

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Fuentes y sumideros. Topologías inicial y final

Cuando a los cursos de Topología General se les imprime el enfoque categórico, como hicieron Graciela Salicrup en [7] y Roberto Vázquez en [13], se suele hablar de *fuentes cartesianas*, de *fuentes topológicas*, así como de sus conceptos duales, es decir, de *sumideros cartesianos y topológicos*. A continuación se presentan las definiciones de estos conceptos.

- Una **fente cartesiana o fuente en \mathfrak{Set} o \mathfrak{Set} -fuente** es una pareja

$$\mathcal{F} = (X, (f_\lambda)_\Lambda)$$

en la que X es un conjunto arbitrario y $(f_\lambda)_\Lambda$ es una clase arbitraria de funciones

$$f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda, \lambda \in \Lambda$$

con dominio común. En tal caso se dice que X es el **dominio de la fuente \mathcal{F}** , que la clase de conjuntos $(X_\lambda)_\Lambda$ es el **codominio de la fuente \mathcal{F}** y que las funciones f_λ son las **flechas de la fuente \mathcal{F}** . Otras notaciones empleadas para designar fuentes cartesianas son

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda)_\Lambda \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \left(X \xrightarrow{f_\lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

- Un **sumidero cartesiano o sumidero en \mathfrak{Set} o \mathfrak{Set} -sumidero** es una pareja

$$\mathcal{S} = ((f_\lambda)_\Lambda, X)$$

en la que X es un conjunto arbitrario y $(f_\lambda)_\Lambda$ es una clase arbitraria de funciones

$$f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X, \lambda \in \Lambda$$

con codominio común. En tal caso se dice que X es el **codominio del sumidero \mathcal{S}** , que la clase de conjuntos $(X_\lambda)_\Lambda$ es el **dominio del sumidero \mathcal{S}** y que las funciones f_λ son las **flechas del sumidero \mathcal{S}** . Otras notaciones empleadas para designar sumideros cartesianos son

$$\mathcal{S} = (f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \left(X_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X \right)_\Lambda$$

- Una **fente topológica o fuente en \mathfrak{Top} o \mathfrak{Top} -fuente** es una pareja

$$\mathcal{F} = ((X, \tau), (f_\lambda)_\Lambda)$$

en la que (X, τ) es un espacio topológico arbitrario y $(f_\lambda)_\Lambda$ es una clase arbitraria de funciones continuas

$$f_\lambda : (X, \tau) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda), \lambda \in \Lambda$$

Al espacio (X, τ) se le llama **dominio de la fuente \mathcal{F}** , a la clase de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ **codominio de la fuente \mathcal{F}** y las funciones continuas f_λ son las **flechas de \mathcal{F}** . Otras notaciones empleadas para designar fuentes topológicas son

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X, \tau) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda \quad \text{y} \quad \mathcal{F} = \left((X, \tau) \xrightarrow{f_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) \right)_\Lambda$$

- Un **sumidero topológico** o **sumidero en $\mathcal{T}op$** o **$\mathcal{T}op$ -sumidero** es una pareja

$$\mathcal{S} = ((f_\lambda)_\Lambda, (X, \tau))$$

en la que (X, τ) es un espacio topológico arbitrario y $(f_\lambda)_\Lambda$ es una clase arbitraria de funciones continuas

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau), \lambda \in \Lambda$$

Al espacio (X, τ) se le llama **codominio del sumidero \mathcal{S}** , a la clase de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ **dominio del sumidero \mathcal{S}** y las funciones continuas f_λ son las **flechas del sumidero \mathcal{S}** . Otras notaciones empleadas para designar sumideros topológicos son

$$\mathcal{S} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda \quad \text{y} \quad \mathcal{S} = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau) \right)_\Lambda$$

En las cuatro definiciones que siguen, así como en las dos proposiciones subsecuentes, se hablará de fuentes y de sumideros a secas bajo el entendido de que se hace referencia a fuentes cartesianas y topológicas así como a sumideros cartesianos y topológicos, simultáneamente.

- (a) Se dice que una fuente \mathcal{F} **separa puntos** si cualesquiera dos puntos distintos del dominio de \mathcal{F} tienen imágenes distintas bajo al menos una de las flechas de \mathcal{F} .
- (b) Se dice que un sumidero \mathcal{S} **ubre puntos** si cualesquier punto del codominio de \mathcal{S} tiene una preimagen bajo al menos una de las flechas de \mathcal{S} .
- (a) Una fuente $\mathcal{F} = (f_\lambda : X \rightarrow X_\lambda)_\Lambda$ es una **monofuente** si para ella se verifica la **ley de la cancelación izquierda**, es decir, si siempre que dos funciones (continuas)

$$g, h : W \rightarrow X$$

son tales que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$f_\lambda g = f_\lambda h$$

entonces $g = h$.

- (b) Un sumidero $\mathcal{S} = (f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ es un **episumidero** si para él se verifica la **ley de la cancelación derecha**, es decir, si siempre que dos funciones (continuas)

$$g, h : X \rightarrow Y$$

son tales que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$g f_\lambda = h f_\lambda$$

entonces $g = h$.

En [7] y en [13] se demuestra que:

- (a) \mathcal{F} es una fuente que separa puntos si, y sólo si, \mathcal{F} es una monofuente.
- (b) \mathcal{S} es un sumidero que ubre puntos si, y sólo si, \mathcal{S} es un episumidero.
- (a) Cuando para los conjuntos X_λ , $\lambda \in \Lambda$, del codominio de una fuente cartesiana existen sendas topologías τ_λ , siempre es posible hallar una única topología τ para X , llamada **inicial con respecto a $(f_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$** , con la cual, para toda $\lambda \in \Lambda$, la función

$$f_\lambda : (X, \tau) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

es continua. Es la topología generada por la familia

$$\gamma = \{f_\lambda^{-1}(U) : \lambda \in \Lambda \text{ y } U_\lambda \in \tau_\lambda\}$$

En tal situación se hablará de la fuente

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X, \tau) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

como de una **fente inicial**.

(b) Cuando para los conjuntos X_λ , $\lambda \in \Lambda$, del dominio de un sumidero cartesiano

$$\mathcal{S} = \left(X_\lambda \xrightarrow{f_\lambda} X \right)_\Lambda$$

existen sendas topologías τ_λ , siempre es posible hallar una única topología τ para X , llamada **final con respecto a** $(\tau_\lambda)_\Lambda$ **y a** $(f_\lambda)_\Lambda$, con la cual, para toda $\lambda \in \Lambda$, la función

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau)$$

es continua. Es la topología

$$\tau = \{ U \subseteq X : \forall \lambda \in \Lambda, f_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda \}$$

En tal situación se hablará del sumidero

$$\mathcal{S} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

como de un **sumidero final**.

Tanto en [7] como en [13] se caracteriza a las topologías inicial y final demostrando que:

■ Si $\mathcal{F} = \left((X, \tau) \xrightarrow{f_\lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) \right)_\Lambda$ es una \mathfrak{Top} -fuente arbitraria, entonces son equivalentes:

- (a) τ es la topología inicial con respecto a $(f_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$.
- (b) τ tiene por subbase a $\gamma' = \{ f_\lambda^{-1}(U_\lambda) \subseteq X : \lambda \in \Lambda \text{ y } U_\lambda \in \tau_\lambda, \text{ subbase de } \tau_\lambda \}$
- (c) τ es tal que cada f_λ es continua, y será continua toda función

$$g : (W, \omega) \rightarrow (X, \tau)$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$ es continua la composición

$$f_\lambda g : (W, \omega) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

Además, τ es la única topología para X que satisface esta propiedad.

(d) τ es la más pequeña de las topologías para X según las cuales, para toda $\lambda \in \Lambda$, f_λ es continua.

■ Si $\mathcal{S} = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau) \right)_\Lambda$ es un \mathfrak{Top} -sumidero arbitrario, entonces son equivalentes:

- (a) τ es la topología final con respecto a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(f_\lambda)_\Lambda$.
- (b) τ es tal que cada f_λ es continua, y será continua toda función

$$g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$ es continua la composición

$$g f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (Y, \sigma)$$

Además, τ es la única topología para X que satisface esta propiedad.

(c) τ es la más grande de las topologías para X según las cuales, para toda $\lambda \in \Lambda$, f_λ es continua.

1.2. Productos topológicos

Por los cursos de Topología General se sabe que la topología de Tychonoff para el producto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ de la familia de conjuntos subyacentes de una familia cualquiera de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ está generada por la familia

$$\gamma = \left\{ P_\lambda^{-1}(U) \subseteq \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda : \lambda \in \Lambda \text{ y } U \in \tau_\lambda \right\}$$

donde P_λ denota a la λ -proyección

$$\begin{aligned} P_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda &\rightarrow X_\lambda \\ (x_\lambda)_\Lambda &\mapsto x_\lambda \end{aligned}$$

Como consecuencia del inciso (a) de 1.9 resulta que τ , la topología de Tychonoff, es la topología inicial para $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ correspondiente a $(P_\lambda)_\Lambda$ y a $(\tau_\lambda)_\Lambda$. Por consiguiente, la fuente topológica de λ -proyecciones

$$\left(P_\lambda : \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tau \right) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda) \right)_\Lambda$$

es un caso particular, muy importante, de fuente inicial. Como se prueba en [7] y en [13], a esta fuente la caracteriza una propiedad universal: la llamada *propiedad universal del producto topológico*.

- Se dice que una fuente en \mathfrak{Top}

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X, \tau) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico si para cualquier otra fuente topológica \mathcal{G} con el mismo codominio que \mathcal{F}

$$\mathcal{G} = (g_\lambda : (W, \omega) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

existe una única función continua

$$g : (W, \omega) \rightarrow (X, \tau)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$f_\lambda g = g_\lambda$$

En los textos citados se demuestra que:

- Al darle a $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ la topología de Tychonoff, τ , la fuente topológica de λ -proyecciones

$$\left(P_\lambda : \left(\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tau \right) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda) \right)_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico.

- Salvo homeomorfismos, el dominio de una fuente de codominio $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ con la propiedad universal del producto topológico es único. Es decir, que entre los dominios de cualesquiera dos \mathfrak{Top} -fuentes

$$(f_\lambda : (Y, \sigma) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda \quad \text{y} \quad (g_\lambda : (Z, \rho) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

que tengan la propiedad universal del producto topológico existe un homeomorfismo

$$h : (Y, \sigma) \rightarrow (Z, \rho)$$

De aquí que si

$$\mathcal{F} = (f_\lambda : (X, \tau) \rightarrow (X_\lambda, \tau_\lambda))_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del producto topológico, se diga que (X, τ) es **un producto topológico de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ con λ -proyecciones f_λ** .

Proposición 1.1 $\prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ siempre es una monofuente. ♦

1.2.1. Producto de funciones

Otro concepto cuyo dual será más adelante de gran utilidad es el de *producto de funciones*.

- Sean $(X_\lambda)_\Lambda$ y $(Y_\lambda)_\Lambda$ dos familias de subconjuntos de X y de Y , respectivamente. Supóngase que para toda $\lambda \in \Lambda$ existe una función

$$f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$$

Considérense las λ -proyecciones

$$p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow X_\lambda \quad \text{y} \quad q_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda \rightarrow Y_\lambda$$

así como la composición

$$f_\lambda p_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$$

Puesto que $(q_\lambda)_\Lambda$ tiene la propiedad universal del producto cartesiano, existe una única función

$$\prod f_\lambda : \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$$

tal que para toda $\lambda \in \Lambda$

$$q_\lambda \prod f_\lambda = f_\lambda p_\lambda$$

A la función $\prod f_\lambda$ se le da el nombre de **producto cartesiano de la familia de funciones** $(f_\lambda)_\Lambda$.

1.3. Coproductos cartesianos y topológicos

Definición 1.1 Sean, $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de conjuntos y $\mathcal{S} = (f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ cualquier \mathfrak{Set} -sumidero de dominio $(X_\lambda)_\Lambda$. Se dice que \mathcal{S} tiene la **propiedad universal del coproducto cartesiano** si para cualquier otro \mathfrak{Set} -sumidero \mathcal{T} con el mismo dominio que \mathcal{S}

$$\mathcal{T} = (g_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y)_\Lambda$$

existe una única función

$$g : X \rightarrow Y$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$g f_\lambda = g_\lambda$$

En tal caso se dice que X es un **coproducto cartesiano de la familia** $(X_\lambda)_\Lambda$. Los conjuntos X_λ son los **cofactores del coproducto** y las funciones f_λ son las **coproyecciones** del mismo. Para designar al coproducto cartesiano de $(X_\lambda)_\Lambda$ se empleará la notación

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

Definición 1.2 Sean, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia de espacios topológicos y $\mathcal{S} = (f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$ cualquier \mathfrak{Top} -sumidero de dominio $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Se dice que \mathcal{S} tiene la **propiedad universal del coproducto topológico** si para cualquier otro \mathfrak{Top} -sumidero \mathcal{T} con el mismo dominio que \mathcal{S}

$$\mathcal{T} = (g_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (Y, \sigma))_\Lambda$$

existe una única función continua

$$g : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$g f_\lambda = g_\lambda$$

En tal caso se dice que (X, τ) es un **coproducto topológico de la familia** $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Los espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)$ son los **cofactores del coproducto topológico** y las funciones continuas f_λ son las **coproyecciones** del mismo. Para designar al coproducto topológico de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ se empleará la notación

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$$

Cuando se hable de *coproducto* o de *sumidero* a secas, se estará pensando cualquiera de los dos casos: cartesiano o topológico.

Ejemplo 1.1 Una biyección $f_1 : X_1 \rightarrow X$ es un coproducto cartesiano.

En efecto, si $f'_1 : X_1 \rightarrow X'$ es cualquier función de dominio X_1 y $f : X \rightarrow X'$ es la función $f = f'_1 f_1^{-1}$, entonces

$$f f_1 = (f'_1 f_1^{-1}) f_1 = f'_1 (f_1^{-1} f_1) = f'_1$$

Y si $g : X \rightarrow X'$ es tal que $g f_1 = f'_1$, entonces $g = f'_1 f_1^{-1}$, es decir, $g = f$. Por lo tanto, f es única.

Ejemplo 1.2 Un homeomorfismo $f_1 : (X_1, \tau_1) \rightarrow (X, \tau)$ es un coproducto topológico.

El resultado que sigue se refiere a la esencial unicidad del coproducto cartesiano (topológico).

Teorema 1.1 El coproducto cartesiano (topológico) es único salvo biyecciones (homeomorfismos). Es decir, si

$$(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda \quad y \quad (f'_\lambda : X_\lambda \rightarrow X')_\Lambda$$

son dos coproductos de la misma familia $(X_\lambda)_\Lambda$, entonces existe una biyección (homeomorfismo) $h : X \rightarrow X'$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$hf_\lambda = f'_\lambda$$

Y, recíprocamente, si $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$ y $h : X \rightarrow X'$ es una biyección (homeomorfismo) cualquiera; entonces

$$(hf_\lambda : X_\lambda \rightarrow X')_\Lambda$$

también es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$.

Demostración 1 Por definición de coproducto existen funciones (continuas)

$$X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X$$

tales que para cada $\lambda \in \Lambda$

$$ff_\lambda = f'_\lambda \quad y \quad f'f'_\lambda = f_\lambda$$

Entonces

$$(f'f)f_\lambda = f'(ff_\lambda) = f'f'_\lambda = f_\lambda \quad y \quad (ff')f'_\lambda = f(f'f'_\lambda) = ff_\lambda = f'_\lambda$$

Pero dado que X y X' son coproductos, 1_X y $1_{X'}$ son las únicas funciones (continuas) para las cuales se tiene que

$$\begin{array}{ccccc} & & X_\lambda & & X_\lambda \\ & f_\lambda \swarrow & \circlearrowleft & \searrow f_\lambda & & & f'_\lambda \swarrow & \circlearrowleft & \searrow f'_\lambda \\ X & & \xrightarrow{1_X} & X & X' & & \xrightarrow{1_{X'}} & X' \end{array}$$

Por lo tanto

$$f'f = 1_X \quad y \quad ff' = 1_{X'}$$

Por lo tanto, f y f' son biyecciones (continuas) mutuamente inversas, lo cual demuestra la primera parte del teorema.

Recíprocamente, sean $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$ y $h : X \rightarrow X'$ es una biyección (homeomorfismo) cualesquiera. Sea $(f'_\lambda : X_\lambda \rightarrow X')_\Lambda$ cualquier sumidero; como X es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$, existe una única función (continua) $f : X \rightarrow X'$ tal que $ff_\lambda = f'_\lambda$. Considérese la función inversa $h^{-1} : X' \rightarrow X$ y hágase $f' = fh^{-1}$; entonces

$$f'(hf_\lambda) = (f'h)f_\lambda = (fh^{-1}h)f_\lambda = f(h^{-1}h)f_\lambda = ff_\lambda = f'_\lambda$$

Y si $g : X' \rightarrow X''$ es una función (continua) tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $g(hf_\lambda) = f'_\lambda$, entonces $(gh)f_\lambda = f'_\lambda$; por consiguiente, $gh = f$ y $g = fh^{-1} = f'$, es decir, f' es única. Esto demuestra que

$$(hf_\lambda : X_\lambda \rightarrow X')_\Lambda$$

es un coproducto de $(X_\lambda)_\Lambda$. ♦

Proposición 1.2 $\coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ siempre es un episumidero.

Demostración 2 Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos y sea

$$S = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau) \right)_\Lambda$$

un coproducto de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Si

$$h, k : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

son funciones continuas tales que para toda $\lambda \in \Lambda$, $hf_\lambda = kf_\lambda$, entonces puede considerarse el sumidero de funciones continuas

$$S = \left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{hf_\lambda} (Y, \sigma) \right)_\Lambda$$

Puesto que S posee la propiedad universal del coproducto topológico, existe una única función continua

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $ff_\lambda = hf_\lambda$. Puesto que aquí tanto $f = h$ como $f = k$ satisfacen la igualdad anterior, entonces la unicidad de f implica que $h = k$. Esto prueba que S es un episumidero. \blacklozenge

Teorema 1.2 Sea $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$ un \mathfrak{Top} -sumidero arbitrario; son equivalentes:

- (a) $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$ es un coproducto topológico.
- (b) $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ es un coproducto cartesiano y τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(f_\lambda)_\Lambda$.

Demostración 3 (a) \Rightarrow (b) Sea $(f'_\lambda : X_\lambda \rightarrow X')_\Lambda$ un \mathfrak{Set} -sumidero arbitrario y sea τ' la topología indiscreta para X' ; entonces

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X', \tau'))_\Lambda$$

es un \mathfrak{Top} -sumidero; por (a) existe una, y sólo una, función continua

$$f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $ff_\lambda = f'_\lambda$. Si $g : X \rightarrow X'$ fuera otra función tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $gf_\lambda = f'_\lambda$, entonces

$$g : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$$

sería continua y, por lo tanto, coincidiría con f . Esto prueba que $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ es un coproducto cartesiano.

Ahora sea ξ la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(f_\lambda)_\Lambda$. Entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, es continua

$$f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \xi)$$

lo que hace de

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \xi))_\Lambda$$

un sumidero de funciones continuas. Puesto que

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

tiene la propiedad universal del coproducto topológico, existe una única función continua

$$f : (X, \tau) \rightarrow (X, \xi)$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $ff_\lambda = f_\lambda$. Obviamente, para toda $\lambda \in \Lambda$, $1_X f_\lambda = f_\lambda$. Por ser $(f_\lambda : X_\lambda \rightarrow X)_\Lambda$ un coproducto cartesiano, resulta $f = 1_X$. Por lo tanto,

$$1_X : (X, \tau) \rightarrow (X, \xi)$$

de donde resulta que

$$\xi \subseteq \tau$$

Pero la topología final es la más grande de las topologías para X que hacen continuas a las f_λ ; por consiguiente

$$\tau \subseteq \xi$$

Esto demuestra que τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(f_\lambda)_\Lambda$.

(b) \Rightarrow (a) Sea

$$(f'_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X', \tau'))_\Lambda$$

cualquier \mathfrak{Top} -sumidero; por (b) existe una única función

$$f : X \rightarrow X'$$

tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $f f_\lambda = f'_\lambda$. Entonces cada composición

$$(X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{f_\lambda} (X, \tau) \xrightarrow{f} (X', \tau')$$

es continua, y como τ es final para X con respecto a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(f_\lambda)_\Lambda$, resulta que también

$$f : (X, \tau) \rightarrow (X', \tau')$$

es continua. Por lo tanto, $(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$ es un coproducto topológico, como se quería demostrar. ♦

Definición 1.3 Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia de conjuntos tal que para cualesquiera $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ se tiene que

$$\lambda \neq \lambda' \Rightarrow X_\lambda \cap X_{\lambda'} = \emptyset$$

Entonces:

(a) **La suma ajena de la familia de conjuntos** $(X_\lambda)_\Lambda$ es, simplemente, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$.

(b) Si para cada $\lambda \in \Lambda$ es τ_λ una topología para X_λ , **la suma ajena topológica de la familia de espacios topológicos** $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es un espacio topológico (X, τ) cuyo conjunto subyacente X es $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ y cuya topología τ es tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in \tau$, y que restringida a X_λ coincide con τ_λ .

Lema 1.1 Sean, $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia de espacios topológicos cuyos conjuntos subyacentes son ajenos dos a dos, $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, $U \subseteq X$ y τ una topología para X tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

1.1 $X_\lambda \in \tau$

1.2 $\tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$

Entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, se tiene que

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$$

Demostración 4 Si $U \in \tau$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$U \cap X_\lambda \in \tau|_{X_\lambda}$$

Y puesto que, para toda $\lambda \in \Lambda$, $\tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$, resulta que

$$U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$$

Recíprocamente, puesto que

$$\tau_\lambda = \tau|_{X_\lambda} = \{V \cap X_\lambda : V \in \tau\}$$

si para toda $\lambda \in \Lambda$, $U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$, entonces para toda $\lambda \in \Lambda$ existe $W_\lambda \in \tau$ tal que

$$U \cap X_\lambda = W_\lambda \cap X_\lambda$$

de donde, uniendo sobre λ , se tiene:

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U \cap X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W_\lambda \cap X_\lambda)$$

Pero

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (U \cap X_\lambda) = U \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right) = U$$

así que

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W_\lambda \cap X_\lambda)$$

y como para toda $\lambda \in \Lambda$, $X_\lambda \in \tau_\lambda$, resulta

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (W_\lambda \cap X_\lambda) \in \tau$$

$$\therefore U \in \tau \blacklozenge$$

Proposición 1.3 Si $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es una familia de espacios topológicos cuyos conjuntos subyacentes son ajenos dos a dos y existe una topología τ para $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$1.3 \quad X_\lambda \in \tau$$

$$1.4 \quad \tau|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$$

entonces tal topología es única.

Demostración 5 Supóngase que también τ' es una topología para $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$X_\lambda \in \tau' \quad y \quad \tau'|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$$

Entonces, tanto para τ como para τ' es válido el lema anterior, de modo que, para toda $\lambda \in \Lambda$, se tiene:

$$U \in \tau \Leftrightarrow U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda \Leftrightarrow U \in \tau'$$

$$\therefore \tau = \tau'$$

◆

Lema 1.2 Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia de espacios topológicos cuyos conjuntos subyacentes son ajenos dos a dos y sea (X, τ) la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$. Entonces, τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a la familia de inclusiones $(\iota_\lambda : X_\lambda \hookrightarrow X)_\Lambda$.

Demostración 6 Considérese la topología final para X correspondiente a $(\tau_\lambda)_\Lambda$ y a $(\iota_\lambda)_\Lambda$

$$\tau' = \{U \subseteq X : \forall \lambda \in \Lambda, \iota_\lambda^{-1}(U) \in \tau_\lambda\}$$

Para toda $\lambda \in \Lambda$, es claro que $X_\lambda \in \tau'$. Sea $U \in \tau'$; entonces, para toda $\lambda \in \Lambda$, se tiene:

$$U \cap X_\lambda \in \tau_\lambda$$

o sea que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\tau'|_{X_\lambda} \subseteq \tau_\lambda$$

Por otra parte, si $V \in \tau_\lambda$, entonces

$$V \subseteq X \quad y \quad V \cap X_{\lambda'} = \begin{cases} V, & \text{si } \lambda' = \lambda \\ \emptyset, & \text{si } \lambda' \neq \lambda \end{cases}$$

es decir, para toda $\lambda' \in \Lambda$,

$$\iota_{\lambda'}^{-1}(V) \in \tau_{\lambda'}$$

lo que significa que $V \in \tau'$. Por lo tanto, $V \cap X_\lambda \in \tau'|_{X_\lambda}$; pero $V \cap X_\lambda = V$. Luego, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\tau_\lambda \subseteq \tau'|_{X_\lambda}$$

Por lo tanto, τ' es una topología para X tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$X_\lambda \in \tau' \quad y \quad \tau'|_{X_\lambda} = \tau_\lambda$$

Por la proposición anterior, una topología para X con estas propiedades es única; por lo tanto, $\tau' = \tau$. ◆

Proposición 1.4 Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia de espacios topológicos cuyos conjuntos subyacentes son ajenos dos a dos. Si (X, τ) es la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, entonces cada inclusión

$$\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \hookrightarrow (X, \tau)$$

es abierta, es cerrada y

$$\tau_\lambda = \{\iota_\lambda^{-1}(U) : U \in \tau\}$$

Demostración 7 Si (X, τ) es la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, entonces cada inclusión es continua e inyectiva y

$$\tau = \{U \subseteq X : \forall \lambda' \in \Lambda, \iota_{\lambda'}^{-1}(U) \in \tau_{\lambda'}\}$$

Sean, $V \in \tau_\lambda$ y $\lambda' \in \Lambda$, arbitrarias. Entonces,

$$\iota_{\lambda'}^{-1}(\iota_\lambda(V)) = X_{\lambda'} \cap \iota_\lambda(V) = X_{\lambda'} \cap V = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } \lambda' \neq \lambda; \\ V, & \text{si } \lambda' = \lambda; \end{cases} \therefore \iota_{\lambda'}^{-1}(\iota_\lambda(V)) \in \tau_{\lambda'}$$

Esto demuestra que $\iota_\lambda(V) \in \tau$, es decir, que ι_λ es abierta. De aquí que, si $C \subseteq X_\lambda$ es cerrado, se tenga

$$\iota_\lambda(X_\lambda - C) \in \tau$$

Entonces,

$$X_\lambda - C \in \tau$$

Puesto que, para toda $\lambda' \neq \lambda$, $X_{\lambda'} \in \tau$, también

$$\left(\bigcup_{\lambda' \neq \lambda} X_{\lambda'} \right) \cup (X_\lambda - C) \in \tau$$

Consecuentemente

$$X - \left[\left(\bigcup_{\lambda' \neq \lambda} X_{\lambda'} \right) \cup (X_\lambda - C) \right]$$

es cerrado en (X, τ) . Pero

$$X - \left[\left(\bigcup_{\lambda' \neq \lambda} X_{\lambda'} \right) \cup (X_\lambda - C) \right] = X_\lambda \cap [X - (X_\lambda - C)] = X_\lambda \cap \left[\left(\bigcup_{\lambda' \neq \lambda} X_{\lambda'} \right) \cup C \right] = C$$

Esto demuestra que ι_λ es cerrada. Finalmente, puesto que (X, τ) es la suma ajena topológica de la familia $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$, entonces $\tau_\lambda = \tau|_{X_\lambda}$; de aquí que

$$\tau_\lambda = \{U \cap X_\lambda : U \in \tau\} = \{\iota_\lambda^{-1}(U) : U \in \tau\}$$

◆

Definición 1.4 Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ cualquier familia de conjuntos donde hay varios miembros con elementos comunes. Para toda $\lambda \in \Lambda$ se define

$$X'_\lambda = \{(x, \lambda) : x \in X_\lambda\}$$

y una función

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{h_\lambda} & X'_\lambda \\ x & \mapsto & (x, \lambda) \end{array}$$

Entonces:

1. **La suma ajena de $(X_\lambda)_\Lambda$** es

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda$$

Notación: $\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$

2. Si, para toda $\lambda \in \Lambda$, X_λ está topologizado por τ_λ , entonces **la suma ajena topológica** de la familia de espacios topológicos $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ es la suma ajena topológica de la familia de espacios topológicos $(X'_\lambda, \tau'_\lambda)_\Lambda$, donde τ'_λ es tal que, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$h_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X'_\lambda, \tau'_\lambda)$$

resulte un homeomorfismo; es decir, para toda $\lambda \in \Lambda$,

$$\tau'_\lambda = \{h(W) : W \in \tau_\lambda\}$$

Notación: $\coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$

Observación 1.1 A consecuencia del lema anterior, $\coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$ es un espacio cuyo conjunto subyacente es $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ($:= \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$) y cuya topología es final respecto al sumidero de composiciones

$$\left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{h_\lambda} (X'_\lambda, \tau'_\lambda) \xleftarrow{\iota'_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

Descripción de los coproductos cartesianos y topológicos.

■ Sea $(X_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de conjuntos.

1. Si los miembros de la familia no tienen puntos en común, entonces su coproducto cartesiano es el sumidero de inclusiones:

$$\left(\iota_\lambda : X_\lambda \rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

2. En el caso restante, el coproducto cartesiano es el sumidero de composiciones:

$$\left(X_\lambda \xrightarrow{h_\lambda} X'_\lambda \xleftarrow{\iota'_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \right)_\Lambda$$

Notación: $\coprod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$

■ Sea $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ una familia arbitraria de espacios topológicos.

1. Si los miembros de la familia no tienen puntos en común, entonces un coproducto topológico suyo es el sumidero de inclusiones:

$$(\iota_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (X, \tau))_\Lambda$$

donde (X, τ) es la suma ajena topológica de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$.

2. En el caso restante, el coproducto topológico es el sumidero de composiciones:

$$\left((X_\lambda, \tau_\lambda) \xrightarrow{h_\lambda} (X'_\lambda, \tau'_\lambda) \xleftarrow{\iota'_\lambda} \coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda) \right)_\Lambda$$

Notación: $\coprod_{\lambda \in \Lambda} (X_\lambda, \tau_\lambda)$

Coproducto de funciones.

El concepto dual correspondiente al de *producto de una familia de funciones continuas* es el siguiente.

Definición 1.5 Sea

$$(f_\lambda : (X_\lambda, \tau_\lambda) \rightarrow (Y_\lambda, \sigma_\lambda))_\Lambda$$

cualquier familia de funciones continuas.

- Si cada familia de conjuntos $(X_\lambda)_\Lambda$ y $(Y_\lambda)_\Lambda$ consta de elementos ajenos dos a dos, entonces **el coproducto de** $(f_\lambda)_\Lambda$ es la única función continua, denotada por $\coprod f_\lambda$, que para toda $\lambda \in \Lambda$ hace conmutar al diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X_\lambda, \tau_\lambda) & \xrightarrow{\iota_\lambda} & \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tau \right) \\ f_\lambda \downarrow & & \downarrow \coprod f_\lambda \\ (Y_\lambda, \sigma_\lambda) & \xrightarrow{j_\lambda} & \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \sigma \right) \end{array}$$

donde $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tau \right)$ y $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \sigma \right)$ son las sumas ajenas topológicas de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ y de $(Y_\lambda, \sigma_\lambda)_\Lambda$, respectivamente. Debido a la conmutatividad del diagrama correspondiente a $\lambda' \in \Lambda$ se tiene que, para cualquier $x_{\lambda'} \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$:

$$\coprod f_\lambda (x_{\lambda'}) = \coprod f_\lambda \circ \iota_{\lambda'} (x_{\lambda'}) = j_{\lambda'} \circ f_{\lambda'} (x_{\lambda'}) = f_{\lambda'} (x_{\lambda'})$$

- Si $(X_\lambda)_\Lambda$ o $(Y_\lambda)_\Lambda$ constan de miembros con elementos en común, entonces **el coproducto de $(f_\lambda)_\Lambda$** es la única función continua, denotada por $\amalg f_\lambda$, que para toda $\lambda \in \Lambda$ hace conmutar al diagrama:

$$\begin{array}{ccc} (X_\lambda, \tau_\lambda) & \xrightarrow{\iota'_\lambda h_\lambda} & \left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tau \right) \\ f_\lambda \downarrow & & \downarrow \amalg f_\lambda \\ (Y_\lambda, \sigma_\lambda) & \xrightarrow{j'_\lambda k_\lambda} & \left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \sigma \right) \end{array}$$

donde $\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \tau \right)$ y $\left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda, \sigma \right)$ son las sumas ajenas topológicas de $(X_\lambda, \tau_\lambda)_\Lambda$ y de $(Y_\lambda, \sigma_\lambda)_\Lambda$, respectivamente. Debido a la conmutatividad del diagrama correspondiente a $\lambda' \in \Lambda$ se tiene que, para cualquier $(x_{\lambda'}, \lambda') \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} X'_\lambda$:

$$\amalg f_\lambda (x_{\lambda'}, \lambda') = \amalg f_\lambda \circ \iota_{\lambda'} h_{\lambda'} (x_{\lambda'}) = j_{\lambda'} k_{\lambda'} \circ f_{\lambda'} (x_{\lambda'}) = (f_{\lambda'} (x_{\lambda'}), \lambda')$$

lo cual completa la descripción de $\amalg f_\lambda$.

1.3.1. Otros conceptos preliminares

Finaliza este capítulo con la presentación de otros conceptos que se requerirán a lo largo de este estudio.

Definición 1.6 Una **retracción** en \mathfrak{Top} es cualquier función continua que posea una inversa derecha continua; es decir, es una función continua

$$r : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

para la cual existe

$$s : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$$

continua y tal que

$$rs = 1_{(Y, \sigma)}$$

Definición 1.7 Una **sección** en \mathfrak{Top} es cualquier función continua que posea una inversa izquierda continua; es decir, es una función continua

$$s : (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$$

para la cual existe

$$r : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

continua y tal que

$$rs = 1_{(Y, \sigma)}$$

Observación 1.2 f es un homeomorfismo si, y sólo si, es sección y retracción al mismo tiempo.

Definición 1.8 Una **inmersión** es una función continua e inyectiva

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

tal que τ es inicial respecto a f y σ .

Definición 1.9 Un **cociente** es una función continua e inyectiva

$$f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$$

tal que σ es final respecto a τ y f .

Observación 1.3 f es un homeomorfismo si, y sólo si, es inmersión y cociente al mismo tiempo.

Observación 1.4 Toda sección es inmersión.

Observación 1.5 Toda retracción es un cociente.