ derivables en $t_0 \in I_1$ y $u_0 \in I_2$, respectivamente, tales que $\gamma(t_0) = \sigma(u_0) = z_0$. Si $\gamma'(t_0) \neq 0$ y $\sigma'(u_0) \neq 0$, decimos que el ángulo formado por $\gamma$ y $\sigma$ en $z_0$ está dado por*

$$\arg(\gamma'(t_0)/\sigma'(s_0)) \in [-\pi, \pi).$$

Una vez que tenemos este concepto, podemos definir el concepto de función (o mapeo) conforme.

**Definición 3.13** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Decimos que $f$ es conforme en $z_0$ si para todo par de curvas $\gamma$ y $\sigma$ que se intersecan en $z_0$ y que en este punto forman un ángulo $\theta \in [-\pi, \pi)$, se tiene que las curvas $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ y $\tilde{\sigma} = f \circ \sigma$ forman el mismo ángulo $\theta$ en el punto $f(z_0)$.*

Con estas dos definiciones podemos dar un resultado muy importante que describe de manera muy clara el comportamiento geométrico de una función que es derivable en un punto $z_0$ de su dominio, cuando se tiene que $f'(z_0) \neq 0$. Este resultado lo formulamos en la siguiente proposición cuya prueba también se deja al lector en virtud de que ésta es una consecuencia inmediata de la proposición 3.11.

**Proposición 3.14** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivable en $z_0 \in \Omega$. Si $f'(z_0) \neq 0$, entonces $f$ es conforme en $z_0$.*

Una vez que hemos establecido lo que entenderemos por una curva $C \subset \mathbb{C}$, y antes de definir el concepto de integral de una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sobre una de estas curvas $C \subset \Omega$, es necesario hacer antes dos cosas:

1. definir lo que entenderemos por la integral de una función continua $h = h_1 + ih_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sobre un intervalo $[a, b] \subset I$, y
2. establecer el tipo de curvas sobre las cuales definiremos la integral de una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Empezaremos con el primer punto en la siguiente

**Definición 3.15** *Sea $h = h_1 + ih_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continua en $I$. Si $[a, b] \subset I$, definimos la integral de $h$ sobre $[a, b]$, que denotamos por $\int_a^b h(t)dt$, como el número complejo dado por*

$$\int_a^b h(t)dt := \int_a^b h_1(t)dt + i \int_a^b h_2(t)dt.$$

Como es de suponerse, esta integral "hereda" todas las propiedades de la integral de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, las cuales dejamos establecidas en la siguiente

**Proposición 3.16** *Sean $h, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continuas en $I$ y $[a,b] \subset I$. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1.
$$\operatorname{Re}\left(\int_a^b h(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Re}(h(t))\,dt$$
*y*
$$\operatorname{Im}\left(\int_a^b h(t)dt\right) = \int_a^b \operatorname{Im}(h(t))\,dt.$$

2.
$$\int_a^b (h+g)(t)dt = \int_a^b h(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

3. *Si $c \in \mathbb{C}$, entonces*
$$\int_a^b (ch)(t)dt = c\int_a^b h(t)dt.$$

4.
$$\left|\int_a^b h(t)dt\right| \leq \int_a^b |h(t)|\,dt.$$

**Demostración.** Sin duda las pruebas de los incisos 1, 2 y 3 son muy sencillas, razón por la que sólo haremos la prueba del inciso 4. Hagamos
$$c = \int_a^b h(t)dt.$$
Si $c = 0$, la desigualdad que deseamos probar es inmediata, por lo que supongamos que $c \neq 0$. Si escribimos
$$c = |c|\left(\cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)\right) = |c|\,e^{i\theta}$$
con $\theta = \arg(c) \in [-\pi, \pi)$, entonces
$$|c| = e^{-i\theta}c$$
de modo que, usando los incisos 1 y 3 y el hecho de que $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ para toda $z \in \mathbb{C}$, se tiene que
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b h(t)dt\right| &= |c| \\
&= \operatorname{Re}(|c|) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}c\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(e^{-i\theta}\int_a^b h(t)dt\right) \\
&= \operatorname{Re}\left(\int_a^b \left(e^{-i\theta}h\right)(t)dt\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b \operatorname{Re}\left(\left(e^{-i\theta}h\right)(t)\right) dt \\
&\leq \int_a^b \left|e^{-i\theta}h(t)\right| dt \\
&= \int_a^b |h(t)|\, dt
\end{aligned}
$$

con lo cual probamos la desigualdad deseada. ■

Para abordar el segundo punto mencionado anteriormente, daremos la definición de lo que entenderemos por una *curva suave por pedazos*.

**Definición 3.17** *Sea $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Decimos que $\gamma$ es una curva suave por pedazos si existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que $\gamma$ tiene derivada continua (de clase $C^1$) en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (para $i = 1, \ldots, k$). A la imagen $\Gamma = \gamma([a,b])$ le llamaremos una curva suave por pedazos y diremos que $\gamma$ es una parametrización suave por pedazos de $\Gamma$. A $\gamma(a)$ le llamaremos el punto inicial de $\gamma$ y a $\gamma(b)$ el punto final de $\gamma$, y si $\gamma(a) = \gamma(b)$ decimos que $\gamma$ es cerrada.*

**Observación 3.18** *Con relación a la definición anterior es importante hacer la siguiente observación: en un abuso de lenguaje, y con ánimo de "simplificar" un poco la notación, de aquí en adelante a la función $\gamma$ también le llamaremos "la curva" $\gamma$ como una forma de referirnos a la curva $\Gamma = \gamma([a,b])$.*

También es importante mencionar que la definición 3.17 coincide con la definición 3.1 dada en [4] (para el caso de $\mathbb{R}^2$). Por esta razón, y para no abultar el contenido de este texto, omitiremos otro par de definiciones relacionadas con estas curvas: la definición de la "*suma*" (o unión) de dos curvas de este tipo (definición 3.3), y la definición de *reparametrización* de una de estas curvas (definición 3.4). En caso de ser necesario, pedimos al lector que consulte la referencia citada.

Con relación al comentario anterior, sólo haremos una excepción: si $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función suave por pedazos, denotaremos por $-\gamma$ a la función (también de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$) definida como

$$(-\gamma)(t) := \gamma(a + b - t).$$

Como el lector seguramente recordará, $-\gamma$ es una reparametrización de $\gamma$ que tiene la propiedad de "recorrer" la misma curva, sólo que en "sentido contrario".

Una vez que hemos dado las definiciones y proposiciones anteriores, ya tenemos todo lo necesario para enunciar el primer concepto de integral que abordaremos. Este concepto está muy relacionado con el concepto de integral de línea de campos escalares (y que ahora llamaremos integral por longitud de arco) que el lector vio en sus cursos de cálculo.

**Definición 3.19** *Sean, $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua, y $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos. Definimos la integral por longitud de arco de $f$ sobre (o según la parametrización) $\gamma$, que denotaremos por $\int_\gamma f(z)\,|dz|$, como*

$$\int_\gamma f\,|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\, dt.$$

Obsérvese que si escribimos la definición anterior en términos de la parte real (la función $u$) e imaginaria (la función $v$) de $f$, se tiene que

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_a^b u(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\, dt + i\int_a^b v(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\, dt$$

y como se podrá notar, cada una de las integrales del término de la derecha coincide (tomando en cuenta las diferencias de notación) con lo que en [4] (definición 3.4) se definió como la integral de línea de las funciones escalares $u$ y $v$, respectivamente.

En cuanto al nombre que usamos para referirnos a esta integral, este se "justifica" por el hecho de que, si en particular la función $f$ es la constante 1 ($f \equiv 1$), entonces se tiene que

$$\int_{\gamma} f(z)\,|dz| = \int_{a}^{b} |\gamma'(t)|\,dt$$

y como seguramente el lector recordará, la integral de la derecha coincide con ser lo que en cálculo llamamos *la longitud de la curva* $\gamma$ y que ahora denotaremos por $l(\gamma)$.

En virtud de lo anterior, daremos una proposición en la que resumiremos las propiedades más importantes de este tipo de integral, de las cuales casi todas ellas se deducen de manera inmediata de las correspondientes propiedades de la integral de línea de campos escalares.

**Proposición 3.20** *Sean, $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continuas, $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ y $\delta : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ curvas suaves por pedazos. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $$\left|\int_{\gamma} f(z)\,|dz|\right| \leq \int_{\gamma} |f(z)|\,|dz|\,.$$

2. *Para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se cumple que*

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))\,|dz| = \alpha \int_{\gamma} f(z)\,|dz| + \beta \int_{\gamma} g(z)\,|dz|\,.$$

3. *Si $\gamma(b) = \delta(c)$, es decir si podemos "pegar" (o unir) $\gamma$ con $\delta$, entonces*

$$\int_{\gamma+\delta} f(z)\,|dz| = \int_{\gamma} f(z)\,|dz| + \int_{\delta} f(z)\,|dz|\,.$$

4. *Si $\delta$ es una reparametrización de $\gamma$ (sin importar si preserva o invierte la orientación de $\gamma$), entonces*

$$\int_{\delta} f(z)\,|dz| = \int_{\gamma} f(z)\,|dz|\,.$$

*En particular se tiene que*

$$\int_{-\gamma} f(z)\,|dz| = \int_{\gamma} f(z)\,|dz|\,.$$

**Demostración.** El inciso 1 es una consecuencia inmediata del inciso 4 de la proposición 3.16 y los incisos 2, 3 y 4 se siguen fácilmente de las proposiciones 3.1, 3.2 y 3.3, todas ellas proposiciones de [4], lo cual se deja al lector verificarlo. ■

Salvo por la proposición anterior, y como sucede en el caso de la integral de línea de campos escalares, no hay mucho más que decir acerca de este concepto de integral. Por esta razón, ahora nos enfocaremos en el otro concepto de integral, que sin duda es el más importante de los dos que veremos.

Como en el caso de la integral por longitud de arco, el siguiente concepto de integral que veremos también está muy relacionado con el concepto de integral de línea de campos vectoriales.

**Definición 3.21** *Sean, $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua, y $\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2 : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos. Definimos la integral de $f$ sobre (o según la parametrización) $\gamma$, que denotaremos por $\int_\gamma f(z)dz$, como*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Lo primero que es importante observar de la definición anterior es que, como

$$\begin{aligned} f(\gamma(t))\gamma'(t) &= (u(\gamma(t)) + iv(\gamma(t)))(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)) \\ &= (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t)) \\ &\quad + i(u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t)), \end{aligned}$$

entonces podemos escribir que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt &= \int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_1'(t) - v(\gamma(t))\gamma_2'(t))\,dt \\ &\quad + i\int_a^b (u(\gamma(t))\gamma_2'(t) + v(\gamma(t))\gamma_1'(t))\,dt \\ &= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\,dt \\ &\quad + i\int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\,dt. \end{aligned}$$

Como el lector seguramente estará de acuerdo, si ahora construimos los campos vectoriales (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) $F = (u, -v) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $G = (v, u) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, usando la definición 3.5 de [4] (y su notación), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (u(\gamma(t)), -v(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\,dt + i\int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t))) \cdot (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))\,dt \\ &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt + i\int_a^b G(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\ &= \int_\Gamma F \cdot d\gamma + i\int_\Gamma G \cdot d\gamma, \end{aligned}$$

en donde recuerde que $\Gamma = \gamma([a, b])$. Es decir, la integral que acabamos de definir se puede expresar en términos de la integral de línea de dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^2$, la misma integral de línea de campos vectoriales que se definió en cálculo.

Ilustraremos la definición anterior con el cálculo de una integral que con frecuencia aparecerá en este texto.

**Ejemplo 3.22** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

*y* $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ *definida como*

$$\gamma(t) = r(\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(t)) + z_0 = r\exp(it) + z_0 = re^{it} + z_0.$$

*Como es fácil de verificar,* $\gamma$ *es la parametrización de la circunferencia de radio* $r$ *con centro en* $z_0$ *recorrida (una vez) en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Claramente se tiene que* $\gamma'(t) = ire^{it}$ *para toda* $t \in [0, 2\pi]$ *de tal forma que*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} f(z)dz &= \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= 2\pi i.\end{aligned}$$

La relación que hay entre la integral de una función $f$ (de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$) y las integrales de línea de ciertos campos vectoriales (de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) es muy importante pues nos permite formular (y probar) algunas de las propiedades más elementales de la integral que acabamos de definir, como las que se dan en la siguiente

**Proposición 3.23** *Sean,* $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *continuas,* $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ *y* $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ *curvas suaves por pedazos. Se satisfacen las siguientes propiedades:*

1.
$$\left| \int\limits_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz|\,.$$

2. *Para cualesquiera* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *se cumple que*
$$\int\limits_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))\, dz = \alpha \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \beta \int\limits_{\gamma} g(z)dz.$$

3. *Si* $\gamma(b) = \delta(c)$*, es decir si podemos "pegar" (o unir)* $\gamma$ *con* $\delta$*, entonces*
$$\int\limits_{\gamma+\delta} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_{\delta} f(z)dz.$$

4. *Si* $\delta$ *es una reparametrización de* $\gamma$ *que preserva la orientación de* $\gamma$*, entonces*
$$\int\limits_{\delta} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

   *Si* $\delta$ *invierte la orientación de* $\gamma$*, entonces*
$$\int\limits_{\delta} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

   *En particular se tiene que*
$$\int\limits_{-\gamma} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

**Demostración.** Como en el caso de la proposición 3.20, el inciso 1 es una consecuencia inmediata del inciso 4 de la proposición 3.16 y los incisos 2, 3 y 4 se siguen fácilmente de las proposiciones 3.4, 3.5 y 3.6, todas ellas proposiciones de [4], lo cual otra vez se deja al lector que lo verifique. ■

Como se recordará, una pregunta muy importante con relación a la integral de línea de campos vectoriales fue la siguiente: ¿bajo qué condiciones la integral de línea de un campo vectorial $F$ sólo depende de los valores inicial y final de una parametrización $\gamma$? Como también se recordará la respuesta a esta pregunta se encontró en los llamados campos conservativos (o gradiente), aquellos que se pueden expresar como el gradiente de una cierta función escalar.

Pues bien, la misma pregunta también es muy importante para la integral de una función $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y gracias (nuevamente) a la relación de la integral de $f$ con la integral de línea de los campos vectoriales $(u, -v)$ y $(v, u)$ podemos dar una respuesta.

En efecto, observe que si los campos $(u, -v)$ y $(v, u)$ son gradientes en la región $\Omega$, esto significa que existen $\varphi, \psi : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ tales

$$\nabla\varphi(z) = (u, -v)(z) \quad \text{y} \quad \nabla\psi(z) = (v, u)(z)$$

para toda $z \in \Omega$. De estas dos identidades concluimos que las funciones $\varphi$ y $\psi$ son de clase $C^1$ en $\Omega$ y además se cumple que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(z) = u(z) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(z) = -v(z) = -\frac{\partial\psi}{\partial x}(z)$$

para toda $z \in \Omega$.

Como el lector ya habrá notado, las identidades anteriores no son más que la ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones $\varphi$ y $\psi$ de tal forma que, por el corolario 3.8 se tiene que la función $g = \varphi + i\psi : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en $\Omega$ y que además

$$g'(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(z) + i\frac{\partial\psi}{\partial x}(z) = u(z) + iv(z) = f(z)$$

para toda $z \in \Omega$.

En resumen, los argumentos anteriores son una parte de la prueba del siguiente

**Teorema 3.24** *Sea $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. La función $f$ tiene una primitiva en $\Omega$. Es decir, que existe $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica (en $\Omega$) tal que $g'(z) = f(z)$ para toda $z \in \Omega$.

2. Para cualquier curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ suave por pedazos y cerrada (es decir que $\gamma(a) = \gamma(b)$) se tiene que

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

3. Para cualquier curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ suave por pedazos, el valor de la integral $\int_{\gamma} f(z)dz$ sólo depende de los valores inicial y final de $\gamma$ ($\gamma(a)$ y $\gamma(b)$). Es decir, si $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ es otra curva suave por pedazos tal que $\delta(c) = \gamma(a)$ y $\delta(d) = \gamma(b)$, entonces

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\delta} f(z)dz.$$

**Demostración.** La prueba de que $1 \Rightarrow 2$ es la siguiente: observe que

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} g'(z)dz$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b (g \circ \gamma)'(t)dt \\
&= (g \circ \gamma)(b) - (g \circ \gamma)(a) \\
&= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

La prueba de que $2 \Rightarrow 3$ se deduce rápidamente de la correspondiente implicación de los incisos 2 y 3 del teorema 3.1 de [4]. Finalmente, la prueba de que $3 \Rightarrow 1$ también se deduce de la implicación de los incisos 3 y 1 (de la misma referencia) y de los argumentos dados en el párrafo anterior a este teorema. ■

El resultado anterior es muy importante, ya que nos permite ubicar una de las preguntas más importantes del cálculo complejo, y cómo se ha abordado su respuesta. La pregunta la podemos plantear de la siguiente manera: dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ¿bajo qué condiciones (sobre $f$ y sobre $\Omega$) podemos asegurar que $f$ tiene una primitiva en $\Omega$? Y la manera de buscar la respuesta a esta pregunta es tratando de encontrar bajo qué condiciones, también sobre $f$ y sobre $\Omega$, se satisface la condición del inciso 2 del mencionado teorema. Y justo de eso es de lo que trata el resultado que veremos en la siguiente sección: *el teorema de Cauchy*.

## 3.3. El teorema de Cauchy (primera versión)

Una vez definidos los conceptos de derivada e integral para funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, ahora desarrollaremos las herramientas necesarias para poder hacer un análisis más minucioso de las propiedades de este tipo de funciones.

Sin lugar a dudas el resultado más representativo y conocido de la variable compleja es el *teorema de Cauchy*. Existen muchas versiones y formulaciones de él y en esta sección daremos una de las más sencillas. Es importante destacar que con esta versión nos será suficiente para responder (para cierto tipo de regiones) la pregunta que planteamos en el párrafo final de la sección anterior, y también probar una buena cantidad de propiedades de las funciones de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, propiedades que tienen la característica de describir el comportamiento "local" de este tipo de funciones.

En términos muy generales, el teorema de Cauchy establece condiciones bajo las cuales la integral de una función $f$ (definida en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$) sobre una una curva (suave por pedazos) $\Gamma \subset \Omega$ es igual a 0. La hipótesis sobre la función $f$ siempre será la misma: que sea analítica en $\Omega$. En cuanto a la región $\Omega$, la primera versión que veremos sólo requerirá justo eso, que sea una región (es decir, un abierto conexo). Y por lo que se refiere a la curva $\Gamma \subset \Omega$, en esta versión supondremos que $\Gamma$ es la frontera de un rectángulo cerrado $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$, es decir, que $\Gamma = Fr(R) = \partial R$. Por esta razón, esta primera versión es conocida como el *teorema de Cauchy para rectángulos* o *teorema de Goursat*[3].

**Teorema 3.25 (teorema de Goursat)** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica (en $\Omega$) y $R = [a, b] \times [c, d] \subset \Omega$ (un rectángulo cerrado). Si $\Gamma = Fr(R) = \partial R$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

*en donde $\gamma$ es una parametrización de $\Gamma$ que la recorre en sentido contrario a las manecillas del reloj (sentido antihorario).*

**Demostración.** Para simplificar la notación, escribiremos que

[3] Jean-Baptiste Édouard Goursat (Lanzac, 21 de mayo de 1858 - París, 25 de noviembre de 1936). Matemático francés mejor conocido por su versión del teorema de Cauchy. (Fuente: Wikipedia).

1. $$I(R) = \int_{\gamma} f(z)dz,$$

2. $d(R) = |(a + ic) - (b + id)|$ (la diagonal de $R$), y

3. $l(R)$ el perímetro de $R$ (o la longitud de $\Gamma$).

El primer paso de esta prueba consiste en subdividir el rectángulo $R$ en cuatro subrectángulos iguales $R^{(1)}, R^{(2)}, R^{(3)}$ y $R^{(4)}$ (los cuales se obtienen subdividiendo por la mitad a los intervalos $[a, b]$ y $[c, d]$). Si $\gamma_k$ es una parametrización en sentido antihorario de cada $\Gamma_k = \partial R^{(k)}$, cancelando las correspondientes integrales sobre los segmentos que comparten los subrectángulos $R^{(k)}$ (ver figura 3.1), se deduce que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz,$$

de modo que si usamos la misma notación que dimos al inicio, para cada subrectángulo $R^{(k)}$ tendremos que

$$I(R) = I\left(R^{(1)}\right) + I\left(R^{(2)}\right) + I\left(R^{(3)}\right) + I\left(R^{(4)}\right).$$

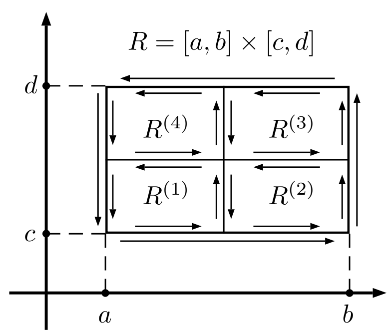



Figura 3.1: La subdivisión del rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ en la prueba del teorema de Goursat.

Por lo tanto, por la desigualdad del triángulo se concluye que al menos uno de los números $I(R^{(k)})$ (digamos que $I(R^{(1)})$) satisface que

$$\left|I\left(R^{(1)}\right)\right| \geq \frac{|I(R)|}{4}.$$

Si repetimos el mismo proceso de subdivisión, ahora con el subrectángulo $R_1 = R^{(1)}$, podemos concluir que existe un subrectángulo $R_2 \subset R_1$ tal que

$$|I(R_2)| \geq \frac{|I(R_1)|}{4}.$$

Nótese que siguiendo este proceso de manera inductiva, obtenemos una sucesión $\{R_k\}$ de rectángulos cerrados que tienen las siguientes propiedades:

1. $R_{k+1} \subset R_k \subset R$ para toda $k \in \mathbb{N}$,

2. $|I(R_{k+1})| \geq |I(R_k)|/4$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y

3. $d(R_{k+1}) = d(R_k)/2$ y $l(R_{k+1}) = l(R_k)/2$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Observe que de los puntos 2 y 3 se deduce que

$$\begin{aligned} |I(R)| &\leq 4^k |I(R_k)|, \\ d(R_k) &= \frac{d(R)}{2^k}, \quad \text{y} \\ l(R_k) &= \frac{l(R)}{2^k} \end{aligned} \tag{3.3}$$

para toda $k \in \mathbb{N}$.

De la primera identidad se deduce que el diámetro de los rectángulos $R_k$ tiende a 0, de modo que por el teorema de los rectángulos anidados, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{z_0\}.$$

Como $z_0 \in R \subset \Omega$, entonces $f$ es derivable en $z_0$ y por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} |z - z_0|$$

para toda $z \in B_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \delta\} \subset \Omega$.

Ahora observe que la función

$$g(z) = f(z_0)z + \frac{1}{2}f'(z_0)(z - z_0)^2$$

es tal que

$$g'(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

para toda $z \in \mathbb{C}$ de tal forma que, por el teorema 3.24, si $\tilde{\gamma}_k$ es parametrización (antihoraria) de $\partial R_k$, se tiene que

$$\int_{\tilde{\gamma}_k} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz = 0$$

para toda $k \in \mathbb{N}$.

Finalmente, dado que $z_0 \in R_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, y que el diámetro de los $R_k$ tiende a 0, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $R_k \subset B_\delta(z_0)$.

Con toda la información anterior, tenemos que si $k \geq N$, entonces $|z - z_0| \leq d(R_k)$ para toda $z \in \partial R_k \subset R \subset B_\delta(z_0)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} |I(R_k)| &= \left| \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz \right| \\ &= \left| \int_{\tilde{\gamma}_k} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}_k} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0))dz \right| \\ &= \left| \int_{\tilde{\gamma}_k} (f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0))\, dz \right| \\ &\leq \int_{\tilde{\gamma}_k} |f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|\, |dz| \\ &\leq \int_{\tilde{\gamma}_k} \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} |z - z_0|\, |dz| \\ &= \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} \int_{\tilde{\gamma}_k} |z - z_0|\, |dz| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} d(R_k) \int_{\tilde{\gamma}_k} |dz|$$
$$= \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} d(R_k) l(R_k).$$

Si ahora usamos la desigualdad e identidades de 3.3, concluimos que si $k \geq N$, entonces

$$\begin{aligned} |I(R)| &\leq 4^k |I(R_k)| \\ &\leq 4^k \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} d(R_k) l(R_k) \\ &= 4^k \frac{\varepsilon}{d(R)l(R)} \left(\frac{d(R)}{2^k}\right)\left(\frac{l(R)}{2^k}\right) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = I(R) = 0$$

como se deseaba demostrar. ■

Con base en el teorema de Goursat podremos dar una versión un poco más general del teorema de Cauchy. Será más general en cuanto a las curvas sobre las cuales se integrará a la función $f$, pero a cambio de ello tendremos que restringir el tipo de región $\Omega$ sobre la cual está definida; en esta versión $\Omega$ sólo podrá ser cualquier disco (o vecindad) de la forma $B_r(z_0)$.

Para simplificar la prueba del siguiente teorema, introducimos la siguiente notación: si $z, w \in \mathbb{C}$, denotamos por $[z, w]$ al segmento de recta que une a $z$ con $w$; es decir

$$[z, w] := \{z + t(w - z) \mid t \in [0, 1]\}.$$

**Teorema 3.26 (de Cauchy (versión local))** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $f = u + iv : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $B_r(z_0)$ y $\gamma \subset B_r(z_0)$ es cualquier curva cerrada suave por pedazos, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**Demostración.** De acuerdo con el teorema 3.24, probaremos que $f$ tiene una primitiva en $B_r(z_0)$, es decir, que existe $g : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $g'(z) = f(z)$ para toda $z \in B_r(z_0)$.

Supongamos que $z_0 = x_0 + iy_0$. Para cada $z = x + iy \in B_r(z_0)$, llamamos:

1. $\gamma_x$ a la curva suave por pedazos formada por los dos segmentos $[z_0, x_0 + iy]$ y $[x_0 + iy, x + iy]$, que empieza en $z_0$ y termina en $z$, y

2. $\gamma_y$ a la curva suave por pedazos formada por los dos segmentos $[z_0, x + iy_0]$ y $[x_0 + iy_0, x + iy]$, que también empieza en $z_0$ y termina en $z$.

Como se observa en la figura 3.2 (y se puede probar fácilmente), la unión de las curvas $\gamma_x$ y $\gamma_y$ coinciden con ser la frontera de un rectángulo $R \subset B_r(z_0)$, de modo que, por el teorema de Goursat se tiene que

$$\int_{\gamma_x} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_y} f(\zeta)d\zeta.$$

Con base en lo anterior, definimos $g : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$g(z) = \int_{\gamma_x} f(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_y} f(\zeta)d\zeta.$$

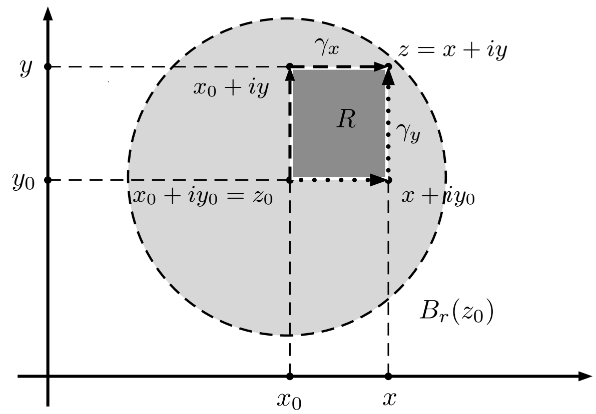



Figura 3.2: Las curvas poligonales $\gamma_x$ y $\gamma_y$ coinciden con la frontera del rectángulo $R$.

Ahora veremos que $g$ es una primitiva de $f$ en $B_r(z_0)$, y para ello probaremos que se satisfacen las condiciones del problema 5 de este capítulo. Si $h \in \mathbb{R}$, con base en el inciso 3 de la proposición 3.23, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left( \int\limits_{\gamma_x \cup [z,z+h]} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\gamma_x} f(\zeta)d\zeta \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)d\zeta \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th)hdt \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 u(x+th,y)dt + i \lim_{h\to 0} \int_0^1 v(x+th,y)dt \\
&= u(x,y) + iv(x,y) \\
&= f(z).
\end{aligned}
$$

Análogamente se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial y}(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(z+ih)-g(z)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left( \int\limits_{\gamma_y \cup [z,z+ih]} f(\zeta)d\zeta - \int\limits_{\gamma_y} f(\zeta)d\zeta \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{[z,z+ih]} f(\zeta)d\zeta \\
&= i \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+tih)hdt
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= i\left(\lim_{h\to 0}\int_0^1 u(x,y+th)dt + i\lim_{h\to 0}\int_0^1 v(x,y+th)dt\right)\\
&= i\left(u(x,y)+iv(x,y)\right)\\
&= if(z).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que $g$ satisface las condiciones del problema 5 y que

$$g'(z) = \frac{\partial g}{\partial x}(z) = f(z)$$

para toda $z \in B_r(z_0)$, lo cual prueba que $g$ es una primitiva de $f$ en $B_r(z_0)$. ■

El teorema de Goursat (3.25) permite una generalización que resultará muy importante, pues con base en ella podremos dar un resultado un poco más general a la versión anterior del teorema de Cauchy.

**Teorema 3.27** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $R \subset \Omega$ un rectángulo cerrado y $z_1, \ldots, z_n \in \operatorname{int}(R)$ (el interior de $R$). Si $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica y*

$$\lim_{z\to z_j}(z - z_j)f(z) = 0,$$

*para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$

*en donde $\gamma$ es una parametrización (antihoraria) de $\Gamma = \partial R$.*

**Demostración.** Primero notemos que el rectángulo $R$ se puede subdividir en subrectángulos $R_1, \ldots, R_m$ de tal forma que en el interior de cada uno de ellos hay a lo más uno de los puntos $z_j$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ (ver figura 3.3).

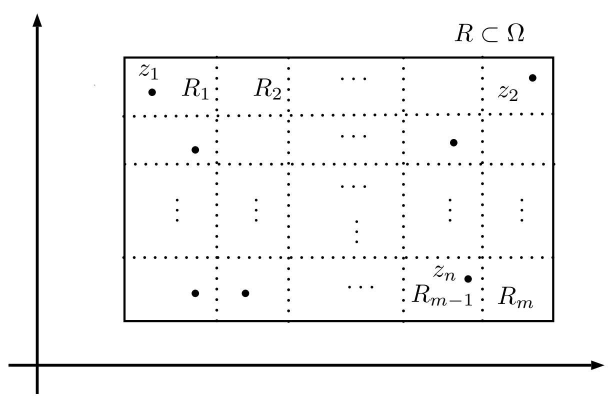



Figura 3.3: Subdivisión del rectángulo $R$ en subrectángulos $R_1, \ldots, R_m$ tales que en el interior de cada uno de ellos hay a lo más uno de los puntos $z_j$.

Sean, $\gamma$ una parametrización de $\partial R$ y $\gamma_k$ una parametrización de $\partial R_k$ (para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$), todas ellas en sentido antihorario. Como en casos anteriores, si hacemos las cancelaciones de la integral de $f$ sobre los lados comunes de los subrectángulos $R_k$, sabemos que se cumple que

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_m} f(z)dz.$$

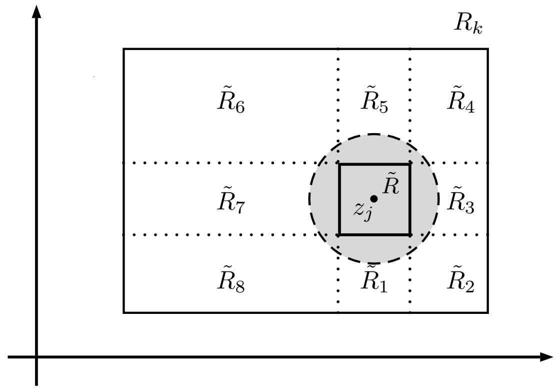



Figura 3.4: Los subrectángulos del rectángulo $R_k$ "generados" al extender los lados del cuadrado $\tilde{R}$ hasta los lados del rectángulo $R_k$.

Por la identidad anterior, basta entonces con probar que

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 0$$

para cada $k \in \{1, \ldots, m\}$. Nótese que, si $R_k$ es tal que no contiene a ninguno de los puntos $z_1, \ldots, z_n$, es decir que $R_k \subset \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, por el teorema de Goursat (3.25) se tiene que

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 0.$$

De esta forma, sólo restará probar que la identidad anterior también se cumple en el caso en que el rectángulo $R_k$ contenga en su interior a sólo uno de los puntos $z_j \in \{z_1, \ldots, z_n\}$.

Sea $\varepsilon > 0$. De la hipótesis de que $\lim_{z \to z_j}(z - z_j)f(z) = 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(z_j) \subset \operatorname{int}(R_k)$ y si $0 < |z - z_j| < \delta$, entonces

$$|(z - z_j)f(z)| < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Sea $\tilde{R}$ un cuadrado centrado en $z_j$ tal que $\tilde{R} \subset B_\delta(z_j)$. Si "extendemos" los lados de $\tilde{R}$ hasta los lados de $R_k$, generamos $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_8$ subrectángulos de $R_k$, todos ellos contenidos en $\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ (ver figura 3.4).

Haciendo nuevamente las cancelaciones de la integral de $f$ sobre los segmentos comunes de los subrectángulos $\tilde{R}_1, \ldots, \tilde{R}_8$), y por el teorema de Goursat, se tiene que

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz,$$

en donde $\tilde{\gamma}$ es una parametrización (antihoraria) de $\partial\tilde{R}$.

Ahora observe que si $l > 0$ es la longitud de los lados de $\tilde{R}$, entonces se tiene que $|z - z_j| \geq l/2$ para toda $z \in \partial\tilde{R}$ (ver figura 3.5), de modo que

$$\frac{1}{|z - z_j|} \leq \frac{2}{l}$$

para toda $z \in \partial\tilde{R}$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\left|\int_{\gamma_k} f(z)dz\right| = \left|\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz\right|$$

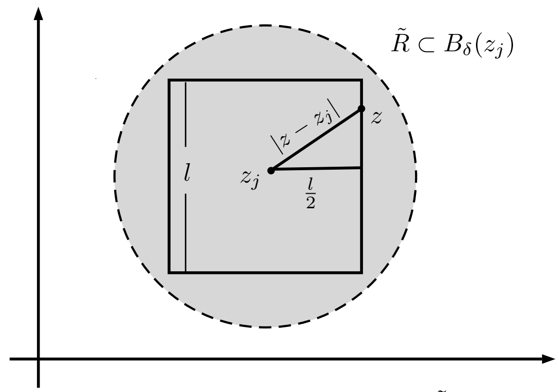



Figura 3.5: La distancia entre cualquier punto $z \in \partial\tilde{R}$ y $z_j$ es mayor o igual a la mitad del lado del cuadrado $\tilde{R}$.

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\tilde{\gamma}} |f(z)|\,|dz| \\
&< \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\varepsilon}{8\,|z - z_j|}\,|dz| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{2}{l} \cdot \int_{\tilde{\gamma}} |dz| \\
&= \frac{\varepsilon}{8} \cdot \frac{2}{l} \cdot 4l \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

de donde conluimos que

$$\int_{\gamma_k} f(z)dz = 0.$$

■

Como dijimos anteriormente, esta versión del teorema de Goursat nos permite formular y probar una segunda versión del teorema de Cauchy.

**Teorema 3.28** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_1, \ldots, z_n \in B_r(z_0)$ y $f : B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ y*

$$\lim_{z \to \tilde{z}} (z - z_k)f(z) = 0$$

*para cada $k \in \{1, \ldots n\}$, entonces para cualquier curva cerrada suave por pedazos $\gamma \subset B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ se tiene que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

**Demostración.** La prueba de este teorema consiste en construir una primitiva de $f$ en la región $B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ de forma análoga a cómo lo hicimos en la prueba del teorema 3.26.

Como en esa prueba, si fijamos un punto $z_0 \in B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$, la construcción de esta primitiva se basa en el hecho de que para cualquier otro punto $z$ en el mismo conjunto, siempre existe una curva poligonal (es decir, una unión finita de segmentos de recta) de lados paralelos a los ejes que une a $z_0$ con $z$.

Tomando en cuenta lo anterior, la función primitiva $g$ que buscamos se define como

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(z)dz$$

en donde $\gamma_z$ es una de estas curvas poligonales.

Apoyados en la versión más general del teorema de Goursat se prueba que si $\tilde{\gamma}_z$ es cualquier otra de estas curvas poligonales que une a $z_0$ con $z$, entonces se satisface que

$$g(z) = \int_{\tilde{\gamma}_z} f(z)dz.$$

Desafortunadamente esta prueba (aunque intuitiva y geométricamente es muy clara) es muy elaborada, razón por la cual no la incluimos.

Finalmente, la prueba de que la función $g$ así definida es una primitiva de $f$ es completamente análoga a la correspondiente prueba que se hizo en el teorema 3.26. ■

A partir de esta sencilla versión del teorema de Cauchy podremos deducir importantes propiedades de las funciones analíticas, y la primera de ellas es una muy importante: *la fórmula integral de Cauchy*. En términos muy generales, esta fórmula establece que una función analítica está completamente determinada por sus valores sobre una curva.

A fin de formular este resultado, primero introduciremos un importante concepto relacionado con las curvas sobre las cuales estamos integrando: el *índice de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ con respecto de una curva cerrada suave por pedazos* $\gamma$ (que no pasa por $z_0$).

Intuitivamente, el índice de un punto $z_0$ respecto de una curva $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ no es más que una manera de "contar" el número de veces que la curva cerrada "rodea" al punto (incluyendo la dirección en la que hace este rodeo, la cual está determinada por el signo de este número).

Y sin duda una manera de contar este número de veces es fijándonos en la forma en que varía el argumento de $\gamma(t) - z_0$ conforme $t$ varía en $[a, b]$. Observe que una "vuelta" completa de $\gamma$ alrededor del punto $z_0$ implica una variación de tamaño $2\pi$ del argumento de $\gamma(t) - z_0$.

Ahora, si recordamos que $\arg(\gamma(t) - z_0)$ es la parte imaginaria de la rama principal de $\log(\gamma(t) - z_0)$ y que esta función es una primitiva (en ciertas regiones) de la función $1/(z - z_0)$, todo parece indicar que el rango de variación de la función $\arg(\gamma(t) - z_0)$ se puede "recobrar" integrando dicha función sobre la curva $\gamma$. En el problema 38 el lector probará un resultado que justifica esta afirmación.

Tomando en cuenta la motivación anterior, para poder justificar la definición que daremos del concepto de índice, primero necesitaremos probar el siguiente

**Lema 3.29** *Sean, $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva cerrada suave por pedazos, y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. La integral*

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = 2k\pi i$$

*para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Es decir, dicha integral es un múltiplo entero de $2\pi i$.*

**Demostración.** Aun cuando en la motivación que dimos en los párrafos anteriores hablamos de la primitiva de la función $1/(z - z_0)$, en el problema 28 el lector probará que dicha primitiva no existe en $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ (afirmación que por cierto, está directamente relacionada con la afirmación de este lema).

Por lo anterior, haremos uso de la función que se obtiene a partir de la integral que deseamos calcular; sea $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como

$$h(x) = \int_a^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt.$$

Sabemos que $h$ es continua en $[a, b]$, y dado que $\gamma'$ es continua en $[a, b]$, salvo por un número finito de puntos, entonces $h$ también es derivable en $[a, b]$, salvo por el mismo número finito de puntos, y además

$$h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z_0}.$$

Ahora consideremos la función $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como

$$g(x) = \exp(-h(x))(\gamma(x) - z_0).$$

Nuevamente se tiene que $g$ es continua en $[a,b]$ y derivable en $[a,b]$, salvo por el multimencionado número finito de puntos, y además

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(-h(x))\gamma'(x) - h'(x)\exp(-h(x))(\gamma(x) - z_0) \\ &= \exp(-h(x))\gamma'(x) - \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - z_0}\exp(-h(x))(\gamma(x) - z_0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g$ debe ser una función constante, de modo que $g(b) = g(a)$, es decir que

$$\begin{aligned} \exp(-h(b))(\gamma(b) - z_0) &= g(b) \\ &= g(a) \\ &= \exp(-h(a))(\gamma(a) - z_0) \\ &= \exp(-0)(\gamma(a) - z_0) \\ &= \gamma(a) - z_0. \end{aligned}$$

Si ahora recordamos que $\gamma(b) = \gamma(a)$, concluimos que $\exp(-h(b)) = 1$ de modo que por el inciso 5 de la proposición 2.14 del capítulo 2 se tiene que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} dt = h(b) = 2k\pi i$$

que es lo que deseabamos demostrar. ■

Con base en el lema anterior, damos la siguiente

**Definición 3.30** *Sean, $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva cerrada suave por pedazos, y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Definimos el índice del punto $z_0$ con respecto a la curva $\gamma$, que denotamos por $n(\gamma, z_0)$, como*

$$n(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

Con relación a este concepto, formularemos un par de propiedades (geométricamente muy evidentes) y para su prueba usaremos dos hechos topológicos muy conocidos: si $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una curva cerrada y suave por pedazos, entonces:

1. el conjunto $\mathbb{C} \setminus \gamma$ es una unión de regiones, es decir, una unión de conjuntos abiertos y conexos, y sólo una de ellas es no acotada (estas regiones son las llamadas componentes conexas de $\mathbb{C} \setminus \gamma$), y
2. en todo conjunto abierto y conexo (en particular en toda componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$), cualquier par de puntos se pueden unir por una poligonal; es decir, si $\Omega$ es una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ y $z, w \in \Omega$, entonces existen $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ tales que

$$[z, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_n, w] \subset \Omega.$$

Una vez aclarado lo anterior, formulamos la siguiente

**Proposición 3.31** *Sean $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva cerrada suave por pedazos.*

1. *Si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$ son tales que $\gamma \subset B_\delta(z_0)$, entonces $n(\gamma, w) = 0$ para toda $w \notin B_\delta(z_0)$.*
2. *Si $z, w \in \mathbb{C}$ pertenecen a la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, entonces $n(\gamma, z) = n(\gamma, w)$.*
3. *Si $z$ pertenece a la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, entonces $n(\gamma, z) = 0$.*

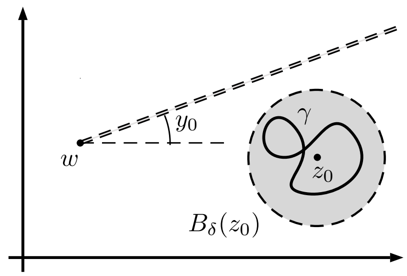



Figura 3.6: Si $w \notin B_\delta(z_0)$, siempre existe $y_0 \in [0, 2\pi)$ tal que $B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \{w + r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0))\}$.

**Demostración.** Para la prueba del inciso 1 observe que si $w \notin B_\delta(z_0)$, entonces siempre existe $y_0 \in [0, 2\pi)$ tal que

$$B_\delta(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \{w + r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \mid r \geq 0\} \tag{3.4}$$

(ver figura 3.6).

De la contensión anterior se concluye que la curva $\gamma$ está dentro del dominio de analiticidad de la función $\log_{y_0}(\zeta - w)$, y como

$$\log'_{y_0}(\zeta - w) = \frac{1}{\zeta - w},$$

se tiene que

$$\int\limits_\gamma \frac{1}{\zeta - w} d\zeta = 0$$

y por lo tanto que $n(\gamma, w) = 0$.

Para la prueba del inciso 2, sabemos que si $z$ y $w$ están en la misma componente conexa $\Omega$ de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, entonces existen $z_1, \ldots, z_n \in \Omega$ tales que

$$[z, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \cdots \cup [z_n, w] \subset \Omega,$$

de modo que bastará con probar que si $z$ y $w$ son tales que $[z, w] \subset \Omega$, entonces $n(\gamma, z) = n(\gamma, w)$ (ver figura 3.7).

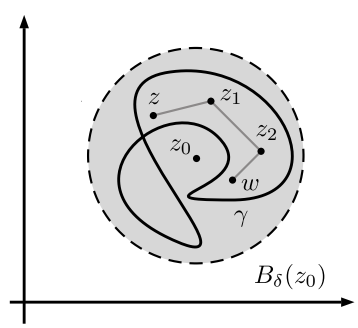



Figura 3.7: Si $z$ y $w$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, existe una poligonal dentro de ella que los une.

Para probar lo anterior, recurriremos a la transformacion de Möbius analizada en el ejemplo 2.7 del capítulo 2, definida como

$$T(\zeta) = \frac{\zeta - z}{\zeta - w}.$$

Como se mostró en ese ejemplo, se tiene que $T([z, w)) = (-\infty, 0] \subset \mathbb{R}$ de tal forma que $T(\mathbb{C} \setminus [z, w]) \subset \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ y por lo tanto la función $\log \circ T$ está bien definida en $\mathbb{C} \setminus [z, w]$, donde recuerde que $\log$ es la rama principal del logaritmo.

Ahora, derivando la función $\log \circ T$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
(\log \circ T)'(\zeta) &= \log'(T(\zeta))T'(\zeta) \\
&= \frac{1}{T(\zeta)} \frac{z-w}{(\zeta-w)^2} \\
&= \frac{\zeta-w}{\zeta-z} \cdot \frac{z-w}{(\zeta-w)^2} \\
&= \frac{z-w}{(\zeta-z)(\zeta-w)} \\
&= \frac{(\zeta-w)-(\zeta-z)}{(\zeta-z)(\zeta-w)} \\
&= \frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta-w}
\end{aligned}
$$

de modo que, como $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus [z, w]$, por el teorema 3.24 sabemos que

$$0 = \int_{\gamma} \left( \frac{1}{\zeta-z} - \frac{1}{\zeta-w} \right) d\zeta$$

y por lo tanto que

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta-w} d\zeta = n(\gamma, w).$$

Para la prueba del inciso 3 primero recordemos que, como $\gamma$ es un conjunto compacto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $\gamma \subset B_r(0)$. Por tanto, si $w \notin B_r(0)$ por el inciso 1 sabemos que $n(\gamma, w) = 0$, y por el inciso 2, si $z$ pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ (aun si $z \in B_r(0)$, como en la figura 3.8), se tiene que $n(\gamma, z) = n(\gamma, w) = 0$ que es lo que se deseaba demostrar. ■

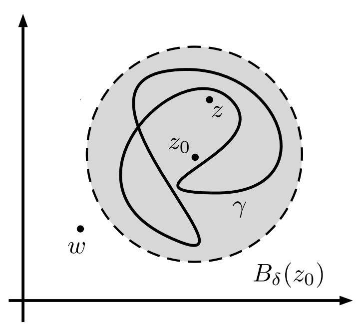



Figura 3.8: Como $z$ y $w$ están en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$, se tiene que $n(\gamma, z) = n(\gamma, w) = 0$.

Como dijimos en párrafos anteriores, ya contamos con todo lo necesario para formular y probar un teorema a partir del cual podremos probar una buena cantidad de propiedades ("locales") de las funciones analíticas: la *fórmula integral de Cauchy*.

Aun cuando el teorema 3.28 nos permite dar una versión más general de la fórmula integral de Cauchy (la cual enunciaremos al final de este capítulo), por ahora sólo probaremos la versión para funciones analíticas en un disco $B_r(z_0)$.

**Teorema 3.32 (fórmula integral de Cauchy (en discos))** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $f : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $B_r(z_0)$ y $\gamma \subset B_r(z_0)$ es cualquier curva cerrada suave por pedazos, entonces*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta$$

*para toda* $z \in B_r(z_0) \setminus \gamma$.

**Demostración.** La prueba de este teorema es inmediata a partir del teorema 3.28. Sea $z \in B_r(z_0) \setminus \gamma$; definimos $F : B_r(z_0) \setminus \{z\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}.$$

Ya que

$$\lim_{\zeta \to z} (\zeta - z) F(\zeta) = \lim_{\zeta \to z} (\zeta - z) \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = \lim_{\zeta \to z} (f(\zeta) - f(z)) = 0,$$

y $\gamma \subset B_r(z_0) \setminus \{z\}$, entonces se satisfacen las hipótesis del teorema 3.28, de modo que

$$0 = \int_\gamma F(\zeta) d\zeta = \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_\gamma \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) n(\gamma, z) 2\pi i, \end{aligned}$$

de donde se sigue la identidad que se desea probar. ■

Nótese que, si en la fórmula integral de Cauchy tomamos $z \in B_r(z_0) \setminus \gamma$ tal que $n(\gamma, z) = 1$, entonces se obtiene la identidad

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{3.5}$$

la cual da lugar a una primera interpretación muy destacable: *el valor de la función $f$ en aquellos puntos de su dominio que satisfacen que $n(\gamma, z) = 1$ (que podemos decir que son los que están "dentro" de $\gamma$), está determinado por los valores de $f$ sobre la curva $\gamma$*. Sin duda esta es una característica muy importante de las funciones analíticas que jugará un papel muy relevante en el análisis de las "propiedades locales" que haremos en el siguiente capítulo.

Sin embargo, no es necesario esperar hasta entonces para mostrar una aplicación muy importante de la identidad 3.5. Observe que, si en esta identidad hacemos $\gamma(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$, y $z = z_0$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it} + z_0)}{re^{it}} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it} + z_0) dt \end{aligned} \tag{3.6}$$

la cual es una identidad que se conoce como la *fórmula del valor promedio* y a partir de la cual se pueden obtener importantes resultados, como es el caso del *principio del módulo máximo*, el cual probaremos a continuación.

**Teorema 3.33 (principio del módulo máximo)** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Si $z_0 \in \Omega$ es tal que $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es constante en $\Omega$.*

**Demostración.** En este resultado es muy importante el hecho de que $\Omega$ sea una región (un abierto y conexo) y seguiremos una estrategia que en el siguiente capítulo volveremos a usar.

Observe primero que, si $|f(z_0)| = 0$, entonces se tiene que $|f(z)| = 0$ para toda $z \in \Omega$ y por lo tanto que $f$ es la constante 0, en cuyo caso se cumple la afirmación del teorema.

Si $|f(z_0)| > 0$, definimos dos subconjunto de $\Omega$ de la siguiente forma:

$$U_1 = \{z \in \Omega \mid |f(z)| = |f(z_0)|\},$$

y

$$U_2 = \{z \in \Omega \mid |f(z)| < |f(z_0)|\}.$$

Es fácil verificar las siguientes propiedades de $U_1$ y $U_2$:

1. $\Omega = U_1 \cup U_2$.

2. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

3. $z_0 \in U_1$ y por lo tanto $U_1 \neq \varnothing$.

Adicional a estas propiedades, también probaremos que $U_1$ y $U_2$ son abiertos, lo cual nos llevará a la conclusión de que $U_2 = \varnothing$, pues en caso contrario se tendría que $\Omega$ sería disconexo, lo cual es una contradicción.

Empezaremos por probar que $U_1$ es un conjunto abierto. Sea $z \in U_1 \subset \Omega$; como $\Omega$ es abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z)} \subset \Omega$. Probaremos que $B_r(z) \subset U_1$. Si esta contensión no se satisface, entonces existe $w \in B_r(z)$, $w \neq z$, tal que $|f(w)| < |f(z_0)|$; sea $0 < r' = |w - z| < r$.

Por la fórmula del valor promedio 3.6 sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r'e^{it} + z)dt$$

de modo que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r'e^{it} + z)\right| dt.$$

Por otra parte, dado que $w = r'e^{it'} + z$ para alguna $t' \in [0, 2\pi]$, entonces $\left|f(r'e^{it'} + z)\right| = |f(w)| < |f(z_0)|$, y como $\left|f(r'e^{it} + z)\right|$ es una función continua de $t$, podemos concluir que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r'e^{it} + z)\right| dt < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)| = |f(z_0)|.$$

Ahora, como $z \in U_1$, se tiene que $|f(z_0)| = |f(z)|$, y por lo tanto

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= |f(z)| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(r'e^{it} + z)\right| dt \\ &< |f(z_0)|, \end{aligned}$$

lo cual es imposible, por lo que concluimos que $B_r(z) \subset U_1$ y que $U_1$ es abierto.

Ahora tomemos $z \in U_2 \subset \Omega$; nuevamente, como $\Omega$ es abierto sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(z) \subset \Omega$. Por otra parte, como $|f(z)| < |f(z_0)|$, por la continuidad de la función $|f|$, existe $0 < \delta \leq r$ tal que

$|f(w)| < |f(z_0)|$ para toda $w \in B_\delta(z)$ de tal forma que podemos concluir que $B_\delta(z) \subset U_2$ y por lo tanto que $U_2$ también es abierto.

Como ya mencionamos, dado que $\Omega$ es conexo y $U_2 \neq \varnothing$, entonces se debe tener que $\Omega = U_2$ lo que implica que $f$ es tal que $|f(z)| = |f(z_0)|$ para toda $z \in \Omega$, es decir, que $f$ es de módulo constante en $\Omega$. Por lo tanto, por el problema 7 concluimos que $f$ es constante en $\Omega$. ■

El teorema anterior tiene un corolario muy importante y su prueba es muy sencilla (razón por la cual se deja al lector).

**Corolario 3.34** *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un conjunto compacto tal que $\operatorname{int}(K)$ es conexo. Si $f : K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua en $K$ y analítica en el $\operatorname{int}(K)$, entonces $|f|$ alcanza su valor máximo en $K$ en un punto de la frontera de $K$.*

Como mencionamos anteriormente, concluimos este capítulo con la versión más general de la fórmula integral de Cauchy. Como la prueba de esta versión es muy similar a la del teorema 3.32, la dejamos como un problema para el lector.

**Teorema 3.35** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $z_1, \ldots, z_n \in B_r(z_0)$ y $f : B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Si*

$$\lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z) = 0$$

*para $k \in \{1, \ldots, n\}$, y $\gamma \subset B_r(z_0) \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ es cualquier curva cerrada suave por pedazos, entonces*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

*para toda $z \in B_r(z_0) \setminus (\gamma \cup \{z_1, \ldots, z_n\})$.*

## 3.4. Problemas

1. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \Omega$. Pruebe que $f$ es derivable en $z_0$ si y sólo si existe una función polinomial de grado uno de la forma
$$p_1(z) = a(z - z_0) + f(z_0)$$
tal que
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - p_1(z)}{z - z_0} = 0.$$
Muestre que en ambas implicaciones se concluye que $f'(z_0) = a$.

2. Sean, $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(\tilde{\Omega}) \subset \Omega$, y $z_0 \in \tilde{\Omega}$. Pruebe que: si $f$ es continua en $z_0$ y $g$ es derivable en $f(z_0) \in \Omega$, entonces la función $h : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como
$$h(z) = \begin{cases} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} & \text{si } f(z) \neq f(z_0) \\ \\ g'(f(z_0)) & \text{si } f(z) = f(z_0) \end{cases}$$
es continua en $z_0$.

3. Pruebe que $f(z) = |z|$ no es complejo derivable para ninguna $z \in \mathbb{C}$. ¿Se puede decir lo mismo para $f^2(z)$?

4. Sea $f(z) = z^5 / |z|^4$ para $z \neq 0$ y $f(0) = 0$. Pruebe que:

    *a)* si $u = \operatorname{Re}(f(z))$ y $v = \operatorname{Im}(f(z))$ entonces $u$ y $v$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$.

    *b)* ¿$f$ es (complejo) derivable en $z = 0$?

c) ¿$f$ es real-diferenciable en $z = 0$?

5. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Para cada $z \in \Omega$, definimos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(z) := \lim_{h\to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h}$$

en donde $h \in \mathbb{R}$. Pruebe que, si $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ existen y son continuas en $\Omega$, y se satisface que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z)$$

para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es analítica en $\Omega$.

6. Sea $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ para $z$ en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pruebe que:

   a) si $f$ es analítica en $\Omega$ y $a \cdot u(x, y) + b \cdot v(x, y) = c$ para toda $z = x + iy \in \Omega$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son tales que $a^2 + b^2 > 0$, entonces $f$ debe de ser una contante.

   b) ¿el resultado del inciso anterior sigue siendo cierto si las constantes $a, b$ y $c$ son complejas?

7. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega$. Pruebe que:

   a) Si $f'(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es constante en $\Omega$.

   b) Si $f(z) \in \mathbb{R}$ para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es constante en $\Omega$.

   c) Si $|f(z)|$ es constante para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es constante en $\Omega$.

8. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas en $\Omega$. Pruebe que si $\mathrm{Re}(f(z)) = \mathrm{Re}(g(z))$ para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ y $g$ difieren por una constante (imaginaria pura).

9. Sean $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 1\}$ y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega$. Si $f(z) = u(z) + iv(z)$ y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z) + \frac{\partial v}{\partial y}(z) = 0$$

para toda $z \in \Omega$, pruebe que existen $c \in \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{C}$ tales que $f(z) = icz + d$ para toda $z \in \Omega$.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$, una región. Definimos $\tilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C} \mid \bar{z} \in \Omega\}$.

   a) ¿$\tilde{\Omega}$ es una región? Identifique geométricamente a $\tilde{\Omega}$.

   b) dada $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definimos $g : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Pruebe que: $f$ es analítica en $\Omega$ sí y sólo si $g$ es analítica en $\tilde{\Omega}$.

11. Sea $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada en términos de coordenadas polares $(r, \theta)$, y analítica. Pruebe que las ecuaciones de Cauchy-Riemann, en términos de las coordenadas polares, están dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

12. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Pruebe que:

   a) Si $f$ es continua en 0 y $f(z) = f(2z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ es constante.

   b) Si $f$ es analítica en $\mathbb{C}$, $f'$ continua en 0, y $f(2z) = 2f(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cz$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

13. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ analítica en la región $\Omega$, tal que $f'(z) = 1/z$ para toda $z \in \Omega$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $\exp(f(z) + c) = z$ para toda $z \in \Omega$. ¿Existe $f$ analítica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f'(z) = 1/z$ para toda $z \in \Omega$?

14. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$ en $\Omega$. Decimos que $u$ es *armónica* en $\Omega$ si el *laplaciano* de $u$ ($\nabla^2 u$) es igual a cero para toda $z \in \Omega$, es decir que

$$\nabla^2 u(z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z) = 0$$

para toda $z \in \Omega$.

Pruebe que, si $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ armónica en $\Omega$, y definimos $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z),$$

entonces $f$ es analítica en $\Omega$.

15. Dada $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, definimos $\tilde{u} : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ (en donde $\tilde{\Omega}$ es como en el problema 9) como $\tilde{u}(z) = u(\bar{z})$. Pruebe que: $u$ es armónica en $\Omega$ sí y sólo si $\tilde{u}$ es armónica en $\tilde{\Omega}$.

16. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ en $\Omega$. Decimos que $v : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$ en $\Omega$ es una *conjugada armónica* de $u$ en $\Omega$ si la función $f = u + iv$ es analítica en $\Omega$.
Sea $u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. ¿Bajo que condiciones sobre $a, b, c$ y $d$ se tiene que $u$ es armónica (en $\mathbb{C}$)? Encuentre una conjugada armónica de $u$ (en $\mathbb{C}$).

17. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ armónica en el abierto $\Omega$ y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Pruebe que, si $B_r(z_0) \subset \Omega$ y $v : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ está definida como

$$v(x, y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(t, y_0)dt,$$

entonces $v$ es una conjugada armónica de $u$ en $B_r(z_0)$.

18. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dada en términos de coordenadas polares $(r, \theta)$ y de clase $C^2$ en $\Omega$. Pruebe que el laplaciano de $u$ ($\nabla^2 u$) está dado por

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

19. Muestre que:

   *a)* $u(r, \theta) = r^2 \cos(2\theta)$ es armónica en $\mathbb{C}$ y encuentre una conjugada armónica $v(r, \theta)$ de $u$ en $\mathbb{C}$.

   *b)* $u(r, \theta) = \ln(r)$ es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. ¿Existe una conjugada armónica $v(r, \theta)$ de $u$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? Argumente su respuesta.

20. Si $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ y $f$ es una función continua sobre la circunferencia unitaria, pruebe que

$$\overline{\int_{\gamma} f(z)dz} = -\int_{\gamma} \overline{f(z)}\bar{z}^2 dz.$$

21. Sea $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Si $f$ es continua sobre $\gamma$, pruebe que:

$$\int_{\gamma} f(z)\,|dz| = -ir\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z}dz.$$

22. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f'$ es continua en $\tilde{\Omega}$ y $\gamma \subset \Omega$ una curva cerrada suave por pedazos. Pruebe que:

$$\mathrm{Re}\left(\int_{\gamma} \overline{f(z)}f'(z)dz\right) = 0.$$

23. Pruebe que, si $|a| \neq R$ entonces

$$\int_{\gamma_R} \frac{|dz|}{|z-a|\,|z+a|} < \frac{2\pi R}{\left|R^2 - |a|^2\right|},$$

en donde $\gamma_R(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$.

24. Pruebe las siguientes afirmaciones:

*a*) Si $f$ está definida y es continua en una vecindad del 0, pruebe que

$$\lim_{r\to 0} \int_0^{2\pi} f(re^{it})dt = 2\pi f(0).$$

*b*) Si $f$ está definida y es continua en una vecindad del punto $a$, pruebe que

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-a} dz = 2\pi i f(a),$$

en donde $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$.

25. Si $f$ está definida y es continua en $B_R(a) \setminus \{a\}$ y

$$\lim_{z\to a} (z-a)f(z) = A,$$

pruebe que

$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = iA\alpha,$$

en donde $\gamma_r(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, \alpha]$ y $0 < \alpha \leq 2\pi$.

26. Si $f$ está definida y es continua para $|z| > R > 0$ y

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = A,$$

pruebe que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)dz = -iA\alpha,$$

en donde $\Gamma_r(t) = re^{it}$ con $t \in [0, \alpha]$ y $0 < \alpha \leq 2\pi$.

27. Si $f$ está definida y es continua en la semi-banda horizontal $[x_0, \infty) \times [0, h]$ y

$$\lim_{x\to\infty} f(x+iy) = A$$

para cada $y \in [0, h]$, pruebe que

$$\lim_{x\to\infty} \int_{\beta_x} f(z)dz = iAh,$$

en donde $\beta_x(t) = x + it$ con $t \in [0, h]$.

28. Sean, $z_0 \in \Omega$, una región. Pruebe que la función $f(z) = 1/(z - z_0)$ no puede tener una primitiva en la región $\Omega \setminus \{z_0\}$.

29. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua, $g : \tilde{\Omega} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $g'$ es continua en $\tilde{\Omega}$, $\sigma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \tilde{\Omega}$ una curva suave por pedazos y $\gamma = g \circ \sigma$. Si $\gamma \subset \Omega$, pruebe que

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\sigma} f(g(\zeta))g'(\zeta)d\zeta.$$

30. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f'$ es continua en la región $\Omega$. Pruebe que:

    *a*) Si $y_0 \in \mathbb{R}$ y $w_0 \in \mathbb{C}$ son tales que $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{w_0 + r(\cos(y_0) + i \operatorname{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}$ para toda $z \in \Omega$, entonces

    $$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = 0$$

    para toda $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada suave por pedazos.

    *b*) Si $|f(z) - 1| < 1$ para toda $z \in \Omega$, entonces

    $$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

    para toda $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada suave por pedazos.

31. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f'$ es continua en $\Omega$, $A \subset \Omega$ conexo, $y_0 \in \mathbb{R}$ y $w_0 \in \mathbb{C}$. Pruebe que, si $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{w_0 + r(\cos(y_0) + i \operatorname{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}$ para toda $z \in A$, entonces existe $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ una región tal que $A \subset \tilde{\Omega}$ y

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz = 0$$

para toda $\gamma \subset \tilde{\Omega}$ curva cerrada suave por pedazos.

32. Sea $p(z)$ un polinomio y $\gamma$ la circunferencia de radio $R$ con centro en $a \in \mathbb{C}$, recorrida en sentido positivo. Pruebe que:

$$\int\limits_{\gamma} \overline{p(z)} dz = 2\pi i R^2 \overline{p'(a)}.$$

33. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$ y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $f(z) = 1/z(z - 1)$. Pruebe que:

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0$$

para toda curva cerrada suave por pedazos $\gamma \subset \Omega$.

34. Sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ dos regiones en $\mathbb{C}$ tales que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es conexo. Suponga que $f : \Omega_1 \cup \Omega_2 \to \mathbb{C}$ es una función continua tal que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para toda $\gamma \subset \Omega_1$ y $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para toda $\gamma \subset \Omega_2$ (en ambos casos, $\gamma$ curva cerrada suave por pedazos). Pruebe que $\int_{\gamma} f(z)dz = 0$ para toda $\gamma \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ ($\gamma$ curva cerrada suave por pedazos). Muestre con un ejemplo que la hipótesis de que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ es conexo es indispensable.

35. Muestre que el teorema 3.25 se puede probar usando el teorema de Green si se supone que $f'$ es continua en $\Omega$.

36. Decimos que $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región estrellada si existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que el segmento $[z_0, z] \subset \Omega$ para toda $z \in \Omega$. Pruebe que, si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es tal que $f'$ es continua en $\Omega$, una región estrellada, entonces la función $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como

$$F(z) = \int\limits_{[z_0, z]} f(z)dz = \int\limits_{0}^{1} f(z_0 + t(z - z_0))(z - z_0)dt$$

es una primitiva de $f$ en $\Omega$. (*Sugerencia*: use el teorema 3.5 de [4]).

37. Pruebe que los teoremas 3.28 y 3.35 se pueden generalizar a una cantidad infinita de puntos $A = \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\} \subset B_r(z_0)$, siempre y cuando $A$ no tenga puntos de acumulación en la bola $B_r(z_0)$.

38. Sean, $y_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos tales que $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0 + r(\cos(y_0) + i\,\mathrm{sen}(y_0)) \in \mathbb{C} \mid r \geq 0\}$. Pruebe que

$$\mathrm{Im}\left(\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0} dz\right) = i\left(\arg(\gamma(b) - z_0) - \arg(\gamma(a) - z_0) + 2k\pi\right),$$

para alguna $k \in \{-1, 0, 1\}$. Interprete geométricamente.

39. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f'$ es continua en $\Omega$, $z_0 \in \Omega$ y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \Omega \subset \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos, tales que $f(\gamma(t)) \neq f(z_0)$ para toda $t \in [a, b]$. Si $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, pruebe que

$$n(\tilde{\gamma}, f(z_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz.$$

40. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que. $B_r(z_0) \subset \Omega$. Pruebe que si $f$ es analítica en $\Omega$, entonces existe $g : B_r(z_0) \subset \Omega \to \mathbb{C}$ analítica tal que $g'(z) = f(z)$ para toda $z \in B_r(z_0)$ (es decir, "localmente", toda función analítica en una región $\Omega$ siempre tiene una primitiva).

41. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva suave por pedazos. Pruebe que existe $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ una curva formada por segmentos paralelos a los ejes, cuyos puntos inicial y final de $\tilde{\gamma}$ son iguales al punto inicial y final (respectivamente) de $\gamma$, y tal que para cualquier función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega$, se satisface que

$$\int\limits_{\gamma} f(z) dz = \int\limits_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

42. Sean, $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas tales que $f'$ y $g'$ son continuas en $\Omega$. Pruebe que:

   *a)* Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es una curva suave por pedazos, entonces

$$\int\limits_{\gamma} f'(z)g(z) dz = f(\gamma(b))g(\gamma(b)) - f(\gamma(a))g(\gamma(a)) - \int\limits_{\gamma} f(z)g'(z) dz.$$

   *b)* Si $\gamma : [a, b] \to \Omega$ es una curva cerrada suave por pedazos, entonces

$$\int\limits_{\gamma} f'(z)g(z) dz = \int\limits_{-\gamma} f(z)g'(z) dz.$$

   *c)* Si $\Omega = B_r(z_0)$, $z_1, z_2 \in \Omega$, y $\gamma \subset \Omega \setminus [z_1, z_2]$ es una curva cerrada suave por pedazos, entonces

$$\int\limits_{\gamma} f'(z) \log\left(\frac{z - z_1}{z - z_2}\right) dz = 2\pi i (n(\gamma, z_2) f(z_2) - n(\gamma, z_1) f(z_1)),$$

   en donde log es la rama principal del logaritmo.

43. Sean, $\gamma$ una curva cerrada suave por pedazos, y $z_0, w_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Calcule el valor (en términos de $n(\gamma, z_0)$ y $n(\gamma, w_0)$) de la integral

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{(z - z_0)^n (z - w_0)} dz$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ (*sugerencia*: use fracciones parciales e inducción).

44. Sea $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calcule la integral

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$$

en donde $|a| \neq r$. (*sugerencia*: recuerde que $z\overline{z} = |z|^2$ o $\overline{z} = |z|^2 / z$ y use el problema 21).

45. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas sobre la región $\Omega$ y continuas sobre $\overline{\Omega}$, compacto, tales que $f(z) = g(z)$ para toda $z \in Fr(\Omega)$. Pruebe que $f(z) = g(z)$ para toda $z \in \Omega$.

46. Pruebe el teorema 3.35.

# Capítulo 4

# Funciones analíticas: propiedades locales

El objetivo de este capítulo es mostrar una buena cantidad de propiedades de las funciones analíticas, las cuales tienen la pecularidad de referirse al comportamiento "local" de éstas. Y otro objetivo no menos importante que el anterior, es mostrar que todas estas propiedades se pueden probar a partir de una versión "sencilla" (en términos de su formulación) del teorema de Cauchy, que es la versión para un disco que desarrollamos en el capítulo anterior.

## 4.1. Derivadas de orden superior

La primera propiedad local que destacaremos de las funciones analíticas es la siguiente: si una función $f$ es derivable en todos los puntos de un disco, entonces tiene derivadas de todos los órdenes en el mismo conjunto. La motivación de este resultado se da a partir de la fórmula integral de Cauchy vista en el capítulo anterior.

Como se recordará, la fórmula integral de Cauchy establece que, si $f$ es analítica en un disco de la forma $B_\delta(z_0)$ y $\gamma \subset B_\delta(z_0)$ es una curva suave por pedazos, entonces

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in B_\delta(z_0)$.

Pues bien, si analizamos con cuidado la expresión de la derecha notaremos que ésta se puede ver como una función de la variable $z$ definida en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, y además dicha función será derivable (recuerde que el índice $n(\gamma, z)$ es constante en cada una de las componentes de $\mathbb{C} \setminus \gamma$); es decir, si escribimos que

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

se tiene que $F$ es derivable en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ y además también se tendrá que $F'(z) = n(\gamma, z) f'(z)$.

Como el lector estará de acuerdo, a partir de la observación anterior, la pregunta interesante es si se podrá derivar a $F$ directamente de la expresión integral que la define, y como el lector recordará de sus cursos de cálculo, esto es posible en el caso en que la función $f$ (vista como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) sea de clase $C^1$ en su dominio y además se tendrá que

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Lo que mostraremos es que en efecto la fórmula anterior es cierta y que además se puede probar sin la hipótesis de continuidad de $f'$. De hecho, apoyandonos en el mismo argumento, mostraremos que la función

$F$ tiene derivadas de todos los órdenes y que éstas se pueden calcular de la misma menera que calculamos la primera.

A fin de formalizar todo lo anterior, empezaremos por definir lo que llamaremos derivadas de orden superior de una función $f$, definición que sin duda resultará muy familiar para el lector.

**Definición 4.1** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$. Si $r > 0$ es tal que $B_r(z_0) \subset \Omega$ y la $n$-ésima derivada de $f$ existe para todo $z \in B_r(z_0)$, definimos la $n+1$ derivada de $f$ en $z_0$ , que denotamos por $f^{(n+1)}(z_0)$, como*

$$f^{(n+1)}(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0}.$$

Lo siguiente que haremos será probar un importante resultado formulado por Ahlfors (lema 3 del capítulo 4 de [1]) con el cual formalizamos las afirmaciones que hicimos en los párrafos anteriores acerca de la función que denotamos por $F$, y que es la base sobre la cual se apoyan muchos de los resultados que probaremos en este capítulo.

Con el fin de hacer más accesible este resultado, lo dividiremos en dos partes. La primera parte la formularemos en el siguiente

**Lema 4.2 (Ahlfors)** *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\varphi : \gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua (en $\gamma$) la función $F_{n,\varphi} : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ definida como*

$$F_{n,\varphi}(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

*es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma$.*

**Demostración.** Primero observemos que, si $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$ de modo que si $|z - z_0| < r/2$, entonces $|\zeta - z| > r/2$ para toda $\zeta \in \gamma$ (ver figura 4.1), y por lo tanto, si $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left| \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)^m} d\zeta \right| \leq \left(\frac{2}{r}\right)^n \left(\frac{1}{r}\right)^m \int_\gamma |\varphi(\zeta)| \, |d\zeta| . \tag{4.1}$$

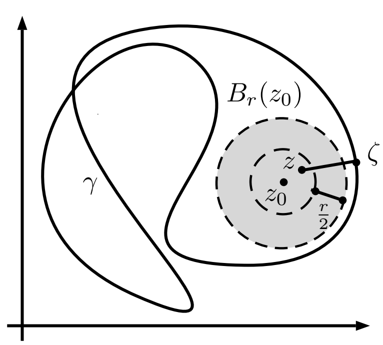



Figura 4.1: Si $B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$ y $|z - z_0| < r/2$, entonces $|\zeta - z| > r/2$ para toda $\zeta \in \gamma$.

Nótese que si hacemos

$$M = \int_\gamma |\varphi(\zeta)| \, |d\zeta| ,$$

entonces $M = 0$ si y sólo si $\varphi$ es la función constante 0.

Ahora probaremos que para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\varphi : \gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua (en $\gamma$), la función $F_{n,\varphi}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ y esta prueba la haremos por inducción.

Sea pues $n = 1$ y $\varphi : \gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ cualquier función continua sobre $\gamma$ que no sea la constante 0 (si $\varphi$ fuera la constante 0, entonces $F_{1,\varphi}$ también es la constante 0 y la afirmación es inmediata). De la definición de la función $F_{1,\varphi}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|F_{1,\varphi}(z) - F_{1,\varphi}(z_0)| &= \left| \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \right| \\
&= \left| \int_\gamma \varphi(\zeta) \left( \frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta \right| \\
&= |z - z_0| \left| \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \right| \\
&\leq |z - z_0| \int_\gamma \frac{|\varphi(\zeta)|}{|\zeta - z| |\zeta - z_0|} |d\zeta| \\
&\leq |z - z_0| \int_\gamma \left( \frac{1}{r/2} \right) \left( \frac{1}{r} \right) |\varphi(\zeta)| |d\zeta| \\
&\leq |z - z_0| \left( \frac{2}{r^2} \right) \int_\gamma |\varphi(\zeta)| |d\zeta|
\end{aligned}$$

de modo que, dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $\delta = (\varepsilon r^2)/(2M)$ y $0 < |z - z_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}
|F_{1,\varphi}(z) - F_{1,\varphi}(z_0)| &\leq |z - z_0| \left( \frac{2}{r^2} \right) \int_\gamma |\varphi(\zeta)| |d\zeta| \\
&< \left( \frac{\varepsilon r^2}{2M} \right) \left( \frac{2}{r^2} \right) \int_\gamma |\varphi(\zeta)| |d\zeta| \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

lo que prueba que $F_{1,\varphi}$ es continua en $z_0$.

Supongamos ahora como hipótesis de inducción que $F_{n,\psi}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ para cualquier función $\psi$ continua sobre $\gamma$. Probaremos que $F_{n+1,\varphi}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ para cualquier función $\varphi$ continua sobre $\gamma$.

Observe que, como

$$\begin{aligned}
F_{n+1,\varphi}(z) - F_{n+1,\varphi}(z_0) &= \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
&= \int_\gamma \frac{(\zeta - z_0)\,\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
&= \int_\gamma \frac{[(\zeta - z) + (z - z_0)]\,\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
&= \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} d\zeta - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta + (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z_0)} d\zeta,
\end{aligned}$$

si hacemos

$$\psi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$$

la cual es claramente una función continua en $\gamma$, de la identidad anterior se tiene que

$$F_{n+1,\varphi}(z) - F_{n+1,\varphi}(z_0) = F_{n,\psi}(z) - F_{n,\psi}(z_0) + (z - z_0)\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - z_0)} d\zeta. \tag{4.2}$$

Si ahora vemos que, por la desigualdad 4.1 se tiene que

$$\left|\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - z_0)} d\zeta\right| \leq \frac{2^n}{r^{n+1}} M$$

para toda $z \in B_{r/2}(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$, por la hipótesis de inducción (aplicada a la función $F_{n,\psi}$) concluimos que

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} \left(F_{n+1,\varphi}(z) - F_{n+1,\varphi}(z_0)\right) &= \lim_{z \to z_0} \left(F_{n,\psi}(z) - F_{n,\psi}(z_0)\right) + \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}(\zeta - z_0)} d\zeta \\
&= F_{n,\psi}(z_0) - F_{n,\psi}(z_0) + 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto que $F_{n+1,\varphi}$ es continua en $z_0$. ■

Una vez probado este lema, podemos formular el siguiente

**Teorema 4.3 (Ahlfors)** *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\varphi : \gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua (en $\gamma$) la función $F_{n,\varphi} : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ definida como*

$$F_{n,\varphi}(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$$

*es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma$, y además*

$$F'_{n,\varphi}(z) = n\int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = nF_{n+1,\varphi}(z).$$

**Demostración.** Sea $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$; como en la prueba del lema anterior, también procederemos por inducción. A partir de la definición de $F_{1,\varphi}$, en esa prueba se mostró que

$$\frac{F_{1,\varphi}(z) - F_{1,\varphi}(z_0)}{z - z_0} = \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta = F_{1,\psi}(z)$$

en donde nuevamente tomamos

$$\psi(\zeta) = \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z_0}$$

para cada $\zeta \in \gamma$.

Por lo tanto, por el lema anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
F'_{1,\varphi}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{F_{1,\varphi}(z) - F_{1,\varphi}(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} F_{1,\psi}(z) \\
&= F_{1,\psi}(z_0) \\
&= \int\limits_{\gamma} \frac{\psi(\zeta)}{(\zeta - z_0)} d\zeta
\end{aligned}$$

$$= \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta$$
$$= 1 \cdot F_{2,\varphi}(z)$$

lo cual prueba el primer paso de inducción.

Supongamos ahora como hipótesis de inducción que $F_{n,\psi}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ para cualquier función $\psi$ continua sobre $\gamma$ y que

$$F'_{n,\psi}(z) = nF_{n+1,\psi}(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$. Ahora probaremos que $F_{n+1,\varphi}$ es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma$ para cualquier función $\varphi$ continua sobre $\gamma$ y que

$$F'_{n+1,\psi}(z) = (n+1)F_{n+2,\psi}(z)$$

para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

Observe que de la identidad 4.2 y tomando la misma función $\psi$ de antes, se tiene que

$$\frac{F_{n+1,\varphi}(z) - F_{n+1,\varphi}(z_0)}{z - z_0} = \frac{F_{n,\psi}(z) - F_{n,\psi}(z_0)}{z - z_0} + F_{n+1,\psi}(z)$$

de modo que por la hipótesis de inducción y el lema anterior, concluimos que

$$\begin{aligned}
F'_{n+1,\varphi}(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{F_{n+1,\varphi}(z) - F_{n+1,\varphi}(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left( \frac{F_{n,\psi}(z) - F_{n,\psi}(z_0)}{z - z_0} + F_{n+1,\psi}(z) \right) \\
&= F'_{n,\psi}(z_0) + F_{n+1,\psi}(z_0) \\
&= nF_{n+1,\psi}(z_0) + F_{n+1,\psi}(z_0) \\
&= (n+1)F_{n+1,\psi}(z_0) \\
&= (n+1)F_{n+2,\varphi}(z_0)
\end{aligned}$$

que es lo que se deseaba probar. ■

Como el lector estará de acuerdo, una consecuencia inmediata del teorema anterior es el siguiente

**Corolario 4.4** *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva suave por pedazos y $\varphi : \gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua (en $\gamma$). Si definimos $F : \mathbb{C} \setminus \gamma \to \mathbb{C}$ como*

$$F(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

*entonces $F^{(n)}(z)$ existe para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, y además*

$$F^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

*para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.*

Con base en el corolario anterior (cuya prueba queda al lector), y en la fórmula integral de Cauchy que probamos en el capítulo anterior es fácil probar el siguiente

**Teorema 4.5** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $\Omega$, entonces $f^{(n)}(z)$ existe para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in \Omega$. Además, si $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ son tales que $\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$ y $\gamma_r(t) = e^{it} + z_0$ con $t \in [0, 2\pi]$, entonces*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \tag{4.3}$$

*para toda $z \in B_r(z_0)$.*

**Demostración.** Sean $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tales que $\overline{B_r(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \leq r\} \subset \Omega$. Por el corolario anterior tenemos que la función

$$F(z) = \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es tal que $F^{(n)}(z)$ existe para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma_r$, y que además

$$F^{(n)}(z) = n! \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \tag{4.4}$$

Por otra parte, como $\overline{B_r(z_0)}$ es un conjunto compacto (cerrado y acotado), sabemos que existe $r' > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset B_{r'}(z_0) \subset \Omega$, de modo que por la fórmula integral de Cauchy (aplicada en el disco $B_{r'}(z_0)$ y para la curva $\gamma_r$), se tiene que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} F(z)$$

para toda $z \in B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \setminus \gamma_r$ (observe que $n(\gamma_r, z) = 1$ para toda $z \in B_r(z_0)$).

Por lo tanto, por la identidad anterior y la identidad 4.4 se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i} F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in B_r(z_0)$, que es lo que se deseaba demostrar.

■

La identidad 4.3 es un caso particular de lo que se conoce como la *fórmula integral de Cauchy para las derivadas*. En realidad esta fórmula se puede escribir de forma más general y de manera análoga a como escribimos en el capítulo 3 a la fórmula integral de Cauchy en un disco, y se puede obtener como una consecuencia del teorema anterior.

**Proposición 4.6 (fórmula integral para las derivadas)** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $f : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $B_r(z_0)$ y $\gamma \subset B_r(z_0)$ es una curva cerrada suave por pedazos, entonces*

$$n(\gamma, z) f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

*para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \gamma$.*

**Demostración.** Por el corolario 4.4 sabemos que la función

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es tal que $F^{(n)}(z)$ existe para toda $n \in \mathbb{N}$ y que

$$F^{(n)}(z) = n! \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$.

Por otra parte, por la fórmula integral de Cauchy (aplicada en el disco $B_r(z_0)$ y para la curva $\gamma$), se tiene que

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \gamma$.

Ahora, si $z \in B_r(z_0) \setminus \gamma$, como $\gamma$ es un conjunto compacto entonces es cerrado y por lo tanto existe $r' > 0$ tal que $B_{r'}(z) \subset B_r(z_0) \setminus \gamma$, de tal forma que $n(\gamma, z')$ es igual a una constante $k \in \mathbb{Z}$ para toda $z' \in B_{r'}(z)$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} kf(z') &= n(\gamma, z')f(z') \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}F(z') \end{aligned}$$

para toda $z' \in B_{r'}(z)$.

Dado que esta última identidad es válida en toda la vecindad $B_{r'}(z)$, y que por el teorema 4.5 y el corolario 4.4 sabemos que tanto $f^{(n)}$ como $F^{(n)}$ existen para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$kf^{(n)}(z') = \frac{1}{2\pi i}F^{(n)}(z')$$

para toda $z' \in B_{r'}(z)$ y en particular, tomando $z' = z$, se tiene que

$$\begin{aligned} n(\gamma, z)f^{(n)}(z) &= kf^{(n)}(z) \\ &= \frac{1}{2\pi i}F^{(n)}(z) \\ &= \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, \end{aligned}$$

que es la identidad que se deseaba demostrar. ■

Además de la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, el teorema 4.5 tiene un par de consecuencias muy importantes para aquellas funciones que son la parte real y la parte imaginaria de una función analítica. Este resultado lo dejamos formulado como un corolario y su sencilla prueba queda a cargo del lector.

**Corolario 4.7** *Sea $f = u + iv : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $\Omega$, entonces las funciones $u, v : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ son de clase $C^\infty$ y armónicas en $\Omega$.*

Adicionalmente a los dos resultados anteriores, el teorema 4.5 tiene como consecuencia varios teoremas importantes y el primero de ellos se conoce como el *teorema de Morera*[1] y dice lo siguiente:

**Teorema 4.8 (de Morera)** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua. Si para toda $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada suave por pedazos se tiene que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

*entonces $f$ es analítica en $\Omega$.*

**Demostración.** Por el teorema 3.24 del capítulo 2 sabemos que la hipótesis sobre $f$ implica que ésta tiene una primitiva en $\Omega$, es decir que existe $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$ para toda $z \in \Omega$. Por lo tanto, por el teorema anterior sabemos que $f'(z) = F^{(2)}(z)$ existe para toda $z \in \Omega$, lo que prueba que $f$ es analítica en $\Omega$. ■

El segundo resultado importante es el muy conocido *teorema de Liouville*[2], pero para cuya formulación primero introduciremos la siguiente definición.

[1] Giacinto Morera (Novara, Italia, 18 de julio de 1856 - Turín, 8 de febrero de 1909) fue un matemático y físico italiano, que hizo trabajos importantes en análisis complejo. (Fuente: Wikipedia)

[2] Joseph Liouville (Saint-Omer, 24 de marzo de 1809 - París, 8 de septiembre de 1882). Liouville trabajó en una cantidad muy diversa de campos en matemáticas, incluyendo teoría de números, análisis complejo, topología diferencial, pero también en física matemática e incluso astronomía. Se le recuerda en particular por el teorema que lleva su nombre. (Fuente: Wikipedia).

**Definición 4.9** *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Decimos que $f$ es una función entera si $f$ es analítica en $\mathbb{C}$.*

Ejemplos de funciones enteras son las funciones polinomiales, la función exponencial y las funciones trigonométricas seno y coseno.

Una vez que tenemos la definición de función entera, formulamos el teorema de Liouville de la siguiente manera:

**Teorema 4.10 (de Liouville)** *Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es una función entera y acotada (en $\mathbb{C}$), entonces $f$ es constante.*

**Demostración.** Para probar que $f$ es constante, mostraremos que $f'(z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Sea $z \in \mathbb{C}$; dado que $\overline{B_r(z)} \subset \mathbb{C}$ para toda $r > 0$, sabemos que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

en donde $\gamma_r(t) = e^{it} + z$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Ahora, si $M > 0$ es tal que $|f(\zeta)| \leq M$ para toda $\zeta \in \mathbb{C}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
|f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \int\limits_{\gamma_r} |d\zeta| \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^2} \cdot 2\pi r \\
&= \frac{M}{r}
\end{aligned}$$

para toda $r > 0$. Por lo tanto, si tomamos el límite cuando $r \to \infty$, concluimos que $f'(z) = 0$, que es lo que deseabamos probar. ■

Terminamos con esta primera ronda de teoremas importantes con una prueba muy sencilla del *teorema fundamental del álgebra*, que formulamos de la siguiente manera:

**Teorema 4.11 (fundamental del álgebra)** *Sea $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio. Si el grado de $p$ es mayor o igual a $1$, entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$.*

**Demostración.** Procederemos por contradicción, es decir, supondremos que $p(z) \neq 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Por lo tanto, la función

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

es entera, y como $\lim_{z\to\infty} p(z) = \infty$ (problema 36 del capítulo 2), entonces $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ de donde se concluye que $f$ está acotada en $\mathbb{C}$ (problema 37 del capítulo 2). Por lo tanto, por el teorema de Liouville se tiene que $f$ debe ser constante, lo cual implica que $p$ es constante y que contradice el hecho de que $p$ es de grado mayor o igual a 1. ■

## 4.2. Singularidades aisladas

A fin de continuar con el estudio del comportamiento local de las funciones analíticas, en esta sección definiremos y analizaremos lo que se conoce como una *singularidad aislada* de una función analítica. Y justo empezaremos por dar la definición de este tipo de puntos asociados con una función.

**Definición 4.12** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que $z_0$ es una singularidad aislada de una función $f$, si existe $r > 0$ tal que $f$ es analítica en $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.*

En el siguiente ejemplo ilustramos este concepto de singularidad aislada para algunas funciones, y un ejemplo de singularidad de una función que no es aislada.

**Ejemplo 4.13**

1. *Sea $f(z) = (\exp(z)-1)/z$, para $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Como se ve claramente, el punto $z = 0$ es una singularidad aislada de $f$ pues en cualquier vecindad agujerada de la forma $B_r(0) \setminus \{0\}$, con $r > 0$, esta función es analítica.*

2. *Sea $f(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Observe que todos los puntos de la forma $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, son singularidades aisladas de $f$ pues esta función es analítica en cualquier vecindad de la forma $B_1(k\pi) \setminus \{k\pi\}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$.*

3. *Sea $f(z) = \exp(1/z)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En esta caso también se tiene que el punto $z = 0$ es una singularidad aislada de $f$ pues nuevamente en cualquier vecindad agujerada de la forma $B_r(0) \setminus \{0\}$, con $r > 0$, esta función es analítica.*

4. *Sea $f(z) = 1/\operatorname{sen}(1/z)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus (\{1/k\pi \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\} \cup \{0\})$. Para esta función, los puntos de la forma $z = 1/k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, son singularidades aisladas de $f$ pues esta función es analítica en cada vecindad $B_{r_k}(1/k\pi) \setminus \{1/k\pi\}$, en donde*

$$r_k = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \cdot \frac{1}{\pi} > 0$$

   *si $k > 0$, y*

$$r_k = \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) \cdot \frac{1}{\pi} > 0.$$

   *si $k < 0$.*

   *Sin embargo, el punto $z = 0$ no es una singularidad aislada de $f$ pues en cualquier vecindad de este punto existen puntos de la forma $z = 1/k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, para los cuales $f$ no está definida.*

5. *Sea $f(z) = \log_{y_0}(z)$, en donde $y_0 \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C} \setminus \{r(\cos(y_0) + i\operatorname{sen}(y_0)) \mid r \geq 0\}$. En este caso se tiene que ningún punto de la forma $z = r(\cos(y_0) + i\operatorname{sen}(y_0))$, con $r \geq 0$, es singularidad aislada de $f$ pues cualquier vecindad de cualquiera de ellos tiene una infinidad de puntos de la misma forma.*

Observe que, si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región, $z_0 \in \Omega$ y $f$ es una función analítica en $\Omega \setminus \{z_0\}$, entonces $z_0$ es una singularidad aislada de $f$. Uno de los objetivos de esta sección es el de dar una clasificación completa de este tipo de singularidades aisladas asociadas con una función analítica $f$.

El primer resultado que daremos en esta dirección es el que nos permite dar condiciones bajo las cuales una de estas singularidades puede dejar de serlo, es decir, que existe una forma de definir a la función $f$ en el punto $z_0$ de tal forma que ésta resulta analítica en todo $\Omega$. A las singularidades aisladas que satisfagan la condición anterior les llamaremos *singularidades removibles*, concepto que dejamos expresado en la siguiente

**Definición 4.14** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Decimos que $z_0$ es una singularidad removible de $f$ si existe $\tilde{f} : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.*

Una vez que tenemos esta definición, damos una caracterización de este tipo de singularidades en la siguiente

**Proposición 4.15** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $z_0 \in \Omega$ y $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. El punto $z_0$ es una singularidad removible de $f$ si y sólo si*

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0. \tag{4.5}$$

**Demostración.** Primero probaremos que la identidad 4.5 es una condición suficiente para que el punto $z_0$ sea una singularidad removible de $f$.

Como el lector recordará, una consecuencia importante de la fórmula integral de Cauchy es la de probar que los valores de una función $f$ dentro de un disco (o bola) $B_r(z_0) \subset \Omega$ están determinados por los valores de $f$ sobre la frontera de la $B_r(z_0)$ ($\partial B_r(z_0)$), es decir, sobre los puntos de la circunferencia de radio $r$ con centro en $z_0$.

Con este hecho en mente, es entonces "natural" definir a $\tilde{f}$ de la siguiente manera: si $r > 0$ es tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$, definimos

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \{z_0\} \\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

en donde $\gamma_r(t) = e^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Como el lector estará de acuerdo, lo único que resta probar de la función $\tilde{f}$ es que ésta sea derivable en $z = z_0$. Para ello, basta observar que, por el teorema 3.35 del capítulo 3, sabemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ de tal forma que podemos concluir que

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0)$.

Ahora, por el corolario 4.4 sabemos que la función

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

es analítica en $\mathbb{C} \setminus \gamma_r$, y como $\tilde{f}(z) = F(z)$ para toda $z \in B_r(z_0)$, entonces $\tilde{f}$ es derivable en $z_0$.

Que la identidad 4.5 se verifica si el punto $z_0$ es una singularidad removible de $f$ es un hecho inmediato, y su prueba se deja al lector. ■

En el siguiente ejemplo analizamos las funciones del ejemplo 1 que tienen singularidades aisladas a fin de determinar si éstas son removibles.

**Ejemplo 4.16**

1. *Para el caso de la función $f(z) = (\exp(z) - 1)/z$ se tiene que*

$$\lim_{z \to 0} (z - 0) f(z) = \lim_{z \to 0} (\exp(z) - 1) = 0,$$

*de modo que podemos concluir que $f$ tiene una singularidad removible en $z = 0$.*

2. *Para el caso de la función $f(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, dado que en particular se sabe que si $z = x \in \mathbb{R}$, entonces*

$$\lim_{z \to 0} (z - 0) f(z) = \lim_{x \to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$$

*y por lo tanto podemos concluir que $z = 0$ no es una singularidad removible de $f$. Por un argumento análogo se obtiene la misma conclusión para toda $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.*

3. *Para el caso de la función $f(z) = \exp(1/z)$ nótese que si $z = x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, se tiene que*

$$\lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{x\to 0^+} xe^{1/x} = \infty$$

*y por lo tanto, nuevamente por un argumento similar al del inciso anterior, podemos concluir que $z = 0$ no es una singularidad removible de $f$.*

4. *Para el caso de la función $f(z) = 1/\operatorname{sen}(1/z)$, para $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/k\pi \mid k \in \mathbb{Z}, k \neq 0\}$, se puede ver con facilidad que estas singularidades aisladas son análogas a las del ejemplo del inciso 2, por lo que en este caso tampoco son removibles.*

Y ya que contamos con el concepto de sigularidad removible, podemos dar una aplicación muy interesante del principio del módulo máximo que probamos en el capítulo 3 (teorema 3.33). Probaremos el llamado *lema de Schwarz*[3] el cual es un resultado muy importante y muy útil para la descripción y caracterización de las funciones analíticas definidas sobre bolas abiertas (o discos abiertos) que son acotadas.

**Lema 4.17 (de Schwarz)** *Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)| \leq 1$ para toda $z \in B_1(0)$. Si $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ para toda $z \in B_1(0)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Si además $|f(z)| = |z|$ para alguna $z \in B_1(0)$, $z \neq 0$, o $|f'(0)| = 1$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cz$ para toda $z \in B_1(0)$.*

**Demostración.** Definamos $g : B_1(0) \setminus \{0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como $g(z) = f(z)/z$; nótese que, como

$$\lim_{z\to 0} zg(z) = \lim_{z\to 0} f(z) = 0,$$

entonces $z = 0$ es una singularidad removible de $g$ de tal forma que existe $\tilde{g} : B_1(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $\tilde{g}(z) = g(z)$ para toda $z \in B_1(0) \setminus \{0\}$.

Observe que, como $\tilde{g}$ debe ser continua en $z = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(0) &= \lim_{z\to 0} \tilde{g}(z) \\
&= \lim_{z\to 0} g(z) \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \\
&= f'(0).
\end{aligned}$$

Ahora, para cualquier $0 < r < 1$ se tiene que $\tilde{g}$ es continua sobre $\overline{B_r(0)}$ de tal forma que, por el corolario 3.34 del capítulo 3, se sabe que existe $z_0 \in \overline{B_r(0)}$ tal que $|z_0| = r$ y

$$|\tilde{g}(z)| \leq |\tilde{g}(z_0)| = \left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = \frac{|f(z_0)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

para toda $z \in \overline{B_r(0)}$, de tal forma que, si en la desigualdad anterior hacemos que $r \to 1$, concluimos que

$$|\tilde{g}(z)| \leq 1$$

para toda $z \in B_1(0)$ y por lo tanto que $|f(z)| \leq |z|$ para toda $z \in B_1(0)$ y también que $|f'(0)| = |\tilde{g}(0)| \leq 1$.

Si además se satisface que $|f(z_0)| = |z_0|$ para alguna $z_0 \in B_1(0)$, $z_0 \neq 0$, o $|f'(0)| = 1$, entonces

$$|\tilde{g}(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = 1 \quad \text{o} \quad |\tilde{g}(0)| = |f'(0)| = 1$$

[3]Hermann Schwarz (Hermsdorf, Silesia (ahora Sobieszów, Polonia), 25 de enero de 1843 - Berlín, 30 de noviembre de 1921) fue un matemático alemán conocido por su trabajo en análisis complejo. (Fuente: Wikipedia).

de modo que en ambos casos se tendrá que la función $|\tilde{g}|$ alcanza su valor máximo en un punto de $B_1(0)$. De esta forma, por el principio del módulo máximo se debe cumplir que

$$\tilde{g}(z) = \tilde{g}(z_0) \quad \text{ o } \quad \tilde{g}(z) = \tilde{g}(0) = f'(0)$$

y por lo tanto, tomando $c = |f(z_0)| / |z_0|$ (en el primer caso) o $c = f'(0)$ (en el segundo caso), concluimos que $|c| = 1$ y

$$f(z) = cz$$

para toda $z \in B_1(0)$. ■

En los problemas 13, 14, 15 y 16 el lector tendrá oportunidad de probar interesantes e importantes generalizaciones de este resultado.

Para continuar con el análisis de las singularidades aisladas de una función, lo siguiente que haremos será formular, apoyados en la proposición 4.15, el equivalente al *teorema de Taylor*[4] para funciones analíticas, el cual es una herramienta muy importante en el análisis del comportamiento local de una función. Antes de enunciar este teorema, damos la siguiente

**Definición 4.18** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$. Definimos el polinomio de Taylor de grado $n$ de $f$ basado en $z_0$, que denotamos por $p_{n,f,z_0}$, como*

$$p_{n,f,z_0}(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

*Si $n = 0$, hacemos $p_{0,f,z_0}(z) = f(z_0)$ para toda $z \in \mathbb{C}$.*

Una vez que tenemos esta definición, formulamos el siguiente

**Teorema 4.19 (de Taylor)** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ y $\gamma_r(t) = e^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$. Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que*

$$f(z) = p_{n-1,f,z_0}(z) + f_n(z)(z - z_0)^n \tag{4.6}$$

*para toda $z \in \Omega$, y además*

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z)} d\zeta \tag{4.7}$$

*para toda $z \in B_r(z_0)$.*

**Demostración.** Para esta prueba, nuevamente procederemos por inducción. Para el caso $n = 1$, definimos $F_1 : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$F_1(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Como claramente se cumple que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)F_1(z) = 0,$$

por la proposición 4.15 sabemos que existe $f_1 : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$f_1(z) = F_1(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto se tiene que

$$f(z) = f(z_0) + f_1(z_0)(z - z_0)$$

[4] Brook Taylor (Edmonton, Middlesex, Inglaterra, 18 de agosto de 1685 - Somerset House, Londres, 29 de diciembre de 1731) fue un matemático británico, autor del teorema que lleva su nombre y de destacadas contribuciones al desarrollo del cálculo diferencial. (Fuente: Wikipedia).

para toda $z \in \Omega$.

Por otra parte, por la fórmula integral de Cauchy aplicada a la función $f_1$ sabemos que

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0)$, y como

$$f_1(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0}$$

para toda $\zeta \in \gamma_r$, entonces

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta \end{aligned}$$

para toda $z \in B_r(z_0)$, y como

$$\int_{\gamma_r} \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta = 0$$

para toda $z \in B_r(z_0)$ (problema 43 del capítulo 3), concluimos que

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0)$, que es lo que deseabamos probar para conluir el primer paso de inducción.

Para la prueba del paso de inducción, supongamos que $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica tal que se satisface 4.6 y 4.7. Definimos entonces $F_{n+1} : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$F_{n+1}(z) = \frac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0}.$$

Nuevamente, por la proposición 4.15 sabemos que existe $f_{n+1} : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$f_{n+1}(z) = F_{n+1}(z) = \frac{f_n(z) - f_n(z_0)}{z - z_0}$$

para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ de modo que

$$f_n(z) = f_n(z_0) + f_{n+1}(z)(z - z_0).$$

Sustituyendo esta identidad en la expresión 4.6 tenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= p_{n-1,f,z_0}(z) + f_n(z)(z - z_0)^n \\ &= p_{n-1,f,z_0}(z) + f_n(z_0)(z - z_0)^n + f_{n+1}(z)(z - z_0)^{n+1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

y como por la expresión 4.7 para $f_n$ se tiene que

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^n(\zeta - z_0)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, concluimos que

$$f_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

de manera que sustituyendo este valor en 4.8, obtenemos que

$$\begin{aligned} f(z) &= p_{n-1,f,z_0}(z) + f_n(z_0)(z-z_0)^n + f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1} \\ &= p_{n-1,f,z_0}(z) + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1} \\ &= p_{n,f,z_0}(z) + f_{n+1}(z)(z-z_0)^{n+1}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

la expresión deseada para $f(z)$.

Para probar que la función $f_{n+1}$ satisface la correspondiente expresión integral dada por 4.7, nuevamente por la fórmula integral de Cauchy aplicada a $f_{n+1}$, sabemos que

$$f_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f_{n+1}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0)$. Ahora, si evaluamos la expresión 4.9 para $z = \zeta$ y despejamos $f_{n+1}(\zeta)$ y la sustituimos en la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} f_{n+1}(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta) - p_{n,f,z_0}(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(\zeta-z)^k\right) d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta - \sum_{k=0}^{n}\int_{\gamma_r} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!(\zeta-z_0)^{n+1-k}(\zeta-z)} d\zeta\right] \end{aligned}$$

y como, nuevamente por el problema 43 del capítulo 3 se tiene que

$$\int_{\gamma_r} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!(\zeta-z_0)^{n+1-k}(\zeta-z)} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}\int_{\gamma_r} \frac{1}{(\zeta-z_0)^{n+1-k}(\zeta-z)} d\zeta = 0$$

para cada $k \in \{0, \ldots, n+1\}$, entonces

$$f_{n+1}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}(\zeta-z)} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0)$, con lo cual terminamos el paso de inducción y la prueba del teorema. ■

El teorema de Taylor tiene importantes implicaciones para las funciones analíticas y la primera de ellas se refiere a la posibilidad de escribir al valor de una función en términos de una serie de números, que por razones obvias, llamaremos la *serie de Taylor*. Este resultado lo dejamos formulado en el siguiente

**Teorema 4.20** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Para cada $z \in B_r(z_0)$ la serie*

$$\sum \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

*es convergente y además*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k = f(z).$$

**Demostración.** Sea $z \in B_r(z_0)$ y $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$. Observe que para toda $\zeta \in \gamma_r$ se tiene que

$$0 < r - |z - z_0| \leq |\zeta - z|$$

(ver figura 4.2).

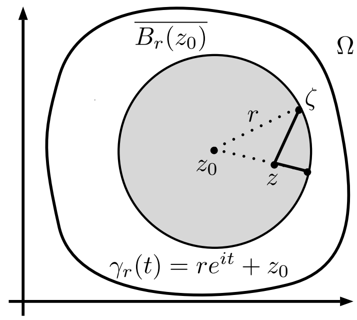



Figura 4.2: Si $z \in B_r(z_0)$ se tiene que $0 < r - |z - z_0| \leq |\zeta - z|$ para toda $\zeta \in \gamma_r$.

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, por la expresiones 4.6 y 4.7 del teorema de Taylor obtenemos que

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k - f(z) \right| &= |p_{n,f,z_0}(z) - f(z)| \\
&= \left| f_{n+1}(z)(z - z_0)^{n+1} \right| \\
&= \left| (z - z_0)^{n+1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}(\zeta - z)} d\zeta \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} |z - z_0|^{n+1} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1} |\zeta - z|} |d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^{n+1} \frac{1}{r - |z - z_0|} \int\limits_{\gamma_r} |f(\zeta)| |d\zeta| .
\end{aligned}$$

Ahora, como $z \in B_r(z_0)$, entonces $|z - z_0| < r$ y por lo tanto

$$\lim_{n \to \infty} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^{n+1} = 0,$$

de modo que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = f(z),$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Una aplicación del teorema anterior nos permite probar la afirmación que hicimos en el capítulo 2 con relación a la igualdad de la funciones exp y la función $\mathsf{E}$ que definimos como

$$\mathsf{E}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Observe que si tomamos $f = \exp$ y $z_0 = 0$ en el teorema anterior, dado que para cualquier $z \in \mathbb{C}$ existe $r > 0$ tal que $z \in \overline{B_r(z_0)} \subset \mathbb{C}$, podemos asegurar que

$$\exp(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}(z - 0)^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\
&= \mathsf{E}(z).
\end{aligned}
$$

Una aplicación del teorema 4.20, aun más relevante que la anterior, se relaciona con la caracterización de las funciones analíticas que tienen la particularidad de que todas sus derivadas se anulen en un punto $z_0$ de su dominio. A diferencia de lo que sucede en el caso real con la función

$$
g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}
$$

que como el lector recordará, tiene la particularidad de que $f^{(n)}(0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, en el caso de las funciones analíticas no existe ninguna (que sea diferente de una constante) que tenga la misma propiedad que la función $g$. Dicho de otra forma, si $f$ es una función analítica que tiene la particularidad de que $f^{(n)}(z_0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ en algún punto $z_0$ de su dominio, se debe tener que $f$ es constante. Este resultado lo dejamos plasmado en la siguiente

**Proposición 4.21** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$ (una región) tal que $f(z_0) = 0$. Si $f^{(n)}(z_0) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $f$ es la función constante $0$.*

**Demostración.** En este resultado es muy importante el hecho de que $\Omega$ sea una región (un abierto y conexo). Definimos dos subconjuntos de $\Omega$ de la siguiente forma:

$$
U_1 = \left\{ z \in \Omega \mid f^{(n)}(z) = 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N} \right\},
$$

y

$$
U_2 = \left\{ z \in \Omega \mid f^{(n)}(z) \neq 0 \text{ para alguna } n \in \mathbb{N} \right\}.
$$

Es fácil verificar las siguientes propiedades de $U_1$ y $U_2$:

1. $\Omega = U_1 \cup U_2$.
2. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.
3. $z_0 \in U_1$ y por lo tanto $U_1 \neq \varnothing$.

Adicional a estas propiedades, también probaremos que $U_1$ y $U_2$ son abiertos, lo cual nos llevará a la conclusión de que $U_2 = \varnothing$, pues en caso contrario se tendría que $\Omega$ sería disconexo, lo cual es una contradicción.

Empezaremos por probar que $U_1$ es un conjunto abierto. Sea $z' \in U_1 \subset \Omega$; como $\Omega$ es abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z')} \subset \Omega$, de modo que por el teorema 4.20 sabemos que

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z')}{n!} (z - z')^n = f^{(0)}(z') = f(z')
$$

para toda $z \in B_r(z')$, es decir, $f$ es la función constante $f(z')$ en la bola $B_r(z')$ y por lo tanto $f^{(n)}(z) = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y toda $z \in B_r(z')$. Esto prueba que $B_r(z') \subset U_1$ y por lo tanto que $U_1$ es abierto.

Ahora probaremos que $U_2$ también es un conjunto abierto. Sea $z' \in U_2 \subset \Omega$; como $\Omega$ es abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z')} \subset \Omega$. Ahora, como $z' \in U_2$ entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z') \neq 0$ y como $f^{(n)}$ es continua en $z'$, sabemos que existe $0 < \delta < r$ tal que $f^{(n)}(z) \neq 0$ para toda $z \in B_\delta(z') \subset B_r(z') \subset \Omega$, de modo que $B_\delta(z') \subset U_2$ y por lo tanto $U_2$ también es abierto.

Por la conexidad de $\Omega$ tenemos entonces que $\Omega = U_1$ de modo que, en particular $f'(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$, y por lo tanto $f$ es la constante $0$ puesto que $f(z_0) = 0$. ■

## 4.3. Interludio de sucesiones y series de funciones

Como ya lo pudimos constatar en la proposición 4.21, el teorema 4.20 acerca de la representación de una función analítica como una serie de números es muy importante. Sin embargo, no podemos negar que en cierto modo este teorema está incompleto, pues no nos dice si dicha representación es única. Para respoder a esta importante pregunta será necesario echar mano del concepto de convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones, y su relación con los conceptos de derivada e integral de las funciones analíticas, tema que abordaremos en esta breve sección.

Sólo para establecer la notación que usaremos y uniformar conceptos, empezaremos con las definiciones más básicas.

**Definición 4.22** *Sean $f_n, f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\Omega$ una región. Decimos que:*

1. *La sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente (a la función $f$) en $A \subset \Omega$ si para cada $z \in A$ se tiene que la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ converge (a $f(z)$).*

2. *La serie de funciones $\{\sum f_n\}$ converge puntualmente (a la función $f$) en $A \subset \Omega$ si para cada $z \in A$ se tiene que la serie de números complejos $\{\sum f_n(z)\}$ converge (a $f(z)$).*

3. *La sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función $f$ en $A \subset \Omega$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que*

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

*para toda $z \in A$.*

4. *La serie de funciones $\{\sum f_n\}$ converge uniformemente (a la función $f$) en $A \subset \Omega$ si la sucesión de sumas parciales $\{S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k\}$ converge uniformemente en $A \subset \Omega$ (a la función $f$).*

Como seguramente el lector recordará, el concepto de convergencia uniforme es el que nos garantiza que las propiedades de continuidad, integrabilidad y derivabilidad de las funciones $f_n$ se preservan en la función límite $f$. En la siguiente proposición formularemos esta propiedad de manera más precisa.

**Teorema 4.23** *Sean $f_n, f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que para todo $A \subset \Omega$ compacto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función $f$ en $A$.*

1. *Si $f_n$ es continua en $\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f$ es continua en $\Omega$.*

2. *Si $f_n$ es continua en $\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\gamma \subset \Omega$ es una curva suave por pedazos, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

3. *Si $f_n$ es analítica en $\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f$ es analítica en $\Omega$. Además, para toda $k \in \mathbb{N}$ la sucesión $\left\{f_n^{(k)}\right\}$ converge uniformemente a $\left\{f^{(k)}\right\}$ en cualquier $A \subset \Omega$ compacto, y en particular se tiene que*

$$f^{(k)}(z) = \lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z)$$

*para toda $z \in \Omega$.*

**Demostración.** Sean, $z_0 \in \Omega$, $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$, y $\gamma \subset \Omega$ una curva suave por pedazos. Como $\overline{B_r(z_0)}$ y $\gamma$ son compactos, entonces $\overline{B_r(z_0)} \cup \gamma$ también es compacto, de modo que por hipótesis sabemos que dado $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| < \tilde{\varepsilon} \tag{4.10}$$

para toda $z \in \overline{B_r(z_0)} \cup \gamma$.

Para la prueba del primer inciso, como $f_N$ es continua en $z_0$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $z \in B_\delta(z_0) \subset B_r(z_0)$, entonces

$$|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3.$$

Por tanto, si tomamos $z \in B_\delta(z_0)$ y en la desigualdad 4.10 elegimos $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/3 > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

y por lo tanto que $f$ es continua en $z_0$.

Para la prueba del inciso 2, como por el primer inciso ya sabemos que $f$ es continua en $\Omega$, entonces podemos hablar de la integral de $f$ sobre $\gamma$. Ahora, si nuevamente tomamos $n \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz \right| &= \left| \int_\gamma (f(z) - f_n(z))\, dz \right| \\ &\leq \int_\gamma |f(z) - f_n(z)|\, |dz| \\ &< \tilde{\varepsilon} \int_\gamma |dz| \end{aligned}$$

de tal forma que dado $\varepsilon > 0$, ahora elegimos

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\int_\gamma |dz|} > 0$$

y concluimos que

$$\left| \int_\gamma f(z)dz - \int_\gamma f_n(z)dz \right| < \varepsilon$$

lo que prueba que

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz.$$

Para la prueba del inciso 3 bastará probar que $f$ es analítica en $B_r(z_0)$, lo cual es suficiente para concluir que $f$ es analítica en todo $\Omega$. Ahora, como cada $f_n$ es analítica (y por tanto continua) en $\Omega$, por el primer inciso sabemos que $f$ es continua en $\Omega$. De esta forma, si $\tilde{\gamma} \subset B_r(z_0)$ es cualquier curva cerrada suave por pedazos, por el teorema de Cauchy para un disco, sabemos que

$$\int_\gamma f_n(z)dz = 0$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, de modo que por el inciso 2 tenemos que

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$$

y por lo tanto, por el teorema de Morera (teorema 4.8) se tiene que $f$ es analítica en $B_r(z_0)$.

Finalmente, tomamos $0 < \rho < r$ y hacemos $\tilde{\gamma}(t) = \rho e^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$. Si $k \in \mathbb{N}$, por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas, en un disco (teorema 4.5), sabemos que para toda $z \in B_\rho(z_0)$ se tiene que

$$\left| f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{f(\zeta)-f_n(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{\gamma}} \frac{|f(\zeta)-f_n(\zeta)|}{|\zeta-z|^{k+1}}\,|d\zeta| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\,(r-\rho)^{k+1}}\int\limits_{\tilde{\gamma}} |f(\zeta)-f_n(\zeta)|\,|d\zeta|\,.
\end{aligned}$$

Ahora, como la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\tilde{\gamma} \subset \Omega$ (compacto) a la función $f$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$|f(\zeta) - f_n(\zeta)| < \frac{\varepsilon\,(r-\rho)^{k+1}}{r}$$

para toda $\zeta \in \tilde{\gamma}$, de modo que, si $n \geq N$, obtenemos que

$$\left|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)\right| < \varepsilon$$

para toda $z \in B_\rho(z_0)$, lo que prueba que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente en la bola $B_\rho(z_0) \subset \Omega$ a la función $f^{(k)}$. Con base en lo anterior, y por el problema 10, concluimos que la sucesión $\{f_n^{(k)}\}$ converge uniformemente a la función $f^{(k)}$ en cualquier $A \subset \Omega$ compacto. ■

Como el lector estará de acuerdo, el teorema anterior se puede extender fácilmente a las series de funciones, resultado que formularemos a continuación como un corolario y cuya prueba queda a su cargo como un problema.

**Corolario 4.24** *Sean $f_n, f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que para todo $A \subset \Omega$ compacto, la serie $\sum f_n$ converge uniformemente a la función $f$ en $A$.*

1. *Si $f_n$ es continua en $\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f$ es continua en $\Omega$.*
2. *Si $f_n$ es continua en $\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$, y $\gamma \subset \Omega$ es una curva suave por pedazos, entonces*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz := \int\limits_{\gamma}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)dz = \sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{\gamma} f_n(z)dz.$$

3. *Si $f_n$ es analítica en $\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $f$ es analítica en $\Omega$. Además, para toda $k \in \mathbb{N}$ la serie $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformemente a $f^{(k)}$ en cualquier $A \subset \Omega$ compacto, y en particular se tiene que*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$$

*para toda $z \in \Omega$.*

Una vez que ya contamos con estos resultados, los aplicaremos al caso particular de las llamadas series de potencias, las cuales desarrollamos en la siguiente subsección.

### 4.3.1. Series de potencias

En esta subsección aplicaremos los resultados que obtuvimos previamente para el caso de las funciones que se pueden obtener como el límite de una serie de funciones de la forma $f_n(z) = a_n(z-z_0)^n$, en donde $a_n, z_0, z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$.

Las series

$$\sum f_n = \sum a_n(z - z_0)^n$$

son conocidas (por razones obvias) como *series de potencias* y por ahora lo primero que haremos será determinar en qué regiones $\Omega \subset \mathbb{C}$ dichas series convergen uniformemente.

Como es de suponerse, la convergencia uniforme en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ de una serie de potencias dependerá de la sucesión de los coeficientes $\{a_n\}$ lo cual dejaremos establecido en una proposición. Para poder formular esta proposición será necesario definir (o recordar) un concepto asociado a las sucesiones de números reales: el concepto de *límite superior* de una sucesión.

**Definición 4.25** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y*

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \textit{ es límite de alguna subsucesión de } \{x_n\}\}$$

1. *Si $\{x_n\}$ no está acotada superiormente, definimos el límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ igual a $\infty$.*
2. *Si $\{x_n\}$ está acotada superiormente y $S \neq \varnothing$, definimos el límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ como $\alpha = \sup(S)$.*

*En ambos casos escribiremos que* $\limsup\{x_n\} := \alpha$.

Aunque la definición anterior es muy fácil de entender, será necesario contar con otra forma de caracterizar al límite superior de una sucesión para el caso en que dicho límite sea finito. Esta caracterización la formularemos en la siguiente proposición, cuya prueba se deja al lector.

**Proposición 4.26** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de números reales acotada superiormente tal que $S \neq \varnothing$. El número $\alpha \in \mathbb{R}$ es el límite superior de $\{x_n\}$ si y sólo si $\alpha$ satisface las siguientes dos condiciones:*

1. *$\alpha \in S$, y*
2. *para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ se tiene que $\alpha \leq x_n < \alpha + \varepsilon$.*

Una vez que tenemos esta definición y este resultado, podemos formular la siguiente proposición con relación a la convergencia de una serie de potencias.

**Proposición 4.27** *Sean, $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos, y*

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{\limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}} & \textit{si } 0 < \limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} < \infty \\ \infty & \textit{si } \limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = 0 \\ 0 & \textit{si } \limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = \infty \end{cases}$$

1. *Si $0 < R \leq \infty$, entonces la serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente en $\overline{B_r(z_0)}$ para toda $0 < r < R$.*
2. *Si $0 \leq R < \infty$, entonces la serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$ no converge para toda $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| > R$.*
3. *Si $0 < r'$ es tal que la serie $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge para toda $z \in B_{r'}(z_0)$, entonces $r' \leq R$.*

*Al número $R$ lo llamararemos el* radio de convergencia *de la serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$.*

**Demostración.** Para la prueba del inciso 1, tomemos $s \in \mathbb{R}$ tal que $r < s < R$; entonces se tiene que

$$\limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = \frac{1}{R} < \frac{1}{s} < \frac{1}{r}$$

de modo que, por el inciso 2 de la proposición 4.26 existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{R} \leq \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{s}$$

para toda $n \geq N$. De esta forma, si $|z - z_0| \leq r$, entonces

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|\,|z-z_0| \leq \left(\frac{1}{s}\right)^n r^n = \left(\frac{r}{s}\right)^n$$

para toda $n \geq N$.

Si ahora hacemos $M_n = (r/s)^n$, como $r/s < 1$, entonces la serie $\sum M_n$ es convergente de modo que por la prueba $M$ de Weierstrass podemos concluir que la serie de potencias $\sum a_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente en $\overline{B_r(z_0)}$.

Para la prueba del inciso 2, sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| > R$; entonces

$$\frac{1}{|z-z_0|} < \frac{1}{R} = \limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$$

de modo que, por el inciso 1 de la proposición 4.26, existe una sucesión creciente de naturales $\{n_k\}$ tal que $\left\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\right\} \to 1/R$ y por lo tanto, por la desigualdad anterior, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{|z-z_0|} < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$$

para $k \geq N$. De esta desigualdad concluimos que

$$1 < |a_{n_k}|\,|z-z_0|^{n_k} = |a_{n_k}(z-z_0)^{n_k}|$$

para $k \geq N$ de donde se deduce que la sucesión $\{a_n(z-z_0)^n\}$ no puede converger a 0 y por lo tanto que la serie $\sum a_n(z-z_0)^n$ no converge.

Finalmente, observe que el inciso 3 es una consecuencia inmediata del inciso 2 pues si $R < r'$, entonces podemos tomar $z \in B_{r'}(z_0)$ tal que $R < |z - z_0|$ con la propiedad de que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

converge, lo cual contradiría la afirmación del inciso 2. ■

Con base en el inciso 3 de la proposición anterior y del teorema 4.20 podemos obtener un resultado que nos habla del comportamiento de la sucesión

$$\left\{\sqrt[n]{\left|f^{(n)}(z_0)\right|/n!}\right\},$$

cuando se tiene que $f$ es una función analítica en una vecindad $B_r(z_0)$, resultado que dejamos formulado en la siguiente proposición y cuya prueba se deja al lector.

**Proposición 4.28** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. La sucesión $\left\{\sqrt[n]{\left|f^{(n)}(z_0)\right|/n!}\right\}$ es tal que*

$$\limsup\left\{\sqrt[n]{\left|f^{(n)}(z_0)\right|/n!}\right\} \leq \frac{1}{r}.$$

De la proposición 4.27 también concluimos que, si $\{a_n\}$ es una sucesión de números complejos tal que $\limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} < \infty$, es decir que $\limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} \in \mathbb{R}$, entonces podemos definir la función

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{4.11}$$

para toda $z \in B_R(z_0)$, en donde $R$ es el radio de convergencia de dicha serie de potencias. Observe que si $\limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = 0$, entonces $R = \infty$ y por lo tanto $f$ está definida para toda $z \in \mathbb{C}$.

Pero además de poder definir la función dada por 4.11, como las funciones $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$ son analíticas en $\mathbb{C}$ para toda $n \in \mathbb{N}$, el corolario 4.24 nos asegura que $f$ es analítica en $B_R(z_0)$ y nos permite expresar a los coeficientes $a_n$ en términos de las derivadas de $f$. Este importante resultado lo dejamos formulado en el siguiente

**Teorema 4.29** *Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos tal que*

$$\limsup\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\} = \alpha < \infty.$$

*Si $R > 0$ es el radio de convegencia de la serie de potencias $\sum a_n(z - z_0)^n$, entonces la función $f : B_R(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

*es analítica en $B_R(z_0)$ y además*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

*para cada $n \in \mathbb{N}$.*

**Demostración.** Por el corolario 4.24 sólo necesitamos probar que si $A \subset B_R(z_0)$ es compacto, entonces la serie $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente en $A$. Pero si $A \subset B_R(z_0)$ es compacto, es inmediato que existe $0 < r < R$ tal que $A \subset \overline{B_r(z_0)} \subset B_R(z_0)$, de modo que, como por el inciso 1 de la proposición 4.27 sabemos que la serie $\sum a_n(z - z_0)^n$ converge uniformemente en $\overline{B_r(z_0)}$, entonces también lo hace en $A$.

Por otra parte, por el inciso 3 del mismo corolario 4.24 se tiene que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} k! a_k(z - z_0)^{n-k} \\ &= k! a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} k! a_k(z - z_0)^{n-k} \end{aligned}$$

para cada $z \in B_R(z_0)$, de tal forma que

$$f^{(k)}(z_0) = k! a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} k! a_k(z_0 - z_0)^{n-k} = k! a_k$$

y por lo tanto

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!},$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Y una vez que ya tenemos el teorema anterior, podemos probar (como un corolario) el importante resultado sobre la unicidad de la expresión de una función analítica como una serie de potencias.

**Corolario 4.30** *Sean, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ sucesiones de números complejos, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, tales que las series $\sum a_n(z-z_0)^n$ y $\sum b_n(z-z_0)^n$ convergen para toda $z \in B_r(z_0)$. Si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

*para toda $z \in B_r(z_0)$, entonces $a_n = b_n$ para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

**Demostración.** Para la prueba de este corolario primero observemos que, si $R$ y $R'$ son los radios de convergencia de las series $\sum a_n(z-z_0)^n$ y $\sum a_n(z-z_0)^n$, respectivamente, por el inciso 3 de la proposición 4.27 se tiene que $0 < r \leq \text{mín}\{R, R'\}$. Por tanto, las funciones $f$ y $\tilde{f}$ definidas como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

y

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

son analíticas en $B_r(z_0)$ y tales que $f(z) = \tilde{f}(z)$ en esta misma vecindad. Por lo tanto, por el teorema 4.29 se tiene que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{\tilde{f}^{(k)}(z_0)}{k!} = b_k$$

para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, que es lo que se quería demostrar. ■

## 4.4. Ceros de funciones

Los puntos en donde una función analítica $f$ toma el valor 0 juegan un papel muy relevante para el análisis del comportamiento local de $f$, y la proposición 4.21 resultará muy importante para el análisis de este tipo de puntos. Observe que de esta proposición tenemos el siguiente corolario, cuya prueba es inmediata.

**Corolario 4.31** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$. Si $f$ es no constante, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.*

Y con base en este corolario, podemos dar la siguiente

**Definición 4.32** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$. Si $f$ es no constante, definimos el orden de $z_0$ (como cero de $f$) como la mínima $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.*

Observe que la afirmación de la proposición 4.32 se puede reparafrasear de la siguiente forma: *si una función tiene un cero de orden $\infty$ en su dominio, entonces es la función constante* 0.

Unos ejemplos muy sencillos que ilustran la definición anterior son los siguientes:

**Ejemplo 4.33**

1. *Sea $f(z) = \text{sen}(z)$. Sabemos que $f(z) = 0$ si y sólo si $z = k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. Como $f'(z) = \cos(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces $f'(k\pi) = \cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$, por lo que podemos concluir que todos los ceros de la función seno son de orden* 1.

2. *Sea $f(z) = 1 - \cos(z)$. Sabemos que $f(z) = 0$ si y sólo si $z = 2k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. En este caso se tiene que $f'(z) = \text{sen}(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $f'(2k\pi) = \text{sen}(2k\pi) = 0$. Por tanto, habrá que calcular la siguiente derivada que es $f''(z) = \cos(z)$ y para la cual se tiene $f''(2k\pi) = \cos(2k\pi) = 1 \neq 0$, de modo que todos los ceros de $f$ son de orden* 2.

3. *Sea $f(z) = p(z)$ un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Nótese que si $p$ se factoriza de la forma*

$$p(z) = a(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_1)^{k_m}$$

*($a \neq 0$), entonces cada raíz $z_i$ de $p$ es un cero de orden $k_i$ de $p$; es decir el orden de cada $z_i$ como cero de $p$ coincide con la multiplicidad de $z_i$ como raíz de $p$. En este sentido, extendiendo esta analogía a los ceros de una función analítica $f$, podemos decir que un cero de $f$ de orden $k$ es "una raíz de orden $k$ de $f$".*

Y ya que contamos con la definición 4.32, con base en el teorema de Taylor podemos dar la siguiente caracterización del orden de un cero $z_0$ de una función $f$, que formulamos en la siguiente

**Proposición 4.34** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica no constante y $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$. Se cumple que: $z_0$ es un cero de orden $k \in \mathbb{N}$ de $f$ si y sólo si existe $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$$

*para toda $z \in \Omega$ y $f_k(z_0) \neq 0$.*

**Demostración.** Demostraremos sólo la condición necesaria pues para la prueba de la condición suficiente sólo hace falta derivar $k$ veces la función $(z - z_0)^k f_k(z)$.

Por el teorema de Taylor sabemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, existen $r > 0$ y $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, tales que

$$f(z) = p_{k-1,f,z_0}(z) + (z - z_0)^k f_k(z)$$

para toda $z \in \Omega$ y

$$f_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k (\zeta - z)} d\zeta$$

para toda $z \in B_r(z_0) \subset \overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$ y en donde $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Ahora, como $f(z_0) = 0$ y $f^{(j)}(z_0) = 0$ para $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, entonces $p_{k-1,f,z_0}(z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$ y por lo tanto

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z). \tag{4.12}$$

Finalmente, por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas se tiene que

$$f_k(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \neq 0,$$

con lo cual concluimos la prueba de la existencia de la función $f_k$ con las propiedades requeridas. En cuanto a su unicidad, ésta se sigue de forma inmediata de la identidad 4.12 y la continuidad de $f_k$ en $z_0$. ■

La proposición anterior tiene un corolario el cual establece una propiedad muy importante de los ceros de una función analítica no constante: éstos deben ser aislados.

**Corolario 4.35** *Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica, no constante, y $z_0 \in \Omega$ es tal que $f(z_0) = 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$.*

**Demostración.** El resultado es inmediato del hecho de que $f_k$ es continua y que $f_k(z_0) \neq 0$. ■

Y este corolario también tiene un corolario muy relevante: si los ceros de una función analítica $f$ se acumulan en un punto del dominio de $f$, entonces $f$ debe ser la función constante 0.

**Corolario 4.36** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $Z_f = \{z \in \Omega \mid f(z) = 0\}$. Si $z_0 \in \Omega$ es un punto de acumulación de $Z_f$ ( $z_0 \in Z_f'$), entonces $f$ es la constante 0.*

**Demostración.** Si $z_0 \in Z'_f$, entonces existe una sucesión $\{z_n\} \subset Z_f$ tal que $\{z_n\} \to z_0$, de modo que, por la continuidad de $f$ se debe tener que $\{f(z_n) = 0\} \to f(z_0)$ y por lo tanto $f(z_0) = 0$, es decir, $z_0 \in Z_f$. Pero como claramente $z_0$ no es un cero aislado, entonces concluimos que $f$ es la función constante 0. ■

Como seguramente el lector ya sabe, la afirmación del corolario anterior se puede formular en términos de dos funciones, de la siguiente forma: si dos funciones analíticas $f$ y $g$ definidas en el mismo dominio $\Omega$, coinciden en un conjunto que al menos tiene un punto de acumulación en $\Omega$, entonces son iguales en todo $\Omega$. Dicho de otra forma: una función analítica $f$ en una región $\Omega$ está totalmente determinada por sus valores sobre un conjunto $A \subset \Omega$ que al menos tenga un punto de acumulación en $\Omega$.

**Corolario 4.37** *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas y $A = \{z \in \Omega \mid f(z) = g(z)\}$. Si $z_0 \in \Omega$ es un punto de acumulación de $A$ ( $z_0 \in A'$), entonces $f(z) = g(z)$ para toda $z \in \Omega$ (es decir, $A = \Omega$).*

Y para concluir con esta ya larga cadena de corolarios y afirmaciones acerca de los ceros de una función analítica, observe que tenemos el siguiente resultado que bien se puede ver como una regla de l'Hôpital para el caso de este tipo de funciones, y cuya prueba se deja al lector.

**Proposición 4.38** *Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas (no constantes) y $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0 = g(z_0)$. Si $k$ es el orden de $z_0$ como cero de $f$, y $m$ es el orden de $z_0$ como cero de $g$, se tiene que:*

1. *Si $k > m$, entonces*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$
2. *Si $k = m$, entonces*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(k)}(z)}{g^{(k)}(z)}.$$
3. *Si $k < m$, entonces*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty.$$

## 4.5. Polos

Si una función $f$ analítica (no constante) tiene un cero en un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ de su dominio, el corolario 4.35 nos asegura que existe una vecindad $B_r(z_0)$ tal que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, lo que significa que la función $1/f$ está definida en dicha vecindad agujerada y que el punto $z_0$ es una singularidad aislada de esta función para la cual se satisface que

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{f}\right)(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = \infty.$$

Con base en esta observación introducimos el concepto de *polo de una función* en la siguiente

**Definición 4.39** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de la función $f$. Decimos que $z_0$ es un polo de $f$ si*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

Es importante destacar que *un polo de una función analítica f es, por definición, una singularidad aislada.*

Como el lector ya habrá notado, existe una relación muy estrecha entre ceros y polos de funciones analíticas. En reciprocidad a la observación que hicimos al inicio de esta sección, si ahora tenemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de una función $f$, entonces existe $r > 0$ tal que la función $g = 1/f$ está definida para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ y además

$$\lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{g}\right)(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g(z)} = 0,$$

de donde, por la proposición 4.15, sabemos que $g$ se extiende analíticamente a $z_0$ definiendo $g(z_0) = 0$; es decir, la función $g = 1/f$ tendrá un cero en $z_0$.

Con base en la observación anterior, introducimos el concepto de *orden de un polo* de la siguiente forma.

**Definición 4.40** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Decimos que $z_0$ es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de la función $f$ si $z_0$ es un cero de orden $k \in \mathbb{N}$ de la función $g = 1/f$.*

En el siguiente ejemplo ilustramos las definiciones anteriores.

**Ejemplo 4.41**

1. *Sea $f(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$, con $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Observe que como cada $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, es un cero de orden 1 de la función $g(z) = \operatorname{sen}(z)$, entonces $f$ tiene un polo de orden 1 en cada uno de estos puntos.*

2. *Sea $f(z) = \operatorname{sen}(z)/\cos(z)$, con $z \in \mathbb{C}\setminus\{(2k+1)\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$. En este caso se tiene que $z = (2k+1)\pi/2$, con $k \in \mathbb{Z}$, es un cero de orden 2 de la función $g(z) = \cos(z)$, entonces $f$ tiene un polo de orden 2 en cada uno de estos puntos.*

3. *Sea $f(z) = p(z)/q(z)$, en donde $p$ y $q$ son polinomios sin raíces comunes (es decir, $f$ es una función racional). Observe que en este se tiene que, si*

$$q(z) = b(z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \cdots (z - z_1)^{k_m}$$

*($b \neq 0$), entonces cada $z_i$ es un polo de $f$ de orden $k_i$.*

Es importante destacar que las funciones del ejemplo anterior tienen la particularidad de que todas sus singularidades aisladas son polos. Las funciones que tienen esta particularidad (ser analíticas en $\mathbb{C}$, salvo por polos), reciben el nombre de *funciones meromorfas*.

Las proposiciones 4.38 y 4.34 tienen formulaciones equivalentes para el caso de los polos de una función, las que haremos a continuación.

**Proposición 4.42** *Sean, $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Se cumple que: $z_0$ es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de $f$ si y sólo si existe $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que*

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} f_k(z) = \frac{f_k(z)}{(z - z_0)^k}$$

*para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ y $f_k(z_0) \neq 0$.*

**Demostración.** Supongamos que $z_0$ es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de $f$. Dado que $z_0$ es un polo de $f$, existe $r > 0$ tal que la función $g = 1/f$ es analítica en $B_r(z_0) \subset \Omega$ y tiene un cero en $z = z_0$. Entonces, por la proposición 4.38 existe $g_k : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$\frac{1}{f(z)} = g(z) = (z - z_0)^k g_k(z) \tag{4.13}$$

para toda $z \in B_r(z_0)$ y $g_k(z_0) \neq 0$.

Ahora, por la continuidad de la función $g_k$ en $z_0$, sabemos que existe $0 < r' < r$ tal que $g_k(z) \neq 0$ para toda $z \in B_{r'}(z_0) \subset B_r(z_0) \subset \Omega$, de tal forma que la función $\tilde{f} : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como

$$\tilde{f}(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

tiene una singularidad removible en $z_0$ ya que de la identidad 4.13 se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\tilde{f}(z) &= \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^{k+1} f(z) \\
&= \lim_{z\to z_0} (z - z_0)\frac{1}{g_k(z)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, por la proposición 4.15, existe $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$f_k(z) = \tilde{f}(z) = (z - z_0)^k f(z)$$

para toda para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, y además

$$f_k(z_0) = \lim_{z \to z_0} f_k(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{g_k(z)} = \frac{1}{g_k(z_0)} \neq 0.$$

El lector estará de acuerdo que la implicación recíproca es inmediata. ■

Una consecuencia muy interesante de esta manera de expresar a una función $f$ en una vecindad de un polo, y del teorema de Taylor, es la que formulamos en la siguiente

**Proposición 4.43** *Sean, $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$ y $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Se satisface lo siguiente: $z_0$ es un polo de orden $k$ de $f$ si y sólo si existen $B_1, \ldots, B_k \in \mathbb{C}$, $B_k \neq 0$, y una función $\varphi : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, tales que*

$$f(z) = \frac{B_k}{(z - z_0)^k} + \frac{B_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{z - z_0} + \varphi(z)$$

*para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, en donde además los números $B_1, \ldots, B_k$ y la función $\varphi$ son únicos.*

**Demostración.** Por la proposición 4.42 sabemos que existe $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} f_k(z) = \frac{f_k(z)}{(z - z_0)^k} \tag{4.14}$$

para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ y $f_k(z_0) \neq 0$.

Ahora, por el teorema de Taylor aplicado a la función $f_k$ para $n = k$, sabemos que existe una función, que llamaremos $\varphi$ para simplificar la notación, analítica en $\Omega$ tal que

$$f_k(z) = f_k(z_0) + f_k'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{f_k^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + \varphi(z)(z - z_0)^k$$

para toda $z \in \Omega$.

De las dos identidades anteriores tenemos entonces que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{f_k(z)}{(z - z_0)^k} \\ &= \frac{B_k}{(z - z_0)^k} + \frac{B_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{z - z_0} + \varphi(z) \end{aligned} \tag{4.15}$$

para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, en donde

$$B_j = \frac{f_k^{(k-j)}(z_0)}{(k-j)!} \tag{4.16}$$

para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, de tal forma que

$$B_k = \frac{f_k^{(k-k)}(z_0)}{(k-k)!} = \frac{f_k^{(0)}(z_0)}{0!} = f_k(z_0) \neq 0$$

lo cual prueba la existencia de los números $B_1, \ldots, B_k$ y la función $\varphi$ con las propiedades deseadas.

En cuanto a la unicidad de los números $B_1, \ldots, B_k$ y la función $\varphi$, observe que, si en la identidad 4.16 aplicamos a la función $f_k$ la fórmula integral de Cauchy para la derivadas usando la curva $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$, en donde $r > 0$ es tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$, se tiene que

$$B_j = \frac{f_k^{(k-j)}(z_0)}{(k-j)!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_k(z)}{(z - z_0)^{k-j+1}} dz$$

y si después usamos la indentidad 4.14, concluimos que

$$B_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f_k(z)}{(z - z_0)^{k-j+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{(z-z_0)^k f(z)}{(z-z_0)^{k-j+1}}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} (z-z_0)^{j-1} f(z)dz$$

para cada $j \in \{1,\dots,k\}$.

Una vez que ya tenemos esta forma de expresar a los números $B_j$, podemos probar la unicidad de estos números y de la función $\varphi$. Supongamos que $\tilde{B}_1,\dots \tilde{B}_k \in \mathbb{C}$, $\tilde{B}_k \neq 0$, y $\tilde{\varphi}:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica, son tales que

$$f(z) = \frac{\tilde{B}_k}{(z-z_0)^k} + \frac{\tilde{B}_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{\tilde{B}_1}{z-z_0} + \tilde{\varphi}(z).$$

De esta identidad se sigue que

$$\begin{aligned}
(z-z_0)^{j-1} f(z) &= \frac{\tilde{B}_k (z-z_0)^{j-1}}{(z-z_0)^k} + \frac{\tilde{B}_{k-1}(z-z_0)^{j-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \\
&\quad \frac{\tilde{B}_{j+1}(z-z_0)^{j-1}}{(z-z_0)^{j+1}} + \frac{\tilde{B}_j (z-z_0)^{j-1}}{(z-z_0)^j} + \frac{\tilde{B}_{j-1}(z-z_0)^{j-1}}{(z-z_0)^{j-1}} \\
&\quad + \cdots + \frac{\tilde{B}_1 (z-z_0)^{j-1}}{z-z_0} + \tilde{\varphi}(z)(z-z_0)^{j-1} \\
&= \frac{\tilde{B}_k}{(z-z_0)^{k-j+1}} + \frac{\tilde{B}_{k-1}}{(z-z_0)^{k-j}} + \cdots + \\
&\quad \frac{\tilde{B}_{j+1}}{(z-z_0)^2} + \frac{\tilde{B}_j}{z-z_0} + \tilde{B}_{j-1} \\
&\quad + \cdots + \tilde{B}_1 (z-z_0)^{j-2} + \tilde{\varphi}(z)(z-z_0)^{j-1}
\end{aligned}$$

para cada $j \in \{1,\dots,k\}$, de tal forma que

$$\begin{aligned}
B_j &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} (z-z_0)^{j-1} f(z)dz \\
&= \frac{\tilde{B}_k}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{(z-z_0)^{k-j+1}}dz + \frac{\tilde{B}_{k-1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{(z-z_0)^{k-j}}dz + \cdots + \\
&\quad \frac{\tilde{B}_{j+1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{(z-z_0)^2}dz + \frac{\tilde{B}_j}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_0}dz + \frac{\tilde{B}_{j-1}}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} dz \\
&\quad + \cdots + \frac{\tilde{B}_1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} (z-z_0)^{j-2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} \tilde{\varphi}(z)(z-z_0)^{j-1}dz \\
&= \tilde{B}_j
\end{aligned}$$

para cada $j \in \{1,\dots,k\}$, lo que prueba que los números $B_j$ son únicos. La unicidad de la función $\varphi$ es inmediata, pues

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(z) &= f(z) - \left(\frac{\tilde{B}_k}{(z-z_0)^k} + \frac{\tilde{B}_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{\tilde{B}_1}{z-z_0}\right) \\
&= f(z) - \left(\frac{B_k}{(z-z_0)^k} + \frac{B_{k-1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{z-z_0}\right) \\
&= \varphi(z)
\end{aligned}$$

para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto para toda $z \in \Omega$.

El recíproco de esta proposición es inmediato pues es claro que la función

$$\begin{aligned} f_k(z) &= (z - z_0)^k f(z) \\ &= B_k + B_{k-1}(z - z_0) + \cdots + B_1 (z - z_0)^{k-1} + (z - z_0)^k \varphi(z) \end{aligned}$$

es analítica en $\Omega$, $f_k(z_0) = B_k \neq 0$, y satisface la condición del recíproco de la proposición 4.42. ■

A la suma de los términos

$$\frac{B_k}{(z - z_0)^k} + \frac{B_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{z - z_0}$$

de la proposición anterior se le suele llamar la *parte singular de la función* $f$ en el polo $z = z_0$.

También de la proposición anterior y del teorema 4.20, se tiene una consecuencia muy importante en cuanto a la forma en que una función se puede expresar en términos de una cierta serie, que bien podemos decir que es una "serie de Taylor generalizada", ya que será una serie de potencias de $z - z_0$ *que incluye una cantidad finita de potencias negativas* de dicho término.

**Proposición 4.44** *Sean, $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$, $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $r > 0$ tal que $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Si $z_0$ es un polo de orden $k$ de $f$, entonces existen $B_1, \ldots B_k \in \mathbb{C}$, $B_k \neq 0$, y una sucesión $\{A_n\} \subset \mathbb{C}$ tales que*

$$f(z) = \frac{B_k}{(z - z_0)^k} + \frac{B_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

*para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.*

La última proposición de esta sección también es una especie de regla de l'Hôpital para el caso de polos de funciones analíticas, y su prueba también es inmediata de la proposición 4.42, razón por la cual queda de nuevo a cargo del lector.

**Proposición 4.45** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo de las funciones $f$ y $g$. Si $k$ es el orden de $z_0$ como polo de $f$ y $m$ es el orden de $z_0$ como polo de $g$, se tiene que:*

1. *Si $k < m$, entonces*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0.$$
2. *Si $k = m$, entonces*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{(1/g)^{(k)}(z)}{(1/f)^{(k)}(z)}.$$
3. *Si $k > m$, entonces*
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \infty.$$

## 4.6. Singularidades esenciales

Para poder determinar qué otro tipo de singularidades aisladas puede tener una función analítica, necesitamos tener una forma de caracterizar a los dos tipo que hemos visto.

Para lograr lo anterior, primero observemos que si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad removible de una función $f$, de la definición de este tipo de singularidad sabemos que $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = 0$, y que $f$ se puede extender analíticamente a $z_0$. Si esta extensión (que seguiremos denotando por $f$) es tal que $f(z_0) = 0$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $f_n$ analítica (en el dominio de $f$) tales que $f(z) = (z - z_0)^k f_n(z)$ y $f_n(z_0) \neq 0$, de modo que podemos asegurar que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{-k} f(z) = \lim_{z \to z_0} f_n(z) = f_n(z_0) \neq 0.$$

En resumen, si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad removible de una función $f$, podemos afirmar que existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ($k = 0$ si $f(z_0) = 0$) tal que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{-k} f(z) = l \neq 0$$

y por lo tanto, que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{-k} |f(z)| = |l| \neq 0.$$

De este último límite concluimos que $k$ es un entero ($k \geq 0$) con la propiedad de que si $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que:

1. Si $\alpha < -k$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha} |f(z)| &= \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha+k} |z - z_0|^{-k} |f(z)| \\
&= |l| \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha+k} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ya que $|l| \neq 0$ y $\alpha + k < 0$.

2. Si $\alpha = -k$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{-k} |f(z)| \neq 0.$$

3. Si $\alpha > -k$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha} |f(z)| &= \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha+k} |z - z_0|^{-k} |f(z)| \\
&= |l| \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha+k} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $|l| \neq 0$ y $\alpha + k > 0$.

Si ahora suponemos que $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de la función $f$, entonces sabemos que existen $r > 0$, $k \in \mathbb{N}$ y $f_n : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f(z) = (z - z_0)^{-k} f_n(z)$ para toda $z \in B_r(z_0)$, con $f_n(z_0) \neq 0$, de modo que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k} f(z) = \lim_{z \to z_0} f_n(z) = f_n(z_0) \neq 0.$$

En resumen, si $z_0 \in \mathbb{C}$ es un polo de la función $f$, podemos asegurar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^{k} f(z) = l \neq 0$$

y por lo tanto, que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{k} |f(z)| = |l| \neq 0.$$

De este último límite, ahora concluimos que $k$ es un entero ($k > 0$), con la propiedad de que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ es tal que:

1. Si $\alpha < k$, entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha} |f(z)| &= \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha-k} |z - z_0|^{k} |f(z)| \\
&= |l| \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{\alpha-k} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

ya que $|l| \neq 0$ y $\alpha + k < 0$.

2. Si $\alpha = k$, entonces
$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^k |f(z)| \neq 0.$$

3. Si $\alpha > k$, entonces
$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| &= \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{\alpha-k} |z-z_0|^k |f(z)|\\ &= |l| \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^{\alpha-k}\\ &= 0\end{aligned}$$
ya que $|l| \neq 0$ y $\alpha + k > 0$.

Resumiendo el análisis que acabamos de hacer, podemos concluir que si $f$ tiene una singularidad removible o un polo en $z_0 \in \mathbb{C}$, entonces existe $k \in \mathbb{Z}$ ($k \leq 0$ si $z_0$ es una singularidad removible, y $k > 0$ si $z_0$ es un polo) con la propiedad de que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Si $\alpha < k$, entonces
$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = \infty.$$

2. Si $\alpha = k$, entonces
$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| \neq 0.$$

3. Si $\alpha > k$, entonces
$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = 0.$$

Antes de preguntarnos si la afirmación recíproca es cierta, es muy importante hacer notar que la existencia de este número $k \in \mathbb{Z}$, con las propiedades que acabamos de enlistar, también se puede probar si simplemente suponemos que $f$ no es la función constante 0 y que para alguna $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que
$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = 0.$$

De hecho, lo que en realidad probaremos es que si se satisface alguno de los dos límites anteriores para alguna $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $f$ tiene una singularidad removible o un polo en $z_0$, de modo que la existencia del número $k \in \mathbb{Z}$ con las propiedades requeridas se seguirá del análisis que hicimos al inicio de esta sección.

Como seguramente el lector ya está intuyendo, lo que realmente se tiene es que todas estas afirmaciones que hemos hecho son equivalentes, resultado que dejaremos formulado en el siguiente

**Teorema 4.46 (Ahlfors)** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de la función $f$, no constante. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad removible o un polo de $f$.*

2. *Existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, se satisface que:*

   a) *Si $\alpha < k$, entonces*
   $$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = \infty.$$

   b) *Si $\alpha = k$, entonces*
   $$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| \neq 0.$$

   c) *Si $\alpha > k$, entonces*
   $$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = 0.$$

3. *Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*
$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = 0 \quad o \quad \lim_{z\to z_0} |z-z_0|^\alpha |f(z)| = \infty.$$

**Demostración.** Que el inciso 1 implica el inciso 2 es justo lo que probamos en el análisis que hicimos previo a este teorema, y como la prueba de que el inciso 2 implica el inciso 3 es inmediata, sólo probaremos que el inciso 3 implica el inciso 1.

Supongamos primero que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\alpha |f(z)| = 0.$$

Si tomamos $h \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha \leq h$, entonces se tiene que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^h |f(z)| = \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{h-\alpha} |z - z_0|^\alpha |f(z)| = 0 \tag{4.17}$$

pues

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{h-\alpha} = 0$$

ya que $0 \leq h - \alpha$.

Por tanto, de la identidad 4.17 se sigue que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^h f(z) = 0$$

de modo que podemos concluir que la función

$$g(z) = (z - z_0)^h f(z)$$

tiene una singularidad removible en $z_0$; es decir, existe $r > 0$ tal que $g$ se extiende analíticamente a $B_r(z_0)$, extensión analítica que seguiremos denotando por $g$. Por lo tanto, se tiene que

$$f(z) = (z - z_0)^{-h} g(z) \tag{4.18}$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Como $f$ no es la constante 0, entonces $g$ tampoco es la constante 0 y por lo tanto existen $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $g_n : B_r(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que

$$g(z) = (z - z_0)^n g_n(z) \tag{4.19}$$

para toda $z \in B_r(z_0)$, con $g_n(z_0) \neq 0$. Observe que si $n = 0$, entonces $g(z) = g_n(z)$ para toda $z \in B_r(z_0)$, y en particular $g(z_0) = g_n(z_0) \neq 0$.

Si ahora sustituimos la expresión 4.19 en la expresión 4.18, se obtiene que

$$f(z) = (z - z_0)^{n-h} g_n(z)$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ de tal forma que si $0 \leq n - h$, entonces concluimos que $f$ tiene una singularidad removible en $z_0$; y si $n - h < 0$, entonces concluimos que $f$ tiene un polo en $z_0$.

Si ahora suponemos que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\alpha |f(z)| = \infty,$$

procedemos de forma análoga. Elegimos ahora $h \in \mathbb{Z}$ tal que $h < \alpha$; entonces tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^h |f(z)| = \lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{h-\alpha} |z - z_0|^\alpha |f(z)| = \infty \tag{4.20}$$

pues

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^{h-\alpha} = \infty$$

ya que $h - \alpha < 0$.

De la identidad 4.20 se tiene que

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^h f(z) = \infty,$$

es decir que ahora la función

$$g(z) = (z - z_0)^h f(z) \tag{4.21}$$

tiene un polo en $z_0$. Si el polo de esta función $g$ es de orden $m \in \mathbb{N}$, sabemos que existen $r > 0$ y $g_m$ analítica en $B_r(z_0)$ tales que

$$g(z) = (z - z_0)^m \, g_m(z)$$

para toda $z \in B_r(z_0) \backslash \{z_0\}$, con $g_m(z_0) \neq 0$. Sustituyendo esta expresión de $g$ en la identidad 4.21, obtenemos que

$$f(z) = (z - z_0)^{m-h} \, g_m(z)$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, de modo que, nuevamente, si $0 \leq m - h$ entonces concluimos que $z_0$ es una singularidad removible de $f$; y si $m - h < 0$, entonces concluimos que $z_0$ es un polo de $f$, con lo cual terminamos la prueba. ■

Una vez que hemos probado el teorema anterior, podemos dar la definición de lo que llamaremos una *singularidad esencial* de una función $f$ e inmediatamente dar una primera caracterización de este tipo de singularidad aislada.

**Definición 4.47** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f$. Decimos que $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ si $z_0$ no es una singularidad removible o un polo de $f$.*

Para poder dar algún ejemplo de una función que tenga este tipo de singularidad aislada, primero daremos un par de caracterizaciones de las singularidades esenciales. La primera de ellas es en realidad una consecuencia inmediata del teorema anterior por lo que su prueba queda a cargo del lector.

**Proposición 4.48** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f$. Se satisface que: $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ si y sólo si para toda $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\alpha |f(z)|$ no existe.*

La segunda caracterización que daremos en el siguiente teorema[5] describe de manera muy precisa el comportamiento de una función alrededor o cerca de este tipo de singularidades, que sin duda bien podemos calificar de "explosivo".

**Teorema 4.49** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f$. Se satisface que: $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ si y sólo si para toda $w \in \mathbb{C}$, para todo $\varepsilon > 0$ y para toda $\delta > 0$, existe $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ tal que $f(z) \in B_\varepsilon(w)$.*

**Demostración.** Supongamos que $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ y que la propiedad que deseamos probar no es cierta; es decir, supongamos que existen $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$, tales que para toda $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ se tiene que $f(z) \notin B_\varepsilon(w)$, o lo que es lo mismo, que

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon > 0$$

para toda $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. De esta desigualdad tenemos entonces que, si $\beta < 0$, entonces

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\beta \, |f(z) - w| = \infty.$$

Por tanto, por la condición 2 del teorema 4.46 sabemos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\alpha \, |f(z) - w| = 0.$$

Ahora, por la desigualdad del triángulo se tiene que

$$0 \leq |z - z_0|^\alpha \, |f(z)| \leq |z - z_0|^\alpha \, |f(z) - w| + |z - z_0|^\alpha \, |w|$$

[5]Este teorema fue publicado (en alemán) por Karl Weierstrass (1815-1897, Alemania) en 1876, y por Julian Sokhotski (1842, Polonia - 1927, URSS) en su tesis de maestría (escrita en ruso en 1868). Por eso se llamó teorema de Sokhotski en la literatura rusa y teorema de Weierstrass en la literatura occidental. El mismo teorema fue publicado por Felice Casorati (1835-1890, Italia) en 1868, y por Charles Briot (1817-1882, Francia) y Jean-Claude Bouquet en la primera edición de su libro *Theorie des fonctions doublement périodiques, et en particulier, des fonctions elliptiques* (1859). Sin embargo, Briot y Bouquet eliminaron este teorema de la segunda edición (1875). (Fuente: Wikipedia).

para toda $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, y como
$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\alpha |w| = 0,$$
ya que $\alpha > 0$, concluimos que
$$\lim_{z \to z_0} |z - z_0|^\alpha |f(z)| = 0$$
de tal manera que, nuevamente por el teorema 4.46, $z_0$ tiene que ser una singularidad removible o un polo de $f$, lo cual es una contradicción.

Como el lector estará de acuerdo, la implicación contraria es inmediata ya que si $z_0$ no es una singularidad esencial de $f$, entonces $z_0$ es una singularidad removible o un polo de $f$, de modo que $\lim_{z \to z_0} f(z)$ existe, lo que sin lugar a dudas es una contradicción con la hipótesis. ■

En la figura 4.3 damos una idea geométrica del comportamiento de una función alrededor de una singularidad esencial.

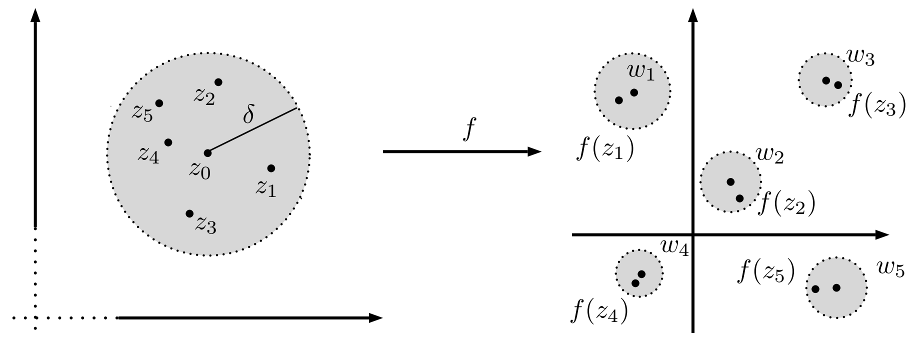



Figura 4.3: Si $z_0$ es una singularidad esencial de $f$, la imagen bajo $f$ de cualquier vecindad de $z_0$ se "dispersa" a todo $\mathbb{C}$.

Y para terminar de darnos una idea de este comportamiento de una función $f$ alrededor de una singularidad esencial, damos el siguiente corolario al teorema 4.49.

**Corolario 4.50** *Si $z_0$ es una singularidad esencial de $f$, entonces para todo $w \in \mathbb{C}$ existe una sucesión $\{z_n\}$, con $z_n \neq z_0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, tal que $\{z_n\} \to z_0$ y $\{f(z_n)\} \to w$.*

Una vez que ya contamos con estas caracterizaciones de una singularidad esencial, daremos un ejemplo de una función que tiene una de este tipo.

**Ejemplo 4.51** *Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \exp(1/z)$. Claramente $z = 0$ es una singularidad aislada de $f$ y verificaremos que se satisfacen las condiciones del teorema 4.49 para concluir que esta singularidad es esencial.*

*Sean $w \in \mathbb{C}$ y $\delta > 0$; observe que si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $1/\delta < 2k\pi$, entonces para toda $\zeta \in L_{2k\pi} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid 2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi\}$ se tiene que*
$$\frac{1}{\delta} < 2k\pi \leq y = |y| \leq |\zeta|$$
*y por lo tanto $1/\zeta \in B_\delta(0)$. Si ahora recordamos que, por el inciso 2 de la proposición 2.15 del capítulo 2, se tiene que $\exp(L_{2k\pi}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si $w \neq 0$, entonces existe $\zeta \in L_{2k\pi}$ tal que $\exp(\zeta) = w$ y por lo tanto $f(1/\zeta) = \exp(\zeta) = w$ de modo que $|f(1/\zeta) - w| = 0 < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Si $w = 0$, observe que si $\zeta_n = -n + 2k\pi i \in L_{2k\pi}$, entonces $1/\zeta_n \in B_\delta(0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y*
$$f(1/\zeta_n) = \exp(\zeta_n) = e^{-n}(\cos(2k\pi) + i\,\mathrm{sen}(2k\pi)) = e^{-n}$$
*de tal forma que $\{f(1/\zeta_n)\} \to 0$ de modo que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geq N$, entonces $|f(1/\zeta) - 0| = |f(1/\zeta)| < \varepsilon$ con lo cual probamos que se satisfacen las condiciones del teorema 4.49 y por lo tanto concluimos que $z = 0$ es una singularidad esencial de $f$.*

Aprovechando el ejemplo anterior, terminamos esta sección extendiendo el concepto de singularidad aislada de una función $f$ en $z=\infty$. Como el lector seguramente ya está deduciendo, la definición de este concepto es la siguiente.

**Definición 4.52** *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$. Diremos que $z=\infty$ es una singularidad aislada de una función $f$, si $z=0$ es una singularidad aislada de la función $g$ definida como $g(z)=f(1/z)$. En este caso diremos que $z=\infty$ es una singularidad removible, o un polo (de orden $k$), o una singularidad esencial de $f$, si $z=0$ es una singularidad removible, o un polo (de orden $k$), o una singularidad esencial de $g$, respectivamente.*

Observe que si $z=0$ es una singularidad aislada de la función $g$ dada en la definición anterior, ello implica que debe existir $\delta>0$ tal que $g$ es analítica en $B_\delta(0)\setminus\{0\}$ y por lo tanto la función $f$ debe ser analítica en el conjunto $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>1/\delta\}$. Dicho de otra forma, si $z=\infty$ es una singularidad aislada de $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, entonces $\Omega$ debe ser una región tal que existe $R>0$ con la propiedad de que, si $z\in\mathbb{C}$ es tal que $|z|>R$, entonces $z\in\Omega$, es decir que $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R\}\subset\Omega$. Nótese que para que $\Omega$ satisfaga esta condición no es suficiente con que $\Omega$ sea un conjunto no acotado, como sería el caso del conjunto $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}(z)>0\}$, que aunque es no acotado, no existe $R>0$ tal que el conjunto $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|>R\}$ esté contenido en este $\Omega$.

Las siguientes funciones son ejemplos de funciones que tienen una singularidad aislada en $z=\infty$.

**Ejemplo 4.53**

1. *Cualquier polinomio $p$ tiene una singularidad aislada en $z=\infty$, y si el grado de $p$ es mayor que 0, entonces $z=\infty$ es un polo de $p$ (ya que $\lim_{z\to\infty}p(z)=\infty$) cuyo orden es igual al grado de $p$. En efecto, si*
$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$
*con $a_n\neq 0$, entonces*
$$\begin{aligned} g(z)&=p(1/z)\\ &=a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}\\ &=\frac{1}{z^n}\left(a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n\right)\\ &=z^{-n}\left(a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n\right)\end{aligned}$$
*de modo que si hacemos $g_n(z)=a_0z^n+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ se tiene que $g_n$ es analítica en $\mathbb{C}$, que $g_n(0)=a_n\neq 0$ y que*
$$g(z)=z^{-n}g_n(z)$$
*para toda $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, lo que prueba que $g$ tiene un polo de orden $n$ en $z=0$.*

2. *Cualquier función racional $f=p/q$ tiene una singularidad aislada en $z=\infty$. Si el grado de $q$ es mayor o igual al grado de $p$, entonces la singularidad es removible y si el grado de $p$ es mayor que el grado de $q$, entonces es un polo. En efecto, si*
$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$
*con $a_n\neq 0$, y*
$$q(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_mz^m$$
*con $b_m\neq 0$, entonces*
$$\begin{aligned} g(z)&=f(1/z)\\ &=\frac{p(1/z)}{q(1/z)}\\ &=\frac{a_0+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_n}{z^n}}{b_0+\frac{b_1}{z}+\cdots+\frac{b_m}{z^m}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{z^{-n}\left(a_0 z^n + \cdots + a_{n-1}z + a_n\right)}{z^{-m}\left(b_0 z^m + \cdots + a_{m-1}z + b_m\right)} \\
&= z^{m-n}\frac{a_0 z^n + \cdots + a_{n-1}z + a_n}{b_0 z^m + \cdots + a_{m-1}z + b_m}
\end{aligned}
$$

*de modo que*

$$
\lim_{z\to 0} g(z) = \begin{cases} 0 & \textit{si } m > n \\ \\ \frac{a_n}{b_m} \neq 0 & \textit{si } m = n \\ \\ \infty & \textit{si } m < n. \end{cases}
$$

*Observe que si $m > n$ entonces $z = 0$ será un cero de $g$ (y por lo tanto $z = \infty$ será un cero de $f$) de orden $k = m - n$ ya que si hacemos*

$$
g_k(z) = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_{n-1}z + a_n}{b_0 z^m + \cdots + a_{m-1}z + b_m},
$$

*entonces $g_k(0) = a_n/b_m \neq 0$, $g_k$ es analítica en alguna vecindad del $0$, y*

$$
g(z) = z^{m-n} g_k(z)
$$

*para toda $z$ en esta vecindad. De esta última identidad también se demuestra que si $m < n$, entonces $z = 0$ es un polo de $g$ (y por lo tanto $z = \infty$ es un polo de $f$) de orden $k = m - n$.*

3. *En el problema 35 el lector demostrará que toda función entera que tenga un polo en $z = \infty$ necesariamente es un polinomio, de donde se concluye que las funciones seno, coseno y exponencial tienen una singularidad esencial en $z = \infty$ (lo que ya comprobamos directamente en el caso de la función exponencial).*

4. *También es importante hacer notar que la función $\sec(z) = 1/\operatorname{sen}(z)$ no tiene una singularidad aislada en $z = \infty$ pues como ya mencionamos en el inciso 4 del ejemplo 1, $z = 0$ no es una singularidad aislada de la función*

$$
g(z) = \sec(1/z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(1/z)}.
$$

*Por razones análogas a las de esta función, las funciones tangente, cotangente y cosecante, tampoco tienen una singularidad aislada en $z = \infty$.*

## 4.7. El principio del argumento (primera versión)

Intentaremos mostrar, a partir de ejemplos sencillos, cuál es el hecho "geométrico" que se expresa en el importante resultado conocido como *el principio del argumento*.

Para ello, consideremos la función $f(z) = z^k$, para alguna $k \in \mathbb{N}$. Como es fácil de comprobar, si tomamos la circunferencia unitaria con centro en 0 parametrizada por la función

$$
\gamma(t) = \cos(t) + i\operatorname{sen}(t) = e^{it},
$$

con $t \in [0, 2\pi]$, entonces $\gamma$ "rodea" al punto $z = 0$ una vez en sentido antihorario, rodeo que queda expresado en el hecho de que $n(\gamma, 0) = 1$.

Ahora considere la curva

$$
\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(t) &= (f \circ \gamma)(t) \\
&= f(\gamma(t)) \\
&= e^{ikt} \\
&= \cos(kt) + i\operatorname{sen}(kt)
\end{aligned}
$$

tomando también $t \in [0, 2\pi]$. Como el lector estará de acuerdo, $\tilde{\gamma}$ parametriza nuevamente a la circunferencia unitaria con centro en 0 con la diferencia de que ahora la recorre (en el mismo sentido antihorario) $k$ veces, lo que está relacionado con el hecho de que al aplicar la función $f$ a $\gamma(t)$, el argumento de $\gamma(t)$ se multiplica (o se incrementa) por $k$.

También se puede comprobar que la curva $\tilde{\gamma}$ rodea $k$ veces al punto $f(0) = 0$ si se verifica que $n(\tilde{\gamma}, 0) = k$. Esto se obtiene muy fácilmente ya que por el problema 39 del capítulo 3 se tiene que

$$\begin{aligned}
n(\tilde{\gamma}, 0) &= n(\tilde{\gamma}, f(0)) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(0)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{kz^{k-1}}{z^k} dz \\
&= \frac{k}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z} dz \\
&= kn(\gamma, 0) \\
&= k.
\end{aligned}$$

Seguramente no escapa a la atención del lector (o no debe escapar) que la identidad $n(\tilde{\gamma}, 0) = k$ (es decir, que el índice de la curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ con respecto al punto $f(0) = 0$ sea $k$) está intimamente relacionado con las siguientes características de la función $f$ y la curva $\gamma$:

1. Que $z = 0$ es un cero de la función $f$.

2. Que este cero está “dentro” de la curva $\gamma$.

3. Que el orden de este cero es $k$.

En el ejemplo que acabamos de dar, la sencillez de la función $f$ jugó un papel importante para poder identificar a la curva $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, lo que a su vez permitió determinar fácilmente cuántas veces rodeaba al punto $f(0) = 0$.

Ahora daremos otro ejemplo en el que la función $f$ no es tan sencilla como la anterior, pero que auxiliados por la representación gráfica de la curva $\tilde{\gamma}$, podremos obtener conclusiones análogas a las del primer ejemplo.

Sea $f(z) = z^2(z-1/2)$ y tomemos nuevamente la circunferencia unitaria con centro en 0 parametrizada por la misma función $\tilde{\gamma}$ del ejemplo anterior. En la figura 4.4 se muestra la curva descrita por la parametrización $\tilde{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$. Como el lector podrá notar, la curva $\tilde{\gamma}$ “rodea” 3 veces al punto $f(0) = 0$ lo que podemos comprobar si calculamos de nueva cuenta el índice del 0 con respecto a la curva $\tilde{\gamma}$.

Como en el ejemplo anterior, sabemos que

$$\begin{aligned}
n(\tilde{\gamma}, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{2z(z-1/2) + z^2}{z^2(z-1/2)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left( \frac{2}{z} + \frac{1}{z-1/2} \right) dz \\
&= \frac{2}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z-1/2} dz
\end{aligned}$$

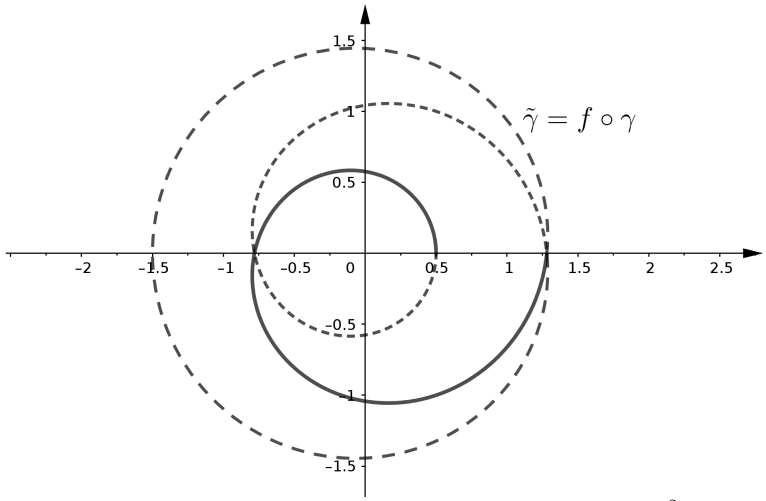



Figura 4.4: La curva $\tilde{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t)$, en donde $f(z) = z^2(z - 1/2)$ y $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

$$
\begin{aligned}
&= 2n(\gamma, 0) + n(\gamma, 1/2) \\
&= 3,
\end{aligned}
$$

lo cual confirma que en efecto la curva $\tilde{\gamma}$ "rodea" 3 veces al punto $f(0) = 0$.

Seguramente el lector ya se percató de que el número 3 está relacionado, nuevamente, con las siguientes características de la función $f$ y la curva $\gamma$:

1. Que $z = 0$ y $z = 1/2$ son ceros de la función $f$.
2. Que estos ceros están "dentro" de la curva $\gamma$.
3. Que el orden del cero $z = 0$ es 2, que el orden del cero $z = 1/2$ es 1, y que sumando estos órdenes, ¡obtenemos 3!

Daremos un último ejemplo con el cual tendremos una idea más completa de la "afirmación geométrica" contenida en el principio del argumento.

Sea ahora

$$f(z) = \frac{z^3}{4\,(z - 1/2)}$$

la cual está definida para $z \in \mathbb{C} \setminus \{1/2\}$. En la figura 4.5 mostramos nuevamente a la curva $\tilde{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t)$, para $t \in [0, 2\pi]$. Ahora el lector notará que la curva $\tilde{\gamma}$ "rodea" 2 veces al punto $f(0) = 0$ lo cual comprobamos de nueva cuenta calculando el índice $n(\tilde{\gamma}, 0)$, como en los ejemplos anteriores.

En este caso se tiene que

$$
\begin{aligned}
n(\tilde{\gamma}, 0) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1/4\left(3z^2\,(z - 1/2)^{-1} + z^3(-1)\,(z - 1/2)^{-2}\right)}{(1/4)z^3\,(z - 1/2)^{-1}} dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\frac{3}{z} - \frac{1}{z - 1/2}\right) dz \\
&= \frac{3}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - 1/2} dz
\end{aligned}
$$

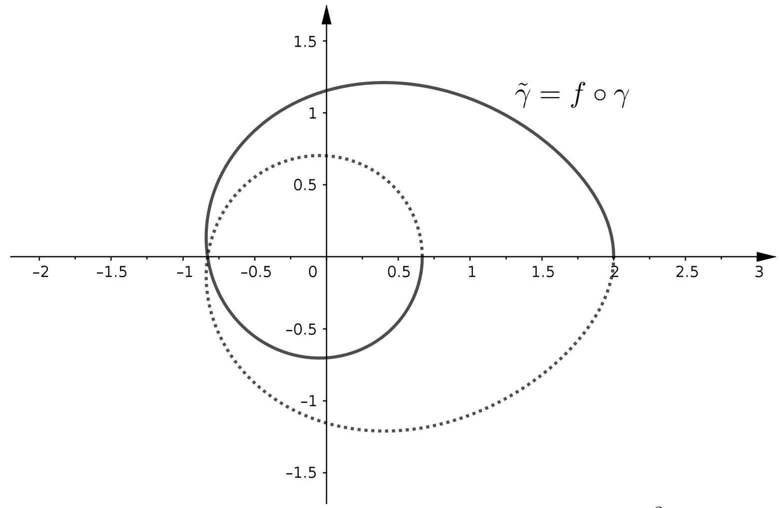



Figura 4.5: La curva $\tilde{\gamma}(t) = (f \circ \gamma)(t)$, en donde $f(z) = z^3/4(z-1/2)$ y $\gamma(t) = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$.

$$= 3 \cdot n(\gamma, 0) - 1 \cdot n(\gamma, 1/2)$$
$$= 2.$$

Como en los ejemplos previos, el número 2 está relacionado con las siguientes características de la función $f$ y la curva $\gamma$:

1. Que $z = 0$ es un cero y $z = 1/2$ es un polo de la función $f$.
2. Que este cero y este polo están "dentro" de la curva $\gamma$.
3. Que el orden del cero $z = 0$ es 3, que el orden del polo $z = 1/2$ es 1, y que ahora restando estos órdenes, ¡obtenemos 2!

Una vez que hemos visto estos ejemplos, seguramente al lector ya no le resultará del todo extraña la formulación que daremos del principio del argumento, la cual resume las ideas y características más importantes contenidas en ellos.

Es importante mencionar que la hipótesis que supondremos en esta formulación del principio del argumento sobre el dominio de la función involucrada, está determinada por la hipótesis necesaria para aplicar la versión del teorema de Cauchy que hasta ahora tenemos.

**Teorema 4.54 (principio del argumento (versión local))** *Sean, $\Delta \subset \mathbb{C}$ una bola abierta y $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Delta$. Si $f$ es una función meromorfa en $\Delta$ tal que $a_j$ es un cero de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $b_l$ es un polo de $f$ de orden $h_l \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{m} h_l \cdot n(\gamma, b_l)$$

*para toda $\gamma \subset \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ curva cerrada suave por pedazos.*

**Demostración.** Primero observemos que, como el lector probará en el inciso $(b)$ del problema 33, podemos asegurar que existe $g : \Delta \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$f(z) = (z-a_1)^{k_1} \cdots (z-a_n)^{k_n} (z-b_1)^{-l_1} \cdots (z-b_m)^{-l_m} g(z)$$

con $g(z) \neq 0$, para toda $z \in \Delta$.

De esta expresión de la función $f$ se sigue que

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1}{z-a_1} + \cdots + \frac{k_n}{z-z_n} + \frac{-l_1}{z-b_1} + \cdots + \frac{-l_m}{z-b_m} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

para toda $z \in \Delta \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$, de tal forma que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz &= \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{z-z_j}dz - \sum_{j=1}^{m} l_j \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{1}{z-b_j}dz \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz \\ &= \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{m} l_j \cdot n(\gamma, b_j) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz.\end{aligned}$$

Por otra parte, dado que $g(z) \neq 0$ para toda $z \in \Delta$, entonces $g'/g$ es analítica en $\Delta$ de tal forma que, por el teorema de Cauchy (teorema 3.26) se tiene que

$$\int\limits_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}dz = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{m} l_j \cdot n(\gamma, b_j)$$

con lo cual termina la prueba. ■

Como se vio en los ejemplos que dimos al inicio de esta sección, una consecuencia inmediata del principio del argumento es el siguiente

**Corolario 4.55** *Sean, $\Delta \subset \mathbb{C}$ una bola abierta, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Delta$ y $f$ meromorfa en $\Delta$ tal que $a_j$ es un cero de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $b_l$ es un polo de $f$ de orden $h_l \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$. Si $\gamma \subset \Delta \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ es una curva cerrada suave por pedazos y $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, entonces*

$$n(\tilde{\gamma}, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{m} l_j \cdot n(\gamma, b_j).$$

Otro hecho que también se deduce del último ejemplo que vimos (y que también formularemos como un corolario), es que si la curva $\gamma$ que se elija es tal que “sólo da una vuelta en sentido antihorario”, es decir, si $n(\gamma, z)$ sólo puede tomar el valor 0 o 1 para cada $z \in \Delta \setminus \gamma$, entonces el índice de la curva $\tilde{\gamma}$ con respecto del 0 coincide con el número de ceros menos el número de polos de la función $f$, todos ellos “encerrados” (o “rodeados”) por la curva $\gamma$, en donde cada cero y cada polo se cuenta tantas veces como su multiplicidad.

**Corolario 4.56** *Sean, $\Delta \subset \mathbb{C}$ una bola abierta, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Delta$ y $f$ meromorfa en $\Delta$ tal que $a_j$ es un cero de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $b_l$ es un polo de $f$ de orden $h_l \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$. Si $\gamma \subset \Delta \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ es una curva cerrada suave por pedazos tal que $n(\gamma, z)$ sólo toma el valor 0 o 1 para cada $z \in \Delta \setminus \gamma$ y $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, entonces*

$$n(\tilde{\gamma}, 0) = (\#\ \textit{de ceros}\ -\ \#\ \textit{de polos})\ \textit{de}\ f,\ \textit{encerrados por (o dentro de)}\ \gamma.$$

A continuación veremos algunos importantes resultados que se pueden obtener del teorema 4.54 si lo aplicamos al caso particular en que la función $f$ es analítica en $\Delta$. En este caso, por el corolario 4.56 sabemos que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \#\ \text{de ceros de}\ f\ \text{encerrados por (o dentro de)}\ \gamma.$$

Con base en lo anterior, con una leve modificación de la función $f$ podemos tener una integral que nos permita saber cuántos puntos debe de haber "dentro" de una curva $\gamma$ que tienen el mismo valor bajo $f$.

En efecto, observe que si tomamos $z_0 \in \Delta$, $\gamma \subset \Delta \setminus \{z_0\}$ con $n(\gamma, z) = 0$ o $1$ para toda $z \in \Delta \setminus \gamma$, y $f$ una función analítica en $\Delta$ tal que $f(z) \neq f(z_0)$ para toda $z \in \gamma$, entonces $z_0$ es un cero de la función $g$ definida como $g(z) = f(z) - f(z_0)$ de tal forma que el valor de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz$$

será igual al número de puntos "dentro" de $\gamma$ que bajo la función $f$ toman el valor $f(z_0)$. Nótese que si $n(\gamma, z_0) = 1$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz > 0.$$

Pero si ahora recordamos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = n(\hat{\gamma}, 0)$$

en donde

$$\hat{\gamma} = g \circ \gamma = (f - f(z_0)) \circ \gamma = f \circ \gamma - f(z_0) = \tilde{\gamma} - f(z_0),$$

entonces se tiene que

$$n(\hat{\gamma}, 0) = n(\tilde{\gamma} - f(z_0), 0) = n(\tilde{\gamma}, f(z_0)).$$

Una consecuencia muy importante del análisis que acabamos de hacer es que si $w \in \mathbb{C}$ está en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}$ que contiene al punto $f(z_0)$, por el inciso 2 de la proposición 3.31 del capítulo 3, sabemos que $n(\tilde{\gamma}, w) = n(\tilde{\gamma}, f(z_0))$ y por lo tanto que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz > 0,$$

lo que significa que "dentro" de $\gamma$ también hay puntos que bajo $f$ toman el valor $w$, y que estos puntos son tantos como los que toman el valor $f(z_0)$. Este importante resultado lo dejamos formulado en el siguiente

**Teorema 4.57 (Ahlfors)** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, $z_0 \in \Delta \subset \Omega$ ($\Delta$ una bola abierta) y $w_0 = f(z_0)$. Si $z_0$ es un cero de orden $k \in \mathbb{N}$ de la función $g$ definida como $g(z) = f(z) - f(z_0)$ para cada $z \in \Delta$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para todo $w \in B_\varepsilon(w_0) \setminus \{w_0\}$ la identidad $f(z) = w$ tiene exactamente $k$ soluciones en $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$. Además, se puede elegir $\delta > 0$ de tal forma que las soluciones de la identidad $f(z) = w$ sean todas distintas entre si.*

**Demostración.** Como $g$ (o $f$) no es constante, podemos tomar $\delta > 0$ tal que $\overline{B_\delta(z_0)} \subset \Delta$ y $g(z) \neq 0$ (o $f(z) \neq f(z_0)$ ) para toda $z \in \overline{B_\delta(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Sea $\gamma(t) = \delta e^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$; como $w_0 = f(z_0) \notin \tilde{\gamma} = f \circ \gamma$ (que es un conjunto cerrado ya que es compacto), existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(w_0) \subset \mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}$.

Ahora, sabemos que si $w \in B_\varepsilon(w_0) \setminus \{w_0\}$, entonces $w$ y $w_0$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \tilde{\gamma}$ (ver figura 4.6) de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz &= n(\tilde{\gamma}, w) \\ &= n(\tilde{\gamma}, f(z_0)) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - f(z_0)} dz \\ &= k \end{aligned}$$

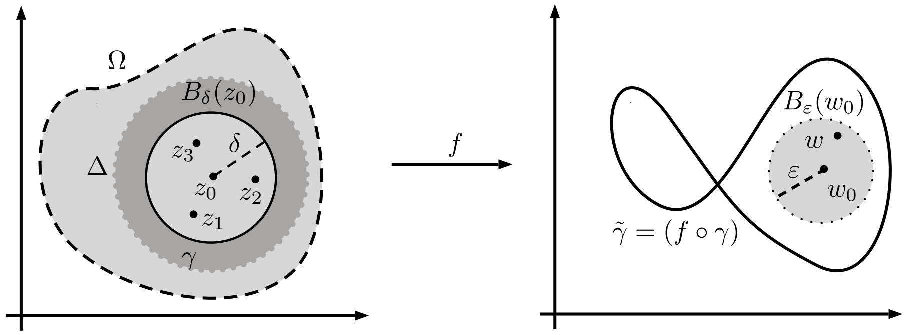



Figura 4.6: Si $z_0$ es un cero de orden 3 de la función $g(z) = f(z) - f(z_0)$, entonces existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para todo $w \in B_\varepsilon(w_0) \setminus \{w_0\}$ la identidad $f(z) = w$ tiene exactamente 3 soluciones distintas $z_1$, $z_2$ y $z_3$ en $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$.

y por lo tanto, como $n(\gamma, z)$ sólo toma el valor 0 o 1 para toda $z \in \Delta \setminus \gamma$, por el corolario 4.56, concluimos que la función $g_w$ definida como $g_w(z) = f(z) - w$ para cada $z \in \Delta$, tiene exactamente $k$ ceros en $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, es decir que la identidad $f(z) = w$ tiene exactamente $k$ soluciones en $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Finalmente, como $f$ no es constante, podemos elegir $\delta > 0$ con la propiedad adicional de que $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, de modo que, como $g'_w(z) = f'(z) \neq 0$ para toda $z \in B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$, entonces los ceros de $g_w$ en $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\}$ tienen que ser de orden 1 y por lo tanto distintos dos a dos. ■

El teorema anterior tiene interesantes consecuencias relacionadas con algunas propiedades topológicas de las funciones analíticas, las cuales formularemos como corolario de este teorema.

**Corolario 4.58** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $U \subset \Omega$ un subconjunto abierto. Si $f$ no es constante, entonces $f(U) \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto.*

**Demostración.** Sea $z_0 \in U$ y $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset U$. Por el teorema 4.57 sabemos que existen $\delta > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\overline{B_\delta(z_0)} \subset B_r(z_0) \subset U,$$

y para toda $w \in B_\varepsilon(f(z_0))$ existe al menos una $z \in B_\delta(z_0)$ tal que $f(z) = w$, de modo que podemos concluir que

$$B_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(B_\delta(z_0)) \subset f(U)$$

y por lo tanto que $f(U)$ es abierto. ■

El corolario anterior tiene como consecuencia un resultado que ya probamos en el capítulo 3: *el principio del módulo máximo*. Enunciaremos y probaremos de nuevo este resultado pues es importante hacer notar que éste se puede obtener (de manera muy sencilla) a partir de una propiedad topológica de las funciones analíticas.

**Corolario 4.59 (principio del módulo máximo)** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$. Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es constante en $\Omega$.*

**Demostración.** Si $|f(z_0)| = 0$, entonces $|f(z)| = 0$ para toda $z \in \Omega$ y por lo tanto $f$ es la constante 0 en $\Omega$. Supongamos entonces que $0 < |f(z_0)|$ y que $f$ no es constante en $\Omega$.

Por el corolario anterior sabemos que $f(\Omega)$ es abierto, de modo que existe $r > 0$ tal que $B_r(f(z_0)) \subset f(\Omega)$. Ahora, si hacemos

$$w = f(z_0) + \frac{r}{2} \cdot \frac{f(z_0)}{|f(z_0)|},$$

entonces

$$|w - f(z_0)| = \left| \frac{r}{2} \cdot \frac{f(z_0)}{|f(z_0)|} \right| = \frac{r}{2} < r$$

de donde $w \in B_r(f(z_0)) \subset f(\Omega)$ y por lo tanto existe $z \in \Omega$ tal que

$$f(z) = f(z_0) + \frac{r}{2} \cdot \frac{f(z_0)}{|f(z_0)|}.$$

Pero observe que

$$|f(z)| = \left| f(z_0) + \frac{r}{2} \cdot \frac{f(z_0)}{|f(z_0)|} \right| = \left(1 + \frac{r}{2\,|f(z_0)|}\right) |f(z_0)| > |f(z_0)|$$

lo cual contradice la hipótesis por lo que $f$ debe de ser constante en $\Omega$. ■

Otro corolario del teorema 4.57 que vamos a probar está relacionado con las propiedades que debe tener la función inversa de una función analítica $f$ e inyectiva en una region $\Omega \subset \mathbb{C}$. En el caso real sabemos que, aun cuando una función sea inyectiva y derivable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, no se puede asegurar que su función inversa siga siendo derivable en todos los puntos de su dominio $f(I)$. Este es el caso de la función $f(x) = x^3$, cuya inversa $f^{-1}(y) = y^{1/3}$ no es derivable en $y = 0$.

Lo que mostraremos es justo que entre las funciones analíticas, no hay funciones que se comporten como la función $f(x) = x^3$, vista como función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Es decir, probaremos que si una función $f$ es inyectiva en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces su inversa también es analítica en la región $f(\Omega)$.

Lo primero que demostraremos (también como un corolario del teorema 4.57) es que, si una función analítica $f$ es inyectiva en una región, entonces su derivada tiene que ser distinta de 0 en dicha región.

**Corolario 4.60** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f$ es inyectiva en la región $\Omega$, entonces $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$.*

**Demostración.** Nótese primero que, como $f$ es inyectiva en $\Omega$, entonces $f$ es no constante. Si suponemos que $z_0 \in \Omega$ es tal que $f'(z_0) = 0$, entonces podemos asegurar que $z_0$ es un cero de la función $g(z) = f(z) - f(z_0)$ de orden $k > 1$. Ahora, por el teorema 4.57 sabemos que existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que para todo $w \in B_\varepsilon(w_0) \setminus \{w_0\}$ la identidad $f(z) = w$ tiene exactamente $k > 1$ soluciones en $B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$ y que $\delta$ se puede elegir de tal forma que las soluciones de la identidad $f(z) = w$ son distintas entre si, lo cual implica que $f$ no es inyectiva en $\Omega$, contradicción con la cual concluye la prueba. ■

Como el lector habrá notado, el corolario anterior no lo satisfacen las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (justo un ejemplo es la función $f(x) = x^3$). Sin embargo, como se recordará, su recíproco sí lo satisfacen este tipo de funciones: si una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es tal que $f'(x) \neq 0$ para toda $x$ en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces $f$ es inyectiva en $I$. Paradójicamente, el recíproco del corolario 4.60 no lo satisfacen las funciones analíticas, como se pide que el lector lo pruebe en el problema 42.

Una vez que contamos con en el corolario 4.60, podemos formular y probar la siguiente

**Proposición 4.61** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Si $f$ es inyectiva en la región $\Omega$, entonces la función inversa $f^{-1} : f(\Omega) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en $f(\Omega)$ (que también es una región) y además $\left(f^{-1}\right)'(w) \neq 0$ para toda $w \in f(\Omega)$.*

**Demostración.** Lo primero que probaremos es que la función $f^{-1}$ es continua en $f(\Omega)$ para lo cual sólo hace falta notar que si $U \subset \mathbb{C}$ es un conjunto abierto, entonces la imagen inversa de $U$ bajo la función $f^{-1}$ es tal que

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}(U) = f(U \cap \Omega)$$

de modo que, por el corolario 4.58 se tiene que $f(U \cap \Omega)$ es abierto y por lo tanto también $\left(f^{-1}\right)^{-1}(U)$, con lo cual podemos concluir que $f^{-1}$ es continua en $f(\Omega)$.

Finalmente, por el corolario 4.60 sabemos que $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$, de modo que por la proposición 3.5 del capítulo 3 (tomando $g = f^{-1}$) sabemos que $f^{-1}$ es derivable para toda $w \in f(\Omega)$ y que además

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \neq 0$$

con lo cual concluimos la prueba. ■

Para redondear esta serie de resultados sobre la inyectividad y la existencia de la inversa de una función analítica $f$, mostraremos que con una pequeña variación en el teorema del principio del argumento, podemos encontrar una forma de expresar (localmente) a la inversa de $f$ en términos de una integral. Este resultado lo dejaremos formulado en la siguiente

**Proposición 4.62** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica e inyectiva en $\Omega$. Si $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ son tales que $B_R(z_0) \subset \Omega$, y $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $0 < r < R$, entonces*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

*para toda $w \in f(B_r(z_0))$.*

**Demostración.** Sea $w \in f(B_r(z_0))$ y $z \in B_r(z_0)$ la única $z \in \Omega$ tal que $w = f(z)$. De esta forma, como $z$ es el único cero (incluso en todo $\Omega$) de la función $h(\zeta) = f(\zeta) - w$, sabemos que existe $h_1 : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$h(\zeta) = (\zeta - z) h_1(\zeta)$$

y $h_1(\zeta) \neq 0$, para toda $\zeta \in \Omega$. Por tanto

$$\frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} = \frac{1}{\zeta - z} + \frac{h_1'(\zeta)}{h_1(\zeta)}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
\zeta \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} &= \frac{\zeta}{\zeta - z} + \zeta \frac{h_1'(\zeta)}{h_1(\zeta)} \\
&= \frac{\zeta - z + z}{\zeta - z} + \zeta \frac{h_1'(\zeta)}{h_1(\zeta)} \\
&= \frac{z}{\zeta - z} + 1 + \zeta \frac{h_1'(\zeta)}{h_1(\zeta)}
\end{aligned}$$

para toda $\zeta \in \Omega \setminus \{z\}$.

Si ahora notamos que la función

$$1 + \zeta \frac{h_1'(\zeta)}{h_1(\zeta)}$$

es analítica en el disco $B_R(z_0)$ y que $\gamma_r \subset B_R(z_0)$, con base en el teorema de Cauchy, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma_r} \zeta \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta &= \int\limits_{\gamma_r} \frac{z}{\zeta - z} d\zeta + \int\limits_{\gamma_r} \left(1 + \zeta \frac{h_1'(\zeta)}{h_1(\zeta)}\right) d\zeta \\
&= z \cdot 2\pi i \cdot n(\gamma_r, z) + 0 \\
&= z \cdot 2\pi i
\end{aligned}$$

identidad que podemos escribir de la forma

$$\begin{aligned}
f^{-1}(w) &= z \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \zeta \frac{h'(\zeta)}{h(\zeta)} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \zeta \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta,
\end{aligned}$$

que es la expresión que se deseaba demostrar. ■

Con todos los resultados anteriores podemos formular y probar lo que bien podemos llamar el *teorema de la función inversa* para funciones analíticas.

**Teorema 4.63** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Si $z_0 \in \Omega$ es tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $f$ es inyectiva en $B_r(z_0)$, $f(B_r(z_0))$ es abierto, $f^{-1}$ es analítica en $f(B_r(z_0))$ y*

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \neq 0$$

*para toda $w \in f(B_r(z_0))$.*

**Demostración.** Como el lector estará de acuerdo, para la prueba de este teorema sólo basta hacer notar que la hipótesis de que $f'(z_0) \neq 0$ nos asegura que $z_0$ es un cero de orden 1 de la función $g(z) = f(z) - f(z_0)$ de tal forma que, por el teorema 4.57, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(z_0)) \subset f(\Omega)$ y $f$ es inyectiva en la imagen inversa bajo $f$ de $B_\varepsilon(f(z_0))$ (es decir, $f^{-1}(B_\varepsilon(f(z_0))))$ el cual es un abierto (pues $f$ es continua) al que pertenece $z_0$, por lo que sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset f^{-1}(B_\varepsilon(f(z_0)))$

Una vez que ya tenemos que $f$ es inyectiva en $B_r(z_0)$, las afirmaciones de este teorema se siguen del corolario 4.58 ($f(B_r(z_0))$ es abierto) y de la proposición 4.61, es decir que $f^{-1}$ es analítica en $f(B_r(z_0))$ y que

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))} \neq 0$$

para toda $w \in f(B_r(z_0))$. ■

Además de esta importante cantidad de resultados relacionados con la inyectividad e invertibilidad de una función analítica, el principio del argumento también tiene como consecuencia un relevante teorema que entre sus aplicaciones, establece condiciones para que dos funciones analíticas (por ahora en un disco) "encierren" el mismo número de ceros. Este resultado es conocido como el *teorema de Rouché*[6] y es importante decir que la versión que aquí presentamos (más general que la versión clásica pues abarca a las funciones meromorfas) es esencialmente la misma que aparece en [2] y que como ahí se menciona, fue probada por Irving Gliksberg[7].

**Teorema 4.64 (Rouché-Gliksberg)** *Sean $f$ y $g$ funciones meromorfas en el disco $\Delta \subset \mathbb{C}$, y $\gamma \subset \Delta$ una curva cerrada suave por pedazos tal que $n(\gamma, z) = 0$ o $n(\gamma, z) = 1$ para toda $z \in \Delta \backslash \gamma$. Sea $Z_f$ (respectivamente $P_f$) el número de ceros (respectivamente polos) de $f$ (contados según su multiplicidad) "encerrados" por $\gamma$ (es decir, aquellos para los cuales $\gamma$ tiene índice 1), y $Z_g$, $P_g$ los correspondientes para la función $g$. Si $f$ y $g$ son tales que*

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|$$

*para toda $z \in \gamma$, entonces*

$$Z_f - P_f = Z_g - P_g.$$

**Demostración.** Lo primero que hay que observar es que, dado que $f$ y $g$ están definidas sobre la curva $\gamma$, entonces los polos de estas funciones están contenidos en $\Delta \setminus \gamma$. Por otra parte, de la desigualdad que por hipótesis satisfacen las funciones $f$ y $g$ se sigue que la curva $\gamma$ tampoco contiene a los ceros de estas funciones. Por lo tanto, se tiene que

$$\left|\frac{f(z)}{g(z)} + 1\right| < \left|\frac{f(z)}{g(z)}\right| + 1 \tag{4.22}$$

para toda $z \in \gamma$.

Si $F(z) = f(z)/g(z)$, entonces $F$ es una función meromorfa en $\Delta$ para la que podemos asegurar que $F(z) \notin [0, \infty)$ para toda $z$ en su dominio. En efecto, si $F(z) \geq 0$ para alguna $z$, entonces $|F(z)| = F(z)$ y $|F(z) + 1| = F(z) + 1$ lo cual conduce a una contradicción con la desigualdad 4.22.

De esta forma, por el problema 31 del capítulo 3 (tomando $A = \gamma$ y $y_0 = 0 = w_0$) sabemos que existe una región $\tilde{\Omega} \subset \Delta$ tal que $\gamma \subset \tilde{\Omega}$ y en la cual está definida una rama del logarítmo de la función $F$ (específicamente la rama $\log_0(F) = \log_0 \circ F$). Por lo tanto

$$0 = \int_\gamma \left(\log_0 \circ F\right)'(z) dz$$

[6] Eugène Rouché (18 de agosto de 1832 - 19 de agosto de 1910) fue un matemático francés. Es conocido por ser el autor del Teorema de Rouché sobre análisis complejo y coautor del Teorema de Rouché–Frobenius. (Fuente: Wikipedia).

[7] *American Mathematical Monthly*, **83** (1976), 186-187.

$$= \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz$$
$$= \int_\gamma \left( \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz$$

de modo que, por el corolario 4.56, concluimos que

$$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = Z_g - P_g$$

que es la igualdad que se deseaba probar. ■

Como mencionamos párrafos arriba, el resultado anterior es una versión más general del teorema clásico de Rouché. Aunque esta versión clásica se puede probar usando el teorema de Rouché-Gliksberg, daremos la prueba más conocida de este resultado.

**Teorema 4.65 (de Rouché)** *Sean $f$ y $g$ funciones analíticas en el disco $\Delta \subset \mathbb{C}$, y $\gamma \subset \Delta$ una curva cerrada suave por pedazos tal que $n(\gamma, z) = 0$ o $n(\gamma, z) = 1$ para toda $z \in \Delta \setminus \gamma$. Sea $Z_f$ el número de ceros de $f$ (contados según su multiplicidad) "encerrados" por $\gamma$ (es decir, aquellos para los cuales $\gamma$ tiene índice 1), y $Z_g$ los correspondientes para la función $g$. Si $f$ y $g$ son tales que*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \tag{4.23}$$

*para toda $z \in \gamma$, entonces*

$$Z_f = Z_g.$$

**Demostración.** Observe que de la desigualdad 4.23 se sigue que $g(z) \neq 0$ para toda $z \in \gamma$, de modo que la curva $\gamma$ está contenida en el dominio de analiticidad de la función $F$ definida como $F(z) = f(z)/g(z)$ la cual es meromorfa en $\Delta$ (ya que los polos de $F$ coinciden con los ceros de $f$).

Por lo tanto, de la misma desigualdad 4.23 se tiene que

$$|F(z) - 1| < 1$$

para toda $z \in \gamma$. De esta forma, por el inciso *(b)* del problema 30 del capítulo 3 sabemos que

$$0 = \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z)} dz = \int_\gamma \left( \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz$$

de modo que, por el corolario 4.56 se tiene que

$$Z_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)} dz = Z_g$$

lo cual prueba la identidad deseada. ■

**Observación 4.66** *En aras de dar la formulación clásica del teorema de Rouché, en el teorema anterior pedimos la hipótesis de que*

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|$$

*para toda $z \in \gamma$. Pero observe el lector que, como $Z_{-g} = Z_g$ y $|-g(z)| = |g(z)|$, la desigualdad anterior se puede sustituir por la desigualdad*

$$|f(z) + g(z)| < |g(z)| \tag{4.24}$$

*para toda $z \in \gamma$.*

*Y ya que estamos analizando estas desigualdades, si pedimos que*

$$|f(z)+g(z)| < |f(z)| + |g(z)| \tag{4.25}$$

*para toda $z \in \gamma$, es claro que la conclusión del teorema de Rouché se sigue cumpliendo pues sería una consecuencia inmediata del teorema de Rouché-Gliksberg. Nótese que esta última desigualdad es una "mejor" hipótesis en la medida de que, si dos funciones $f$ y $g$ satisfacen la desigualdad 4.24, entonces satisfacen la desigualdad 4.25, pero no lo recíproco.*

A continuación damos un ejemplo sencillo de cómo usar el teorema de Rouché para "ubicar" las raíces de un polinomio.

**Ejemplo 4.67** *Sea $p(z) = z^5 - 4iz^3 + z - i$. Si hacemos $f(z) = -4iz^3$, nótese que si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $|z| = 1$, se tiene que*

$$\begin{aligned} |p(z) - f(z)| &= \left|z^5 + z - i\right| \\ &\leq |z|^5 + |z| + 1 \\ &= 3 \\ &< 4 \\ &= |f(z)|, \end{aligned}$$

*de modo que, por el teorema de Rouché sabemos que $f$ y $p$ tienen el mismo número de ceros en el abierto $B_1(0)$, y como el único cero de $f$ es $z = 0$, que es de orden 3, podemos concluir que $p$ tiene 3 raíces (no necesariamente distintas) en el mismo disco.*

*Si ahora hacemos $f(z) = z^5$ y tomamos $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| = 3$, entonces*

$$\begin{aligned} |p(z) - f(z)| &= \left|-4iz^3 + z - i\right| \\ &\leq 4|z|^3 + |z| + 1 \\ &= 4 \cdot 3^3 + 3 \\ &< 3^5 \\ &= |f(z)|, \end{aligned}$$

*por lo que ahora podemos asegurar que las 5 raíces de $p$ están en el disco $B_3(0)$ puesto que $z = 0$ es el único cero de $f$, de orden 5.*

*Tomando en cuenta el primer resultado que obtuvimos, podemos concluir que de las 5 raíces de $p$, dos de ellas están en la región $\Omega = B_3(0) \setminus \overline{B_1(0)}$.*

Lo siguiente que mostraremos son dos aplicaciones muy importantes de la versión clásica del teorema de Rouché. La primera de ellas es otra prueba del teorema fundamental del álgebra, con la ventaja adicional de que en dicha prueba se da una estimación del radio de un disco (con centro en en 0) en el cual deben estar contenidas las raíces del polinomio con el que se esté tratando.

**Teorema 4.68 (fundamental del álgebra)** *Si $p$ es un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$ con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces $p$ tiene $n$ raíces en $\mathbb{C}$ (contadas con su multiplicidad).*

**Demostración.** Supongamos que

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

con $a_n \neq 0$. Sea $g(z) = a_n z^n$; es claro que $z = 0$ es un cero de $g$ de orden $n$, es decir, $g$ tiene $n$ ceros "dentro" de cualquier circunferencia de radio $r > 0$ con centro en el 0.

Sea, $\gamma(t) = re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$ y

$$r > \text{máx}\left\{1, \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|} + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right\},$$

y $\Delta = B_R(0)$ tal que $r < R$.

Claramente $p$ y $g$ son analíticas en $\Delta$ y si $z \in \gamma$, entonces $|z| = r$ y

$$\begin{aligned}
\left|\frac{p(z)}{g(z)} - 1\right| &= \left|\frac{a_{n-1}}{a_n z} + \cdots + \frac{a_1}{a_n z^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n z^n}\right| \\
&\leq \frac{1}{|a_n|}\left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} + \frac{|a_0|}{|z|^n}\right) \\
&< \frac{1}{|a_n|}\left(\frac{|a_{n-1}|}{|z|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|z|} + \frac{|a_0|}{|z|}\right) \\
&= \frac{1}{|z|}\left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|} + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} + \cdots + \frac{|a_1|}{|a_n|} + \frac{|a_0|}{|a_n|}\right) \\
&< 1,
\end{aligned}$$

de modo que, por el teorema de Rouché (corolario 4.65), el polinomio $p$ tiene $n$ ceros (raíces) en el disco $\Delta$. ■

El otro resultado importante que se prueba con la ayuda del teorema de Rouché es el *teorema de Hurwitz*[8]. Antes de probar este teorema, probaremos el siguiente resultado.

**Proposición 4.69** *Sean $f_n, f : \Delta \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas en el disco $\Delta$ y $\gamma \subset \Delta$ una curva cerrada suave por pedazos tal que $n(\gamma, z) = 0$ o $n(\gamma, z) = 1$ para toda $z \in \Delta \setminus \gamma$. Si la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ sobre $\gamma$ y $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \gamma$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ las funciones $f_n$ y $f$ tiene el mismo número de ceros dentro de (o encerrados por) la curva $\gamma$.*

**Demostración.** Sea

$$m = \text{mín}\{|f(z)| \mid z \in \gamma\}.$$

Como $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \gamma$ y la curva $\gamma$ es un compacto, se tiene que $m > 0$.

Ahora, por la convergencia uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ a la función $f$ sobre la curva $\gamma$ sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces

$$|f_n(z) - f(z)| < m \leq |f(z)|$$

para toda $z \in \gamma$. Por lo tanto, por el teorema de Rouché (corolario 4.65), si $n \geq N$ se tiene que las funciones $f_n$ y $f$ tiene el mismo número de ceros dentro de la (o encerrados por la) curva $\gamma$. ■

Con base en este resultado ahora podemos probar el teorema de Hurwitz cuya formulación es la siguiente.

**Teorema 4.70 (de Hurwitz)** *Sea $f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones analíticas tales que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ sobre cualquier $K \subset \Omega$ compacto. Si $f_n(z) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ es la constante $0$ o $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$.*

**Demostración.** Supongamos que $f$ no es la constante 0; sea $z_0 \in \Omega$ y $R > 0$ tal que $B_R(z_0) \subset \Omega$. Por el corolario 4.36 sabemos que existe $0 < r < R$ tal que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset B_R(z_0)$.

Sea ahora $\gamma(t) = re^{it} + z_0$ con $t \in [0, 2\pi]$; como $\gamma \subset B_R(z_0) \subset \Omega$ es un compacto, por hipótesis sabemos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f$ sobre $\gamma$ de tal forma que, por la proposición 4.69 se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ las funciones $f_n$ y $f$ tiene el mismo número de ceros dentro de (o encerrados por) la curva $\gamma$.

Por lo tanto, como $f_n(z) \neq 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y para toda $z \in \Omega$, entonces $f$ no tiene ceros "dentro" de la curva $\gamma$ de modo que, como $n(\gamma, z_0) = 1$, concluimos que $f(z_0) \neq 0$ y por lo tanto que $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$. ■

[8]Adolf Hurwitz (Hildesheim, Reino de Hannover, 26 de marzo de 1859-Zúrich, Suiza, 18 de noviembre de 1919) fue un matemático alemán conocido por sus trabajos en álgebra, análisis, geometría y teoría de números. (Fuente: Wikipedia).

## 4.8. Problemas

1. Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en $\Omega$, $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ y $\tilde{\gamma} : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ curvas suaves por pedazos tales que $\gamma \cap \tilde{\gamma} = \varnothing$. Definimos $h : \Omega \setminus \gamma \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$h(z) = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

y $g : \Omega \setminus \tilde{\gamma} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$g(w) = \int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(w)}{w-z} dz$$

(observe que por el lema 4.2 las funciones $h$ y $g$ son continuas). Pruebe que

$$\int_{\tilde{\gamma}} h(z)dz = \int_{\gamma} g(w)dw.$$

(*Sugerencia*: use el teorema de Fubini).

2. Sea $f$ una función entera. Pruebe que:

   *a)* Si $\mathrm{Re}(f)$ ó $\mathrm{Im}(f)$ está acotada inferior o superiormente, entonces $f$ es constante.
   *b)* Si $f$ es tal que $|f(z)| \geq c > 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ debe ser constante.
   *c)* Si $f$ es no constante, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ (use el inciso anterior).
   *d)* Si $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)/z = 0$, entonces $f$ debe ser constante.

3. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en la región $\Omega$, tal que $f(\Omega) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $\tilde{u} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ armónica en $B$. Pruebe que $\tilde{u} \circ f$ es armónica en $\Omega$.

4. Pruebe que, si $u : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es función armónica en la región $\Omega$, entonces $u$ es de clase $C^{\infty}$ en $\Omega$.

5. Sean, $f$ una función entera, $M, R > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $|f(z)| \leq M\,|z|^n$ siempre que $|z| \geq R > 0$. Pruebe que $f$ debe de ser un polinomio de grado a lo más $n$.

6. Sea $f$ analítica en el disco $B_1(0)$ tal que $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ para toda $z \in B_1(0)$. Calcule la mejor estimación que pueda para una cota superior de $\left|f^{(n)}(0)\right|$.

7. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de $f$. Pruebe que:

   *a)* $z_0$ es una singularidad removible de $f$ si y sólo si existe $r > 0$ tal que $f$ está acotada en $B_r(z_0)\backslash\{z_0\}$.
   *b)* $z_0$ es una singularidad removible de $f$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y es igual a una $l \in \mathbb{C}$.
   *c)* existe $r > 0$ tal que $f$ está acotada en $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ si y sólo si $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existe y es igual a una $l \in \mathbb{C}$.

8. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$. Pruebe que $z_0$ es una singularidad removible de $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ si y sólo si $f(z_0) = 0$.

9. Sea $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$. Pruebe que, si $\mathrm{Re}(f)$ ó $\mathrm{Im}(f)$ es acotada inferior o superiormente en una vecindad agujerada de $z_0$, entonces $z_0$ es una singularidad removible de $f$.

10. Sean $f_n, f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que para toda $z \in \Omega$ existe $r > 0$ tal que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función $f$ en $B_r(z) \subset \Omega$. Pruebe que para todo $A \subset \Omega$ compacto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función $f$ en $A \subset \Omega$.

11. Sean $f_n, f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tales que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a la función $f$ en cualquier $A \subset \Omega$, compacto. Si $z_0 \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $g_n : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como
$$g_n(z) = \frac{f_n(z)}{(z - z_0)^k}.$$
Pruebe que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a la función
$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^k}$$
sobre cualquier subconjunto compacto $\tilde{A} \subset \Omega \setminus \{z_0\}$.

12. Sean $0 \leq r_1 < r_2$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números complejos.

    *a*) Pruebe que, si la serie de potencias $\sum a_n (z - z_0)^n$ converge puntualmente para toda $z \in \mathbb{C}$ tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$, entonces la misma serie converge uniformemente sobre cualquier conjunto compacto $A \subset B_{r_2}(z_0)$.

    *b*) Pruebe que, si la serie
    $$\sum a_n \left( \frac{1}{z - z_0} \right)^n$$
    converge puntualmente para toda $z \in \mathbb{C}$ tal que $r_1 < |z - z_0| < r_2$, entonces la misma serie converge uniformemente sobre cualquier conjunto compacto $A \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0|\}$.

13. Pruebe las siguientes generalizaciones del lema de Schwarz.

    *a*) Si $f : B_R(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para toda $z \in B_R(0)$, entonces $|f(z)| \leq |z|/R$ para toda $z \in B_R(0)$ y $|f'(0)| \leq 1/R$. Si además $|f(z)| = |z|/R$ para alguna $z \in B_R(0)$, $z \neq 0$, o $|f'(0)| = 1/R$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cz/R$ para toda $z \in B_R(0)$.

    *b*) Si $f : B_R(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in B_R(0)$ , entonces $|f(z)| \leq M |z|/R$ para toda $z \in B_R(0)$ y $|f'(0)| \leq M/R$. Si además $|f(z)| = M |z|/R$ para alguna $z \in B_R(0)$, $z \neq 0$, o $|f'(0)| = M/R$, entonces existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| = 1$ y $f(z) = cMz/R$ para toda $z \in B_R(0)$.

14. Sea $f : B_R(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $f(z_0) = w_0$, con $z_0 \in B_R(0)$, $|w_0| < M$, y $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in B_R(0)$. Pruebe que
$$\left| \frac{M\,(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} \right| \leq \left| \frac{R\,(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|$$
para toda $z \in B_R(0)$. Si además se tiene que
$$\left| \frac{M\,(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} \right| = \left| \frac{R\,(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right|$$
para alguna $z \in B_R(0)$, $z \neq z_0$, entonces $f$ es una función de Möbius. (*Sugerencia*: use las transformaciones de Möbius $T$ y $L$ tales que $T(B_R(0)) = B_1(0)$ y $T(z_0) = 0$, y $L(B_M(0)) = B_1(0)$ y $L(w_0) = 0$, respectivamente, y aplique el lema de Schwarz a la función $L \circ f \circ T^{-1}$).

15. Sea $f : B_R(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $|f(z)| \leq 1$ para toda $z \in B_R(0)$. Pruebe que
$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

para toda $z \in B_r(0)$. Si además se tiene que

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{1-|z|^2}$$

para alguna $z \in B_R(0)$, entonces $f$ es una función de Möbius.(*Sugerencia*: use la desigualdad que obtuvo en el problema 14).

16. Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $\operatorname{Im}(f(z)) \geq 0$ para toda $z \in \Omega$. Pruebe que si $z_0 \in \Omega$ es tal que $\operatorname{Im}(f(z_0)) > 0$, entonces

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{f(z)-\overline{f(z_0)}}\right| \leq \left|\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right|$$

y

$$\frac{|f'(z)|}{\operatorname{Im}(f(z))} \leq \frac{1}{\operatorname{Im}(z)}$$

para toda $z \in \Omega$. También pruebe que, si en alguna de las dos desigualdades anteriores se satisface la identidad para alguna $z \in \Omega$, entonces $f$ es una función de Möbius. (*Sugerencia*: use las transformaciones de Möbius $T$ y $L$ tales que $T(\Omega) = B_1(0)$ y $T(z_0) = 0$, y $L(\Omega) = B_1(0)$ y $L(f(z_0)) = 0$, respectivamente, y aplique el lema de Schwarz a la función $L \circ f \circ T^{-1}$).

17. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$.

    *a*) Pruebe que el polinomio de Taylor $p_{n,f,z_0}$ es tal que

    $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - p_{n,f,z_0}(z)}{z - z_0} = 0.$$

    *b*) Pruebe que $p_{n,f,z_0}$ es el único polinomio de grado menor o igual a $n$ que tiene la propiedad del inciso anterior.

18. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas y $z_0 \in \Omega$. Pruebe que, si $f(z_0) = g(z_0)$ y $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(z) = g(z)$ para toda $z \in \Omega$.

19. Sea $f$ una función entera tal que $f(0) = 1$ y $f'(z) = f(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f = \exp$.

20. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que:

    *a*) $f(z+w) = f(z)f(w)$ para todas $z, w \in \mathbb{C}$, y
    *b*) $f'(0) = 1 = f(0)$.

    Pruebe que $f$ es igual a la función exponencial.

21. Sea $f$ entera tal que:

    *a*) $f''(z) + f(z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C}$, y
    *b*) $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

    Pruebe que $f$ es igual a la función seno.

22. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica sobre la región $\Omega$ y $z_0 \in \Omega$ tal que

    $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} = 0$$

    para toda $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que $f$ es la constante cero en $\Omega$.

23. Sean, $f$ analítica en una vecindad de 0 tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que la función $g(z) = f(z^n)$ tiene un cero de orden $n$ en 0.

24. Sea $f$ una función entera que tienen la propiedad de que $f(z^2) = f^2(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que:

    *a)* $f(0) = 1$ o $f(0) = 0$.

    *b)* Si $f(0) = 1$, entonces $f$ es la función constante 1 (si no sabe que hacer, ¡derive!).

    *c)* Si $f(0) = 0$ y $f$ no es la función constante 0, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(z) = z^n$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

    *d)* ¿Cuáles son todas las funciones enteras que tienen la misma propiedad que $f$?

25. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas sobre la región $\Omega$ tales que $f(z)g(z) = 0$ para toda $z \in \Omega$. Pruebe que, o $f$ es la constante cero ó $g$ es la constante cero.

26. Sea $f(z) = \operatorname{sen}(1/z)$. Muestre que $z_0 = 0$ es punto de acumulación del conjunto de los ceros de $f$ $(Z_f)$. ¿Esta función contradice al corolario 4.36? Justifique su respuesta.

27. ¿Existe $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica sobre una región $\Omega$ tal que $0 \in \Omega$ y $f(1/n) = (-1)^n/n$ para toda $n \geq N \in \mathbb{N}$?

28. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas sobre la región $\Omega$ tales que $f(z) \neq 0$ y $g(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$ y sea $A = \left\{ z \in \Omega \mid \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)} \right\}$. Pruebe que, si $A$ tiene un punto de acumulación en $\Omega$, entonces existe $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $f(z) = cg(z)$ para toda $z \in \Omega$.

29. Sean $f$ y $g$ dos funciones enteras tales que $|f(z)| \leq |g(z)|$ para toda $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = cg(z)$ para toda $z \in \mathbb{C}$.

30. Sean $f, g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas sobre la región $\Omega$ tales que $|f(z)| = |g(z)|$ para toda $z \in \Omega$. Pruebe que existe $c \in \mathbb{C}$, con $|c| = 1$, tal que $f(z) = cg(z)$ para toda $z \in \Omega$.

31. Pruebe la proposición 4.38.

32. Sean $f, g : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas (no constantes) y $z_0 \in \Omega$. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z_0) = 0 = \lim\limits_{z \to z_0} g(z_0)$ ¿qué tipo de singularidad aislada puede tener la función $f/g$ en el punto $z_0$? Responda la misma pregunta suponiendo ahora que $z_0$ es un polo de $f$ y de $g$. Pruebe sus respuestas.

33. Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$, $b_1, \ldots, b_m \in \Omega$ y $f : \Omega \setminus \{b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica. Pruebe que:

    *a)* Si $a_1, \ldots, a_n \in \Omega \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$ son ceros de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, entonces existe $\tilde{g} : \Omega \setminus \{b_1, \ldots, b_m\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

    $$f(z) = (z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_n)^{k_n} \tilde{g}(z)$$

    para toda $z \in \Omega \setminus \{b_1, \ldots, b_m\}$, y $\tilde{g}(a_j) \neq 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$.

    *b)* Si $b_1, \ldots, b_m$ son polos de $f$ de orden $l_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces existe $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

    $$f(z) = (z - a_1)^{k_1} \cdots (z - a_n)^{k_n} (z - b_1)^{-l_1} \cdots (z - b_m)^{-l_m} g(z)$$

    con $g(z) \neq 0$, para toda $z \in \Omega$.

34. Sea $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$. Pruebe que $z_0$ no puede ser un polo de orden 1 de $f'$.

35. Sea $f$ una función entera. Pruebe que:

    *a)* Si $\infty$ es un polo de orden $k$ de $f$, entonces $f$ es un polinomio de grado $k$.

    *b)* Si $f$ es diferente de un polinomio, entonces $\infty$ es una singularidad esencial de $f$.

36. Pruebe que, si $f$ es una función meromorfa en $\mathbb{C}^*$, es decir que sólo tiene polos en $\mathbb{C}$ y un polo en $\infty$, entonces $f$ es una función racional (cociente de dos polinomios).

37. Sea $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica y $z_0 \in \Omega$. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:

    *a*) $z_0$ es una singularidad removible de $f$ si y sólo si $z_0$ es una singularidad removible de $f'$.

    *b*) $z_0$ es un polo de $f$ si y sólo si $z_0$ es un polo de $f'$.

    *c*) $z_0$ es una singularidad esencial de $f$ si y sólo si $z_0$ es una singularidad esencial de $f'$.

38. Si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de la función $f$, ¿qué tipo de singularidad aislada tiene la función $e^f$?

39. Supóngase que $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad esencial de la función $f$. Pruebe que:

    *a*) $f$ no es inyectiva en cualquier vecindad de $z_0$.

    *b*) Existe $r > 0$ tal que
    $$\overline{f(B_\delta(z_0) \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$$
    para toda $0 < \delta < r$.

40. Pruebe que $f$ tiene una singularidad aislada en $z = \infty$ si y sólo si para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$ la función $g(z) = f(1/(z - z_0))$ tiene una singularidad aislada en $z_0$.

41. Sea $f : B_1(0) \to B_1(0)$ analítica y biyectiva. Demuestre que $f$ es una transformacion lineal.

42. Determine si el recíproco del corolario 4.60 es cierto. Es decir, si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica tal que $f'(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$, entonces ¿$f$ es inyectiva en $\Omega$? Pruebe su respuesta.

43. ¿Cuántas raíces de la ecuación $z^7 - 2z^5 + 6z^3 - z + 1 = 0$ se localizan en el interior del círculo unitario?

44. ¿Cuántas raíces de la ecuación $z^4 - 6z + 3 = 0$ satisfacen la desigualdad $1 < |z| < 2$?

45. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que $\overline{B_1(0)} \subset \Omega$ y $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$.

    *a*) Pruebe que existe un único $z \in B_1(0)$ tal que $f(z) = z$. Si $|f(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$, ¿se sigue cumpliendo lo mismo?

    *b*) Pruebe que, si $|f(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$ y $f$ no es la función identidad, entonces existe un único $z \in B_1(0)$ tal que $f(z) = z$. (*Sugerencia*: defina $f_n = (1 - 1/n)f$ y use el inciso ($a$) y la proposición 4.69).

    *c*) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(z) = z^n$ (con $n \in \mathbb{N}$) en $B_1(0)$?

# Capítulo 5

# Funciones analíticas: propiedades no locales

Algunas propiedades y resultados importantes de las funciones analíticas no son de carácter local, y por esta razón requieren de herramientas que describan el comportamiento de estas funciones de manera más global. En particular, será necesario tener una versión más general del teorema de Cauchy, a cuyo desarrollo destinaremos las primeras secciones de este capítulo.

Como mencionamos en el capítulo 3, las distintas formulaciones del teorema de Cauchy difieren básicamente en dos aspectos: en el tipo de dominio que tienen las funciones que se desean integrar, o en el tipo de curvas sobre las cuales se realizan dichas integrales. En la primera versión que dimos en el capítulo 3, justo lo que hicimos fue restringir el dominio de las funciones a discos abiertos sin imponer restricciones a las curvas. Ahora haremos lo contrario, en general el dominio de las funciones que consideraremos podrá ser cualquier región (abierto conexo) y las curvas sobre las cuales habrá que integrar tendrán que tener ciertas características. De hecho, será necesario "generalizar" el concepto de curva cerrada suave por pedazos, y eso es justo lo que haremos en la primera sección de este capítulo.

## 5.1. Ciclos

Una de las caraterísticas más importantes de la versión más general que aquí veremos del teorema de Cauchy, es que no requeriremos desarrollar conceptos que sean elaborados o laboriosos relacionados con el tipo de curvas con las que se trabajará. Simplemente tendremos que considerar uniones finitas de las ya conocidas curvas cerradas suaves por pedazos, uniones a las que llamaremos *ciclos*. Formalizamos este concepto en la siguiente

**Definición 5.1** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $\gamma_i : [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \to \Omega$ una curva cerrada suave por pedazos para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. A la unión de las curvas $\gamma_i([a_i, b_i])$ junto con sus correspondientes parametrizaciones $\gamma_i$ le llamaremos un ciclo y lo denotaremos por*

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n.$$

**Observación 5.2** *Es importante hacer algunas observaciones con relación a la definición anterior. La primera de ellas es que un ciclo puede estar formado por una sola curva cerrada suave por pedazos, de tal forma que de aquí en adelante a este tipo de curvas también les llamaremos ciclos. La segunda es que el hecho de que usemos el signo de suma para denotar a un ciclo no implica que se esté hablando del concepto de suma de funciones (suma que no necesariamente está definida pues los intervalos $[a_i, b_i]$ pueden ser distintos entre si). Esperamos que esta notación no cause confusión en el lector. Y ya que mencionamos la notación, nos daremos la libertad de hablar del ciclo*

$$-(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n)$$

*el cual denotará al ciclo*

$$(-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \cdots + (-\gamma_n)\,,$$

*(en donde* $-\gamma_i$ *denota la curva definida en el capítulo* 3*), es decir*

$$-\left(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n\right) := (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \cdots + (-\gamma_n)\,.$$

*Con relación a lo anterior, y sin mayor análisis, hablaremos de las siguientes "operaciones" entre ciclos. Si*

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

*y*

$$\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_m$$

*son ciclos, escribiremos que*

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n) + (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_m) := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_m$$

*y*

$$(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n) - (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2 + \cdots + \tilde{\gamma}_m) := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n + (-\tilde{\gamma}_1) + (-\tilde{\gamma}_2) + \cdots + (-\tilde{\gamma}_m)\,.$$

*Finalmente, observe que las curvas cerradas suaves por pedazos que sean parte de un ciclo pueden tener autointersecciones, se pueden intersectar entre ellas, e incluso ¡pueden ser iguales!*

A continuación damos algunos ejemplos de ciclos.

**Ejemplo 5.3**

1. *Sean,* $\gamma_1 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definida como* $\gamma_1(t) = r_1e^{it} + 1$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definida como* $\gamma_2(t) = r_2e^{it} - 1$ *y* $\gamma_3 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *definida como* $\gamma_3(t) = r_3e^{it}$*. Si* $r_1$ *y* $r_2$ *son distintos de* 2 *y* $r_3$ *es distinto de* 1*, entonces* $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ *es un ciclo contenido en la región* $\mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ *(ver figura 5.1).*

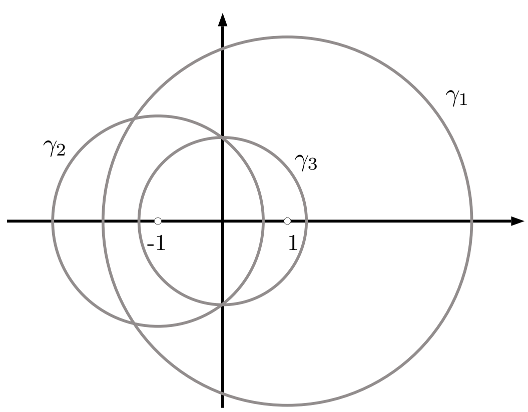



Figura 5.1: Las curvas $\gamma_1$, $\gamma_2$ y $\gamma_3$ que forman el ciclo $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

2. *Sea* $R \subset \mathbb{C}$ *un rectángulo y* $R_1, \ldots, R_k$ *subrectángulos de* $R$ *inducidos por alguna partición de* $R$*. Si* $\gamma = \partial R$ *y* $\gamma_i = \partial R_i$ *parametrizadas en sentido antihorario, entonces*

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$$

*y*

$$\gamma - (\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k)$$

*son ejemplos de ciclos (ver figura 5.2).*

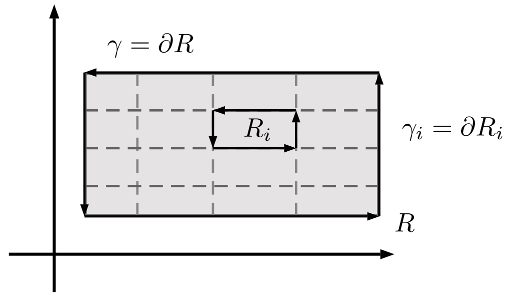



Figura 5.2: El ciclo $\gamma - (\gamma_1 + \cdots + \gamma_k)$ en donde $\gamma = \partial R$ y cada $\gamma_i = \partial R_i$.

Lo siguiente que haremos será definir lo que significa integrar una función $f$ sobre un ciclo $\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_k$ contenido en el dominio de $f$, definición que sin duda al lector le resultará muy "natural". De aquí en adelante (a menos que se especifique lo contrario), con el fin de simplificar la notación (¡y en un claro abuso de la misma!), a un ciclo formado por las curvas suaves por pedazos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ lo denotaremos simplemente por la letra $\gamma$, es decir, diremos que

$$\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k.$$

**Definición 5.4** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua y $\gamma$ un ciclo formado por las curvas cerradas suaves por pedazos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$. Definimos la integral de $f$ sobre el ciclo $\gamma$, que denotaremos por $\int_\gamma f(z)dz$, como*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma} f(z)dz &:= \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_k} f(z)dz \\ &:= \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz,\end{aligned}$$

*en donde cada una de las integrales $\int_{\gamma_i} f dz$ se calcula de acuerdo con la definición 3.21 del capítulo 3.*

Como es de suponerse, lo siguiente que haremos será dar algunos ejemplos de este tipo de integral, para lo cual usaremos los ciclos del ejemplo 5.3.

**Ejemplo 5.5** *Sean, $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -1\} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \frac{z}{z^2-1},$$

*$\gamma_1 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_1(t) = r_1 e^{it} + 1$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_2(t) = r_2 e^{it} - 1$ y $\gamma_3 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_3(t) = r_3 e^{it}$.*

1. *Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ y $0 < r_1, r_2 < 2$ y $0 < r_3 < 1$. Como $f$ es analítica en $B_1(0)$ y $\gamma_3 \subset B_1(0)$, por el teorema de Cauchy para discos (teorema 3.26) tenemos que*

$$\int\limits_{\gamma_3} f(z)dz = \int\limits_{\gamma_3} \frac{z}{z^2-1} dz = 0.$$

*Por otra parte, como la función $g(z) = z/(z-1)$ es analítica en $B_2(-1)$ y $\gamma_2 \subset B_2(-1)$, por la fórmula integral de Cauchy para discos (teorema 3.32) tenemos que*

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_2} f(z)dz &= \int\limits_{\gamma_2} \frac{z}{(z+1)(z-1)} dz \\ &= \int\limits_{\gamma_2} \frac{g(z)}{z-(-1)} dz\end{aligned}$$

$$= n(\gamma_2, -1) \cdot 2\pi i \cdot g(-1)$$
$$= \pi i.$$

*Por un argumento similar con la función $h(z) = z/(z+1)$, que es analítica en $B_2(1)$ y $\gamma_1 \subset B_2(1)$, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} \frac{z}{(z+1)(z-1)} dz \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{h(z)}{z-1} dz \\
&= n(\gamma_1, 1) \cdot 2\pi i \cdot h(1) \\
&= \pi i.
\end{aligned}$$

*Resumiendo los cálculos anteriores, en este caso se tiene que*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz \\
&= \pi i + \pi i + 0 \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

2. *Sea $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ y supongamos que al menos uno de los radios $r_1$ o $r_2$ es mayor que $2$ o que $r_3$ es mayor que $1$. Para calcular la integral de $f$ sobre alguna de estas circunferencias que "rodeen" tanto al $1$ como al $-1$, ya no es posible usar la fórmula integral de Cauchy como en el inciso anterior. En ese caso, recurriremos al hecho de que la función $f$ se puede descomponer en fracciones parciales de la siguiente forma:*

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right).$$

*De esta forma, si $2 < r_j$ para alguna $j \in \{1, 2\}$ o $1 < r_3$, entonces*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_j} f(z)dz &= \frac{1}{2}\int_{\gamma_j} \left(\frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-1}\right) dz \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_j} \frac{1}{z+1}dz + \int_{\gamma_j} \frac{1}{z-1}dz\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi i \cdot n(\gamma_j, 1) + 2\pi i \cdot n(\gamma_j, -1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(2\pi i \cdot 1 + 2\pi i \cdot 1\right) \\
&= 2\pi i.
\end{aligned}$$

*Con base en lo anterior se tiene por ejemplo que, si $0 < r_1 < 2 < r_2$ y $1 < r_3$, entonces*

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz \\
&= \pi i + 2\pi i + 2\pi i \\
&= 5\pi i.
\end{aligned}$$

3. *Finalmente, sea $\gamma = \gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3 + (-\gamma_1) + (-\gamma_2)$ y supongamos que $0 < r_1, r_2 < 2$ y $1 < r_3$. En este caso se tiene que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{-\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\gamma_3} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz \\
&= 2\pi i - \pi i - \pi i \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Una vez que ya contamos con el concepto de integral de una función sobre un ciclo, podemos introducir el concepto de índice de un punto con respecto de un ciclo. Como nuevamente el lector se podrá imaginar, esta definición será "una extensión" de la correspondiente definición para curvas cerradas suaves por pedazos.

**Definición 5.6** *Sean, $\gamma$ un ciclo formado por las curvas cerradas suaves por pedazos $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, y $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma = \mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k)$. Definimos el índice del punto $z_0$ con respecto al ciclo $\gamma$, que denotamos por*

$$n(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k, z_0) = n(\gamma, z_0),$$

*como*

$$n(\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_k} \frac{1}{z - z_0} dz.$$

*Es decir, y escrito de forma abreviada, por la definición de integral de una función sobre un ciclo se tiene que*

$$n(\gamma, z_0) := n(\gamma_1, z_0) + n(\gamma_2, z_0) + \cdots + n(\gamma_k, z_0).$$

Ilustraremos este concepto aprovechando los ciclos que definimos en el ejemplo 5.5.

**Ejemplo 5.7** *Sean, $\gamma_1 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_1(t) = r_1 e^{it} + 1$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_2(t) = r_2 e^{it} - 1$ y $\gamma_3 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_3(t) = r_3 e^{it}$.*

1. *Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ y $0 < r_1, r_2 < 2$ y $0 < r_3 < 1$, entonces*

$$\begin{aligned}
n(\gamma, 1) &= n(\gamma_1, 1) + n(\gamma_2, 1) + n(\gamma_3, 1) \\
&= 1 + 0 + 0 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

   *y*

$$\begin{aligned}
n(\gamma, -1) &= n(\gamma_1, -1) + n(\gamma_2, -1) + n(\gamma_3, -1) \\
&= 0 + 1 + 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

2. *Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ y $0 < r_1 < 2 < r_2$ y $1 < r_3$, entonces*

$$\begin{aligned}
n(\gamma, 1) &= n(\gamma_1, 1) + n(\gamma_2, 1) + n(\gamma_3, 1) \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3,
\end{aligned}$$

   *y*

$$\begin{aligned}
n(\gamma, -1) &= n(\gamma_1, -1) + n(\gamma_2, -1) + n(\gamma_3, -1) \\
&= 0 + 1 + 1 \\
&= 2.
\end{aligned}$$

3. *Si* $\gamma = \gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_3 + (-\gamma_1) + (-\gamma_2)$ *y* $0 < r_1, r_2 < 2$ *y* $1 < r_3$*, entonces*

$$\begin{aligned} n(\gamma, 1) &= n(\gamma_3, 1) - n(\gamma_1, 1) - n(\gamma_2, 1) \\ &= 1 - 1 - 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

*y*

$$\begin{aligned} n(\gamma, -1) &= n(\gamma_3, -1) - n(\gamma_1, -1) - n(\gamma_2, -1) \\ &= 1 - 0 - 1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

En la siguiente sección se verá la importancia que tiene el concepto de índice de un punto respecto a un ciclo $\gamma$ para las diferentes formulaciones de la segunda versión del teorema de Cauchy. Antes de eso, simplemente daremos algunas propiedades básicas de este concepto que en realidad son una "extensión" de las correspondientes propiedades del concepto de índice de un punto respecto de una curva cerrada suave por pedazos.

**Proposición 5.8** *Sea* $\gamma \subset \mathbb{C}$ *un ciclo formado por las curvas cerradas suaves por pedazos* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ *(*$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_k$*).*

1. *Si* $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma = \mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k)$ *y* $R > 0$ *son tales que* $\gamma \subset B_R(z_0)$*, entonces* $n(\gamma, z) = 0$ *para toda* $z \notin B_R(z_0)$*.*
2. *Si* $z, w \in \mathbb{C}$ *pertenecen a la misma componente conexa de* $\mathbb{C} \setminus \gamma = \mathbb{C} \setminus (\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_k)$*, entonces* $n(\gamma, z) = n(\gamma, w)$*.*
3. *Si* $z$ *pertenece a la componente conexa no acotada de* $\mathbb{C} \setminus \gamma$*, entonces* $n(\gamma, z) = 0$*.*

Dado que esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 3.31 del capítulo 3, su prueba queda a cargo del lector.

## 5.2. El teorema de Cauchy (segunda versión)

Como mencionamos al inicio de este capítulo, hay básicamente dos formas de formular el teorema de Cauchy: en términos del dominio que tienen las funciones que se desean integrar, o en términos del tipo de curvas sobre las cuales se realizan dichas integrales. En esta sección mostraremos que el concepto de índice de un punto $z_0$ con respecto de un ciclo $\gamma$ será la herramienta principal para caracterizar a estos dominios y a estas curvas.

Como posiblemente el lector recordará de sus cursos de cálculo vectorial, hay un tipo de regiones en $\mathbb{R}^n$ las cuales resultan ser muy importantes para resolver el problema de los campos conservativos (o gradientes). A estas regiones se les conoce como regiones simplemente conexas y para definirlas de manera formal (y en cualquier $\mathbb{R}^n$) se requiere del concepto de *homotopía de curvas*.

En el caso particular de $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{C}$), las regiones simplemente conexas se caracterizan geométricamente por el hecho de ser regiones que no tienen "hoyos", como es el caso de una bola abierta (o disco abierto), un semiplano o el interior de los conjuntos $L_{y_0}$ (que definimos en el capítulo 2 y sobre las cuales la función exponencial es inyectiva). Con base en esta característica geométrica, hay una forma de definir a las regiones simplemente conexas sin necesidad de recurrir a la homotopía de curvas, y esa es justo la definición que daremos en este texto.

Como se puede ver en la figura 5.3 ($a$), si una región $\Omega$ en $\mathbb{C}$ tiene un "hoyo", incluso un "hoyo" formado por un solo punto, entonces el conjunto $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es disconexo. Lamentablemente, lo recíproco no es necesariamente cierto, como sucede con la región

$$\Omega = \operatorname{int}(L_{y_0}) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 < y < y_0 + 2\pi\}$$

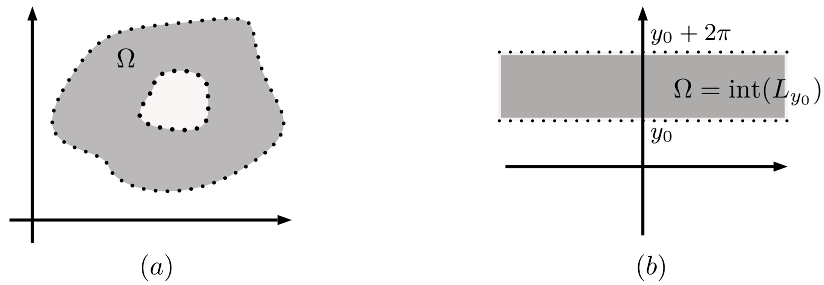



Figura 5.3: $(a)$ La región $\Omega$ tiene un "hoyo" y $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es disconexo. $(b)$ La región $\Omega = \mathrm{int}(L_{y_0})$ no tiene un "hoyo" y $\mathbb{C} \setminus \Omega$ también es disconexo.

para la cual se tiene que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es disconexo y sin embargo claramente $\Omega$ no tiene "hoyos" (ver figura 5.3 $(b)$).

Afortunadamente este "problema" se puede resolver si en lugar de tomar el complemento de $\Omega$ en $\mathbb{C}$, lo tomamos en $\mathbb{C}^*$ (los complejos extendidos). Observe que para el caso de la región $\Omega = \mathrm{int}(L_{y_0})$ se tiene que

$$\mathbb{C}^* \setminus \Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y \leq y_0\} \cup \{\infty\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y_0 + 2\pi \leq y\}$$

y este conjunto sí es conexo en $\mathbb{C}^*$ (ver figura 5.4).

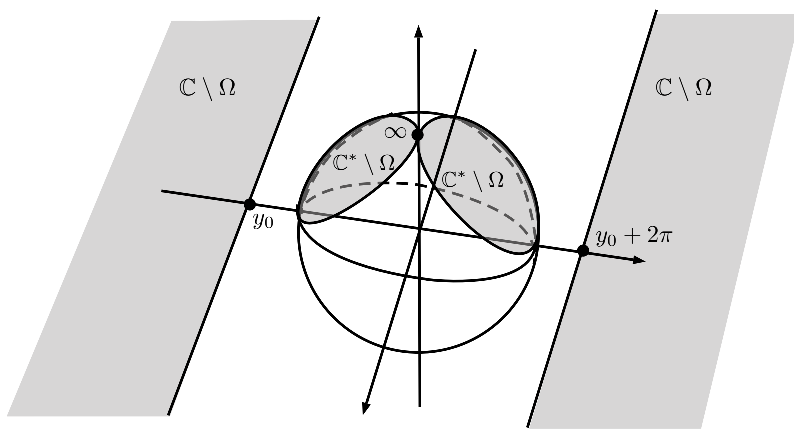



Figura 5.4: Si $\Omega = \mathrm{int}(L_{y_0})$, entonces $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ sí es conexo.

Con base en la discusión anterior, damos la siguiente

**Definición 5.9 (Ahlfors)** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. Decimos que $\Omega$ es simplemente conexa si $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es un conjunto conexo (en $\mathbb{C}^*$).*

Aun cuando para dar la definición anterior no fue necesario recurrir a ningún concepto relacionado con las curvas cerradas suaves por pedazos, es indudable que será necesario establecer la relación que hay entre este tipo de curvas y las regiones simplemente conexas, lo cual haremos a continuación.

Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ es una región simplemente conexa y $\gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada suave por pedazos, dado que, intuitivamente hablando, $\Omega$ no tiene "hoyos", entonces $\gamma$ no puede "rodear" a ningún punto que esté en el complemento de $\Omega$. O por el contrario, si $\Omega$ tuviera un "hoyo" se tendría que, si $\gamma \subset \Omega$ es una curva cerrada suave por pedazos que "rodea" al "hoyo", entonces $\gamma$ también "rodearía" a cualquier punto que estuviera en este "hoyo" (ver figura 5.5).

Dado que el concepto de índice de un punto $z_0$ con respecto de una curva $\gamma$ ($n(\gamma, z_0)$) nos proporciona una forma de saber si la curva $\gamma$ "rodea" al punto $z_0$, podemos establecer el siguiente teorema que caracteriza a las regiones simplemente conexas, y que está formulado en términos del concepto de índice.

**Teorema 5.10 (Ahlfors)** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. La región $\Omega$ es simplemente conexa si y sólo si para toda $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada suave por pedazos y para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene que $n(\gamma, z) = 0$.*

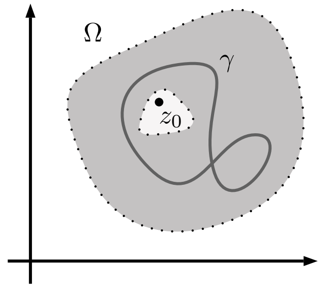



Figura 5.5: Si la curva $\gamma$ "rodea" un hoyo de la región $\Omega$, entonces "rodea" a cualquier punto que esté en ese hoyo.

**Demostración.** La prueba de la condición necesaria es rápida. Si $\Omega$ es simplemente conexa se tiene que $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es un conjunto conexo en $\mathbb{C}^*$ y como $\infty \in \mathbb{C}^* \setminus \Omega = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup \{\infty\}$, entonces cualquier componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ es un conjunto no acotado. Por lo tanto, como $\mathbb{C} \setminus \Omega \subset \mathbb{C} \setminus \gamma$, si $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, entonces $z$ está en la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ de tal manera que, por el inciso 3 de la proposición 3.31, concluimos que $n(\gamma, z) = 0$.

Para el caso de la suficiencia, probaremos la contrapuesta. Supongamos que $\Omega$ no es simplemente conexa; entonces $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ no es un conjunto conexo en $\mathbb{C}^*$ de modo que existen $A, B \subset \mathbb{C}^*$ ajenos no vacíos tales que $\mathbb{C}^* \setminus \Omega = A \cup B$. Observe que, como $\Omega \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^*$ es abierto, entonces $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ es cerrado y por lo tanto $A$ y $B$ también deben ser cerrados (tanto en $\mathbb{C}$ como en $\mathbb{C}^*$). Por otra parte, como $\infty \in \mathbb{C}^* \setminus \Omega = A \cup B$ (ya que $\Omega \subset \mathbb{C}$) y $A$ y $B$ son ajenos, entonces $\infty \notin A$ o $\infty \notin B$. Supongamos que $\infty \notin A$; entonces $A \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$, y como es cerrado, también debe de ser acotado, de tal forma que $A$ debe ser compacto. Por lo tanto, como $B$ es cerrado, y ambos no vacíos, entonces

$$\delta = d(A, B) := \operatorname{ínf} \{|z - w| \mid z \in A, w \in B\} > 0.$$

Elegimos $z \in A \subset \mathbb{C} \setminus \Omega$ y a partir de un cuadrado con centro en $z$ y con lado de longitud $l$ menor que $\delta/\sqrt{2} > 0$, construimos una cuadrícula del plano $\mathbb{C}$ (ver figura 5.6). Como $A$ es compacto (y por tanto acotado), existen sólo una cantidad finita $R_1, \ldots, R_k$ de estos cuadrados tales que $R_j \cap A \neq \varnothing$ para $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Nótese que por la elección de $\delta > 0$ se tiene que $R_j \cap B = \varnothing$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$.

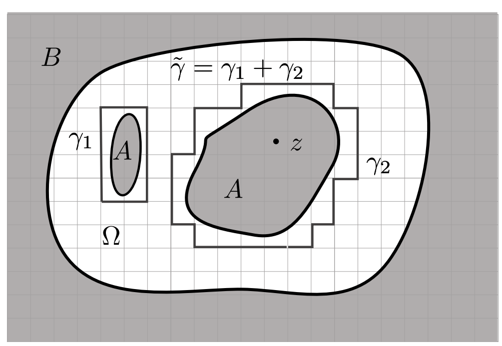



Figura 5.6: La construcción de la curva $\tilde{\gamma}$ en la prueba del teorema 5.10.

Ahora consideramos cada curva frontera $\partial R_j$ recorrida en sentido antihorario, y definimos el ciclo

$$\sigma = \sum_{j=1}^{k} \partial R_j.$$

Nótese que, si eliminamos todos aquellos lados (o segmentos) que sean comunes a dos de los cuadrados $R_j$ obtenemos otro ciclo, que denotamos por $\tilde{\gamma}$, para el cual se puede asegurar que $\tilde{\gamma} \cap (A \cup B) = \varnothing$ y por lo tanto que $\tilde{\gamma} \subset \Omega$. Observe que, dado que los segmentos que eliminamos están recorridos en direcciones contrarias, entonces $n(\tilde{\gamma}, z) = n(\sigma, z)$.

Finalmente, como $z \in R_j$ sólo para una $j \in \{1, \ldots, k\}$, se tiene que

$$n(\tilde{\gamma}, z) = n(\sigma, z) = \sum_{j=1}^{k} n\left(\partial R_j, z\right) = 1,$$

y si el ciclo $\tilde{\gamma}$ es tal que

$$\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m,$$

en donde cada $\gamma_j$ es una curva cerrada formada por segmentos paralelos a los ejes que está recorrida en sentido antihorario, entonces se debe tener que para una sola $\gamma_j$ se cumple que $n(\gamma_j, z) = 1$, con lo cual concluimos la prueba. ■

Dado que todo ciclo en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ está formado por curvas cerradas suaves por pedazos, el teorema anterior también se puede formular en términos de ciclos, formulación que podemos poner como un corolario de este teorema.

**Corolario 5.11** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. La región $\Omega$ es simplemente conexa si y sólo si para todo ciclo $\gamma \subset \Omega$ y para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se tiene que $n(\gamma, z) = 0$.*

Aunque el corolario anterior nos da una condición necesaria y suficiente para que una región $\Omega$ sea simplemente conexa, el lector estará de acuerdo que esto no significa que cuando $\Omega$ no sea de este tipo región, entonces para todo ciclo $\gamma \subset \Omega$ y todo punto $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ se debe satisfacer que $n(\gamma, z) \neq 0$. Aun cuando una región $\Omega$ no sea simplemente conexa, siempre existen ciclos $\gamma \subset \Omega$ para los cuales se satisface que $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. En términos muy coloquiales, se puede decir que este tipo de ciclos no rodean a los "hoyos" de la región $\Omega$ y por esta razón tendrán un papel muy importante en la formulación más general del teorema de Cauchy. En virtud de lo anterior, damos la siguiente

**Definición 5.12** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región. Decimos que un ciclo $\gamma \subset \Omega$ es homólogo a $0$ en $\Omega$, lo que denotamos escribiendo que $\gamma \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$, si se cumple que $n(\gamma, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. También diremos que dos ciclos $\gamma, \tilde{\gamma} \subset \Omega$ son homólogos en $\Omega$, lo que denotamos escribiendo que $\gamma \sim \tilde{\gamma} \,\mathrm{mod}(\Omega)$, si se cumple que $\gamma - \tilde{\gamma} \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$, es decir que $n(\gamma - \tilde{\gamma}, z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.*

En el siguiente ejemplo ilustramos estos conceptos.

**Ejemplo 5.13** *Sean, $\gamma_1 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_1(t) = r_1 e^{it} + 1$, $\gamma_2 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_2(t) = r_2 e^{it} - 1$, $\gamma_3 : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definida como $\gamma_3(t) = r_3 e^{it}$, y $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.*

1. *Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ con $0 < r_1, r_2 < 2$ y $0 < r_3 < 1$, entonces $n(\gamma, 1) = 1 = n(\gamma, -1)$ de modo que $\gamma$ no es homólogo a $0$ en $\Omega$.*

2. *Si $\gamma = \gamma_3 - \gamma_1$ con $0 < r_1 < 2$ y $1 < r_3$, entonces $n(\gamma, 1) = 0$ y $n(\gamma, -1) = 1$ de modo que $\gamma$ no es homólogo a $0$ en $\Omega$.*

3. *Si $\gamma = \gamma_3 - \gamma_1$ con $2 < r_1$ y $1 < r_3$, entonces $n(\gamma, 1) = 0 = n(\gamma, -1)$ de modo que $\gamma$ sí es homólogo a $0$ en $\Omega$. En este caso también se tiene entonces que $\gamma_3$ y $\gamma_1$ son homólogos en $\Omega$.*

4. *Si $\gamma = \gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_2$ con $0 < r_1 < 2 < r_2$ y $1 < r_3$, entonces $n(\gamma, 1) = -1$ y $n(\gamma, -1) = 0$ de modo que $\gamma$ no es homólogo a $0$ en $\Omega$.*

5. *Si $\gamma = \gamma_3 - \gamma_1 - \gamma_2$ con $0 < r_1, r_2 < 2$ y $1 < r_3$, entonces $n(\gamma, 1) = 0 = n(\gamma, -1)$ de modo que $\gamma$ sí es homólogo a $0$ en $\Omega$. En este caso también se tiene entonces que $\gamma = \gamma_3$ y $\tilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2$ son homólogos en $\Omega$.*

Como se observa en la definición 5.12, dada una región $\Omega \subset \mathbb{C}$, existe una relación muy estrecha entre los ciclos $\gamma \subset \Omega$ que son tales que $\gamma \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$, y los ciclos $\gamma, \tilde{\gamma} \subset \Omega$ que satisfacen que $\gamma - \tilde{\gamma} \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$. Lo siguiente que haremos ver es que este relación tan estrecha va más allá de su definición, y se extiende a la integral de funciones definidas sobre $\Omega$, hecho que formulamos en la siguiente

**Proposición 5.14** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en la región $\Omega$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para todo ciclo $\gamma \subset \Omega$ tal que $\gamma \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$ se cumple que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

2. *Para cualesquiera dos ciclos $\gamma, \tilde{\gamma} \subset \Omega$ tales que $\gamma \sim \tilde{\gamma} \,\mathrm{mod}(\Omega)$ se cumple que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

**Demostración.** La prueba de que la afirmación 1 implica la afirmación 2 es inmediata de la definición de ciclos homólogos ya que si un par de ciclos $\gamma, \tilde{\gamma} \subset \Omega$ son tales que $\gamma \sim \tilde{\gamma} \,\mathrm{mod}(\Omega)$, entonces $\gamma - \tilde{\gamma} \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$ y por lo tanto

$$0 = \int_{\gamma - \tilde{\gamma}} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz - \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Para la prueba de que la afirmación 2 implica la afirmación 1, basta con observar que, si $\gamma \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$, como

$$n(-\gamma, z) = -n(\gamma, z) = 0$$

para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, entonces se tiene que $-\gamma \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$, de modo que $-\gamma \sim \gamma \,\mathrm{mod}(\Omega)$ y por lo tanto

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma} f(z)dz.$$

Por otra parte, como

$$\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz$$

de las dos últimas identidades concluimos que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

como se deseaba demostrar. ■

De la definición de que un ciclo $\gamma \subset \Omega$ sea homólogo a 0 en $\Omega$ se tiene que

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0 \tag{5.1}$$

para toda función $f$ de la forma

$$f(z) = \frac{1}{z-a}, \tag{5.2}$$

la cual es analítica en $\Omega$ si $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$. A partir de esta observación, la pregunta "natural" es la siguiente: ¿la integral 5.1 sigue siendo 0 aun cuando $f$, una función analítica en $\Omega$, no sea de la forma 5.2?. Y la respuesta a esta pregunta es que sí, y es justo lo que afirma la segunda versión del teorema de Cauchy que veremos en este texto.

**Teorema 5.15 (de Cauchy (segunda versión (Ahlfors)))** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $f$ es analítica en $\Omega$, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

*para todo ciclo $\gamma \subset \Omega$ tal que $\gamma \sim 0 \,\mathrm{mod}(\Omega)$.*

**Demostración.** Primero haremos la prueba bajo el supuesto de que $\Omega$ *sólo es un conjunto abierto y acotado.* Sea $\gamma \subset \Omega$ un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$. Como el ciclo $\gamma \subset \Omega$ es un conjunto compacto, sabemos que

$$\delta = d(\gamma, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

De manera análoga a como hicimos en la prueba del teorema 5.10, consideramos una cuadrícula del plano $\mathbb{C}$ cuyos cuadrados tienen longitud $0 < l < \delta/\sqrt{2}$.

Dado que estamos suponiendo que $\Omega$ es acotado, podemos asegurar que existen sólo una cantidad finita $R_1, \ldots, R_k$ de cuadrados (cerrados) tales que $R_j \subset \Omega$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$. Con base en estos cuadrados, llamamos

$$\Omega_\delta = \operatorname{int}\left(\bigcup_{j=1}^{k} R_j\right).$$

Observe que por la elección que hicimos de $\delta$ y $l$ podemos asegurar que $\gamma \subset \Omega_\delta \subset \Omega$.

Ahora consideramos cada curva frontera $\partial R_j$ recorrida en sentido antihorario, y definimos el ciclo

$$\sigma = \sum_{j=1}^{k} \partial R_j.$$

Nótese que, si eliminamos todos aquellos lados (o segmentos) que sean comunes a dos de los cuadrados $R_j$ obtenemos otro ciclo, que denotamos por $\Gamma_\delta$ y para el cual se puede asegurar que $\Gamma_\delta \subset \Omega \setminus \Omega_\delta$ (ver figura 5.7).

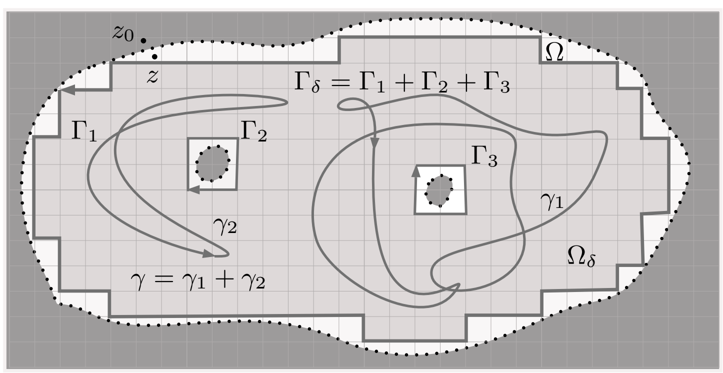



Figura 5.7: Los elementos geométricos de la prueba del teorema de Cauchy.

Lo siguiente que mostraremos es que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega_\delta)$ para lo cual sólo hará falta probar que $n(\gamma, z) = 0$ para toda $z \in \Omega \setminus \Omega_\delta$. Si $z \in \Omega \setminus \Omega_\delta$, entonces existe un cuadrado $R$ tal que $z \in R$ y $R \nsubseteq \Omega$ de modo que podemos asegurar que $R \cap \Omega_\delta = \varnothing$ y por lo tanto que $R \cap \gamma = \varnothing$. Ahora, si $z_0 \in R \setminus \Omega$, dado que $[z, z_0] \subset R$, tenemos que

$$n(\gamma, z) = n(\gamma, z_0) = 0,$$

en donde la segunda identidad se verifica por que $z_0 \notin \Omega$. Observe que, como $\Gamma_\delta \subset \Omega \setminus \Omega_\delta$, se tiene que $n(\gamma, z) = 0$ para toda $z \in \Gamma_\delta$.

Una vez que hemos construido el conjunto $\Omega_\delta$, probaremos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para toda $z \in \Omega_\delta$.

Primero notemos que, si $z \in \operatorname{int}(R_{j_0})$ para alguna $j_0 \in \{1, \ldots, k\}$, aplicando el teorema 3.27 a la función definida como

$$F(\zeta) = \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}$$

para cada $\zeta \in \Omega \setminus \{z\}$ y al rectángulo $R_{j_0}$, obtenemos que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R_{j_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.3}$$

Por otra parte, como $z \in \operatorname{int}(R_{j_0})$, entonces $R_j \subset \Omega \setminus \{z\}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$, $j \neq j_0$, de modo que, como la función

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

es analítica en $\Omega \setminus \{z\}$, por el teorema 3.25 sabemos que

$$\int\limits_{\partial R_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0 \tag{5.4}$$

para cada $m \in \{1, \ldots, k\}$, $j \neq j_0$. Por lo tanto, de las identidades 5.3 y 5.4 se concluye que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left( \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial R_j} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial R_{j_0}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= f(z).
\end{aligned}$$

Ahora, por el lema 4.2 sabemos que la función definida como

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

para cada $z \in \Omega \setminus \Gamma_\delta$ es una función continua, de modo que, como $f(z) = g(z)$ para toda $z \in \cup_{j=1}^{k} \operatorname{int}(R_j)$, conjunto que es denso en $\Omega_\delta$, podemos concluir

$$f(z) = g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{5.5}$$

para toda $z \in \Omega_\delta$.

Supongamos ahora que los ciclos $\gamma$ y $\Gamma_\delta$ se escriben de la forma $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ y $\Gamma_\delta = \Gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \Gamma_m$, en donde cada $\gamma_j$ y cada $\Gamma_l$ es una curva cerrada suave por pedazos. Dado que $\gamma \subset \Omega_\delta$, por la identidad 5.5 se tiene que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} f(z) dz &= \int\limits_{\gamma} \left( \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left( \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{\Gamma_l} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{m} \int\limits_{\gamma} \left( \int\limits_{\Gamma_l} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) dz
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\gamma_s}\left(\int\limits_{\Gamma_l}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)dz\right).$$

Por otra parte, como $\gamma \cap \Gamma_\delta = \varnothing$, entonces tambien se tiene que $\gamma_s \cap \Gamma_l = \varnothing$ para toda $s \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $l \in \{1, \ldots, m\}$, de modo que aplicando el problema 1 del capítulo 4 sabemos que

$$\int\limits_{\gamma_s}\left(\int\limits_{\Gamma_l}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)dz = \int\limits_{\Gamma_l}\left(\int\limits_{\gamma_s}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz\right)d\zeta$$

para toda $s \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $l \in \{1, \ldots, m\}$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\gamma} f(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\gamma_s}\left(\int\limits_{\Gamma_l}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right)dz\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_l}\left(\int\limits_{\gamma_s}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz\right)d\zeta\right)\\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_l}\left(\sum_{s=1}^{n}\int\limits_{\gamma_s}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz\right)d\zeta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_l}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz\right)d\zeta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz\right)d\zeta\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} -f(\zeta)\left(\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z - \zeta}dz\right)d\zeta\\
&= -\int\limits_{\Gamma_\delta} f(\zeta)\cdot n(\gamma,\zeta)d\zeta.
\end{aligned}$$

Pero si recordamos que ya probamos que $n(\gamma, \zeta) = 0$ para toda $\zeta \in \Gamma_\delta$, concluimos que

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

con lo cual terminamos la primera parte de esta prueba.

Pasando al caso en que $\Omega$ es una región no acotada, como $\gamma$ es un compacto, elegimos $r > 0$ tal que $\gamma \subset B_r(0)$ y hacemos $\tilde{\Omega} = \Omega \cap B_r(0)$. Entonces $\tilde{\Omega}$ es un abierto acotado tal que $\gamma \subset \tilde{\Omega}$, y si $z \in \mathbb{C} \setminus \tilde{\Omega} = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup (\mathbb{C} \setminus B_r(0))$, entonces $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ o $z \in \mathbb{C} \setminus B_r(0)$. En el primer caso, como $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$, se tiene que $n(\gamma, z) = 0$; en el segundo caso, como $\gamma \subset B_r(0)$, por el inciso 1 de la proposición 5.8 también sabemos que $n(\gamma, z) = 0$. Es decir, podemos asegurar nuevamente que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\tilde{\Omega})$ de tal forma que por la primera parte de esta prueba se tiene que

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = 0,$$

identidad con la que concluimos la prueba. ■

Como una consecuencia inmediata del teorema anterior y del teorema 5.10 obtenemos el teorema clásico de Cauchy, el cual formulamos como un corolario.

**Corolario 5.16** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega$. Si $\Omega$ es simplemente conexa, entonces*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

*para toda $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada suave por pedazos.*

Usando la equivalencia que se demostró en la proposición 5.14, el teorema 5.15 se puede formular en términos de ciclos que son homólogos entre si, de la siguiente forma.

**Teorema 5.17** *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en la región $\Omega$. Para cualesquiera ciclos $\gamma, \tilde{\gamma} \subset \Omega$ tales que $\gamma \sim \tilde{\gamma} \operatorname{mod}(\Omega)$ se tiene que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz.$$

Otra consecuencia muy importante del teorema 5.15 está relacionada con la existencia de ramas analíticas del logarítmo y la raíz $n$-ésima de una función $f$, resultado que también dejamos formulado como un corolario.

**Corolario 5.18** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región simplemente conexa y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega$. Si $f(z) \neq 0$ para toda $z \in \Omega$, entonces existen, definidas en $\Omega$, ramas analíticas del logarítmo y la raíz $n$-ésima de $f$.*

**Demostración.** Como la función

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

está definida y es analítica en $\Omega$, por el corolario anterior sabemos que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

para toda $\gamma \subset \Omega$ curva cerrada suave por pedazos, de modo que, por el teorema 3.24 del capítulo 3, sabemos que existe $F : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en $\Omega$ tal que

$$F'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

para toda $z \in \Omega$.

Por tanto, si definimos la función $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$g(z) = f(z) \exp(-F(z))$$

se tiene que

$$g'(z) = f'(z) \exp(-F(z)) - f(z) \exp(-F(z)) F'(z) = 0$$

de modo que $g$ debe ser constante en $\Omega$. Sea $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, tal que

$$f(z) \exp(-F(z)) = g(z) = c$$

para toda $z \in \Omega$. Por lo tanto, si $z_0 \in \mathbb{C}$ es tal que $c = \exp(z_0)$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= c \exp(F(z)) \\ &= \exp(w_0) \exp(F(z)) \\ &= \exp(F(z) + z_0). \end{aligned}$$

Por tanto, la función $h : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $h(z) = F(z) + z_0$ es tal que $\exp(h(z)) = f(z)$ para toda $z \in \Omega$, es decir, $h$ es una rama analítica en $\Omega$ del logarítmo de $f$.

Finalmente, si definimos $H : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$H(z) = \exp\left(\frac{1}{n}h(z)\right)$$

se tiene que

$$(H(z))^n = \left(\exp\left(\frac{1}{n}h(z)\right)\right)^n = \exp(h(z)) = f(z)$$

lo que prueba que la función $H$ es una rama analítica en $\Omega$ de la raiz $n$-ésima de $f$. ■

Como en el caso local, otra consecuencia importante del teorema de Cauchy es la fórmula integral, la cual también se puede formular en términos de ciclos.

**Teorema 5.19 (fórmula integral de Cauchy)** *Sean, $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica en la región $\Omega$ y $\gamma \subset \Omega$ un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$. Si $z_0 \in \Omega \setminus \gamma$, entonces*

$$n(\gamma, z_0)f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

**Demostración.** Esta prueba es completamente análoga a la del caso sobre un disco abierto (teorema 3.32), con la ventaja adicional de que ahora ya sabemos que la función $F : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tiene una singularidad removible en $z_0$ y por lo tanto una extensión analítica a $\Omega$ (que seguimos denotando por $F$). Por lo tanto, como $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$, por el teorema 5.15 sabemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \int\limits_{\gamma} F(z)dz \\
&= \int\limits_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}dz \\
&= \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - f(z_0)\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0}dz \\
&= \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0}dz - f(z_0) \cdot 2\pi i \cdot n(\gamma, z_0)
\end{aligned}$$

de donde se sigue la identidad deseada. ■

### 5.2.1. Desarrollo de Laurent

Otra aplicación muy importante de la versión del teorema de Cauchy que probamos en este capítulo se relaciona con la expresión de una función analítica $f$ en términos de una serie de números. Aunque en el teorema 4.20 ya probamos un resultado en esta dirección, ahora podemos probar otro más general que de alguna forma generaliza al que probamos en la proposición 4.34. Como el lector habrá notado, en esta proposición se obtiene, para cada $z$ en una vecindad (agujereada) de un un polo $z_0$ de $f$, una serie de números que converge a $f(z)$, números que se escriben en términos de potencias de $z - z_0$ y que algunas de éstas (una cantidad finita) son negativas.

Lo que ahora probaremos es que esta manera de expresar a los valores de una función $f$ se puede obtener no sólo en una vecindad de una singularidad aislada de $f$, sino en un tipo de región más general, que definiremos a continuación y que llamaremos un "*anillo*" centrado en un punto $z_0$.

**Definición 5.20** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. Definimos el anillo centrado en $z_0$ de radio interior $r_1$ y radio exterior $r_2$, que denotamos por $A_{r_1,r_2}(z_0)$, como*

$$A_{r_1,r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

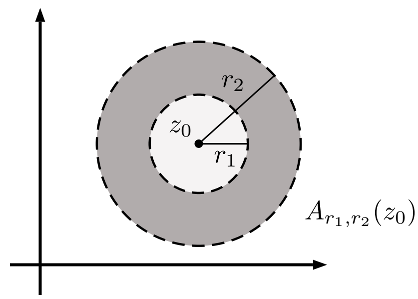



Figura 5.8: El anillo $A_{r_1,r_2}(z_0)$.

Observe que el anillo $A_{0,r}(z_0)$ coincide con la vecindad agujereada $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Una vez que ya tenemos esta definición podemos formular el siguiente teorema, el cual es conocido como el *teorema del desarrollo de Laurent*[1], que es como se llama a la forma de expresar a una función como una serie cuyos términos se escriben en términos de potencias (positivas y negativas) de $z - z_0$. Con el fin de que la prueba de este teorema sea más sencilla, primero probaremos un lema el cual es importante por si mismo.

**Lema 5.21** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r_1 < r_2$. Si $f$ es analítica en el anillo $A_{r_1,r_2}(z_0)$, entonces existen $f_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_0)} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $f_2 : B_{r_2}(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones analíticas tales que $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ para toda $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$.*

**Demostración.** Si $r > 0$ es tal que $r_1 < r < r_2$, hacemos $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Ahora, si $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_0)}$, elegimos $r > 0$ tal que $r_1 < r < r_2$, $r < |z - z_0|$, y definimos

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Observe que la función $f_1$ está bien definida, pues si $r' > 0$ también es tal que $r_1 < r' < r_2$, $r' < |z - z_0|$, entonces $\gamma = \gamma_r - \gamma_{r'}$ es un ciclo en la región $\Omega = A_{r_1,r_2}(z_0) \setminus \{z\}$ tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$, y como la función $f(\zeta)/(\zeta - z)$ es analítica en $\Omega$ (ya que $z \notin \Omega$), por el teorema 5.15 se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\gamma_r - \gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

[1] Pierre Alphonse Laurent (18 de julio de 1813 – 2 de septiembre de 1854) fue un matemático y oficial militar francés conocido por su trabajo de las series de Laurent en 1843, una forma de expresar una función en serie de potencias, generalizando a la serie de Taylor. (Fuente: Wikipedia).

Por otra parte, si $z \in B_{r_2}(z_0)$, ahora elegimos $r > r_1$ tal que $|z - z_0| < r < r_2$ y definimos

$$f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Nuevamente, la función $f_2$ está bien definida, pues si $r' > r_1$ también es tal que $|z - z_0| < r' < r_2$, entonces otra vez $\gamma = \gamma_r - \gamma_{r'}$ es un ciclo en la región $\Omega = A_{r_1,r_2}(z_0) \setminus \{z\}$ tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$, de modo que por el mismo razonamiento que hicimos para la función $f_1$, se tiene que

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Finalmente, si $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$, tomamos $r, r'$ tales que $r_1 < r < |z - z_0| < r' < r_2$; entonces de nueva cuenta $\gamma = \gamma_{r'} - \gamma_r$ es un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(A_{r_1,r_2}(z_0))$ y $\gamma \subset A_{r_1,r_2}(z_0) \setminus \{z\}$, de modo que por la fórmula integral de Cauchy (teorema 5.19), se tiene que

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

y como $n(\gamma, z) = n(\gamma_{r'}, z) - n(\gamma_r, z) = 1 - 0 = 1$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f_2(z) + f_1(z) \end{aligned}$$

con lo cual concluimos la prueba. ∎

Con base en le lema anterior, probaremos el teorema del desarrollo de Laurent.

**Teorema 5.22 (de Laurent)** *Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r_1 < r_2$. Si $f$ es analítica en el anillo $A_{r_1,r_2}(z_0)$, entonces existen dos sucesiones de números $\{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ y $\{A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots\}$ tales que las series*

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n (z - z_0)^{-n} \qquad y \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

*convergen y satisfacen que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n = f(z), \tag{5.6}$$

*para toda $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$. Además, si $r_1 < r < r_2$ y $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$, entonces*

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

*para toda $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y*

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta$$

*para toda $n \in \mathbb{N}$. Estos números $A_n$ y $B_n$ son los únicos que satisfacen la identidad 5.6.*

*A la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n}$$

*se le conoce como la parte singular de $f$ en el anillo $A_{r_1,r_2}(z_0)$.*

**Demostración.** Por el lema anterior, sabemos que existen $f_1 : \mathbb{C} \setminus \overline{B_{r_1}(z_0)} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $f_2 : B_{r_2}(z_0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones analíticas tales que $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ para toda $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$.

Como $f_2$ es analítica en $B_{r_2}(z_0)$, por el teorema 4.20 sabemos que para cada $z \in B_{r_2}(z_0)$ se satisface que

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_2^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Hacemos entonces

$$A_n = \frac{f_2^{(n)}(z_0)}{n!}$$

para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Antes de definir a los números $B_n$, recordemos que en el lema 5.21 la función $f_1$ se definió como

$$f_1(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

en donde $r > 0$ es tal que $r_1 < r < r_2$, $r < |z - z_0|$, y $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$. Observe que, si $M = \max\{|f(\zeta)| \mid |\zeta - z_0| = r\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f_1(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_r} \frac{M}{|z - z_0| - r} |d\zeta| \\ &= M \frac{r}{|z - z_0| - r} \end{aligned}$$

y por lo tanto podemos concluir que

$$\lim_{z \to \infty} f_1(z) = 0.$$

Definamos ahora la función $g : B_{1/r_1}(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$g(\zeta) = \begin{cases} f_1(z_0 + 1/\zeta) & \text{si } 0 < |\zeta| < 1/r_1 \\ 0 & \text{si } \zeta = 0. \end{cases}$$

Dado que

$$\lim_{\zeta \to 0} g(\zeta) = \lim_{z \to \infty} f_1(z) = 0,$$

por la proposición 4.15 se tiene que $g$ es analítica en $B_{1/r_1}(0)$, y nuevamente por el teorema 4.20 sabemos que para cada $\zeta \in B_{1/r_1}(0)$ se satisface que

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \zeta^n.$$

Hacemos entonces

$$B_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

De esta forma, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $r_1 < |z - z_0|$, entonces $\zeta = 1/(z - z_0) \in B_{1/r_1}(0) \setminus \{0\}$ de modo que, de la definición de la función $g$ se tiene que

$$f_1(z) = g\left(1/(z - z_0)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \left( \frac{1}{z - z_0} \right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( \frac{1}{z - z_0} \right)^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n \tag{5.7}
$$

para toda $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$.

Sean ahora, $r > 0$ tal que $r_1 < r < r_2$ y $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$, y $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De la identidad 5.7 se tiene que

$$
\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^{n+k+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^{n-k-1}
$$

y estas series también convergen para toda $z \in A_{r_1,r_2}(z_0)$. Por lo tanto, por el problema 12 sabemos que convergen uniformemente sobre el conjunto compacto $\gamma_r \subset A_{r_1,r_2}(z_0)$, de modo que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^{n+k+1}} \right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^{n-k-1} \right) dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{B_n}{(z - z_0)^{n+k+1}} dz \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} A_n (z - z_0)^{n-k-1} dz \\
&= 0 + \frac{A_k}{2\pi i} \int_{\gamma_r} (z - z_0)^{-1} dz \\
&= A_k.
\end{aligned}
$$

Análogamente, si $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$
f(z) (z - z_0)^{k-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^{n-k+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^{n+k-1}
$$

de modo que, nuevamente por la convergencia uniforme de estas series sobre cualquier subconjunto compacto de $A_{r_1,r_2}(z_0)$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z) (z - z_0)^{k-1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^{n-k+1}} \right) dz \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^{n+k-1} \right) dz \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{B_n}{(z - z_0)^{n-k+1}} dz
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r} A_n\,(z-z_0)^{n+k-1}\,dz\\
&=\frac{B_k}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_r}\frac{1}{z-z_0}dz+0\\
&=B_k.
\end{aligned}$$

Como el lector podrá observar, con el procedimiento anterior no sólo probamos la expresión deseada para los números $A_n$ y $B_n$ sino también su unicidad, con lo cual concluimos la prueba. ■

Como suele suceder en muchos casos en matemáticas, para calcular el desarrollo de Laurent de una función analítica $f$ en algún anillo $A_{r_1,r_2}(z_0)$, no es muy útil seguir los pasos que se dieron en su demostración. Por lo general, para hacer este cálculo hay que usar métodos indirectos que a continuación ilustraremos con algunos ejemplos, y para lo cual daremos por conocido (y probado) que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

para toda $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$.

**Ejemplo 5.23** *Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

1. *El desarrollo de Laurent de $f$ en el anillo $A_{0,1}(0) = B_1(0) \setminus \{0\}$ está dado por*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)}\\
&= -\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}\right)\\
&= -\frac{1}{z}-\sum_{n=0}^{\infty} z^n,
\end{aligned}$$

*por lo que en este caso se tiene que $B_n = 0$ para toda $n \geq 2$, $B_1 = -1$ y $A_n = -1$ para toda $n \geq 0$.*

2. *El desarrollo de Laurent de $f$ en el anillo $A_{1,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ está dado por*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)}\\
&= \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-1/z}\\
&= \frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n},
\end{aligned}$$

*por lo que en este caso se tiene que $B_n = 1$ para toda $n \geq 2$, $B_1 = 0$ y $A_n = 0$ para toda $n \geq 0$.*

3. *El desarrollo de Laurent de $f$ en el anillo $A_{0,1}(1) = B_1(1) \setminus \{1\}$ está dado por*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \\
&= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{1-(-(z-1))} \\
&= \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-(z-1))^n \\
&= \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}(z-1)^n,
\end{aligned}$$

*por lo que en este caso se tiene $B_n = 0$ para toda $n \geq 2$, $B_1 = 1$ y $A_n = (-1)^{n+1}$ para toda $n \geq 0$.*

4. *El desarrollo de Laurent de $f$ en el anillo $A_{1,\infty}(1) = \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(1)}$ está dado por*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} \\
&= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{(z-1)-(-1)} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{1-(-1/(z-1))} \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z-1}\right)^n \\
&= \frac{1}{(z-1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(z-1)^n}
\end{aligned}$$

*por lo que en este caso se tiene que $B_n = (-1)^n$ para toda $n \geq 2$, $B_1 = 0$ y $A_n = 0$ para toda $n \geq 0$.*

Una de las aplicaciones más conocidas del desarrollo de Laurent se relaciona con la caracterización de las singularidades aisladas de una función. Aunque en el capítulo 4 ya dimos un criterio para caracterizarlas, en la siguiente proposición lo haremos en términos de la parte singular de este desarrollo.

**Proposición 5.24** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función $f$, y $R > 0$ tal que $f$ es analítica en $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ son los coeficientes de la parte singular de $f$ en el anillo $A_{0,R}(z_0) = B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, entonces*

1. *$z_0$ es una singularidad removible de $f$ si y sólo si $B_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$.*

2. *$z_0$ es un polo de orden $k \in \mathbb{N}$ de $f$ si y sólo si $B_k \neq 0$ y $B_n = 0$ para toda $n > k$.*

3. *$z_0$ es una singularidad esencial de $f$ si y sólo si $B_n \neq 0$ para una infinidad de $n \in \mathbb{N}$. Es decir, si y sólo si existe una sucesión creciente de naturales $\{n_l\}$ tal que $B_{n_l} \neq 0$ para toda $l \in \mathbb{N}$.*

**Demostración.** Para la prueba del inciso 1, si $f$ tiene una singularidad removible en $z_0$, entonces por la proposición 4.15 $f$ se puede extender analíticamente a la vecindad $B_R(z_0)$ de tal forma que la función $f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}$ también es analítica en $B_R(z_0)$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por el teorema de Laurent y el teorema de Cauchy sabemos que si $\gamma_r(t) = re^{it} + z_0$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $0 < r < R$, entonces

$$B_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1} d\zeta = 0.$$

Recíprocamente, si $B_n = 0$ para toda $n \in \mathbb{N}$, nuevamente por el teorema de Laurent se tiene que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

para toda $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$, pero por el teorema 4.29 se tiene que la función

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(z - z_0\right)^n$$

es una función analítica en $B_R(z_0)$ tal que $\tilde{f}(z) = f(z)$ para toda $z \in B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ y por lo tanto $z_0$ es una singularidad removible de $f$.

El inciso 2 es (literalmente) la proposición 4.43, por lo que sólo nos resta probar el inciso 3.

Como el lector podrá comprobar fácilmente, la condición necesaria del inciso 3 es una consecuencia inmediata de la definición de singularidad esencial y de los incisos 1 y 2. Por otra parte, si una infinidad de los coeficientes de la parte singular de $f$ en el disco $A_{0,r}(z_0)$ son diferentes de 0, *por la uncidad del desarrollo de Laurent* y los incisos 1 y 2, podemos concluir que $z_0$ es una singularidad esencial de $f$. ■

## 5.3. El teorema del residuo

Una de las aplicaciones más importantes de la segunda versión del teorema de Cauchy que probamos en este capítulo tiene que ver con aquellas funciones que son analíticas en una región $\Omega$, salvo por un número finito de singularidades aisladas. Para este tipo de funciones definiremos el concepto de *residuo*, con el cual formularemos uno de los teoremas más importantes (y de carácter "práctico") de las funciones analíticas.

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$ y $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, de modo que cada $z_j$ es una singularidad aislada de $f$. Elijamos $r_1, \ldots, r_k$ números reales positivos tales que

1. $\overline{B_{r_j}(z_j)} \subset \Omega$.
2. Si $\gamma_{r_j}(t) = r_j e^{it} + z_j$, con $t \in [0, 2\pi]$, entonces
$$n(\gamma_{r_j}, z_l) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = l \\ \\ 0 & \text{si } j \neq l \end{cases}$$
para cada $j, l \in \{1, \ldots, k\}$.

Observe que bajo estas condiciones, para cada curva $\gamma_{r_j}$ también se cumple que $n(\gamma_{r_j}, z) = 0$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Convengamos ahora que, dado $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$, la expresión $m \cdot \gamma_{r_j}$ denota al ciclo compuesto por la suma de $m$ veces la curva $\gamma_{r_j}$, es decir
$$m \cdot \gamma_{r_j} := \underbrace{\gamma_{r_j} + \cdots + \gamma_{r_j}}_{m \text{ veces}},$$
y si $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$, entonces la misma expresión $m \cdot \gamma_{r_j}$ denota al ciclo compuesto por la suma de $-m = |m|$ veces la curva $-\gamma_{r_j}$, es decir
$$m \cdot \gamma_{r_j} := \underbrace{\left(-\gamma_{r_j}\right) + \cdots + \left(-\gamma_{r_j}\right)}_{|m| \text{ veces}}.$$

Con base en todo lo anterior, observe el lector que, dado $\gamma \subset \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$, si $m_j = n(\gamma, z_j)$, entonces
$$\gamma \sim m_1\gamma_{r_1} + \cdots + m_k\gamma_{r_k} \operatorname{mod}(\Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$$
de modo que, por el teorema 5.17 se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{m_1\gamma_{r_1}+\cdots+m_k\gamma_{r_k}} f(z)dz \\ &= m_1 \int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz + \cdots + m_k \int_{\gamma_{r_k}} f(z)dz, \end{aligned}$$

es decir, el valor de la integral de $f$ sobre un ciclo $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ está completamente determinado por el valor de las integrales de $f$ sobre las circunferencias $\gamma_{r_j}$ y los índices $m_j = n(\gamma, z_j)$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Este hecho lo dejaremos plasmado en la siguiente

**Proposición 5.25** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$ y $r_1, \ldots, r_k$ números reales positivos para los cuales se satisface que $\overline{B_{r_j}(z_j)} \setminus \{z_j\} \subset \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Si $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica, entonces para cualquier ciclo $\gamma \subset \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ se tiene que*

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_{m_1\gamma_{r_1} + \cdots + m_k\gamma_{r_k}} f(z)dz \\ &= m_1 \int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz + \cdots + m_k \int_{\gamma_{r_k}} f(z)dz,\end{aligned}$$

*en donde $m_j = n(\gamma, z_j)$ y $\gamma_{r_j}(t) = r_j e^{it} + z_j$, con $t \in [0, 2\pi]$, para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$.*

La prueba de esta proposición es básicamente una repetición de los argumentos que dimos para su motivación, razón por la cual la dejamos como un problema al lector. De hecho, en el problema 12 el lector también probará que esta proposición se puede generalizar al caso de una infinidad de singularidades aisladas, siempre y cuando éstas no tengan un punto de acumulación dentro de $\Omega$.

Como se estará de acuerdo, las integrales

$$\int_{\gamma_{r_1}} f(z)dz, \ldots, \int_{\gamma_{r_k}} f(z)dz,$$

juegan un papel muy importante en el cálculo de las integrales de $f$, razón por la cual las analizaremos con más detalle.

Si denotamos como

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_j}} f(z)dz,$$

lo primero que es importante observar es que el valor del número $P_j$ no depende del radio $r_j$. En particular observe que si $0 < r < r_j$, y $\gamma_r(t) = re^{it} + z_j$, con $t \in [0, 2\pi]$, entonces se tiene que el ciclo $\gamma = \gamma_{r_j} - \gamma_r \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ y por lo tanto

$$0 = \int_{\gamma} f(z)dz = \int_{\gamma_{r_j}} f(z)dz - \int_{\gamma_r} f(z)dz$$

de donde concluimos que

$$P_j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{r_j}} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} f(z)dz.$$

Además de la propiedad anterior, también tiene la muy notable característica de que, si tomamos la función

$$\tilde{f}(z) = f(z) - \frac{P_j}{z - z_j},$$

y $\gamma \subset B_r(z_j) \setminus \{z_j\}$, con $0 < r < r_j$, es cualquier curva cerrada suave por pedazos, se tiene que el ciclo $\gamma \sim n(\gamma, z_j)\gamma_r \operatorname{mod}(B_r(z_j) \setminus \{z_j\})$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \tilde{f}(z)dz &= \int_{n(\gamma, z_j)\gamma_r} \tilde{f}(z)dz \\ &= n(\gamma, z_j) \int_{\gamma_r} \tilde{f}(z)dz\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= n(\gamma, z_j)\left(\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_r} \frac{P_j}{z-z_j}dz\right)\\
&= n(\gamma, z_j)\left(\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz - P_j\int\limits_{\gamma_r} \frac{1}{z-z_j}dz\right)\\
&= n(\gamma, z_j)\left(\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz - 2\pi i P_j\right)\\
&= n(\gamma, z_j)\left(\int\limits_{\gamma_r} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_r} f(z)dz\right)\\
&= 0.
\end{aligned}
$$

De lo anterior, por el teorema 3.24 se deduce que la función $\tilde{f}$ debe tener una primitiva en la vecindad agujereada $B_{r_j}(z_j) \setminus \{z_j\}$.

Resumiendo el análisis anterior, podemos concluir que el número

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_j}} f(z)dz,$$

posee la particularidad de que la función

$$f(z) - \frac{P_j}{z-z_j}$$

tiene una primitiva en una vecindad agujereada del punto $z_j$.

Con base en lo anterior, daremos la definición de lo que llamaremos **el** *residuo de una función $f$ en una singularidad aislada* $z_0$. Antes, sin embargo, mostraremos que en efecto podemos usar el artículo "**el**" para referirnos a este número. En efecto, observe que si $\tilde{P} \in \mathbb{C}$ es otro número tal que la función

$$f(z) - \frac{\tilde{P}}{z-z_j}$$

también tiene una primitiva en una vecindad agujereada del punto $z_j$, entonces la función

$$f(z) - \frac{\tilde{P}}{z-z_j} - \left(f(z) - \frac{P_j}{z-z_j}\right) = \frac{P_j - \tilde{P}}{z-z_j}$$

también debería tener una primitiva en una vecindad agujereada del punto $z_j$. Pero como el lector recordará (teorema 3.24), esto sólo es posible si $P_j - \tilde{P} = 0$, es decir, si $P_j = \tilde{P}$.

Una vez dicho y hecho todo lo anterior, damos la siguiente

**Definición 5.26** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función $f$. Decimos que $R \in \mathbb{C}$ es el residuo de $f$ en $z_0$, si la función*

$$f(z) - \frac{R}{z-z_0}$$

*tiene una primitiva en alguna vecindad agujereada de $z_0$. En este caso escribiremos que*

$$R = \mathrm{Res}_{z=z_0} f.$$

Además de definir el concepto de residuo, la ventaja de tener otra propiedad que caracteriza al número

$$P_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r_j}} f(z)dz$$

es que nos da oportunidad de saber su valor sin tener que calcular directamente la integral que lo define. Y justo eso es lo que haremos a continuación, recurriendo al desarrollo de Laurent.

En efecto, de acuerdo con el teorema de Laurent (teorema 5.22), si $z_0 \in \mathbb{C}$ es una singularidad aislada de una función $f$ y $r > 0$ es tal que $f$ es analítica en $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, entonces existen dos sucesiones de números complejos $\{B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots\}$ y $\{A_0, A_1, \ldots, B_n, \ldots\}$, tales que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

para toda $z \in A_{0,r}(z_0) = B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. De esta expresión se tiene que

$$f(z) - \frac{B_1}{z - z_0} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n$$

y como el lector estará de acuerdo, como todos los términos de la derecha tienen una primitiva en cualquier vecindad agujereada de $z_0$, podemos sospechar que

$$B_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f.$$

La identidad anterior la dejamos formulada en la siguiente proposición. Su prueba formal se obtiene de la expresión del coeficiente $B_1$ que se probó en el mencionado teorema 5.22, y del análisis (previo a la definición del concepto de residuo) que hicimos de este número, razón por la cual se deja al lector.

**Proposición 5.27** *Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función $f$ y $r > 0$ tal que $f$ es analítica en $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Si el desarrollo de Laurent de $f$ en el anillo $A_{0,r}(z_0) = B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ está dado por*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(z - z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z - z_0)^n ,$$

*entonces*

$$B_1 = \operatorname{Res}_{z=z_0} f.$$

Sin duda, y como le lector estará de acuerdo, lo que ahora procede es dar algunos ejemplos (basados en la proposición anterior) de cómo calcular el residuo de algunas funciones, lo que haremos a continuación.

**Ejemplo 5.28**

1. *Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \to \mathbb{C}$ definida como*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}.$$

   *Como vimos en el ejemplo 5.23, el desarrollo de Laurent de $f$ en $A_{0,1}(0) = B_1(0) \setminus \{0\}$ está dado por*

$$f(z) = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$$

   *de modo que* $\operatorname{Res}_{z=0} f = B_1 = -1$.

2. *Si $f$ es la misma función del inciso anterior, nuevamente del ejemplo 5.23 sabemos que el desarrollo de Laurent de $f$ en $A_{0,1}(1) = B_1(1) \setminus \{1\}$ está dado por*

$$f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (z-1)^n,$$

   *de modo que* $\operatorname{Res}_{z=1} f = B_1 = 1$.

3. *Sea* $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ *definida como* $f(z) = \exp(1/z)$*. Dado que*

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

*para toda* $z \in \mathbb{C}$*, entonces el desarrollo de Laurent de* $f$ *en* $A_{0,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *está dado por*

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp(1/z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/n!}{z^n} \\ &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1/2}{z^2} + \cdots \end{aligned}$$

*de modo que* $\operatorname{Res}_{z=0} f = B_1 = 1$*.*

Aun cuando la proposición 5.27 nos da una buena herramienta para el cálculo del residuo de una función $f$ en una singularidad $z_0$, dado que el desarrollo de Laurent en algunos casos no es muy sencillo de calcular, es necesario explorar otros métodos. Algunos de ellos forman parte de los problemas de este capítulo y sólo analizaremos el caso en que la función $f$ se puede expresar de cierta forma.

Supongamos que $z_0 \in \Omega \subset \mathbb{C}$, que $g$ es una función analítica en la región $\Omega$, y que $k \in \mathbb{N}$. Si definimos $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

es claro que $z_0$ es una singularidad aislada de $f$.

Lo que ahora haremos será mostrar que para una función como esta $f$ es muy sencillo calcular su residuo en $z_0$. Lo haremos sin recurrir al desarrollo de Laurent, usando una herramienta más sencilla, como lo es el teorema de Taylor que probamos en el capítulo 4.

Por el teorema de Taylor, aplicado a la función $g$ para $k \in \mathbb{N}$, sabemos que existe $g_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica tal que

$$g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z - z_0) + \cdots + \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}(z - z_0)^{k-1} + g_k(z)(z - z_0)^k$$

para toda $z \in \Omega$. Por tanto, de la definición de la función $f$ tenemos que

$$f(z) = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^k} + \frac{g'(z_0)}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{z - z_0} + g_k(z)$$

para toda $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$, de modo que es claro que la función

$$f(z) - \frac{g^{(k-1)}(z_0)/(k-1)!}{z - z_0} = \frac{g(z_0)}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{1}{(k-2)!} \frac{g^{(k-2)}(z_0)}{(z - z_0)^2} + g_k(z)$$

tiene una primitiva en alguna vecindad agujereada $B_r(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \Omega$.

Se estará de acuerdo en que, del argumento anterior se deduce que

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!},$$

resultado que formulamos en la siguiente proposición y cuya prueba formal también se deja al lector.

**Proposición 5.29** *Sean,* $z_0 \in \Omega$ *y* $g : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *analítica. Si* $f : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *está definida como*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k}$$

*con* $k \in \mathbb{N}$, *entonces*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

*En particular, si* $k = 1$, *entonces*

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Ahora lo siguiente que haremos será reformular la proposición 5.25 en términos del concepto de residuo. Esta reformulación es conocida (por razones obvias) como el *teorema del residuo* y su prueba es una consecuencia inmediata de dicha proposición, razón por la cual también queda como un problema para el lector.

**Teorema 5.30 (del residuo)** *Sean,* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *una región y* $z_1, \ldots, z_k \in \Omega$. *Si* $f : \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es analítica, entonces para cualquier ciclo* $\gamma \subset \Omega \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ *tal que* $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ *se tiene que*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} n(\gamma, z_j) \operatorname{Res}_{z=z_j} f.$$

Es importante decir que, como en el caso de la proposición 5.25, en el problema 24 el lector también probará que el teorema del residuo se puede generalizar al caso de una infinidad de singularidades aisladas, siempre y cuando éstas no tengan un punto de acumulación dentro de $\Omega$.

Como mencionamos en párrafos anteriores, el teorema del residuo tiene importantes aplicaciones, tanto teóricas como prácticas, las cuales serán el tema de la siguiente sección. Sin embargo, para dar una primera muestra de la importancia de este teorema, mostraremos cómo la fórmula integral de Cauchy para las derivadas se puede obtener a partir del teorema del residuo, lo cual dejaremos formulado en el siguiente

**Teorema 5.31 (fórmula integral de Cauchy para las derivadas)** *Si* $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es analítica en la región* $\Omega$, $\gamma \subset \Omega$ *es un ciclo tal que* $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ *y* $z_0 \in \Omega \setminus \gamma$, *entonces para cada* $k \in \mathbb{N}$ *se tiene que*

$$n(\gamma, z_0) f^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz.$$

**Demostración.** Definimos $\tilde{f} : \Omega \setminus \{z_0\} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ como

$$\tilde{f}(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^k}.$$

Por la proposición 5.29, se tiene que

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \tilde{f} = \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Por tanto, por el teorema del residuo tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz &= \int_{\gamma} \tilde{f}(z)dz \\
&= 2\pi i \cdot n(\gamma, z_0) \cdot \operatorname{Res}_{z=z_0} \tilde{f} \\
&= 2\pi i \cdot n(\gamma, z_0) \cdot \frac{f^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}
\end{aligned}$$

y por lo tanto que

$$n(\gamma, z_0) f^{(k-1)}(z_0) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^k} dz,$$

es decir, la fórmula integral de Cauchy para las derivadas. ■

Nótese que en este teorema, para el caso $k = 1$ se obtiene la fórmula integral de Cauchy que se probó en el teorema 5.17, lo que muestra que éste también es una consecuencia del teorema del residuo.

### 5.3.1. Principio del argumento (segunda versión)

Como ya vimos en el capítulo 4, el principio del argumento es una herramienta muy importante para el análisis del comportamiento de una función analítica. En esta subsección probaremos la versión más general de este resultado, lo que significa que ahora consideraremos funciones meromorfas en una región arbitraria $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Sea $f$ una función meromorfa en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si $z_0 \in \Omega$ es un cero de $f$ de orden $k \in \mathbb{N}$, entonces $z_0$ es una singularidad aislada de la función $f'/f$ y nuestra primera tarea será calcular el residuo de esta función en $z_0$.

Como se probó en el capítulo 4, sabemos que existe una función $f_k$, analítica en alguna vecindad $B_r(z_0)$, tal que

$$f(z) = (z - z_0)^k f_k(z)$$

y $f_k(z) \neq 0$, para toda $z \in B_r(z_0)$ De esta identidad tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{k(z-z_0)^{k-1} f_k(z) + (z-z_0)^k f_k'(z)}{(z-z_0)^k f_k(z)} \\ &= \frac{k}{z-z_0} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}\end{aligned}$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Por tanto, dado que $f_k(z) \neq 0$, para toda $z \in B_r(z_0)$ podemos asegurar que la función $f_k'/f_k$ es analítica en $B_r(z_0)$ y por lo tanto que

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f_k'/f_k = k.$$

Si ahora suponemos que $z_0$ es un polo de $f$ de orden $k \in \mathbb{N}$, en el capítulo 4 también se probó que existe una función $f_k$, analítica en alguna vecindad $B_r(z_0)$, tal que

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} f_k(z)$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ y $f_k(z) \neq 0$ para toda $z \in B_r(z_0)$. De esta identidad tenemos ahora que

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{-k(z-z_0)^{-k-1} f_k(z) + (z-z_0)^{-k} f_k'(z)}{(z-z_0)^{-k} f_k(z)} \\ &= \frac{-k}{z-z_0} + \frac{f_k'(z)}{f_k(z)}\end{aligned}$$

para toda $z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Por tanto, dado que $f_k(z) \neq 0$, para toda $z \in B_r(z_0)$ podemos asegurar nuevamente que la función $f_k'/f_k$ es analítica en $B_r(z_0)$ y por lo tanto que en este caso ahora se tiene que

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f_k'/f_k = -k.$$

Una vez visto lo anterior, tenemos todo lo necesario para formular el teorema del principio del argumento.

**Teorema 5.32 (principio del argumento (segunda versión))** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región y $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_m \in \Omega$. Si $f$ es una función meromorfa en la región $\Omega$ tal que $a_j$ es un cero de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $b_l$ es un polo de $f$ de orden $h_l \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$, entonces*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{m} h_l \cdot n(\gamma, b_l)$$

*para todo $\gamma \subset \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \bmod(\Omega)$.*

**Demostración.** Como el lector estará de acuerdo, la prueba de este teorema es una consecuencia inmediata del teorema del residuo ya que, como la función $f'/f$ es analítica en la región $\Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) \operatorname{Res}_{z=a_j} f'/f + \sum_{l=1}^{m} n(\gamma, b_l) \operatorname{Res}_{z=b_l} f'/f$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} n(\gamma, a_j) \cdot k_j + \sum_{l=1}^{m} n(\gamma, b_l)\,(-h_l) \\
&= \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{m} h_l \cdot n(\gamma, b_l)
\end{aligned}
$$

de donde se sigue la indentidad deseada. ■

Como suele suceder con los resultados en lo que aparece el teorema del residuo, el principio del argumento se sigue cumpliendo en el caso en que el conjunto de los ceros o el conjunto de los polos de $f$ (o ambos) sean infinitos, siempre y cuando dichos conjuntos no tengan puntos de acumulación dentro de $\Omega$.

Lo siguiente que formularemos son un par de corolarios del principio del argumento, los cuales son los equivalentes a los corolarios 4.55 y 4.56 del capítulo 4. Antes, simplemente aclararemos que, si $\gamma \subset \Omega$ es un ciclo de la forma

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$$

y $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, entonces denotaremos por $f \circ \gamma$ al ciclo formado por las curvas

$$f \circ \gamma := f \circ \gamma_1 + f \circ \gamma_2 + \cdots + f \circ \gamma_n.$$

**Corolario 5.33** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Omega$, y $f$ meromorfa en la región $\Omega$ tal que $a_j$ es un cero de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $b_l$ es un polo de $f$ de orden $h_l \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$. Si $\gamma \subset \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ es un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ y $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, entonces*

$$n(\tilde{\gamma}, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \cdot n(\gamma, a_j) - \sum_{l=1}^{m} h_l \cdot n(\gamma, b_l).$$

**Corolario 5.34** *Sean, $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \Delta$ y $f$ meromorfa en $\Omega$ tal que $a_j$ es un cero de $f$ de orden $k_j \in \mathbb{N}$, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, y $b_l$ es un polo de $f$ de orden $h_l \in \mathbb{N}$, para cada $l \in \{1, \ldots, m\}$. Si $\gamma \subset \Omega \setminus \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$ es un ciclo tal que $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$ y $n(\gamma, z)$ sólo toma el valor $0$ o $1$ para cada $z \in \Omega \setminus \gamma$, y $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$, entonces*

$$n(\tilde{\gamma}, 0) = \textit{(\# de ceros} - \textit{\# de polos) de } f\textit{, encerrados por (o dentro de) } \gamma.$$

### 5.3.2. Cálculo de integrales

Una de las principales aplicaciones del teorema del residuo está sin duda en el cálculo de integrales. Lo que haremos en esta subsección será aplicar este teorema para desarrollar algunos métodos que nos permiten calcular el valor de cierto tipo de integrales.

1. El primer tipo de integrales que analizaremos son las de la siguiente forma: dada $R(x, y)$ una función racional en las variables (reales) $x$ y $y$ la cual está definida para toda pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2 + y^2 = 1$, veremos cómo resolver integrales de la forma

$$\int_{0}^{2\pi} R(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) d\theta. \tag{5.8}$$

Si hacemos $\gamma(\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$, como

$$\frac{1}{\gamma(\theta)} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos(\theta) - i \operatorname{sen}(\theta),$$

entonces

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(\gamma(\theta) + \frac{1}{\gamma(\theta)}\right)$$

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(\gamma(\theta) - \frac{1}{\gamma(\theta)}\right).$$

Por otra parte, observe que

$$\gamma'(\theta) = ie^{i\theta} = i\gamma(\theta)$$

de modo que, si en la integral 5.8 escribimos a $\cos(\theta)$ y $\operatorname{sen}(\theta)$ en términos de $\gamma(\theta)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))d\theta &= \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(\gamma(\theta) + \frac{1}{\gamma(\theta)}\right), \frac{1}{2i}\left(\gamma(\theta) - \frac{1}{\gamma(\theta)}\right)\right)\frac{1}{i\gamma(\theta)}\gamma'(\theta)d\theta \\ &= \int_\gamma R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz}dz.\end{aligned}$$

en donde $\gamma(\theta) = \cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta)$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, será la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, recorrida una vez en sentido antihorario.

Con base en lo anterior, si llamamos

$$f(z) = R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)\frac{1}{iz},$$

entonces

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))d\theta = \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} f,$$

en donde $z_1, \ldots, z_k$ son los polos de $f$ contenidos (o dentro) del disco unitario $B_1(0)$.

Ilustramos este método con el siguiente

**Ejemplo 5.35** *Calculemos la integral*

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)}d\varphi,$$

*con* $|a| > 1$.

*Lo primero que hay que observar es que, como la función coseno es par, entonces la integral que se desea calcular satisface que*

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)}d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)}d\varphi$$

*y haciendo el cambio de variable* $\varphi = \theta - \pi$ *se tiene que*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)}d\varphi &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)}d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \cos(\theta - \pi)}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2a - 2\cos(\theta)}d\theta.\end{aligned}$$

*Una vez visto lo anterior, tenemos entonces que*

$$f(z) = \frac{1}{2a - \left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{1}{iz}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{z^2 - 2az + 1}\frac{1}{i} \\
&= \frac{i}{z^2 - 2az + 1}
\end{aligned}
$$

*de tal forma que las singularidades de $f$ son*

$$z_1 = a + \sqrt{a^2 - 1} \quad y \quad z_2 = a - \sqrt{a^2 - 1}$$

*las cuales son polos de orden 1 de modo que*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_1} f &= \lim_{z\to z_1} (z - z_1) f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{i}{z - z_2} \\
&= \frac{i}{z_1 - z_2} \\
&= \frac{i}{2\sqrt{a^2 - 1}}
\end{aligned}
$$

*y*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_2} f &= \lim_{z\to z_2} (z - z_2) f(z) \\
&= \lim_{z\to z_2} \frac{i}{z - z_1} \\
&= \frac{i}{z_2 - z_1} \\
&= \frac{-i}{2\sqrt{a^2 - 1}}.
\end{aligned}
$$

*Por otra parte, como*

$$z_1 z_2 = \left(a + \sqrt{a^2 - 1}\right)\left(a - \sqrt{a^2 - 1}\right) = 1$$

*sólo una de estos polos está dentro del disco unitario $B_1(0)$. Por tanto, si $a > 1$, entonces $z_1 \notin B_1(0)$ y $z_2 \in B_1(0)$ de modo que*

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)} d\varphi &= \int_{\gamma} f(z) dz \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_2} f \\
&= 2\pi i \frac{-i}{2\sqrt{a^2 - 1}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}},
\end{aligned}
$$

*y si $a < -1$, entonces entonces $z_2 \notin B_1(0)$ y $z_1 \in B_1(0)$ de modo que*

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{1}{a + \cos(\varphi)} d\varphi &= \int_{\gamma} f(z) dz \\
&= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} f \\
&= 2\pi i \frac{i}{2\sqrt{a^2 - 1}} \\
&= -\frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.
\end{aligned}
$$

2. Otro tipo de integrales que veremos, serán las de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx,$$

en donde $R = p/q$ es una función racional tal que el grado de $q$ es al menos dos veces mayor que el grado de $p$, es decir, que $R$ tiene un cero en $\infty$ de orden mayor o igual a 2, y no tiene polos en el eje real. De estas hipótesis podemos asegurar que si $r > 0$ es suficientemente grande, se tiene que existe $M > 0$ tal que

$$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \tag{5.9}$$

si $|z| \geq r$.

Con base en lo anterior podemos asegurar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx < \infty$$

y que dicha integral se puede calcular como

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)dx.$$

Por otra parte, sea ahora $\gamma$ la curva cerrada (suave por pedazos) formada por el segmento parametrizado por $\gamma_1(x) = x$, con $x \in [-r, r]$, y el semicírculo parametrizado por $\gamma_2(t) = re^{it}$, con $t \in [0, \pi]$ (ver figura 5.9), en donde también elegimos $r > 0$ lo suficientemente grande para que los polos de $R$ estén contenidos en el disco $B_r(0)$. De esta forma, por el teorema del residuo tenemos entonces que

$$\int_{\gamma_1} R(z)dz + \int_{\gamma_2} R(z)dz = \int_{\gamma} R(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=z_j} R, \tag{5.10}$$

en donde $z_1, \ldots, z_k$ son los polos de $R$ contenidos en el semiplano superior, es decir que $\mathrm{Im}(z_j) > 0$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$.

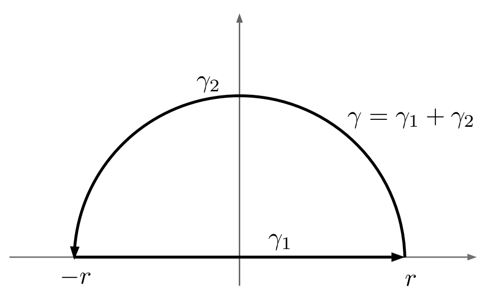



Figura 5.9:

Calculando las integrales de la identidad 5.10, tenemos que

$$\int_{\gamma_1} R(z)dz + \int_{\gamma_2} R(z)dz = \int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{0}^{\pi} R(re^{it})ire^{it}dt$$

y lo que ahora mostraremos es que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{0}^{\pi} R(re^{it})ire^{it}dt = 0. \tag{5.11}$$

En efecto, por la desigualdad 5.9 se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi R(re^{it})ire^{it}dt\right| &\leq \int_0^\pi \left|R(re^{it})\right| rdt\\ &\leq \int_0^\pi \frac{M}{r^2}rdt\\ &= \frac{\pi M}{r}\end{aligned}$$

y por lo tanto, tomando el límite cuando $r \to \infty$, concluimos la identidad 5.11.

Resumiendo todo lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx &= \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} R(x)dx\\ &= \lim_{r\to\infty}\left(\int_{\gamma_1} R(z)dz + \int_{\gamma_2} R(z)dz\right)\\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0} \operatorname{Res}_{z=z_j} R.\end{aligned}$$

El siguiente, es un ejemplo de cómo aplicar el método anterior para el cálculo de una integral.

**Ejemplo 5.36** *Calculemos la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

*Los polos de la función*

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

*coinciden con los ceros de la función* $1+z^4$ *que son* $z_1 = e^{i\pi/4}$, $z_2 = e^{i3\pi/4}$, $z_3 = e^{i5\pi/4} = e^{-i3\pi/4}$ *y* $z_4 = e^{i7\pi/4} = e^{-i\pi/4}$ *de los cuales* $z_1$ *y* $z_2$ *son los que tienen parte imaginaria positiva. Observe que* $z_1^2 = i = z_3^2$ *y* $z_2^2 = -i = z_4^2$ *de donde se desprende que*

$$\begin{aligned}1+z^4 &= \left(z^2-i\right)\left(z^2+i\right)\\ &= (z-z_1)(z-z_3)\left(z^2+i\right)\\ &= \left(z^2-i\right)(z-z_2)(z-z_4).\end{aligned}$$

*Con base en lo anterior, dado que los polos de* $f$ *son de orden* 1, *se tiene que*

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_{z=z_1} f &= \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z)\\ &= \lim_{z\to z_1}\frac{z^2}{(z-z_3)\left(z^2+i\right)}\\ &= \frac{z_1^2}{(z_1-z_3)\left(z_1^2+i\right)}\\ &= \frac{i}{\left(e^{i\pi/4}-e^{i5\pi/4}\right)2i}\\ &= \frac{e^{-i\pi/4}}{2\left(1-e^{i\pi}\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{1-i}{4\sqrt{2}},$$

*y*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{z=z_2} f &= \lim_{z\to z_2} (z-z_2) f(z) \\
&= \lim_{z\to z_2} \frac{z^2}{(z-z_4)\left(z^2-i\right)} \\
&= \frac{z_2^2}{(z_2-z_4)\left(z_2^2-i\right)} \\
&= \frac{-i}{\left(e^{i3\pi/4}-e^{-i\pi/4}\right)(-2i)} \\
&= \frac{e^{i\pi/4}}{2\left(e^{i\pi}-1\right)} \\
&= -\frac{1+i}{4\sqrt{2}},
\end{aligned}$$

*de modo que*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=z_1} f + \operatorname{Res}_{z=z_2} f\right) \\
&= \frac{2\pi i}{4\sqrt{2}} \left((1-i)-(1+i)\right) \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

3. Un tipo de integrales muy relacionadas con las del caso anterior son las de la forma

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(x) dx \quad \text{y} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(x) dx,$$

en donde nuevamente $R$ es una función racional con un cero de al menos orden 2 en $\infty$ y sin polos en el eje real. Observe que estas integrales son la parte imaginaria y la parte real, respectivamente, de la integral

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx,$$

la cual nuevamente siempre existe ya que $\left|R(x)e^{ix}\right| = |R(x)|$ para toda $x \in \mathbb{R}$, y por tanto se tiene que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{ix} dx = \lim_{r\to\infty} \int\limits_{-r}^{r} R(x) e^{ix} dx.$$

Si de nueva cuenta $\gamma$ es la curva cerrada (suave por pedazos) formada por el segmento parametrizado por $\gamma_1(x) = x$, con $x \in [-r, r]$, y el semicírculo parametrizado por $\gamma_2(t) = re^{it}$, con $t \in [0, \pi]$, y $r > 0$ se elige como en el caso anterior, entonces otra vez por el teorema del residuo tenemos que

$$\int\limits_{\gamma_1} R(z) e^{iz} dz + \int\limits_{\gamma_2} R(z) e^{iz} dz = \int\limits_{\gamma} R(z) e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} R e^{iz},$$

en donde otra vez $z_1, \ldots, z_k$ serán los polos de $Re^{iz}$ contenidos en el semiplano superior. Observe que en realidad $z_1, \ldots, z_k$ serán los polos de $R$ (en el semiplano superior) ya que $e^{iz}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$.

Calculando la primera integral de la identidad anterior, tenemos que

$$\int_{\gamma_1} R(z)e^{iz}dz = \int_{-r}^{r} R(x)e^{ix}dx$$

de modo que si probamos que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_2} R(z)e^{iz}dz = 0, \tag{5.12}$$

tendremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} R(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_j)>0}^{k} \mathrm{Res}_{z=z_j} Re^{iz}.$$

En cuanto a la identidad 5.12 recuerde que, como $R$ tiene un cero de al menos orden 2 en $\infty$, entonces existe $M > 0$ tal que $|R(z)| \leq M/|z|^2$ si $|z| \geq r$. De esta forma, si $z = x + iy \in \gamma_2$, entonces $y \geq 0$ y por tanto

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_2} R(z)e^{iz}dz\right| &\leq \int_{\gamma_2} |R(z)| \left|e^{i(x+iy)}\right| |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_2} \frac{M}{|z|^2} e^{-y} |dz| \\
&\leq \frac{M}{r^2} \int_{\gamma_2} |dz| \\
&= \frac{M\pi}{r},
\end{aligned}$$

desigualdad de la cual se deduce la identidad deseada.

Apliquemos lo anterior en el siguiente

**Ejemplo 5.37** *Calculemos la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4} dx.$$

*Aprovechando los cálculos que hicimos en el ejemplo 5.36 con relación a los ceros de la función* $1+z^4$*, tenemos que los polos en el semiplano superior de la función*

$$f(z) = R(z)e^{iz} = \frac{ze^{iz}}{1+z^4}$$

*son* $z_1 = e^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$ *y* $z_2 = e^{i3\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$*, de modo que*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=z_1} f &= \lim_{z\to z_1} (z-z_1)f(z) \\
&= \lim_{z\to z_1} \frac{ze^{iz}}{(z-z_3)(z^2+i)} \\
&= \frac{z_1 e^{iz_1}}{(z_1-z_3)(z_1^2+i)} \\
&= \frac{e^{i\pi/4}e^{i(1+i)/\sqrt{2}}}{\left(e^{i\pi/4}-e^{i5\pi/4}\right)2i} \\
&= \frac{e^{i/\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{2}}}{2i\left(1-e^{i\pi}\right)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{e^{i/\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{2}}}{4i},$$

*y*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z=z_2} f &= \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z)\\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{ze^{iz}}{(z-z_4)\left(z^2-i\right)}\\
&= \frac{z_2e^{iz_2}}{(z_2-z_4)\left(z_2^2-i\right)}\\
&= \frac{e^{i3\pi/4}e^{i(-1+i)/\sqrt{2}}}{\left(e^{i3\pi/4}-e^{-i\pi/4}\right)(-2i)}\\
&= -\frac{e^{-i/\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{2}}}{2i\left(1-e^{-i\pi}\right)}\\
&= -\frac{e^{-i/\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{2}}}{4i},
\end{aligned}$$

*de modo que*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(x)}{1+x^4}dx + i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{1+x^4}dx&\\
&= 2\pi i\sum_{\mathrm{Im}(z_j)>0}^{k}\mathrm{Res}_{z=z_j}\,Re^{iz}\\
&= 2\pi i\left(\frac{e^{i/\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}-\frac{e^{-i/\sqrt{2}}e^{-1/\sqrt{2}}}{4i}\right)\\
&= i\pi e^{-1/\sqrt{2}}\frac{e^{i/\sqrt{2}}-e^{-i/\sqrt{2}}}{2i}\\
&= i\pi e^{-1/\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(1/\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

*De la identidad anterior concluimos que*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}(x)}{1+x^4}dx = \pi e^{-1/\sqrt{2}}\,\mathrm{sen}(1/\sqrt{2})$$

*y*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\cos(x)}{1+x^4}dx = 0,$$

*en donde esta última identidad era de esperarse pues el integrando es una función impar.*

4. Como el lector recordará, dada una función $f:\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}\to\mathbb{R}$, en donde $x_1<x_2<\cdots<x_k$, y $f$ es no acotada en cualquier vecindad de cada $x_j$, e integrable sobre cualquier intervalo $[c,d]\subset\mathbb{R}\setminus\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$, se define el *valor principal de Cauchy* de la integral $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$ como

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx := \lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_{-\alpha}^{x_1-1/\alpha}f(x)dx+\sum_{j=1}^{k-1}\int_{x_j+1/\alpha}^{x_{j+1}-1/\alpha}f(x)dx+\int_{x_k+1/\alpha}^{\alpha}f(x)dx\right).$$

Calcular el valor principal de Cauchy de la integral de una función $f$ puede ser de utilidad, como por ejemplo en el caso en que la función $f$ sea integrable sobre cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}$ y sea par, pues en este caso se tiene que

$$\int_0^\infty f(x)dx := \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha f(x)dx = \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\alpha}^\alpha f(x)dx = \frac{1}{2}v.p.\int_{-\infty}^\infty f(x)dx.$$

Lo que ahora haremos será mostrar cómo usar el teorema del residuo para calcular el

$$v.p.\int_{-\infty}^\infty R(x)\operatorname{sen}(ax)dx$$

y el

$$v.p.\int_{-\infty}^\infty R(x)\cos(ax)dx$$

en el caso en que $a > 0$ y $R$ sea una función racional que tiene un cero de orden mayor o igual a 1 en $\infty$ y polos de orden 1 en el eje real. De hecho, para ilustrar este método por ahora sólo supondremos que $R$ tiene un polo de orden 1 en $z = 0$.

Para calcular estas integrales, recurriremos a una curva diferente a la del caso anterior. En este caso tomaremos a la curva $\gamma_\alpha$ formada por los segmentos de recta $[1/\alpha, \alpha]$, $[\alpha, \alpha + i\alpha]$, $[\alpha + i\alpha, -\alpha + i\alpha]$, $[-\alpha + i\alpha, -\alpha]$, $[-\alpha, -1/\alpha]$ y el semicírculo inferior que une a los puntos $-1/\alpha$ con $1/\alpha$, que denotaremos por $\tilde{\gamma}_\alpha$, en donde $\alpha > 1$. (ver figura 5.10).

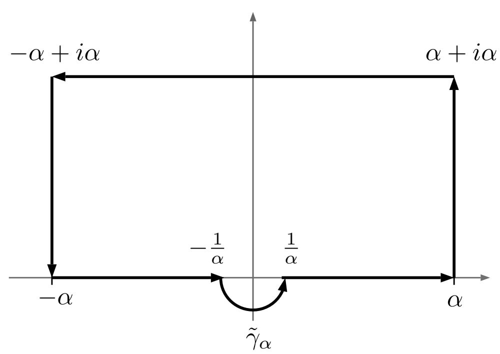



Figura 5.10:

Como el lector estará de acuerdo, podemos elegir a $\alpha$ lo suficientemente grande para que todos los polos de la función $R$ que están en el semiplano superior y en el eje real queden dentro de la curva $\gamma_\alpha$, de modo que, por el teorema del residuo se tendrá que

$$\int_{\gamma_\alpha} R(z)e^{iaz}dz = 2\pi i\left(\sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0}\operatorname{Res}_{z=z_j} Re^{iaz} + \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz}\right).$$

Si parametrizamos cada uno de los segmentos que forman a $\gamma_\alpha$, tendremos que

$$\int_{\gamma_\alpha} R(z)e^{iaz}dz = \int_{1/\alpha}^\alpha R(x)e^{iax}dx + \int_0^\alpha R(\alpha + ix)e^{ia(\alpha+ix)}idx - \int_{-\alpha}^\alpha R(x + i\alpha)e^{ia(x+i\alpha)}dx$$
$$- \int_0^\alpha R(-\alpha + ix)e^{ia(-\alpha+ix)}idx + \int_{-\alpha}^{-1/\alpha} R(x)e^{iax}dx + \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} R(z)e^{iaz}dz.$$

Ahora, como $R$ tiene un cero de orden al menos 1 en $\infty$, se tiene que existen $M, r > 0$ tales que

$$|R(z)| \leq \frac{M}{|z|}$$

si $|z| \geq r$. Por tanto, si $\alpha \geq r$ se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha R(\alpha + ix)e^{ia(\alpha+ix)} i dx\right| &\leq \int_0^\alpha \left|R(\alpha + ix)e^{ia(\alpha+ix)} i\right| dx \\ &\leq \int_0^\alpha \frac{M}{|\alpha + ix|} e^{-ax} dx \\ &\leq \int_0^\alpha \frac{M}{|\alpha|} e^{-ax} dx \\ &= \frac{M}{a\alpha}\left(1 - e^{-\alpha}\right) \\ &< \frac{M}{a\alpha}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

y por un procedimiento análogo se obtiene que

$$\left|\int_0^\alpha R(-\alpha + ix)e^{i(-\alpha+ix)} i dx\right| < \frac{M}{a\alpha}. \tag{5.14}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\alpha}^\alpha R(x + i\alpha)e^{ia(x+i\alpha)} dx\right| &\leq \int_{-\alpha}^\alpha \left|R(x + i\alpha)e^{ia(x+i\alpha)}\right| dx \\ &\leq \int_{-\alpha}^\alpha \frac{M}{|x + i\alpha|} e^{-a\alpha} dx \\ &\leq e^{-a\alpha} \int_{-\alpha}^\alpha \frac{M}{|\alpha|} dx \\ &= 2Me^{-a\alpha}.\end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{-\alpha}^\alpha R(x + i\alpha)e^{ia(x+i\alpha)} dx = 0. \tag{5.15}$$

Finalmente, si $B = \mathrm{Res}_{z=0}\, Re^{iaz}$, sabemos que existen $r' > 0$ y $\varphi$ una función analítica en $B_r(0)$ tales que

$$R(z)e^{iaz} = \frac{B}{z} + \varphi(z)$$

para toda $z \in B_{r'}(0)$. Por tanto, si tomamos $\alpha$ tal que $0 < 1/\alpha < r'$ y $\tilde{\gamma}_\alpha(t) = (1/\alpha)e^{it}$ con $t \in [\pi, 2\pi]$, se tiene que

$$\int_{\tilde{\gamma}_\alpha} R(z)e^{iaz} dz = \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \frac{B}{z} dz + \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z) dz$$

$$\begin{aligned}
&= B\int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{(1/\alpha)e^{it}} i(1/\alpha)e^{it}dt + \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z)dz \\
&= \pi i B + \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z)dz \\
&= \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz} + \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z)dz.
\end{aligned}$$

De esta identidad también es importante hacer notar que, como $\varphi$ es analítica en $B_{r'}(0)$, entonces está acotada en dicha vecindad (o en alguna más "pequeña") de tal forma que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z)dz \right| &\leq \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} |\varphi(z)|\,|dz| \\
&\leq M' \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} |dz| \\
&\leq M'\pi(1/\alpha),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\lim_{\alpha\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} R(z)e^{iaz}dz &= \lim_{\alpha\to\infty} \left( \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz} + \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z)dz \right) \qquad (5.16) \\
&= \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz} + \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\tilde{\gamma}_\alpha} \varphi(z)dz \\
&= \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz}.
\end{aligned}$$

Resumiendo todo lo anterior, por las identidades 5.15 y 5.16 y las desigualdades 5.13 y 5.14, concluimos que

$$\begin{aligned}
&2\pi i \left( \sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0} \operatorname{Res}_{z=z_j} Re^{iaz} + \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz} \right) \\
&\qquad = \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\gamma_\alpha} R(z)e^{iaz}dz \\
&\qquad = \lim_{\alpha\to\infty} \left( \int_{1/\alpha}^{\alpha} R(x)e^{iax}dx + \int_{0}^{\alpha} R(\alpha+ix)e^{ia(\alpha+ix)}idx - \int_{-\alpha}^{\alpha} R(x+i\alpha)e^{ia(x+i\alpha)}dx \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \int_{0}^{\alpha} R(-\alpha+ix)e^{ia(-\alpha+ix)}idx + \int_{-\alpha}^{-1/\alpha} R(x)e^{iax}dx + \int_{\tilde{\gamma}_\delta} R(z)e^{iaz}dz \right) \\
&\qquad = \lim_{\alpha\to\infty} \left( \int_{-\alpha}^{-1/\alpha} R(x)e^{iax}dx + \int_{1/\alpha}^{\alpha} R(x)e^{iax}dx \right) + \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz} \\
&\qquad = \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx \right) + i \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(ax)dx \right) + \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz},
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx \right) + i \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(ax)dx \right) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0} \operatorname{Res}_{z=z_j} Re^{iaz} + \pi i \operatorname{Res}_{z=0} Re^{iaz}.$$

Como el lector intuirá fácilmente, el caso general en el que la función $R$ tenga un cero de orden al menos 1 en $\infty$, y $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ sean polos de orden 1 de $R$, se tendrá que

$$\begin{aligned}\left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx \right) &+ i \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(ax)dx \right) \\ &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0} \operatorname{Res}_{z=z_j} Re^{iaz} + \pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=x_j} Re^{iaz}.\end{aligned}$$

Tampoco debe escapar a la atención del lector que el método anterior también es válido si la función $R$ no tiene polos simples en el eje real; es decir, si $R$ está definida para toda $x \in \mathbb{R}$ y sólo tiene un cero de orden 1 en $\infty$, entonces se cumple que

$$\left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(ax)dx \right) + i \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(ax)dx \right) = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_j)>0} \operatorname{Res}_{z=z_j} Re^{iaz}.$$

Como en los casos anteriores, damos el siguiente

**Ejemplo 5.38**

1. *Sea $R(x) = 1/x$. Calcularemos el*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\operatorname{sen}(x)dx$$

*y el*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos(x)dx.$$

*Como $R$ sí tiene un cero en $\infty$ y un único polo en $x = 0$, ambos de orden 1, entonces*

$$\begin{aligned}\left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx \right) + i \left( v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx \right) &= \pi i \operatorname{Res}_{z=0} e^{iz}/z \\ &= \pi i \lim_{z\to 0} z\frac{e^{iz}}{z} \\ &= \pi i,\end{aligned}$$

*de modo que*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx = 0$$

*y*

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx = \pi.$$

*Observe que en este caso se tiene que la función* $\operatorname{sen}(\pi x)/x$ *se puede extender continuamente a* $x = 0$ *y es par, de modo que podemos concluir que*

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx &= \lim_{\alpha\to\infty}\int_0^\alpha \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx\\ &= \lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^\alpha \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx\\ &= \frac{1}{2}\cdot v.p.\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}dx\\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

*Por otra parte, como la función* $\cos(x)/x$ *es impar se tiene que*

$$\int_{-\alpha}^{-1/\alpha} \frac{\cos(x)}{x}dx = -\int_{1/\alpha}^{\alpha} \frac{\cos(x)}{x}dx$$

*lo cual "explica" el hecho de que*

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x}dx = 0.$$

*2. Sea ahora*

$$R(x) = \frac{1}{x\left(x^2+2x+2\right)}.$$

*En este caso claramente* $R$ *tiene un cero (de orden* 3*) en* $\infty$*, un polo de orden* 1 *en* $x = 0$ *y polos (también de orden* 1*) en* $z_1 = -1+i$ *y* $z_2 = -1-i$*.*

*Por tanto, sabemos que*

$$\begin{aligned}&\left(v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x\left(x^2+2x+2\right)}dx\right) + i\left(v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x\left(x^2+2x+2\right)}dx\right)\\ &\qquad= 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_1} e^{i\pi z}/z\left(z^2+2z+2\right) + \pi i \operatorname{Res}_{z=0} e^{i\pi z}/z\left(z^2+2z+2\right)\\ &\qquad= 2\pi i \lim_{z\to z_1}(z-z_1)\frac{e^{i\pi z}}{z\left(z^2+2z+2\right)} + \pi i \lim_{z\to 0} z\frac{e^{i\pi z}}{z\left(z^2+2z+2\right)}\\ &\qquad= 2\pi i\frac{e^{i\pi z_1}}{z_1\left(z_1-z_2\right)} + \frac{\pi i}{2}\\ &\qquad= 2\pi i\frac{e^{i\pi(-1+i)}}{(-1+i)\,2i} + \frac{\pi i}{2}\\ &\qquad= \frac{\pi e^{-i\pi}e^{-\pi}}{2}(-1-i) + \frac{\pi i}{2}\\ &\qquad= \frac{\pi e^{-\pi}}{2} + i\frac{\pi}{2}\left(1+e^{-\pi}\right),\end{aligned}$$

*y por lo tanto*

$$v.p.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x\left(x^2+2x+2\right)}dx = \frac{\pi e^{-\pi}}{2}$$

y

$$v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x\left(x^2+2x+2\right)} dx = \frac{\pi}{2}\left(1+e^{-\pi}\right).$$

5. Concluimos esta serie de métodos para el cálculo de integrales, analizando ahora integrales del tipo

$$\int_0^{\infty} x^a R(x) dx,$$

en donde $0 < a < 1$ y $R$ es una función racional que tiene un cero de al menos orden 2 en $\infty$, sin polos en el eje real positivo, salvo posiblemente por un polo de orden 1 en $x = 0$. Como se puede verificar fácilmente, estas hipótesis garantizan la existencia de la integral que se desea calcular.

Como el lector se podrá imaginar, para utilizar el teorema del residuo tendremos que echar mano de una rama de la función $z^a$, las cuales introdujimos en la definición 2.24 del capítulo 2. En este método usaremos la rama de $z^a$ basada en la rama del logarítmo $\log_0$, es decir que

$$z^a = \exp\left(a \log_0(z)\right)$$

en donde

$$\log_0(z) = \log\left(|z|\right) + i\theta$$

con $0 < \theta(z) < 2\pi$, y $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Ahora tomamos la curva cerrada suave por pedazos $\gamma$ dada por $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4$, en donde $\gamma_1(x) = re^{ix}$, con $x \in [1/n, 2\pi - 1/n]$ y $n \in \mathbb{N}$; $\gamma_2(x) = xe^{i(2\pi-1/n)}$, $x \in [\delta, r]$ y $0 < \delta < r$; $\gamma_3(x) = \delta e^{ix}$, con $x \in [1/n, 2\pi - 1/n]$, y $\gamma_4(x) = xe^{i\theta}$, $x \in [\delta, r]$ (ver figura 5.11).

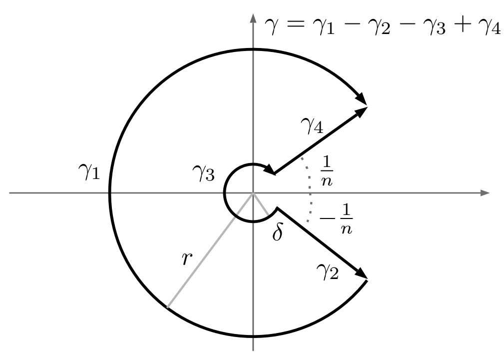



Figura 5.11:

Como el lector estará de acuerdo, si elegimos $r$ y $n$ suficientemente grandes y $\delta$ suficientemente pequeño, podemos asegurar que la curva $\gamma$ encierra a todos los polos de $R$, de tal forma que, por el teorema del residuo se tendrá que

$$\int_{\gamma} z^a R(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} z^a R,$$

en donde $z_1, \ldots, z_k$ son los polos de $R$ contenidos en $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Dado que

$$\int_{\gamma} z^a R(z) dz = \int_{\gamma_1} z^a R(z) dz - \int_{\gamma_2} z^a R(z) dz - \int_{\gamma_3} z^a R(z) dz + \int_{\gamma_4} z^a R(z) dz,$$

analizaremos qué sucede con cada una de estas integrales cuando $r, n \to \infty$ y $\delta \to 0^+$.

Para la integral sobre la curva $\gamma_1$ primero recordemos que, como $R$ tiene un cero de orden mayor o igual a 2 en $\infty$, sabemos que si $|z| = r$ es suficientemente grande, entonces $|z|^2 |R(z)| \leq 1$ de modo que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_1} z^a R(z) dz \right| &\leq \int_{\gamma_1} |z^a| \, |R(z)| \, |dz| \\
&= \int_{\gamma_1} |z|^a \, |R(z)| \, |dz| \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{1}{|z|^{2-a}} |z|^2 \, |R(z)| \, |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_1} \frac{M_0}{|z|^{2-a}} |dz| \\
&= \frac{M_0}{r^{2-a}} \int_{\gamma_1} |dz| \\
&= \frac{2\pi - 1/n}{r^{1-a}}
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\gamma_1} z^a R(z) dz = 0$$

para cualquier valor de $n \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, para la integral sobre la curva $\gamma_3$, aun suponiendo que $R$ tiene un polo de orden 1 en $x = 0$, si $|z| = \delta$ es suficientemente pequeño se tiene que $|z| \, |R(z)| \leq M$ para alguna constante $M > 0$ de tal forma que

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\gamma_3} z^a R(z) dz \right| &\leq \int_{\gamma_3} |z^a| \, |R(z)| \, |dz| \\
&= \int_{\gamma_3} |z|^a \, |R(z)| \, |dz| \\
&= \int_{\gamma_3} \frac{|z|^a}{|z|} |z| \, |R(z)| \, |dz| \\
&\leq \int_{\gamma_3} \frac{|z|^a M}{|z|} |dz| \\
&= \frac{\delta^a M_0}{\delta} \int_{\gamma_2} |dz| \\
&= \delta^a M_0 (2\pi - 1/n)
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\gamma_3} z^a R(z) dz = 0$$

también para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Analicemos ahora el caso de la integral sobre la curva $\gamma_2$. Observe que, como $0 < a(2\pi - 1/n) < 2\pi$, entonces

$$(\gamma_2(x))^a \, R(\gamma_2(x)) = \exp(a \log_0(x e^{i(2\pi - 1/n)})) R(x e^{i(2\pi - 1/n)})$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(a\,(\log(x) + i(2\pi - 1/n)))R(xe^{i(2\pi-1/n)}) \\
&= x^a \exp(ia(2\pi - 1/n))R(xe^{i(2\pi-1/n)})
\end{aligned}$$

con $x \in [\delta, r]$. Dado que la función $R$ no tiene polos en el eje real positivo, entonces la función

$$g(x, y) = x^a \exp(ia(2\pi - y))R(xe^{i(2\pi-y)})$$

es continua en un rectángulo de la forma $[\delta, r] \times [-\eta, \eta]$, con $\eta > 0$, y por lo tanto uniformemente continua ahí mismo, de modo que la sucesión de funciones

$$f_n(x) = x^a \exp(ia(2\pi - 1/n))R(xe^{i(2\pi-1/n)})$$

converge uniformemente a la función

$$f(x) = x^a \exp(ia2\pi)R(xe^{i2\pi}) = x^a \exp(ia2\pi)R(x)$$

en el intervalo $[\delta, r]$, de tal manera que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_2} z^a R(z)dz &= \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{r} x^a \exp(ia(2\pi - 1/n))R(xe^{i(2\pi-1/n)})dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{r} f_n(x)dx \\
&= \int_{\delta}^{r} f(x)dx \\
&= \int_{\delta}^{r} x^a \exp(ia2\pi)R(x)dx \\
&= e^{ia2\pi} \int_{\delta}^{r} x^a R(x)dx.
\end{aligned}$$

Por un procedimiento análogo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\gamma_4} z^a R(z)dz &= \lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{r} t^a \exp(ia/n)R(te^{i/n})dt \\
&= \int_{\delta}^{r} \lim_{n\to\infty} t^a \exp(ia/n)R(te^{i/n})dt \\
&= \int_{\delta}^{r} t^a R(t)dt.
\end{aligned}$$

Resumiendo todo lo anterior, podemos concluir que, si $r$ y $n$ son suficientemente grandes y $\delta$ suficientemente pequeño, entonces

$$\begin{aligned}
2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} z^a R &= \int_{\gamma} z^a R(z)dz \\
&= \int_{\gamma_1} z^a R(z)dz - \int_{\gamma_2} z^a R(z)dz - \int_{\gamma_3} z^a R(z)dz + \int_{\gamma_4} z^a R(z)dz
\end{aligned}$$

de modo que si primero hacemos que $n \to \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=z_j} z^a R &= \int_{\gamma_1} z^a R(z)dz - \int_{\gamma_3} z^a R(z)dz + \int_{\delta}^{r} x^a R(x)dx - e^{ia2\pi} \int_{\delta}^{r} x^a R(x)dx \\ &= \int_{\gamma_1} z^a R(z)dz - \int_{\gamma_3} z^a R(z)dz + \left(1 - e^{ia2\pi}\right) \int_{\delta}^{r} x^a R(x)dx, \end{aligned}$$

y si después hacemos que $r \to \infty$ y $\delta \to 0^+$, concluimos que

$$\int_0^\infty x^a R(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{ia2\pi}} \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{z=z_j} z^a R.$$

Como el lector supondrá (correctamente), ilustraremos el método anterior con el siguiente

**Ejemplo 5.39** *Sea*

$$R(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$$

*y* $0 < a < 1$*. Calcularemos*

$$\int_0^\infty x^a R(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{x^{1-a}(x^2+1)}dx.$$

*Dado que los polos de la función* $R$ *son* $z = i$ *y* $z = -i$*, y éstos son de orden* $1$*, tenenemos que*

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{1}{x^{1-a}(x^2+1)}dx &= \int_0^\infty x^a R(x)dx \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{ia2\pi}} \left(\mathrm{Res}_{z=i} z^a R + \mathrm{Res}_{z=-i} z^a R\right) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{ia2\pi}} \left( \lim_{z \to i} (z-i) \frac{z^a}{z(z^2+1)} + \lim_{z \to -i} (z+i) \frac{z^a}{z(z^2+1)} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{1 - e^{ia2\pi}} \left( \frac{i^a}{i(2i)} + \frac{(-i)^a}{-i(-2i)} \right) \\ &= \frac{-\pi i}{1 - e^{ia2\pi}} \left(\exp(a \log_0(i) + \exp(a \log_0(-i))\right) \\ &= \frac{\pi i}{\left(e^{ia2\pi} - 1\right) e^{-ia\pi}} \left(e^{ia\pi/2} + e^{ia3\pi/2}\right) e^{-ia\pi} \\ &= \frac{\pi i}{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}} \left(e^{-ia\pi/2} + e^{ia\pi/2}\right) \\ &= \frac{\pi i}{2i \operatorname{sen}(a\pi)} 2 \cos(a\pi/2) \\ &= \frac{\pi \cos(a\pi/2)}{\operatorname{sen}(a\pi)} \\ &= \frac{\pi}{2} \csc(a\pi/2). \end{aligned}$$

Concluimos estos métodos y ejemplos sobre el cálculo de integrales con un tipo de integral que no se puede resolver con los métodos anteriores y en la que, en particular, no está involucrada ninguna función racional.

**Ejemplo 5.40** *Probaremos la existencia y el valor de la integral*

$$\int_0^\pi \ln(\operatorname{sen}(x))dx.$$

*Primero obsérvese que, haciendo el cambio de variable $x = u - \pi/2$, se prueba la identidad*

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}(x))dx = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\operatorname{sen}(x))dx$$

*por lo que podemos asumir que*

$$\int_0^\pi \ln(\operatorname{sen}(x))dx = \lim_{\delta\to 0^+} \int_\delta^{\pi-\delta} \ln(\operatorname{sen}(x))dx.$$

*Una vez dicho lo anterior, empecemos por hacer notar que*

$$-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z) = -2ie^{iz}\left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right) = 1 - e^{2iz} \tag{5.17}$$

*para toda $z \in \mathbb{C}$.*

*De la identidad anterior tenemos que si $z = x + iy$, entonces la función*

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - e^{2iz} \\ &= 1 - e^{-2y}e^{i2x} \\ &= 1 - e^{-2y}(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)) \end{aligned}$$

*es tal que los conjuntos*

$$L_n = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x = n\pi, y \le 0\}$$

*satisfacen que $f(L_n) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$ para toda $n \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto*

$$f(\mathbb{C}\setminus(\cup_{n\in\mathbb{Z}}L_n)) = \mathbb{C}\setminus\{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\},$$

*(ver figura 5.12).*

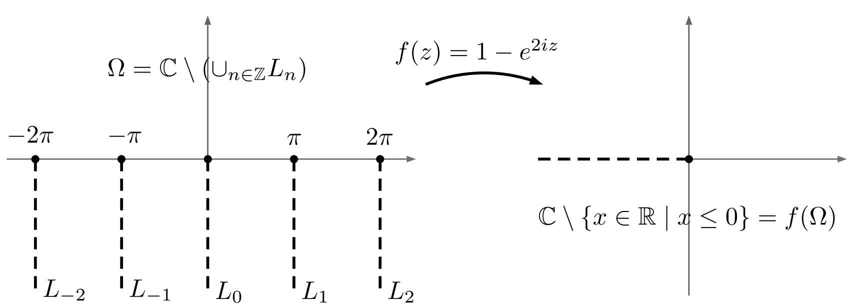



Figura 5.12: Como $f(\Omega) = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\}$, entonces en $\Omega$ se puede definir la rama principal de $\log(f(z))$.

*De esta forma se tiene que la rama principal del logarítmo de $f$*

$$\log(f(z)) = \log(1 - e^{2iz}) = \log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))$$

*se puede definir sobre la región $\Omega = \mathbb{C} \setminus (\cup_{n\in\mathbb{Z}}L_n)$.*

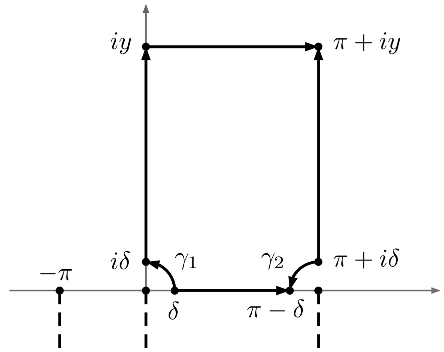



Figura 5.13: La curva $\gamma_{\delta,y}$.

*Sea ahora $\gamma_{\delta,y} \subset \Omega$ la curva cerrada suave por pedazos formada por los segmentos $[\delta, \pi - \delta]$, $[\pi + \delta i, \pi + iy]$, $[\pi + iy, iy]$, $[iy, i\delta]$, en donde $0 < \delta < \text{mín}\{y, \pi/2\}$, y los arcos de circunferencia parametrizados por $\gamma_1(x) = \delta e^{ix}$, con $x \in [0, \pi/2]$, y $\gamma_2(x) = \delta e^{ix} + \pi$, con $x \in [\pi/2, \pi]$ (ver figura 5.13).*

*Por el teorema de Cauchy, tenemos entonces que*

$$\int_{\gamma_{\delta,y}} \log_{-\pi}(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz = \int_{\gamma_{\delta,y}} \log_{-\pi}(1 - e^{2iz})dz = 0,$$

*de tal forma que escribiendo sólo las parametrizaciones de los segmentos que forman parte de $\gamma_{\delta,y}$, se tiene que*

$$\begin{aligned} 0 = &\int_{\delta}^{\pi-\delta} \log(-2ie^{ix}\operatorname{sen}(x))dx - \int_{\gamma_2} \log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz + \int_{\delta}^{y} \log(-2ie^{i(\pi+ix)}\operatorname{sen}(\pi + ix))idx \\ &- \int_{0}^{\pi} \log(-2ie^{i(x+iy)}\operatorname{sen}(x + iy))dx - \int_{\delta}^{y} \log(-2ie^{i(ix)}\operatorname{sen}(ix))idx - \int_{\gamma_1} \log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz. \end{aligned}$$

*Si ahora observamos que*

$$\begin{aligned} \log(-2ie^{i(\pi+ix)}\operatorname{sen}(\pi + ix)) &= \log(2ie^{i\pi-x}\operatorname{sen}(ix)) \\ &= \log(-2ie^{-x}\operatorname{sen}(ix)) \\ &= \log(-2ie^{i(ix)}\operatorname{sen}(ix)) \end{aligned}$$

*tenemos que*

$$\int_{\delta}^{y} \log(-2ie^{i(\pi+ix)}\operatorname{sen}(\pi + ix))idx = \int_{\delta}^{y} \log(-2ie^{i(ix)}\operatorname{sen}(ix))idx.$$

*Por otra parte, usando nuevamente la identidad 5.17 sabemos que*

$$\begin{aligned} \int_{0}^{\pi} \log(-2ie^{i(x+iy)}\operatorname{sen}(x + iy)) &= \int_{0}^{\pi} \log(1 - e^{i2(x+iy)})dx \\ &= \int_{0}^{\pi} \log(1 - e^{-2y}\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)))dx \end{aligned}$$

*y mostraremos directamente que*

$$\lim_{y\to\infty} \int_{0}^{\pi} \log\left(1 - e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)\right)\right)dx = 0. \tag{5.18}$$

*Dado $\varepsilon > 0$, como la función $g(z) = \log(1-z)$ es continua en $z = 0$, existe $r > 0$ tal que, si $|z| < r$, entonces*

$$|\log(z) - \log(1)| = |\log(z)| < \frac{\varepsilon}{\pi}.$$

*Ahora, como claramente se tiene que*

$$\lim_{y\to\infty} e^{-2y} = 0$$

*y*

$$\left|e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)\right)\right| = e^{-2y},$$

*entonces existe $M > 0$ tal que si $y \geq M$, entonces*

$$\left|e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)\right)\right| < r$$

*y por lo tanto*

$$\left|\log\left(1 - e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)\right)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{\pi},$$

*para toda $x \in \mathbb{R}$, de modo que*

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \log\left(1 - e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)\right)\right) dx\right| &\leq \int_0^\pi \left|\log\left(1 - e^{-2y}\left(\cos(2x) + i\operatorname{sen}(2x)\right)\right)\right| dx \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

*lo que prueba la identidad 5.18.*

*Finalmente, como*

$$\begin{aligned}\log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z)) &= \log\left(1 - e^{i2z}\right) \\ &= \ln\left(\left|1 - e^{i2z}\right|\right) + i\arg\left(1 - e^{i2z}\right)\end{aligned}$$

*en donde $-\pi < \arg\left(1 - e^{i2z}\right) < \pi$, entonces*

$$\int_{\gamma_1} \log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz = \int_{\gamma_1} \ln\left(\left|1 - e^{i2z}\right|\right) dz + i\int_{\gamma_1} \arg\left(1 - e^{i2z}\right) dz$$

*de modo que*

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2} \arg\left(1 - e^{i2z}\right) dz\right| &\leq \int_{\gamma_1} \left|\arg\left(1 - e^{i2z}\right)\right| |dz| \\ &< \pi\int_{\gamma_1} |dz| \\ &= \pi\left(\delta\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \delta\frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

*y por lo tanto*

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{\gamma_1} \arg\left(1 - e^{i2z}\right) dz = 0. \tag{5.19}$$

*Por otra parte, si hacemos $h(z) = e^{i2z}$, se tiene que*

$$2i = h'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{h(z) - h(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{i2z} - 1}{z}$$

*y por lo tanto*

$$\lim_{z\to 0}\left|\frac{z}{e^{i2z}-1}\right| = \lim_{z\to 0}\frac{|z|}{|1-e^{i2z}|} = \frac{1}{2},$$

*de modo que existe* $r_1 > 0$ *tal que si* $0 < |z| < r_1$*, entonces*

$$\frac{|z|}{|1-e^{i2z}|} < 1.$$

*Si ahora recordamos que*

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0,$$

*entonces*

$$\lim_{z\to 0}\left|1-e^{i2z}\right|\ln\left(\left|1-e^{i2z}\right|\right) = 0,$$

*así que, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $r_2 > 0$ *tal que si* $0 < |z| < r_2$*, entonces*

$$\left|1-e^{i2z}\right|\left|\ln(\left|1-e^{i2z}\right|)\right| < \frac{4\varepsilon}{\pi}.$$

*De esta forma, si* $0 < \delta < \min\{r_1, r_2\}$*, como* $|\gamma_1(t)| = \delta$*, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_1}\ln\left(\left|1-e^{i2z}\right|\right)dz\right| &\leq \int_{\gamma_1}\left|\ln\left(\left|1-e^{i2z}\right|\right)\right||dz| \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi}\left|\ln\left(\left|1-e^{i2\gamma_1(t)}\right|\right)\right||\gamma_1(t)|\,dt \\
&< \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{4\varepsilon}{\pi}\frac{|\gamma_1(t)|}{\left|1-e^{i2\gamma_1(t)}\right|}dt \\
&= \frac{4\varepsilon}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{2}dt \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

*lo que prueba que*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\gamma_1}\ln\left(\left|1-e^{i2z}\right|\right)dz = 0$$

*y por lo tanto, junto con la identidad 5.19, concluimos que*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\gamma_1}\log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz = 0.$$

*Por un procedimiento análogo (que queda a cargo del lector), también se prueba que*

$$\lim_{\delta\to 0^+}\int_{\gamma_2}\log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz = 0.$$

*Reuniendo todo lo anterior, se tiene que*

$$0 = \lim_{\delta\to 0^+}\left(\lim_{y\to\infty}\int_{\gamma_{\delta,y}}\log_{-\pi}(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\delta\to 0^+}\left(\int_{\delta}^{\pi-\delta}\log(-2ie^{ix}\operatorname{sen}(x))dx - \int_{\gamma_2}\log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz\right.\\
&\left.-\int_{\gamma_2}\log(-2ie^{iz}\operatorname{sen}(z))dz\right)\\
&= \int_0^{\pi}\log(-2ie^{ix}\operatorname{sen}(x))dx\\
&= \int_0^{\pi}\ln\left(\left|-2ie^{ix}\operatorname{sen}(x)\right|\right)dx + i\int_0^{\pi}\arg\left(-2ie^{ix}\operatorname{sen}(x)\right)\\
&= \int_0^{\pi}\ln\left(2\operatorname{sen}(x)\right)dx + i\int_0^{\pi}\arg\left(-ie^{ix}\right)dx\\
&= \pi\ln(2) + \int_0^{\pi}\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)dx + i\int_0^{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}+x\right)dx\\
&= \int_0^{\pi}\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)dx + \pi\ln(2)
\end{aligned}
$$

*y por lo tanto*

$$\int_0^{\pi}\ln\left(\operatorname{sen}(x)\right)dx = -\pi\ln(2).$$

Como el lector habrá notado, en el ejemplo anterior no usamos el teorema del residuo y nos bastó con el teorema de Cauchy, razón por la cual este ejemplo se hubiera podido dar como una aplicación directa de este teorema al cáculo de integrales.

## 5.4. Problemas

1. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ una región tal que $\tilde{\Omega}=\Omega\cup\{\infty\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}^{\infty}$. Pruebe que, si $\Omega$ es simplemente conexa, entonces $\Omega=\mathbb{C}$.

2. Sean $\Omega_1$ y $\Omega_2$ dos regiones simplemente conexas tales que $\Omega_1\cap\Omega_2$ es conexo. Pruebe que $\Omega_1\cup\Omega_2$ es simplemente conexa.

3. Pruebe que, si $\Omega\subset\mathbb{C}$ es una región estrellada, entonces es simplemente conexa.

4. Sea $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica e inyectiva sobre la región simplemente conexa $\Omega$. Pruebe que $f(\Omega)$ es simplemente conexa.

5. Sea $\Omega\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ una región simplemente conexa. Pruebe que sobre $\Omega$ se pueden definir ramas analíticas de las funciones $\log(z)$, $z^{\alpha}$ ($\alpha\in\mathbb{C}$) y $z^z$.

6. Sea $f:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analítica, con $\Omega$ una región simplemente conexa, $f(z)\neq 0$ para toda $z\in\Omega$ y $z_0\in\Omega$. Si $w_0\in Log(f(z_0))$, pruebe que existe $h:\Omega\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ una rama del logarítmo de $f$ tal que $h(z_0)=w_0$.

7. Pruebe que la relación de homología entre ciclos contenidos en una región $\Omega$ es una relación de equivalencia.

8. Sean $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_n$ y $\tilde{\gamma}=\tilde{\gamma}_1+\tilde{\gamma}_2+\cdots+\tilde{\gamma}_m$ ciclos contenidos en la región $\Omega\subset\mathbb{C}$. Pruebe que:

*a)* $n(\gamma+\tilde{\gamma}, z) = n(\gamma, z) + n(\tilde{\gamma}, z)$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma \cup \tilde{\gamma})$.

*b)* $n(\gamma-\tilde{\gamma}, z) = n(\gamma, z) - n(\tilde{\gamma}, z)$ para toda $z \in \mathbb{C} \setminus (\gamma \cup \tilde{\gamma})$.

*c)* Si $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ es una región tal que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ y $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\Omega)$, entonces $\gamma \sim 0 \operatorname{mod}(\tilde{\Omega})$.

*d)* Si $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{C}$ es una región tal que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ y $\gamma \sim \tilde{\gamma} \operatorname{mod}(\Omega)$, entonces $\gamma \sim \tilde{\gamma} \operatorname{mod}(\tilde{\Omega})$.

9. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$. Pruebe que se puede definir en $\Omega$ una rama analítica $f(z)$ de la función $\sqrt{z^2-1}$ tal que $f(0) = i$.

10. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analítica, con $\Omega$ simplemente conexa. Si $z_1, z_2 \in \Omega$ son tales que $[z_1, z_2] \subset \Omega$, y $\gamma \subset \Omega \setminus [z_1, z_2]$ es una curva cerrada suave por pedazos, entonces

$$\int_\gamma f(z) \log\left(\frac{z-z_1}{z-z_2}\right) dz = 2\pi i (n(\gamma, z_2)F(z_2) - n(\gamma, z_1)F(z_1)),$$

en donde log es la rama principal del logarítmo y $F$ es una primitiva de $f$ en $\Omega$.

11. Calcule el desarrollo de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}$$

en los anillos $A_{0,1}(0), A_{0,1}(i), A_{1,2}(-i)$ y $A_{1,\infty}(0)$.

12. Pruebe que la proposición 5.25 se puede generalizar al caso de un conjunto infinito $\{z_1, \ldots, z_k, \ldots\}$ que no tenga puntos de acumulación en $\Omega$.

13. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ una singularidad aislada de una función $f$. Pruebe que, si $z_0$ es una singularidad removible de $f$, entonces $\operatorname{Res}_{z=z_0} f = 0$. ¿Es cierto lo recíproco? Pruebe su respuesta.

14. Sean, $z_0 \in \mathbb{C}$ un polo de orden 1 de una función $f$, y $g$ una función analítica en una vecindad de $z_0$. Pruebe que $\operatorname{Res}_{z=z_0} fg = g(z_0) \operatorname{Res}_{z=z_0} f$.

15. Calcule el residuo de las siguientes funciones en el punto que se indica:

$$i)\ \frac{e^z-1}{\operatorname{sen}(z)} \quad \text{en } a=0; \qquad ii)\ \left(\frac{\cos(z)-1}{z}\right)^2 \quad \text{en } a=0;$$

$$iii)\ \frac{z^2}{z^4-1} \quad \text{en } a = e^{i\pi/2}.$$

16. Pruebe que, si $f$ es par en $A_{0,R}(0)$ entonces $\operatorname{Res}_{z=0} f = 0$.

17. Pruebe que

$$\operatorname{Res}_{z=n}\left(\frac{\pi\cot(\pi z)}{z}\right) = \frac{1}{n}$$

para toda $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

18. Sean $g, h : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analíticas tales que $g$ tiene un cero de orden $k$ y $h$ tiene un cero de orden $k+1$ en el punto $a \in \Omega$. Pruebe que, si $f = g/h$, entonces

*a)* $f$ tiene un polo de orden 1 en $a$

*b)* $\operatorname{Res}_{z=a} f = (k+1)\frac{g^{(k)}(a)}{h^{(k+1)}(a)}$

19. Supóngase que $f$ tiene un cero de orden 2 en el punto $a \in \mathbb{C}$. Calcule:

$$i)\ \operatorname{Res}_{z=a}(f''/f) \qquad \text{y} \qquad ii)\ \operatorname{Res}_{z=a}(f''/f')$$

Repita los mismos cálculos suponiendo ahora que $f$ tiene un polo de orden 2 en el punto $a$.

20. Supóngase que $f$ tiene un cero o un polo de orden $k$ en el punto $a \in \mathbb{C}$, y que $g$ es analítica en una vecindad de $a$. Calcule
$$\operatorname{Res}_{z=a}\left(g\frac{f'}{f}\right)$$

21. Sea $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ analítica. Pruebe que, si
$$\operatorname{Res}_{z=1} f = -\operatorname{Res}_{z=-1} f,$$
entonces existe $F : \Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1] \to \mathbb{C}$ analítica tal que $F'(z) = f(z)$ para toda $z \in \Omega$.

22. Sea $f$ una función analítica para $|z| > R$. Definimos
$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$$
donde $\gamma$ es una circunferencia de radio $r > R$ recorrida en sentido positivo.

    *a*) Si definimos $g(z) = f(1/z)$ para $0 < |z| < 1/R$, pruebe que
$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f = \operatorname{Res}_{z=0}(-g(z)/z^2).$$

    *b*) Si $f$ es analítica en $\mathbb{C}$, salvo por un número finito de singularidades aisladas $z_1, \ldots, z_k$, pruebe que
$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f = -\sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}_{z=z_j} f.$$

23. Sea $f$ una función analítica para $|z| > R$. Pruebe que si
$$L = \lim_{z\to\infty}(-zf(z))$$
entonces $\operatorname{Res}_{z=\infty} f = L$.

24. Pruebe que el teorema del residuo (teorema 5.30) se puede generalizar al caso de un conjunto infinito $\{z_1, \ldots, z_k, \ldots\}$ que no tenga puntos de acumulación en $\Omega$.

25. Evalue las siguientes integrales:

$$i)\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2-2x+4} \qquad ii)\ \int_{0}^{\pi}\frac{dx}{(a+\cos(x))^2}\quad (a>1)$$

$$iii)\ \int_{0}^{\infty}\frac{x\operatorname{sen}(x)}{1+x^2}dx \qquad iv)\ \int_{0}^{\infty}\frac{x^{1/3}}{1+x^2}dx$$

$$v)\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ax}}{1+e^x}dx\quad (0<a<1).$$

# Bibliografía

[1] Ahlfors, Lars V., *Complex Analysis*, Third Edition. McGraw-Hill International Book Company, Tokyo, 1979. 331 pp.

[2] Conway, John B. *Functions of One Complex Variable*, Second Edition. Spring-Verlag, New York, 1978. 317 pp.

[3] Marsden, Jerrold E., Hoffman, Michael J. *Basic Complex Analysis*, Second Edition. W.H. Freeman Company, New York, 1987. 604 pp.

[4] Páez Cárdenas, Javier. *Cálculo integral de varias variables.* Segunda edición. Las Prensas de Ciencias, UNAM. México, 2014. 470 pp.

# Índice alfabético