

Cálculo integral de varias variables

Javier Páez Cárdenas

Índice General

Introducción	v
1 Integral de Riemann	1
1.1 Los primeros pasos	1
1.2 Construcción de la integral de Riemann	3
1.3 Propiedades de la integral de Riemann	12
1.4 Medida de Jordan	24
1.5 La integral sobre conjuntos Jordan-medibles	35
1.6 Problemas	38
2 Calculando integrales	43
2.1 Integrales iteradas	43
2.2 Calculando integrales sobre otros conjuntos	54
2.3 El Teorema de Cambio de Variable	62
2.4 Algunos cambios de variable	71
2.4.1 Cambio a coordenadas polares	71
2.4.2 Cambio a coordenadas cilíndricas	75
2.4.3 Cambio a coordenadas esféricas	79
2.5 Masa y centro de masa	83
2.6 Problemas	95
3 Integrandando sobre curvas	103
3.1 Curvas y trayectorias	103
3.2 Integrandando funciones escalares	108
3.3 Integrandando funciones vectoriales	116
3.4 Campos conservativos (primera parte)	122
3.5 El rotacional en el plano	132
3.5.1 El teorema de Green	141
3.5.2 El rotacional en coordenadas polares	151
3.6 La divergencia en el plano	156
3.7 El rotacional en el espacio	162
3.8 Campos conservativos (segunda parte)	172
3.9 Problemas	179
4 Integrandando sobre superficies	185
4.1 Superficies	185
4.1.1 Área de una superficie	196
4.2 Integrandando funciones escalares	199

4.3	Integrando funciones vectoriales	201
4.4	El teorema de Stokes	206
4.4.1	Campos vectoriales y sistemas coordenados no cartesianos	220
4.4.2	El rotacional en coordenadas esféricas	222
4.5	Campos solenoides (primera parte)	225
4.6	Divergencia y teorema de Gauss	228
4.7	Campos solenoides (segunda parte)	244
4.8	Problemas	247
5	Formas: el concepto que unifica	255
5.1	Formas básicas	255
5.2	Formas diferenciables	259
5.3	Diferenciales exactas (primera parte)	267
5.4	p -variedades parametrizadas	270
5.5	Integrando formas	273
5.6	El Gran Teorema Fundamental del Cálculo	283
5.7	Diferenciales exactas (segunda parte)	286
A	El Teorema de Lebesgue	291
	Índice de materias	298

Introducción

Este texto trata sobre algunos de los distintos conceptos de integración que existen para funciones de varias variables, tema que constituye el núcleo central del curso de Cálculo Diferencial e Integral IV que se imparte en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Dado que el curso de Cálculo Diferencial e Integral IV es un curso de matemáticas que forma parte del tronco común de materias de cuatro de las cinco licenciaturas que se ofrecen en la Facultad, el objetivo principal de este texto es el de exponer los conceptos y resultados matemáticos relacionados con el tema de la integral de funciones de varias variables.

En general, casi todos los conceptos que aquí se exponen se tratan de motivar a partir de problemas específicos, la mayoría de ellos tomados de la física o de la geometría. De esta forma, las definiciones de rotacional o de divergencia, se obtienen como resultado del intento de medir “la rotación producida” por un campo de fuerzas o “la expansión (o contracción)” de un fluido. Una vez hecho lo anterior, se camina hacia la obtención de los resultados que reflejen las estructuras matemáticas subyacentes a estos conceptos.

Es importante mencionar que, aun cuando el objetivo es mantener un nivel de rigor y formalismo matemático adecuado a lo largo de todo el texto, hay conceptos y resultados que se discuten en términos puramente “intuitivos” en virtud del espacio y tiempo que habría que dedicarles a su formalización. En este sentido, su definición rigurosa y la prueba de algunos teoremas no se incluyen en este texto y sólo se mencionan con la intención de que el estudiante los conozca y tenga una visión más global del tema en cuestión.

Este texto está dirigido a aquellos estudiantes que ya han pasado por los primeros tres cursos de Cálculo de la Facultad, lo que significa que se parte del supuesto de que conocen y manejan el Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable y el Cálculo diferencial de funciones de varias variables, además de los cursos básicos de Geometría Analítica, Álgebra Superior y un primer curso de Álgebra Lineal.

El texto está organizado en cinco capítulos y a continuación se da una somera y rápida descripción del contenido de cada uno de ellos.

En el primero se aborda el tema de la integral de Riemann para funciones de varias variables y valores reales. Se hace la construcción formal de este concepto y después se usa para introducir el de medida de Jordan de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Una vez hecho lo anterior, se extiende el concepto de integral de Riemann justo a los conjuntos Jordan-medibles.

El segundo capítulo se dedica al desarrollo de las herramientas que permiten el cálculo de integrales. Los resultados más importantes de este capítulo son el teorema de Fubini y el teorema de Cambio de Variable, y es justo en el caso de este último teorema, la primera vez que no se incluye la prueba de un resultado. A cambio de ella, se hace un análisis detallado de cómo se aplica este teorema y su relación con los diferentes sistemas coordenados que suelen usarse con más frecuencia, tanto en \mathbb{R}^2 (polares) como en \mathbb{R}^3 (cilíndricas y esféricas). El capítulo concluye con una sección en la que se muestra cómo usar toda esta herramienta para obtener la masa de un objeto, y cómo definir y calcular su centro de masa.

En el tercer capítulo se aborda el estudio de lo que tradicionalmente se conoce como Cálculo Vectorial. Comienza con el tema de la Integral de Línea, iniciando con una revisión del concepto de curva y algunos temas relacionados con éstas, como el de longitud de curva. A continuación, se define la integral de línea de una función de valores reales (o campos escalares) a partir del problema del cálculo de la masa total de un alambre no homogéneo, y además de sus propiedades estrictamente matemáticas, se ve cómo este tipo de integrales también se pueden usar para el cálculo de áreas. En la siguiente sección, se introduce la integral de línea de una función de valores vectoriales (o campos vectoriales) a partir del concepto de trabajo. Con base en este mismo concepto y el problema de saber si éste depende de la curva (o trayectoria) que se siga, se aborda la cuestión de los campos conservativos (o campos gradiente, su equivalente en términos matemáticos). Para abordar este problema, en la siguiente sección se desarrolla el concepto de rotacional y divergencia en el plano y se deduce uno de los tres teoremas más importantes del Cálculo Vectorial, el teorema de Green. En la siguiente sección se extiende el concepto de rotacional para campos en el espacio y se concluye el capítulo con una sección en la que se dan un par de teoremas que responden al problema de los campos conservativos.

En el capítulo cuatro se aborda el tema de la Integral de Superficie, y se organiza de forma similar al capítulo de la integral de línea. Comienza con la definición de lo que se entenderá por una superficie y se analizan algunas de sus principales características. A continuación, se define la integral de superficie de una función de valores reales (o campos escalares) a partir del problema del cálculo de la masa total de una lámina no homogénea, y se dan algunas de las propiedades básicas de este concepto. En la siguiente sección, se introduce la integral de superficie de una función de valores vectoriales (o campos vectoriales) a partir del problema de encontrar una forma de medir qué tanto se expande un fluido a través de una superficie. Dado que desde el capítulo tres ya se cuenta con el concepto de rotacional en el espacio, y una vez que ya se definió la integral de superficie de campos vectoriales, se tienen todos los elementos necesarios para abordar otro de los teoremas más importantes del Cálculo Vectorial: el teorema de Stokes. Con base en este teorema, se plantea el problema de determinar cuándo un campo vectorial es un campo solenoide, es decir, cuándo un campo vectorial coincide con ser el rotacional de otro campo. Con el fin de resolverlo, en la siguiente sección se introduce el concepto de divergencia de un campo vectorial y se presenta el tercer teorema más importante del Cálculo Vectorial: el teorema de Gauss. Una vez hecho lo anterior, en la última sección de este capítulo se regresa al problema de los campos solenoides, y se dan un par de teoremas que lo resuelven.

Finalmente, en el quinto capítulo se desarrolla de una manera más descriptiva y menos formal, el tema de las formas diferenciables. El objetivo principal de este capítulo es mostrar cómo el concepto de forma diferenciable unifica los conceptos y resultados que se desarrollaron en los capítulos anteriores. Comienza con la descripción y definición de las p -formas básicas para después dar paso a la de p -forma y lo que significa la derivada de esta clase de objetos, dando lugar al concepto de forma diferenciable. Una vez hecho lo anterior, se muestra que el rotacional y la divergencia se pueden ver como un caso particular de derivación de ciertas p -formas y se ve que el problema de los campos conservativos y los campos solenoides, son un caso particular de un problema más general: el problema de las diferenciales exactas. Con el fin de abordar este problema, en las siguientes secciones se introduce el concepto de p -variedad parametrizada (como una generalización de los de curva y superficie) y se define la integral de una p -forma sobre una p -variedad parametrizada, mostrando que las integrales de línea y de superficie de campos vectoriales, se pueden ver como un caso particular de este tipo de integral. Una vez que se cuenta con todo este material, se tiene todo lo necesario para formular el que bien podría ser calificado como el teorema más importante de todo este texto, y que aquí se prefiere bautizar con el nombre de: “el Gran Teorema Fundamental del Cálculo” (y que en la literatura tradicional se le conoce con el nombre de teorema de Stokes).

Después de mostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss son casos particulares de este gran teorema, en la última sección se formulan un par de resultados que dan respuesta al problema de las diferenciales exactas. Es importante mencionar que en este capítulo no se incluyó una lista de problemas, en virtud de que su objetivo sólo es el de proporcionar un panorama general de la estructura matemática que subyace a todos estos temas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido escrito después de haber impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en varias ocasiones y a lo largo de varios años, el curso de Cálculo Diferencial e Integral IV. Por esta razón, las primeras personas a las que quiero agradecer su “colaboración”, son todos aquellos estudiantes que me permitieron hablarles de estos temas y aprehenderlos junto con ellos.

Para los que no tenemos mucha habilidad para escribir, nos resultan muy importantes aquellos que confían en que sí podemos hacerlo y nos impulsan (o nos “obligan”) a intentarlo. Para este libro, a quienes tengo que agradecer que hayan jugado ese importante papel son: Ana Irene (Ramírez) y Héctor (Méndez Lango).

Una vez que se ha logrado escribir los primeros borradores de un libro como este, el que algunas personas se tomen el (a veces ingrato) trabajo de leerlos, es algo que uno realmente aprecia mucho. En este aspecto, todavía tengo una deuda de agradecimiento con el profesor “Marmol” (Quico Marmolejo), quien leyó y cuestionó constructivamente una buena parte del material contenido en esta obra. No conforme con lo anterior, además tuvo la generosidad de darse a la tarea de realizar un buen número de las figuras que ilustran este texto (y que seguramente el lector podrá identificar fácilmente porque son las que están mejor hechas). Además del profesor “Marmol”, también tuve la suerte de que Ceci (Neve) y Erik (Schwarz), un par de ex-alumnos, se dieran a la tarea de leer minuciosamente la totalidad (o parte) de este trabajo, haciéndome una buena cantidad de importantes sugerencias, y marcándome un buen número de errores tipográficos. Para ellos, mi más sincero agradecimiento. Muchas otras personas me han hecho observaciones o me han ayudado con la siempre difícil tarea de darle un buen “formato” a este libro (¡ingrato \LaTeX !); sería muy largo mencionarlas a todas, pero no por ello quiero dejar de expresarles mi agradecimiento por su valiosa ayuda.

Capítulo 1

Integral de Riemann

1.1 Los primeros pasos

Del mismo modo que para el caso real, el concepto de integral de Riemann¹ de funciones de varias variables (y valores reales), encuentra su motivación en problemas de diversa índole. Por ejemplo, supóngase que se tiene una lámina de metal cuyo grosor no es homogéneo. Supongamos que tenemos la suerte de contar con una función ρ que nos dice cuál es la “densidad” de la lámina en cada uno de sus puntos (es decir, una función que en “cada punto P de la lámina” nos asocia un número real $\rho(P)$ que nos indica la “cantidad de masa (por unidad de área) contenida alrededor de dicho punto”). La pregunta sería entonces: ¿cómo, a partir de esta función ρ , podríamos saber la masa total de la lámina? Supongamos por ahora que la lámina tiene la forma de un rectángulo R (véase la figura 1.1).

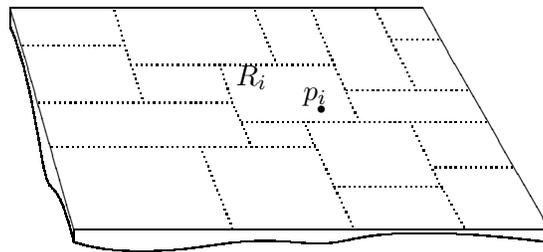


Figura 1.1: Lámina rectangular

Si a este rectángulo R lo subdividimos en rectángulos más pequeños, R_1, \dots, R_k y en cada uno de estos subrectángulos escogemos cualesquiera puntos p_1, \dots, p_k , entonces el producto $\rho(p_i) \cdot \text{área}(R_i)$ nos daría un valor aproximado de la cantidad de masa contenida en el pedazo de lámina representado por el subrectángulo R_i (obsérvese que en términos de unidades, todo está bien, ya que la densidad se mide en unidades de masa por (o sobre) unidades de área, que al multiplicarlas por el área de R_i , obtenemos unidades de masa). Así, una aproximación a la masa total de la lámina (representada por el rectángulo R) estaría dada por

$$\sum_{i=1}^k \rho(p_i) \cdot \text{área}(R_i) \quad (1.1)$$

¹Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 de septiembre de 1826 - 20 de junio de 1866) fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial.

Es un hecho claro que, si los subrectángulos en los que subdividimos al rectángulo R son cada vez más pequeños, las diferentes sumas que obtenemos se aproximan “mejor” a la masa de la lámina. Es decir, es “intuitivamente claro” que estas sumas deben aproximarse (en la medida en que nuestra subdivisión sea cada vez “más fina”) a un valor específico.

Si sólo pensamos a ρ como una función que asigna valores positivos (independientemente de que éstos representen una densidad de masa), la expresión 1.1 tiene un significado geométrico muy específico. Si nos fijamos en la gráfica de la función ρ (que en este caso es una superficie en \mathbb{R}^3 ubicada por arriba del plano XY , como se muestra en la figura 1.2), la cantidad $\rho(p_i) \cdot \text{área}(R_i)$ representa el volumen de un paralelepípedo cuya base es el rectángulo R_i y altura $\rho(p_i)$. Así, la suma de la expresión 1.1 también se puede interpretar como una aproximación al volumen que hay por arriba del rectángulo R y por debajo de la gráfica de ρ . En este sentido, podemos decir que, el problema del cálculo de la masa total de nuestra lámina, se puede “cambiar” por el problema de calcular el volumen de una cierta región. Este enfoque geométrico será el que seguiremos de aquí en adelante para dar un significado más preciso a las ideas expresadas en los párrafos anteriores.

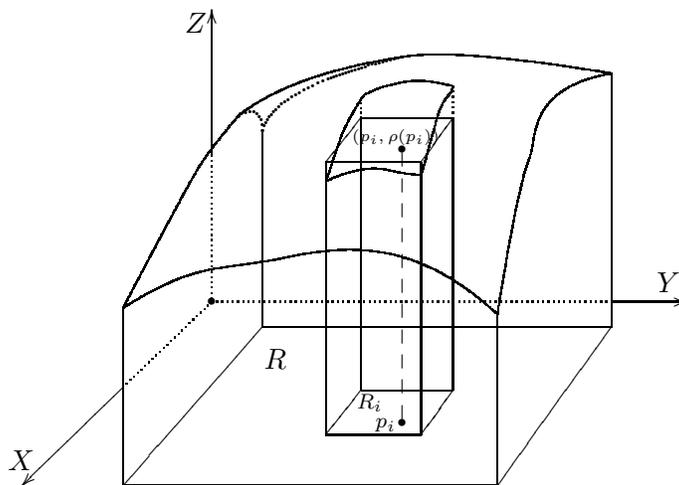


Figura 1.2: Función de densidad sobre R_i

Por tanto, el problema que abordaremos se podría resumir de la siguiente manera: si tenemos

1. R un “rectángulo” en \mathbb{R}^n
 2. f una función de valores reales que está definida en R
 3. R_1, \dots, R_k subrectángulos que se obtienen al subdividir a R y cualesquiera $p_i \in R_i$ ($i = 1, \dots, k$)
- ¿existe un número, digamos I , tal que la suma de la forma

$$\sum_{i=1}^k f(p_i) \cdot \text{área}(R_i)$$

“se parece mucho” a I ? Más aun, ¿si los rectángulos R_1, \dots, R_k son una subdivisión “más fina” de R , entonces la correspondiente suma se parece más a I ?

1.2 Construcción de la integral de Riemann

A fin de “construir” una respuesta al problema planteado, precisaremos algunos de los términos que hemos venido utilizando.

Definición 1.1 R es un rectángulo en \mathbb{R}^n si es un conjunto de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

en donde cada $[a_i, b_i]$ es un intervalo cerrado de números reales. Al número

$$d(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

lo llamaremos la diagonal de R , y al número

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots \cdot (b_n - a_n)$$

se le llamará la medida de R .

Nótese que $m(R) \geq 0$ y que en el caso de \mathbb{R}^2 esta medida es el área de R , mientras que en \mathbb{R}^3 coincide con ser el volumen de R .

Diremos que un rectángulo es no degenerado si $m(R) > 0$. Todos los rectángulos que consideremos de aquí en adelante serán de este tipo, a menos que se indique lo contrario.

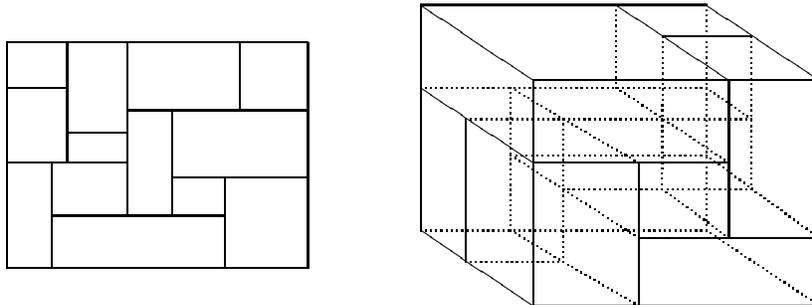


Figura 1.3: No-particiones

Existen muchas formas de subdividir a un rectángulo R , como las que se muestran en la figura 1.3. Sin embargo, para la construcción que vamos a hacer, será suficiente con que consideremos a aquellas que se obtienen de hacer subdivisiones en cada uno de los intervalos $[a_i, b_i]$, como se muestra en la figura 1.4.

Definición 1.2 Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si \mathcal{P}_i es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$ (recuérdese que \mathcal{P}_i es entonces un subconjunto finito del intervalo $[a_i, b_i]$ que incluye a los extremos a_i, b_i) para cada $i = 1, \dots, n$, decimos que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$$

es una partición de R . Obsérvese que \mathcal{P} es un subconjunto finito de R , que consta de los vértices de cada uno de los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} . A la partición \mathcal{P}_i le llamaremos la i -ésima partición coordenada de \mathcal{P} . Denotaremos por \mathbf{P}_R al conjunto de todas las particiones del rectángulo R .

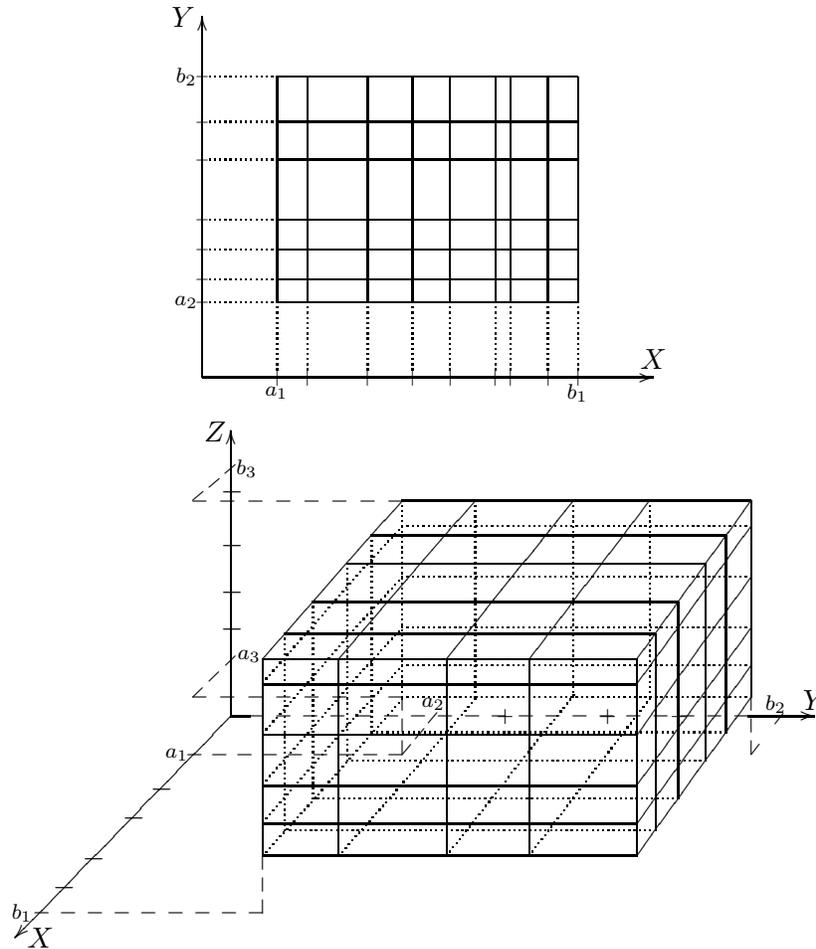


Figura 1.4: Particiones buenas

Hablando de particiones, que son a final de cuentas las que nos permitirán hablar de las diferentes subdivisiones que podemos hacer de un rectángulo R , cabe preguntarse: ¿qué relación tendrá que haber entre dos diferentes particiones de R de tal forma que podamos asegurar que la subdivisión inducida por una de ellas es “más fina” que la subdivisión inducida por la otra? Esta idea queda expresada en la siguiente definición

Definición 1.3 Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones de R , con $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \cdots \times \mathcal{Q}_n$. Decimos que \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} si $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{Q}_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Nótese que, de acuerdo a esta definición, si \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} entonces $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ y que lo recíproco también es cierto (afirmación que se deja probar al lector como un problema).

La figura 1.5 muestra (para el caso de \mathbb{R}^2) que, en efecto, la subdivisión inducida por una partición \mathcal{Q} que refina a otra partición \mathcal{P} , es “más fina” que la subdivisión inducida por \mathcal{P} .

Dada una partición $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$, la partición $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}_1 \cup \{c\}) \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$, donde $c \in [a_1, b_1] \setminus \mathcal{P}_1$, es una de las particiones más sencillas que refinan a \mathcal{P} . En particular, es importante hacer notar que los subrectángulos inducidos por cada una de ellas son casi los mismos, salvo por algunos subrectángulos de \mathcal{P} , que se pueden poner como la unión de dos de los subrectángulos inducidos por esta \mathcal{Q} (probar esta afirmación es más un problema de notación que de otra índole) (ver figura 1.6).

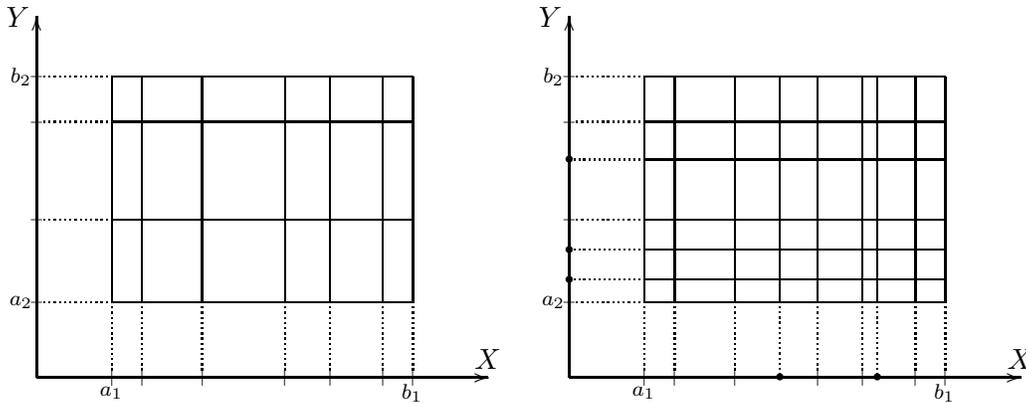


Figura 1.5: Una partición y un refinamiento de ella

Destacar la relación que hay entre estas dos particiones tiene como objetivo mostrar que, si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \cdots \times \mathcal{Q}_n$ es cualquier otra partición que refina a \mathcal{P} , entonces podemos construir una sucesión finita de particiones $\mathcal{Q}^{(0)}, \dots, \mathcal{Q}^{(m)}$ tales que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}^{(0)}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{(m)}$ y con la propiedad adicional de que la partición $\mathcal{Q}^{(i)}$ sólo tiene un punto más, en alguna de sus particiones coordenadas, que $\mathcal{Q}^{(i-1)}$ (para $i = 1, \dots, m$). Así, de acuerdo a lo que observamos en el párrafo anterior, los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{Q}^{(i-1)}$ son casi los mismos, salvo por algunos, que se pueden poner como la unión de dos subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{Q}^{(i)}$. Como esto es válido para toda $i = 1, \dots, m$, podemos concluir que cada uno de los subrectángulos inducidos por la partición \mathcal{P} es la unión de algunos de los subrectángulos inducidos por \mathcal{Q} , propiedad que con frecuencia usaremos.

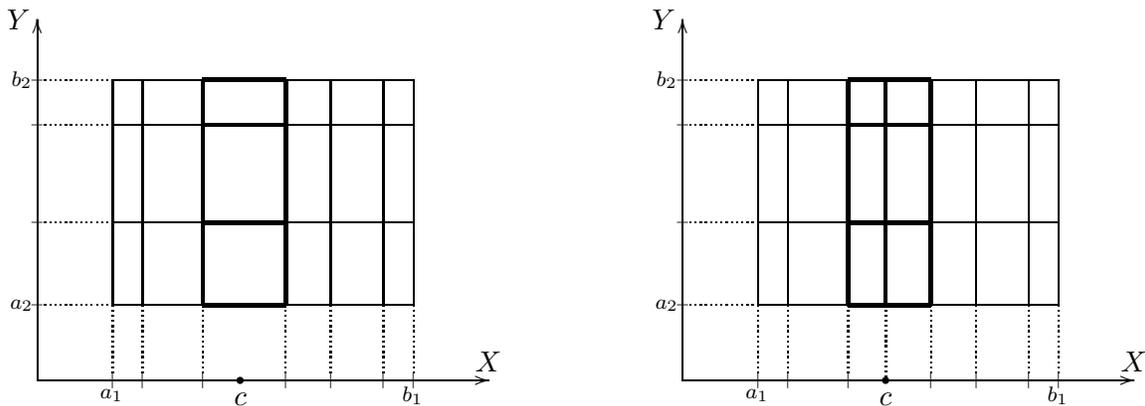


Figura 1.6: Si \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} los subrectángulos inducidos por \mathcal{P} son la unión de subrectángulos inducidos por \mathcal{Q}

Note que, para obtener esta sucesión, bastaría empezar haciendo $\mathcal{Q}^{(0)} = \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}^{(1)} = (\mathcal{P}_1 \cup \{c\}) \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde $c \in \mathcal{Q}_1 \setminus \mathcal{P}_1$; $\mathcal{Q}^{(2)} = (\mathcal{P}_1 \cup \{c, d\}) \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde $d \in \mathcal{Q}_1 \setminus (\mathcal{P}_1 \cup \{c\})$, y así sucesivamente, hasta agotar todos los puntos de \mathcal{Q}_1 que no están en \mathcal{P}_1 , para después hacer un proceso análogo con todos los puntos de \mathcal{Q}_2 que no están en \mathcal{P}_2 , y una vez agotados estos, continuar con el mismo procedimiento para el resto de las particiones coordenadas.

En general, dadas dos particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} de un rectángulo R , no necesariamente existe una

relación de refinamiento entre ellas. Sin embargo, es posible construir una tercera partición que refine a ambas; la denotaremos por $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$ y si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \cdots \times \mathcal{Q}_n$ entonces

$$\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q} = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{Q}_1) \times \cdots \times (\mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}_n)$$

(Nótese el símbolo especial de unión que usamos, en virtud de que $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$ no coincide con $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$) (ver figura 1.7).

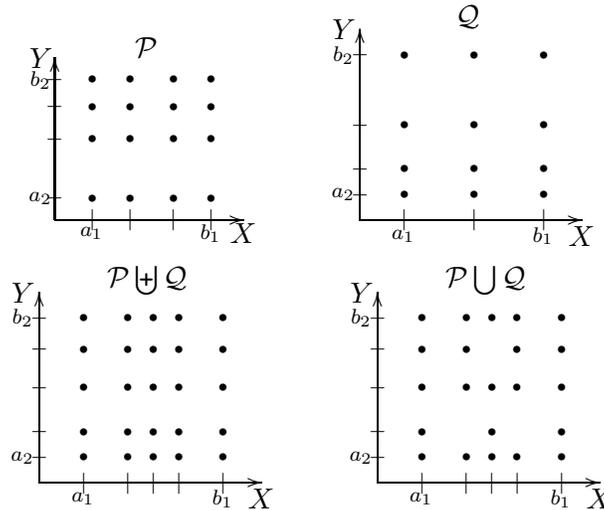


Figura 1.7: $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$ no coincide con $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$

Una vez que hemos precisado estos conceptos, el siguiente paso consistirá en construir sumas como las que aparecen en 1.1. Para ello, supondremos que tenemos una cierta función f , que está definida en R , y que toma valores reales. Es importante destacar que para construir sumas como las de 1.1 (que a partir de este momento empezaremos a llamar por su nombre: *sumas de Riemann*), además de contar con una partición \mathcal{P} de R (que induce una subdivisión de R), también tenemos que hacer una elección de un punto en cada uno de los subrectángulos inducidos por dicha partición. Así pues, por cada partición \mathcal{P} , podemos obtener una infinidad de sumas de Riemann (tantas como formas diferentes haya de elegir dichos puntos). Veremos que no se necesita hacer tanto.

En realidad, por cada partición \mathcal{P} de R sólo vamos a construir un par de sumas. Si, (como dijimos anteriormente y para el caso de \mathbb{R}^2), nuestro problema se puede ver como el cálculo de un volumen (el que está por “debajo” de la gráfica de f), para alcanzar dicho volumen bastaría entonces con tomar sumas de Riemann, sólo que en lugar de evaluar a la función f en algún punto del subrectángulo R_i , sería suficiente con tomar el mínimo valor de f sobre dicho subrectángulo. Como podrá suponerse, el otro tipo de sumas que vamos a tomar en cuenta serán aquellas en las que, en lugar de tomar el valor mínimo, tomaremos el valor máximo de f sobre el subrectángulo R_i . La “intuición dice” que con cualquiera de estas sumas debería de ser suficiente para aproximarnos al “volumen por debajo de la gráfica de f ”, con la peculiaridad de que con las primeras nos aproximamos “por abajo” de dicho volumen, y con las segundas lo hacemos “por arriba” del mismo volumen (ver figuras 1.8 y 1.9).

Una vez que hemos llegado hasta este punto, sólo resta aclarar un “detalle”. En general, para que podamos asegurar que una función alcanza su valor mínimo y su valor máximo sobre un conjunto, sabemos que es “suficiente” con que dicha función sea continua sobre el conjunto y que éste sea cerrado y acotado. Como esta construcción no la queremos “restringir” sólo a este tipo de

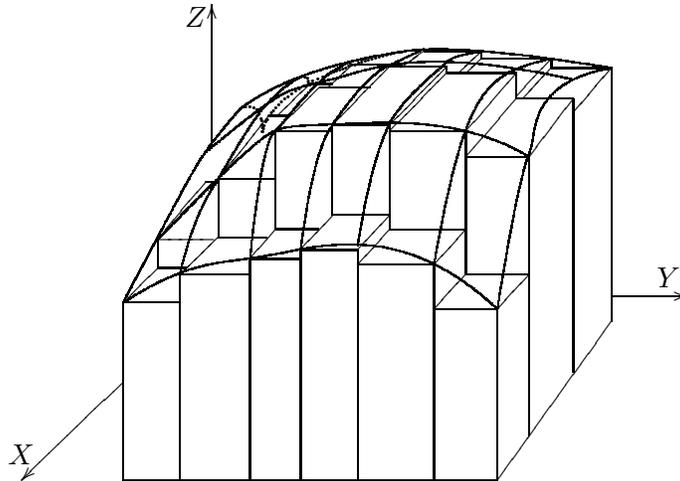


Figura 1.8: Suma inferior

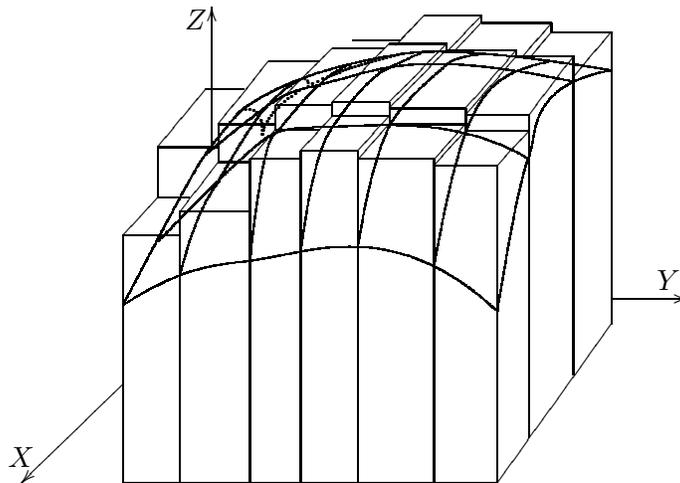


Figura 1.9: Suma superior

funciones, y a este tipo de conjuntos (aunque un rectángulo sí es un conjunto cerrado y acotado), en lugar del tomar el valor mínimo y el valor máximo de f sobre cada subrectángulo R_i , tomaremos el ínfimo y el supremo de los valores de f sobre este subrectángulo. Tomar este camino sólo nos obliga a suponer que la función f está acotada sobre el rectángulo R , que comparada con la hipótesis de continuidad, esta nueva condición nos sale más barata. Así pues, de aquí en adelante supondremos que nuestra función f , además de estar definida sobre R , también está acotada (sobre R).

Aclarado el punto, procedemos a dar las siguientes definiciones:

Definición 1.4 Sean, f una función (de valores reales) definida y acotada sobre un rectángulo R contenido en \mathbb{R}^n , y \mathcal{P} una partición de R . Si R_1, \dots, R_k son los subrectángulos de R inducidos por la partición \mathcal{P} , definimos la suma inferior de f correspondiente a la partición \mathcal{P} , que denotaremos por $\underline{S}(f, \mathcal{P})$, como

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k m_i \cdot m(R_i)$$

en donde $m_i = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$, $i = 1, \dots, k$.

Análogamente, definimos la suma superior de f correspondiente a la partición \mathcal{P} , que denotaremos por $\overline{S}(f, \mathcal{P})$, como

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k M_i \cdot m(R_i)$$

en donde $M_i = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$, $i = 1, \dots, k$.

Estas sumas tienen una serie de propiedades, de las cuales la primera es bastante evidente:

Proposición 1.5 Si \mathcal{P} es cualquier partición de R , entonces $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$.

Dem. Como m_i y M_i son, respectivamente, el ínfimo y el supremo del mismo conjunto, a saber $\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$, se tiene que $m_i \leq M_i$. Por otra parte, de la definición de medida de un rectángulo se tiene que $0 \leq m(R_i)$ por lo que $m_i \cdot m(R_i) \leq M_i \cdot m(R_i)$ para cada $i = 1, \dots, k$, de tal forma que sumando sobre las i 's, se tiene que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$. ■

Como ya habíamos observado desde el principio, también es geoméricamente claro que si refinamos una partición (es decir, la hacemos “más fina”) entonces nuestras sumas se parecen más a ese volumen. Más aún, podemos estar seguros de que si \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} entonces la suma inferior de f correspondiente a \mathcal{Q} es mayor o igual que la suma inferior correspondiente a \mathcal{P} (ver figura 1.10); y análogamente, la suma superior de f correspondiente a \mathcal{Q} es menor o igual que la suma superior correspondiente a \mathcal{P} .

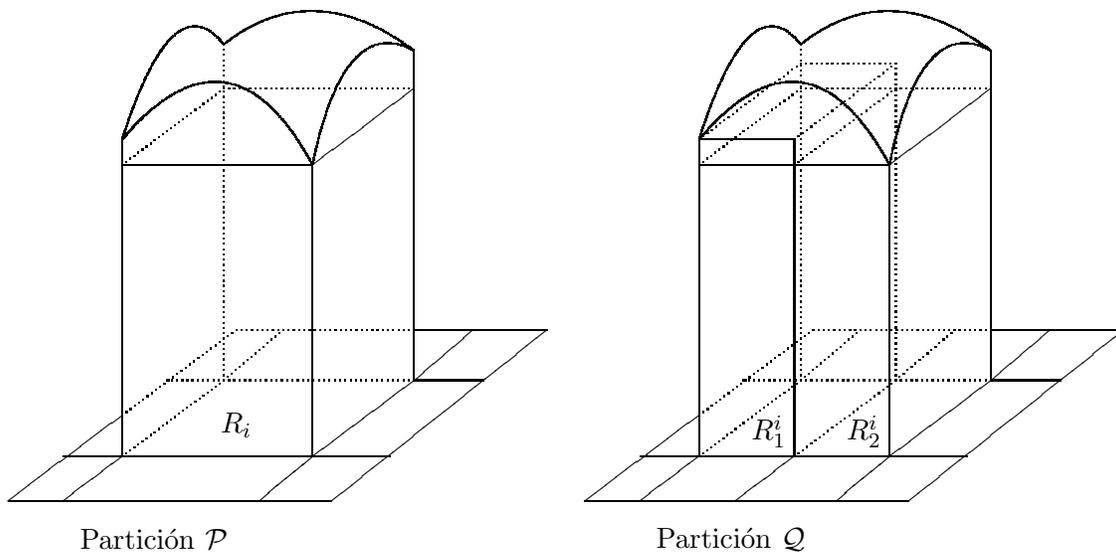


Figura 1.10: Si \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} entonces la suma inferior de f correspondiente a \mathcal{Q} es mayor que la suma inferior correspondiente a \mathcal{P}

Esta propiedad la dejamos plasmada en la siguiente

Proposición 1.6 Sean $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbf{P}_R$. Si \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} entonces $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{Q})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$.

Dem. Sean R_1, \dots, R_k los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} , y sean $R_1^i, \dots, R_{k_i}^i$ los subrectángulos inducidos por \mathcal{Q} que unidos nos dan R_i (para cada $i \in \{1, \dots, k\}$). Dado que cada R_j^i está contenido en R_i , tenemos que $\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \subset \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ y por lo tanto $\inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \leq \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\}$ y $\sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \leq \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ para cada $j = 1, \dots, k_i$, de modo que multiplicando estas desigualdades por $m(R_j^i)$, que es un número no negativo, se tiene que

$$\inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i) \leq \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i)$$

y

$$\sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i)$$

Si ahora sumamos ambas desigualdades, corriendo el índice j de 1 a k_i , tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i)$$

y

$$\sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i)$$

Ahora, como el subrectángulo R_i es la unión de los subrectángulos $R_1^i, \dots, R_{k_i}^i$, se tiene que $m(R_i) = \sum_{j=1}^{k_i} m(R_j^i)$ y por lo tanto

$$\inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i)$$

y

$$\sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i)$$

Si en estas desigualdades sumamos con respecto del índice i , corriendo de 1 a k , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i) \leq \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \right)$$

y

$$\sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \right) \leq \sum_{i=1}^k \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i)$$

Recordando la definición de suma inferior y suma superior, tenemos entonces que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{Q})$$

y

$$\overline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Obsérvese que de las dos proposiciones anteriores podemos concluir, bajo el supuesto de que la partición \mathcal{Q} refina a la partición \mathcal{P} , que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$$

y

$$\underline{S}(f, \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

De hecho, si recurrimos nuevamente a la interpretación geométrica, estas desigualdades no nos deben de causar sorpresa puesto que cualquier suma inferior debe de “estar por debajo” del volumen que queremos calcular, y de manera análoga, cualquier suma superior debe de “estar por arriba”. Por lo anterior, debiera ser cierto que, dadas cualesquiera dos particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} de R , se debe tener que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$. Esta propiedad, que será muy importante para la construcción que estamos realizando, la dejaremos establecida en la siguiente

Proposición 1.7 *Si \mathcal{P} y \mathcal{Q} son cualesquiera dos particiones del rectángulo R entonces se cumple que*

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$$

Dem. Consideremos la partición $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$. Como dijimos anteriormente, esta partición refina tanto a \mathcal{P} como a \mathcal{Q} de tal forma que, por la proposición 1.2 debemos tener que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(f, \mathcal{P} \uplus \mathcal{Q})$$

y

$$\overline{S}(f, \mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$$

Como $\underline{S}(f, \mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P} \uplus \mathcal{Q})$ (proposición 1.1), se tiene que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$. ■

La conclusión de la proposición anterior resultará fundamental para la obtención (cuando menos “teórica”) de ese número I al cual se deben de parecer las sumas de Riemann de una cierta función f . Nótese que esta proposición nos dice dos cosas relevantes:

1. el conjunto de todas las sumas inferiores que se obtiene para una función f definida sobre un rectángulo R , es un conjunto acotado superiormente y además cualquier suma superior es una cota superior de dicho conjunto, y
2. el conjunto de todas las sumas superiores que se obtiene para una función f definida sobre un rectángulo R , es un conjunto acotado inferiormente y además cualquier suma inferior es una cota inferior de dicho conjunto.

Así pues, cuando menos desde un punto de vista teórico, podríamos esperar que existiera algo así como “la suma inferior más grande” o “la suma superior más pequeña”, y si todo funciona bien, cualquiera de estos dos números debiera de coincidir con el tan famoso y anhelado “volumen que hay por debajo de la gráfica de f ”. A continuación daremos una definición más precisa de estos números.

Denotaremos por $\underline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas inferiores de una función f (definida sobre el rectángulo R) y como $\overline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas superiores, es decir:

$$\underline{S}(f) = \{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

y

$$\overline{S}(f) = \{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

Dado que estos conjuntos son acotados superior e inferiormente, respectivamente, podemos dar la siguiente

Definición 1.8 Al supremo del conjunto $\underline{S}(f)$ lo llamaremos la integral inferior de f sobre R , y lo denotaremos por $\int_{-R} f$, y al ínfimo del conjunto $\overline{S}(f)$ lo llamaremos la integral superior de f sobre R , y lo denotaremos por $\int_R f$. De forma abreviada, se tendrá que

$$\int_{-R} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

y

$$\int_R f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

Sin duda nuestra primera reacción será pensar que estos números son iguales para cualquier función acotada que consideremos. Desafortunadamente, esto no siempre es así. El siguiente ejemplo nos muestra una función definida y acotada sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 1]$, para la que no se cumple que estos números sean iguales.

Ejemplo 1.9 Sea $f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ o } y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \text{ y } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Muestre que $\int_R f \neq \int_{-R} f$.

Solución. Obsérvese que si \mathcal{P} es cualquier partición del rectángulo R , y R_i es cualquier subrectángulo inducido por esta partición, entonces sobre dicho subrectángulo siempre existen parejas (x, y) tales que x o $y \in \mathbb{Q}$, y parejas (x, y) tales que x y $y \notin \mathbb{Q}$. De aquí se deduce que $M_i = 1$ y $m_i = 0$ de tal forma que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) = 1$ y $\underline{S}(f, \mathcal{P}) = 0$ para cualquier partición \mathcal{P} de R . De esta forma, se tiene que $\underline{S}(f) = \{0\}$ y $\overline{S}(f) = \{1\}$ por lo que $\int_R f = 1$ y $\int_{-R} f = 0$.

Aun cuando puede que este ejemplo nos desanime un poco, es importante hacer un par de observaciones:

1. la integral inferior y la integral superior de una función definida y acotada sobre un rectángulo R siempre existen, y
2. la integral inferior siempre es menor o igual que la integral superior, es decir,

$$\int_{-R} f \leq \int_R f$$

Esta última desigualdad se obtiene muy fácilmente a partir de la proposición 1.7; baste recordar que de esa proposición se deduce que cualquier suma superior es una cota superior del conjunto de todas las sumas inferiores por lo que $\int_{-R} f$ (que es el supremo de todas las sumas inferiores y por lo tanto la más pequeña de todas las cotas superiores de este mismo conjunto) debe cumplir que $\int_{-R} f \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$ para cualquier partición \mathcal{P} de R . De aquí, se tiene que $\int_{-R} f$ es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores, por lo que dicho número debe ser menor o igual que el ínfimo del conjunto de todas las sumas superiores, que es $\int_R^- f$. Por tanto, se tiene que $\int_{-R} f \leq \int_R^- f$ (este mismo trabalengua se puede decir de otra forma si ahora empezamos diciendo que cualquier suma inferior es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores, lo que también se sabe por la misma proposición. ¡Inténtelo!)

Así, de entre las funciones que están definidas y son acotadas sobre un rectángulo R , fijaremos nuestra atención en aquéllas para las cuales se tiene que $\int_R^- f = \int_{-R} f$. Este tipo de funciones serán conocidas como funciones Riemann-integrables (o simplemente integrables) sobre R , como quedará establecido en la siguiente

Definición 1.10 Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R . Decimos que f es Riemann-integrable (o simplemente integrable) sobre R si se tiene que la integral inferior y la integral superior de f sobre R son iguales. Es decir, si

$$\int_R^- f = \int_{-R} f.$$

En este caso, a este número lo llamaremos la integral de f y lo denotaremos por $\int_R f$.

1.3 Propiedades de la integral de Riemann

Existen muchas propiedades del concepto que acabamos de definir, pero hay una en particular que sin duda tiene que ser la primera en aparecer. Se trata de una proposición que nos da un criterio alternativo para saber cuándo una función es integrable. Este criterio tiene la ventaja (o desventaja, según se vea) de establecer cuándo una función es integrable sin necesidad de saber cuál es el valor de la integral, algo así como el criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones.

Si una función es integrable, significa que la integral inferior y la integral superior de dicha función son iguales, digamos a un cierto número I . De las propiedades del ínfimo y del supremo sabemos entonces que, para cualquier cantidad positiva que demos (por pequeña que esta sea), existen particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} para las cuales las correspondientes suma inferior ($\underline{S}(f, \mathcal{Q})$) y suma superior ($\overline{S}(f, \mathcal{P})$) distan de este número I en menos que la mitad de la cantidad positiva que dimos, y por lo tanto la distancia entre estos números será menor a la distancia original (ver figura 1.11).

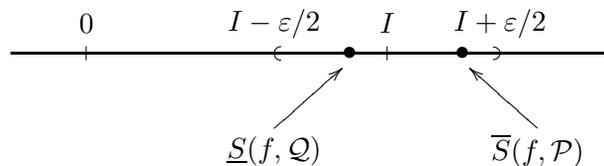


Figura 1.11: Si una función f es integrable y su integral es igual a un número I , dada una cantidad $\varepsilon > 0$, existen particiones \mathcal{Q} y \mathcal{P} tales que $\underline{S}(f, \mathcal{Q})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P})$ difieren de I en menos que $\varepsilon/2$

Así, podemos asegurar que, para cualquier cantidad positiva que demos (digamos $\varepsilon > 0$), se pueden encontrar particiones \mathcal{P} y \mathcal{Q} tales que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon$. De hecho, vamos a mostrar que se puede conseguir una sola partición para la cual vale la misma desigualdad. Lo mejor de todo esto es que esta propiedad no sólo es necesaria (como acabamos de platicarlo) sino que también es una propiedad suficiente (que es la parte más interesante y más comunmente usada); es decir, si para cada cantidad positiva que demos, existe una partición \mathcal{P} para la cual se tiene que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ entonces podremos estar seguros de que la función f es integrable. Esta importante propiedad la estableceremos en el siguiente

Teorema 1.11 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R . f es integrable sobre R si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe \mathcal{P} partición de R tal que*

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

Dem. Probemos la necesidad. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es integrable, sabemos que $\int_R^- f = \int_{-R} f$. Llamemos I a este número. Como $I = \int_{-R} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$, de las propiedades del supremo sabemos que para $\varepsilon/2 > 0$, existe \mathcal{P}' partición de R tal que

$$I - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, \mathcal{P}') \leq I$$

Por otra parte, como $I = \int_R^- f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$, de las propiedades del ínfimo sabemos que para $\varepsilon/2 > 0$, existe \mathcal{Q} partición de R tal que

$$I \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q}) < I + \varepsilon/2$$

Si ahora hacemos $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \uplus \mathcal{Q}$, sabemos que \mathcal{P} refina tanto a \mathcal{P}' como a \mathcal{Q} de tal forma que, por la proposición 1.6 tenemos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}') \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$$

y por lo tanto, de las desigualdades anteriores obtenemos que

$$I - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) < I + \varepsilon/2$$

De estas últimas desigualdades concluimos que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

que es lo que se quería demostrar.

Para la prueba de la suficiencia, tenemos que demostrar que la función f es integrable, lo que significa que tenemos que probar que $\int_R^- f = \int_{-R} f$ para lo cual basta con demostrar que $\int_R^- f - \int_{-R} f = 0$. Como sabemos que $0 \leq \int_R^- f - \int_{-R} f$, es suficiente con demostrar que este número se puede hacer más pequeño que cualquier cantidad positiva (digamos $\varepsilon > 0$). Siendo así la cosa, sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo a nuestra hipótesis, existe \mathcal{P} partición de R tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

Por otra parte, como $\int_{-R} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$ y $\int_R^- f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$, sabemos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \int_{-R} f \leq \int_R^- f \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

de modo que, como los extremos de estas desigualdades son dos números que distan entre si en menos de ε , entonces los números que están en medio también distan en menos de ε , es decir

$$0 \leq \int_R^- f - \int_{-R} f < \varepsilon$$

Como esto se vale para toda $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\int_R^- f - \int_{-R} f = 0$$

Por lo tanto $\int_R^- f = \int_{-R} f$, de modo que f es integrable sobre R . ■

Quizás fue una decepción el que no toda función definida y acotada sobre un rectángulo resultara ser integrable. Sin embargo, no hay porque tirarse al suelo. En el siguiente teorema mostraremos que hay una clase muy grande de funciones que sí resultan ser integrables. Estas funciones son las funciones continuas que (como la intuición nos lo indica, para este tipo de funciones sí debe de existir el “volumen bajo su gráfica”), sí son integrables. Y nada mejor que el siguiente teorema para estrenar el anterior.

Teorema 1.12 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua sobre el rectángulo R . Entonces f es integrable sobre R .*

Dem. Para la prueba de este teorema, tendremos que usar un par de teoremas (muy importantes) acerca de las funciones continuas que están definidas sobre conjuntos cerrados y acotados (como los rectángulos con los que estamos trabajando). El primero de ellos es el que nos dice que toda función de este tipo alcanza su valor máximo y su valor mínimo en puntos del dominio. Y el segundo, el que nos dice que estas mismas funciones también deben de ser uniformemente continuas sobre el mismo dominio. Con este par de potentes armas demostraremos nuestro teorema haciendo uso, por supuesto, del teorema 1.11.

Así pues, sea $\varepsilon > 0$. Como ya dijimos, sabemos que f también es uniformemente continua sobre R , de modo que, para $\varepsilon/m(R)$ (que es una cantidad positiva), existe $\delta > 0$ con la propiedad de que si $\hat{x}, \hat{y} \in R$ son tales que $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \delta$ entonces $|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \varepsilon/m(R)$. Sea ahora \mathcal{P} una partición de R con la propiedad de que la diagonal de cualquier subrectángulo R_i (de los inducidos sobre R por la partición \mathcal{P}) sea menor que δ (es decir, $d(R_i) < \delta$) (probar que existe una partición con esta propiedad es un ejercicio de este capítulo). Como también dijimos antes, como f es continua en cada subrectángulo R_i (que supongamos fueron k), existen $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in R_i$ tales que $f(\hat{x}_i) \leq f(\hat{x}) \leq f(\hat{y}_i)$ para todo $\hat{x} \in R_i$. Con todo esto en mente, tenemos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k m_i \cdot m(R_i) = \sum_{i=1}^k f(\hat{x}_i) \cdot m(R_i)$$

y

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^k M_i \cdot m(R_i) = \sum_{i=1}^k f(\hat{y}_i) \cdot m(R_i)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k f(\hat{y}_i) \cdot m(R_i) - \sum_{i=1}^k f(\hat{x}_i) \cdot m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (f(\hat{y}_i) - f(\hat{x}_i)) \cdot m(R_i)\end{aligned}$$

Ahora, como $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in R_i$ y $d(R_i) < \delta$, tenemos que $\|\hat{x}_i - \hat{y}_i\| < \delta$ de modo que $|f(\hat{x}_i) - f(\hat{y}_i)| = f(\hat{y}_i) - f(\hat{x}_i) < \varepsilon/m(R)$, para cada $i = 1, \dots, k$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k (f(\hat{y}_i) - f(\hat{x}_i)) \cdot m(R_i) &< \sum_{i=1}^k (\varepsilon/m(R)) \cdot m(R_i) \\ &= \varepsilon/m(R) \cdot \sum_{i=1}^k m(R_i) \\ &= (\varepsilon/m(R)) \cdot m(R) \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

y por lo tanto, f es integrable sobre R . ■

Es importante destacar que el teorema anterior sólo nos dice que la continuidad es una condición suficiente para que una función sea integrable. De hecho, y afortunadamente, una función puede ser discontinua e integrable al mismo tiempo. El siguiente, es un ejemplo de este tipo de funciones.

Ejemplo 1.13 Sea $f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Muestre que f es integrable sobre R .

Solución. Para demostrar que esta función es integrable usaremos (como casi siempre haremos), el teorema 1.11. Sea $\varepsilon > 0$. Para esta ε , considérese la siguiente partición $\mathcal{P} = \{0, 1/2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2, 1\} \times \{0, 1\}$ del rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 1]$ (observe que necesitamos suponer que $0 < \varepsilon < 1$ para que $0 < 1/2 - \varepsilon/2$ y $1/2 + \varepsilon/2 < 1$, lo que no representa ningún problema, puesto que si lo probamos para estos números, entonces el teorema 1.11 también será cierto para números más grandes). Los subrectángulos de R inducidos por esta partición son los siguientes: $R_1 = [0, 1/2 - \varepsilon/2] \times [0, 1]$, $R_2 = [1/2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2] \times [0, 1]$, y $R_3 = [1/2 + \varepsilon/2, 1] \times [0, 1]$. Es fácil ver que: $m_3 = m_2 = 0$ mientras que $m_1 = 1$. Por otra parte, también es fácil ver que: $M_1 = M_2 = 1$ mientras que $M_3 = 0$. De aquí, se tiene que

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, \mathcal{P}) &= m_1 \cdot m(R_1) + m_2 \cdot m(R_2) + m_3 \cdot m(R_3) \\ &= 1 \cdot (1/2 - \varepsilon/2) + 0 \cdot \varepsilon + 0 \cdot (1/2 - \varepsilon/2) \\ &= 1/2 - \varepsilon/2\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(f, \mathcal{P}) &= M_1 \cdot m(R_1) + M_2 \cdot m(R_2) + M_3 \cdot m(R_3) \\
 &= 1 \cdot (1/2 - \varepsilon/2) + 1 \cdot \varepsilon + 0 \cdot (1/2 - \varepsilon/2) \\
 &= (1/2 - \varepsilon/2) + \varepsilon \\
 &= 1/2 + \varepsilon/2
 \end{aligned}$$

de tal forma que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) = \varepsilon$. Así, por el teorema 1.11 tenemos que esta función es integrable sobre $[0, 1] \times [0, 1]$ (esperamos que al lector no le cause ningún problema el hecho de que se haya obtenido una igualdad para la diferencia $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P})$, en lugar de un menor estricto).

Además de mostrar que existen funciones integrables que no son continuas, el ejemplo anterior muestra que las discontinuidades pueden ser “muchas”. De hecho, el conjunto de discontinuidades de la función del ejemplo anterior (que es el conjunto $\{(1/2, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$) tiene tantos elementos como el conjunto de discontinuidades de la función del ejemplo 1.9 (que es el conjunto $[0, 1] \times [0, 1]$).

Así pues, el problema para que una función discontinua sea integrable, no radica en la cantidad de discontinuidades que tenga, sino en la forma en que éstas están “acomodadas” (por decirlo de alguna forma). Observe que en el ejemplo 1.13 el conjunto de discontinuidades de la función es un conjunto “flaco” (o de “área cero”) mientras que el conjunto de discontinuidades de la función del ejemplo 1.9 es un conjunto “gordo” (o de “área positiva”). Observe también que, para funciones definidas sobre rectángulos en \mathbb{R}^2 , que su conjunto de discontinuidades sea un conjunto “flaco” significaría algo parecido a un conjunto finito de puntos o una línea (no necesariamente recta) (ver figura 1.12), y “gordo” algo que tuviera “área” diferente de cero, mientras que para funciones definidas sobre rectángulos en \mathbb{R}^3 , “flaco” significaría algo parecido a un conjunto finito de puntos, una línea o a una superficie (no necesariamente plana), y “gordo” algo que tuviera “volumen” diferente de cero (se deja al lector “imaginar” el significado de estas palabras en dimensiones más grandes).

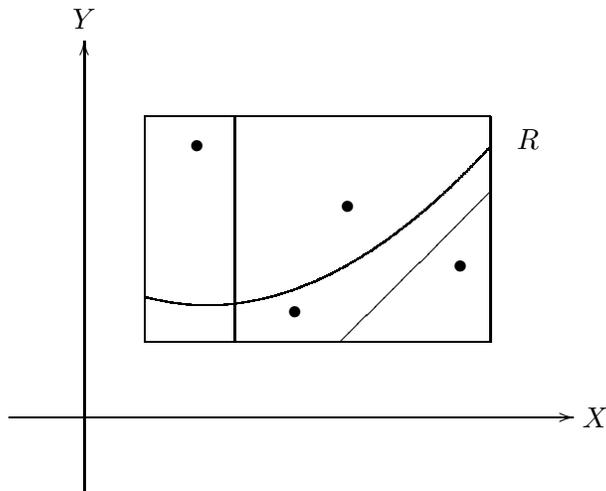


Figura 1.12: El conjunto de discontinuidades de una función f definida sobre un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$ es “flaco”, si está formado por puntos “aislados”, líneas (rectas o curvas) o por todos ellos juntos (claro, siempre y cuando al “juntarlos”, no formen un conjunto “gordo”)

Otra herramienta que nos permitiría hablar de conjuntos “flacos” y “gordos” (al menos por ahora) tiene que ver con el concepto de *interior de un conjunto*. Más adelante, una vez que hayamos precisado lo que significa que un conjunto se pueda “medir” (lo que en \mathbb{R}^2 significará que se puede hablar de su “área”, o en \mathbb{R}^3 de su “volumen”), se podrá demostrar fácilmente que para estos conjuntos “medibles” se cumplen afirmaciones como la siguiente: *si un conjunto A “es medible”, su “medida” será cero si y sólo si su interior ($\text{int}(A)$) es vacío.*

El siguiente resultado que veremos es una primera aproximación a las ideas expuestas en los párrafos anteriores. En la prueba de este teorema será de vital importancia acordarnos del teorema de los “rectángulos anidados” (en \mathbb{R}^n). También será importante saber que, si una función es integrable sobre un rectángulo R , entonces también lo es sobre cualquier rectángulo R' contenido en R (este resultado se deja como un problema para el lector).

Teorema 1.14 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R . Entonces existe $\hat{x}_0 \in \text{int}(R)$ tal que f es continua en \hat{x}_0 .*

Dem. Como f es integrable, por el teorema 1.11 sabemos que existe una partición \mathcal{P} de R tal que

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k M_i \cdot m(R_i) - \sum_{i=1}^k m_i \cdot m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \cdot m(R_i) \\ &< m(R) \end{aligned}$$

Como los términos de la última suma son no negativos, debe existir un índice $i \in \{1, \dots, k\}$ (que sin pérdida de generalidad supondremos que $i = 1$), para el cual se tiene que

$$M_1 - m_1 < 1 \tag{1.2}$$

Observe que en caso contrario, si $M_i - m_i \geq 1$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $(M_i - m_i) \cdot m(R_i) \geq m(R_i)$ (para toda $i \in \{1, \dots, k\}$) de tal forma que sumando esta última desigualdad, corriendo el índice i de 1 hasta k , tendríamos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \cdot m(R_i) &\geq \sum_{i=1}^k m(R_i) \\ &= m(R) \end{aligned}$$

lo cual sería una contradicción con la propiedad con que se eligió a la partición \mathcal{P} .

Llamemos entonces R_1 al subrectángulo inducido por \mathcal{P} para el cual se satisface la desigualdad 1.2. Adicionalmente, supondremos que $R_1 \subset \text{int}(R)$. En caso de que este subrectángulo no satisfaga esta propiedad, siempre podemos tomar otro rectángulo R' contenido en el interior del subrectángulo R_1 de tal forma que este nuevo rectángulo también estaría contenido en el interior del rectángulo original R . Además, el supremo y el ínfimo de los valores de la función f sobre este nuevo rectángulo R' seguirán cumpliendo una desigualdad análoga a 1.2 ya que $R' \subset R_1$.

Supongamos ahora que el lector ya probó el problema que establece que: si una función es integrable sobre un rectángulo R entonces es integrable sobre cualquier subrectángulo contenido en R . Entonces podemos asegurar que, como f es integrable sobre el rectángulo R_1 , existe una partición $\mathcal{P}^{(1)}$ del rectángulo R_1 tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}^{(1)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{k_1} M_i^{(1)} \cdot m(R_i^{(1)}) - \sum_{i=1}^{k_1} m_i^{(1)} \cdot m(R_i^{(1)})$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{k_1} (M_i^{(1)} - m_i^{(1)}) \cdot m(R_i^{(1)}) \\
 &< \frac{m(R_1)}{2}
 \end{aligned}$$

Por un argumento análogo al que hicimos renglones arriba, podemos asegurar que existe un subrectángulo $R_i^{(1)}$ (de los inducidos por $\mathcal{P}^{(1)}$ sobre R_1), y que denotaremos simplemente como R_2 , con la propiedad de que

$$M_2 - m_2 < \frac{1}{2}$$

donde $M_2 = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_2\}$ y $m_2 = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_2\}$, y además $R_2 \subset \text{int}(R_1)$.

Siguiendo con este procedimiento, obtenemos una sucesión $\{R_k\}$ de rectángulos (o “intervalos”) anidados en \mathbb{R}^n con las siguientes propiedades:

1. $M_k - m_k < \frac{1}{k}$ donde $M_k = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_k\}$ y $m_k = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_k\}$, y
2. $R_{k+1} \subset \text{int}(R_k)$

para toda $k \in \mathbb{N}$.

Así, por el teorema de los “rectángulos anidados” sabemos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \emptyset$. Ahora, si $\hat{x}_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$, probaremos que f es continua en \hat{x}_0 . Para ello, tomemos $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Como $\hat{x}_0 \in R_{N+1} \subset \text{int}(R_N)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\hat{x}_0) \subset \text{int}(R_N) \subset R_N$ de tal forma que

$$m_N \leq f(\hat{x}) \leq M_N$$

para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$. Como $M_N - m_N < \frac{1}{N}$ se tiene que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0)| < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$, lo que prueba que f es continua en \hat{x}_0 . ■

Este teorema tiene como consecuencia un hecho que seguido usaremos para determinar cuándo una función no es integrable. Para ello, establezcamos primero la siguiente notación: si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, denotaremos por $D_{f,A}$ al conjunto de discontinuidades de f en A , es decir, $D_{f,A} = \{\hat{x} \in A \mid f \text{ es discontinua en } \hat{x}\}$.

Corolario 1.15 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R . Entonces $D_{f,R}$ tiene interior vacío ($\text{int}(D_{f,R}) = \emptyset$).*

Dem. Si $\text{int}(D_{f,R}) \neq \emptyset$ entonces existe un rectángulo R' tal que $R' \subset \text{int}(D_{f,R}) \subset D_{f,R} \subset R$. Como f es integrable sobre R y $R' \subset R$, entonces f también es integrable sobre R' de modo que, por el teorema anterior, existe $\hat{x}_0 \in \text{int}(R')$ tal que f es continua en \hat{x}_0 . Observe que, como $\hat{x}_0 \in \text{int}(R')$, que es un conjunto abierto contenido en R , si f es continua en \hat{x}_0 restringida a R' , entonces f es continua en \hat{x}_0 restringida a R , lo cual contradice el hecho de que $\hat{x}_0 \in D_{f,R}$. ■

Como dijimos antes, este resultado será muy útil para determinar cuando una función no es integrable. Tal es el caso de la función del ejemplo 1.9. En este caso, se tiene que $D_{f,R} = [0, 1] \times [0, 1]$

de tal forma que $\text{int}(D_{f,R}) \neq \emptyset$; así, por el corolario anterior podemos concluir nuevamente que dicha función no es integrable sobre $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

Es una buena costumbre preguntarse siempre qué pasa con el recíproco de una afirmación. En el caso del corolario anterior no hay mucho que decir. En general, que el conjunto de discontinuidades de una función tenga interior vacío no significará necesariamente que dicho conjunto tenga que ser “flaco” (más aún, no tendrá nada que ver con el hecho de que se pueda “medir”). De hecho, este asunto nos conduce hacia una pregunta más general: ¿hay alguna manera de medir conjuntos (en \mathbb{R}^n) de tal forma que en función de dicha medida pudiéramos determinar si un conjunto es “flaco” o es “gordo”? (es claro que si se contara con esta medida, los conjuntos “flacos” serían aquellos que su medida fuera cero, y los “gordos” aquellos que su medida fuera mayor que cero). En el caso particular de \mathbb{R}^2 , ¿existe una forma de extender el concepto de “área” a los subconjuntos (cuando menos acotados) de \mathbb{R}^2 ? (aquí usamos la palabra extender puesto que hay conjuntos a los cuales ya les asignamos un “área”, como es el caso de los rectángulos). La respuesta es sí, hay forma de hacer esto (aunque no para todos los subconjuntos acotados de \mathbb{R}^2) y justo en este capítulo veremos una manera de hacerlo.

Sin embargo, antes de hablar de medida de conjuntos, nos será muy útil terminar de mencionar algunas otras propiedades de las funciones integrables, sobre todo aquellas que tienen que ver con las operaciones entre (o con) funciones. Estas propiedades las resumiremos en el siguiente

Teorema 1.16 Sean $f, g : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrables sobre R . Entonces:

1. $f + g$ es integrable sobre R y además $\int_R (f + g) = \int_R f + \int_R g$

2. si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable sobre R y además $\int_R cf = c \cdot \int_R f$

3. fg es integrable sobre R

4. si $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$ entonces $\int_R f \geq 0$

5. si $f(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in R$, entonces $\int_R f \leq \int_R g$

6. $|f|$ es integrable sobre R y además $\left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$

7. las funciones $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ ⁽²⁾ son integrables sobre R

La demostración de cada uno de los incisos de este teorema son parte de los problemas de este capítulo. Nótese también, que la afirmación del segundo inciso es un caso particular de la afirmación del tercero (tomando g igual a la función constante c), sólo que la fórmula que aparece en el segundo es muy utilizada.

Otra propiedad que destacaremos, relacionada con el cuarto inciso del teorema anterior, tiene que ver con la siguiente pregunta: ¿si $f(\hat{x}) > 0$ para toda $\hat{x} \in R$ entonces $\int_R f > 0$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, sólo que para probarla hace falta el teorema 1.14 junto con la siguiente

²Recuerde que

$$\max\{f, g\} = \frac{f + g + |f - g|}{2} \quad \text{y} \quad \min\{f, g\} = \frac{f + g - |f - g|}{2}$$

Proposición 1.17 Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Si f es continua en $\hat{x}_0 \in R$ y $f(\hat{x}_0) > 0$ entonces $\int_R f > 0$.

Dem. Si f es continua en $\hat{x}_0 \in R$ y $f(\hat{x}_0) > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0)| < \frac{f(\hat{x}_0)}{2}$ para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$ o, equivalentemente

$$-\frac{f(\hat{x}_0)}{2} < f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0) < \frac{f(\hat{x}_0)}{2}$$

por lo que, de la primera desigualdad, tenemos que

$$\frac{f(\hat{x}_0)}{2} < f(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$.

Ahora, sea \mathcal{P} una partición de R tal que uno de los subrectángulos inducidos por dicha partición (digamos R_1) se quede dentro de la vecindad $B_\delta(\hat{x}_0)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned} \underline{S}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^k m_i \cdot m(R_i) \\ &= m_1 \cdot m(R_1) + \sum_{i=2}^k m_i \cdot m(R_i) \\ &\geq \frac{f(\hat{x}_0)}{2} \cdot m(R_1) + 0 \\ &> 0 \end{aligned}$$

donde $m_1 \geq \frac{f(\hat{x}_0)}{2} > 0$ porque $R_1 \subset B_\delta(\hat{x}_0)$ y $m_i \geq 0$ porque $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Como

$$0 < \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \int_R f$$

concluimos la prueba. ■

Una vez que contamos con la proposición anterior, se tiene como consecuencia inmediata (usando también el teorema 1.14) la siguiente

Proposición 1.18 Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(\hat{x}) > 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Entonces $\int_R f > 0$.

Con relación a la otra operación entre funciones (la composición) existen un par de resultados importantes. Uno de ellos, cuando componemos a una función $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el rectángulo R , con otra función $g : R' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; en este resultado se establecen condiciones sobre la función g que permiten asegurar que la función $f \circ g : R' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ será integrable sobre el rectángulo R' y la relación entre la integral de f y la de $f \circ g$. De hecho, el planteamiento anterior es un caso particular de un teorema muy importante y mas general (el Teorema del Cambio de Variable) que analizaremos con mas detalle en el capítulo 2 y que por esta misma razón, ahora dejaremos pendiente. El otro caso, cuando componemos a f con una función $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, establece las condiciones suficientes sobre la función h que nos permitirán asegurar que la función $h \circ f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seguirá siendo integrable sobre el rectángulo R , resultado que probaremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.19 Si $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ es integrable sobre el rectángulo R y $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ entonces $h \circ f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre R .

Dem. Como en la prueba del teorema 1.12, haremos uso nuevamente del hecho de que toda función continua sobre un conjunto cerrado y acotado (es decir, un compacto, como el intervalo $[a, b]$) es uniformemente continua sobre ese mismo conjunto, y la integrabilidad de la función $h \circ f$ la probaremos usando el teorema 1.11. De esta forma, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a, b]$ son tales que $|x - y| < \delta$ entonces $|h(x) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)}$. Por otra parte, como f es integrable sobre R , por el teorema 1.11 existe $P \in \mathcal{P}_R$ tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \cdot m(R_i) < \frac{\delta \cdot \varepsilon}{4 \cdot M}$$

en donde $M > 0$ es tal que $|h(x)| \leq M$ para toda $x \in [a, b]$. Como se suele hacer en estos casos, clasificaremos a los subrectángulos (a través de sus índices) inducidos por la partición P en dos tipos; por una parte $I_1 = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid M_i - m_i < \delta\}$ e I_2 el resto, es decir $I_2 = \{i \in \{1, \dots, k\} \mid M_i - m_i \geq \delta\}$. De esta forma, podemos escribir que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) = \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) \cdot m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) \cdot m(R_i)$$

y nuestro objetivo será mostrar que

$$\begin{aligned} \overline{S}(h \circ f, P) - \underline{S}(h \circ f, P) &= \sum_{i \in I_1} (M'_i - m'_i) \cdot m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M'_i - m'_i) \cdot m(R_i) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

en donde $M'_i = \sup\{(h \circ f)(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ y $m'_i = \inf\{(h \circ f)(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Para lograr lo anterior, probaremos que cada una de las sumas (del lado derecho del primer renglón de la última identidad) será menor o igual que $\frac{\varepsilon}{2}$ (proceso en el que quedará claro la razón por la que se escogieron ciertas cantidades).

Para la primera suma, nótese que si $i \in I_1$ entonces para toda $\hat{x}, \hat{y} \in R_i$ se tiene que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \leq M_i - m_i < \delta$$

de modo que, por la forma en que se eligió δ , tenemos que

$$\begin{aligned} |(h \circ f)(\hat{x}) - (h \circ f)(\hat{y})| &= |h(f(\hat{x})) - h(f(\hat{y}))| \\ &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$M'_i - m'_i \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)}$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} (M'_i - m'_i) \cdot m(R_i) &\leq \sum_{i \in I_1} \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \cdot m(R_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \sum_{i \in I_1} m(R_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \cdot m(R) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Para la segunda suma, si $i \in I_2$ entonces $\delta \leq M_i - m_i$ de modo que

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in I_2} m(R_i) &= \sum_{i \in I_2} \delta \cdot m(R_i) \\ &\leq \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) \cdot m(R_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \cdot m(R_i) \\ &< \frac{\delta \cdot \varepsilon}{4 \cdot M} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i \in I_2} m(R_i) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot M}$$

Si ahora observamos que para toda $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que $M'_i - m'_i \leq 2M$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_2} (M'_i - m'_i) \cdot m(R_i) &\leq \sum_{i \in I_2} (2M) \cdot m(R_i) \\ &= 2M \sum_{i \in I_2} m(R_i) \\ &< (2M) \cdot \frac{\varepsilon}{4 \cdot M} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \overline{S}(h \circ f, \mathcal{P}) - \underline{S}(h \circ f, \mathcal{P}) &= \sum_{i \in I_1} (M'_i - m'_i) \cdot m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M'_i - m'_i) \cdot m(R_i) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

■

Para concluir esta sección, probaremos un teorema relacionado con el hecho de que la integral de una función f sobre un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, dividida por la medida de R , también se puede interpretar como “el valor promedio” de los valores de f sobre R . En efecto, si tomamos $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, una manera de aproximarnos a “el valor promedio” de f sobre R consistiría de los siguientes pasos:

1. tomamos la partición de R que se obtiene al subdividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ en k partes iguales (de longitud $(b_i - a_i)/k$); esta partición induce k^n subrectángulos R_j de R , todos de la misma medida, es decir, se tiene que

$$m(R_j) = \frac{m(R)}{k^n}$$

para cada $j = 1, \dots, k^n$

2. en cada uno de estos subrectángulos R_j ($j = 1, \dots, k^n$) elegimos un punto $\hat{\xi}_j$, con lo cual obtenemos una “muestra” de puntos del rectángulo R muy bien distribuida
3. calculamos el promedio de los valores de f sobre estos puntos $\hat{\xi}_j$, es decir, calculamos

$$\frac{\sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j)}{k^n} \tag{1.3}$$

Es “intuitivamente” claro que esta suma es una muy buena aproximación a “el promedio” de los valores de f sobre R , y que esta aproximación será mejor en la medida que k sea más grande. Lo interesante es que esta misma suma también se puede ver como una suma de Riemann de f sobre R , dividida por $m(R)$; en efecto, como $m(R_j) = m(R)/k^n$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j)}{k^n} &= \sum_{j=1}^{k^n} \frac{f(\hat{\xi}_j)}{k^n} \\ &= \sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j) \frac{1}{k^n} \\ &= \sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j) \frac{m(R_j)}{m(R)} \\ &= \frac{1}{m(R)} \sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j) m(R_j) \end{aligned}$$

Dado que esta suma de Riemann se “parecerá” mucho a la integral de f sobre R cuando k es muy grande, resultará “natural” decir que el número

$$\frac{1}{m(R)} \int_R f$$

se puede interpretar como “el valor promedio” de los valores de f sobre R .

Pues bien, el último teorema de esta sección establece que, si f es una función continua sobre R , este valor promedio se “alcanza” en algún punto de R , razón por la cual, es conocido como el Teorema del Valor Promedio.

Teorema 1.20 (del Valor Promedio) Sean $f, g : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que f es continua en R y g integrable sobre R . Entonces:

1. $\int_R f = f(\hat{\xi}) \cdot m(R)$ para alguna $\hat{\xi} \in R$
2. si $g(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$ entonces $\int_R fg = f(\hat{\xi}) \cdot \int_R g$ para alguna $\hat{\xi} \in R$

Dem. Sean m y M el mínimo y el máximo de f sobre R , respectivamente. Por el problema 11 de este capítulo tenemos que

$$m \cdot m(R) \leq \int_R f \leq M \cdot m(R)$$

de tal forma que

$$m \leq \frac{\int_R f}{m(R)} \leq M$$

Como f es continua y R es conexo, debe de existir $\hat{\xi} \in R$ tal que

$$f(\hat{\xi}) = \frac{\int_R f}{m(R)}$$

por lo que $\int_R f = f(\hat{\xi}) \cdot m(R)$.

En cuanto al segundo inciso, como $m \leq f(\hat{x}) \leq M$ y $g(\hat{x}) \geq 0$, para toda $\hat{x} \in R$, tenemos que

$$(mg)(\hat{x}) \leq (fg)(\hat{x}) \leq (Mg)(\hat{x})$$

de tal forma que

$$m \cdot \int_R g = \int_R mg \leq \int_R fg \leq \int_R Mg = M \cdot \int_R g$$

Ahora, si $\int_R g = 0$, de las desigualdades de arriba se tiene que $\int_R fg = 0$ y por lo tanto $\int_R fg = 0 = f(\hat{\xi}) \cdot \int_R g$ para cualquier $\hat{\xi} \in R$. Si $\int_R g > 0$ entonces

$$m \leq \frac{\int_R fg}{\int_R g} \leq M$$

y nuevamente, como f es continua y R es conexo, debe de existir $\hat{\xi} \in R$ tal que

$$f(\hat{\xi}) = \frac{\int_R fg}{\int_R g}$$

por lo que $\int_R fg = f(\hat{\xi}) \cdot \int_R g$ para alguna $\hat{\xi} \in R$. ■

Observe que el primer inciso de la proposición anterior, es un caso particular del segundo inciso tomando g igual a la función constante 1.

1.4 Medida de Jordan

En esta sección se abordará el problema de encontrar una forma de “medir conjuntos” a fin de contar con un concepto que nos permita, entre otras cosas, precisar la idea de cuándo un conjunto en \mathbb{R}^n es “flaco” o es “gordo”. Veremos que justo el concepto de integración que acabamos de definir nos proporciona una herramienta para lograrlo.

En realidad, eso de “medir conjuntos” es algo que nos han venido enseñando desde que somos niños (quién no recuerda una que otra fórmula para calcular “el área” de una figura plana (conjuntos en \mathbb{R}^2) o “el volumen” de uno que otro sólido (conjuntos en \mathbb{R}^3)). Lo relevante de lo que haremos a continuación es que vamos a definir formalmente conceptos como los de “área” y “volumen”, y “extender” dichos conceptos cuando menos en dos sentidos: uno, en cuanto a que el tipo de conjuntos a los cuáles podremos asignarle esta “medida” será bastante más diverso (no sólo triángulos, rectángulos, polígonos, círculos, cilindros, esferas, etc.), y dos, esta forma de “medir” incluirá no sólo figuras planas o sólidos, ¡sino conjuntos que “viven” en otras dimensiones! (¡un mundo nos vigila!).

Definición 1.21 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, definimos $\chi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la función característica de A , de la siguiente forma

$$\chi_A(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in A \\ 0 & \text{si } \hat{x} \notin A \end{cases}$$

(ver figura 1.13).

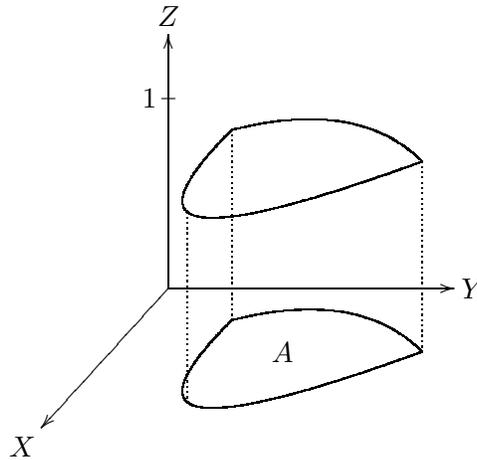


Figura 1.13: La gráfica de la función característica χ_A de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

Una vez que tenemos esta función, estamos en condiciones de definir cuándo un conjunto (acotado) es Jordan-medible³ y cuál es esa medida.

Definición 1.22 Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, decimos que A es Jordan-medible si la función característica de A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga a A . En este caso decimos que la medida de Jordan de A (que denotaremos por $J(A)$) está dada por

$$J(A) = \int_R \chi_A$$

Antes de entrar de lleno al estudio de los conjuntos Jordan-medibles, es importante hacer algunas observaciones acerca de la definición anterior.

Nótese primero que en dicha definición hemos echado mano de un rectángulo R que contiene al conjunto acotado A ; la cuestión, al parecer muy sutil, es: ¿qué sucede con nuestra definición de medida si en lugar del rectángulo R tomamos otro, digamos R' , que también contenga al conjunto A ? (es claro que, si A es un conjunto acotado, ¡hay una infinidad de rectángulos que lo contienen!). La pregunta, sin lugar a dudas, es: ¿el concepto de medibilidad, y lo que llamamos la medida de A , dependen de qué rectángulo tomemos? Se deja al lector verificar (con ayuda de los problemas 13, 6 y 7 de este capítulo, junto con el hecho de que la intersección (¡a diferencia de la unión!) de dos rectángulos es un rectángulo) que: si la definición de medibilidad se cumple para un rectángulo

³Nombrados así en recuerdo de Camille Jordan (Lyon 1838 - París 1922), un matemático francés conocido tanto por su trabajo sobre la teoría de los grupos como por su influyente *Curso de análisis (Cours d'analyse)*.

R entonces también se cumple para cualquier otro rectángulo R' que contenga al conjunto A , y además

$$\int_R \chi_A = \int_{R'} \chi_A$$

En segundo lugar es importante destacar que para llegar a este concepto de medida, además del concepto de integral (que no es poca cosa, o mejor dicho, que lo es casi todo), sólo fue necesario haber definido previamente lo que significaba la medida de un cierto tipo de conjuntos, a saber aquellos que llamamos “rectángulos”. De hecho, la medida de Jordan también se puede interpretar como una “extensión” (a conjuntos más “arbitrarios”) de la medida de un rectángulo, sobre todo si observamos que cualquier rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$ es Jordan-medible y que $J(R) = m(R)$ (problema 19). No obstante lo anterior, hasta este momento no sabemos si figuras (o subconjuntos de \mathbb{R}^2) tales como un triángulo o un círculo, son conjuntos para las cuales tiene sentido hablar de su área, y en caso de que sí, ¿cómo se calcularía dicha área?

A continuación ilustraremos por medio de un ejemplo muy sencillo que en efecto, el concepto de medida de Jordan no es más que la formalización de conceptos tan intuitivos para nosotros como los de área y volumen.

Ejemplo 1.23 Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números positivos y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq (b/a)x\}$. Como se podrá notar fácilmente, A es un triángulo de base a y altura b . Mostraremos que A es un conjunto Jordan-medible en \mathbb{R}^2 , y que su medida (o su área) es, como todos sabemos, $\frac{a \cdot b}{2}$.

Solución. Tomemos el rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} = [0, a] \times [0, b]$ el cual contiene a A . De acuerdo con nuestra definición tenemos que mostrar que la función característica χ_A es integrable sobre el rectángulo R y que

$$\int_R \chi_A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Para lograr esto echaremos mano del problema 10 de este capítulo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_1^{(n)} \times \mathcal{P}_2^{(n)}$, donde $\mathcal{P}_1^{(n)} = \{i \frac{a}{n} \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ y $\mathcal{P}_2^{(n)} = \{i \frac{b}{n} \mid i = 0, 1, \dots, n\}$, la partición de R que lo subdivide en n^2 subrectángulos de medida (o área) $\frac{a \cdot b}{n^2}$. Como la función con la que estamos trabajando es χ_A , se tiene que

$$\underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{R_i \subset A} m(R_i) \quad \text{y} \quad \overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} m(R_i)$$

donde los R_i representan a los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} , de modo que en este caso

$$\begin{aligned} \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) &= \sum_{R_i \subset A} m(R_i) \\ &= 1 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + 2 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + \dots + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} \\ &= \frac{a \cdot b}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= \frac{a \cdot b}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\ &= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) &= \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} m(R_i) \\ &= 2 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + n \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + n \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} \\ &= 1 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + 2 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + \cdots + n \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} \\ &= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{n+1}{n} + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2}\end{aligned}$$

De estas dos identidades se obtiene inmediatamente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) = \frac{a \cdot b}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)})$$

de modo que por el problema antes mencionado, tenemos que χ_A es integrable sobre el rectángulo R y además

$$J(A) = \int_R \chi_A = \frac{a \cdot b}{2}$$

que es lo que queríamos mostrar.

Finalmente, es importante resaltar que no todos los subconjuntos acotados de \mathbb{R}^n resultan ser Jordan-medibles. El lector podrá comprobar fácilmente que el ejemplo 1.9 no sólo nos proporciona una función que no es integrable, sino que también nos muestra que el conjunto $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \mid x \text{ ó } y \in \mathbb{Q}\}$ ¡es un conjunto que no es Jordan-medible! Por cierto que tampoco resulta ocioso decir que las siguientes dos frases tienen significados realmente diferentes; no es lo mismo decir: “ A es un conjunto con medida de Jordan cero”, que decir: “ A es un conjunto que no tiene medida de Jordan” o “ A no es Jordan-medible”.

Una vez discutidas estas cuestiones acerca de la definición de lo que son los conjuntos medibles (y la medida misma), el primer resultado que probaremos nos proporcionará condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un conjunto es Jordan-medible. Antes, estableceremos que si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $Fr(A)$ denotará al conjunto de puntos frontera de A (o simplemente, la frontera de A).

Teorema 1.24 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. A es Jordan-medible
2. para cada $\varepsilon > 0$ existen R_1, \dots, R_k rectángulos tales que:

$$(a) Fr(A) \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k, \text{ y}$$

$$(b) \sum_{i=1}^k m(R_i) < \varepsilon$$

3. la $Fr(A)$ es Jordan-medible y $J(Fr(A)) = 0$

Dem.

A lo largo de esta demostración supondremos que R es un rectángulo tal que la cerradura de A (\overline{A}) está contenida en el interior de R ($\text{int}(R)$), es decir: $\overline{A} \subset \text{int}(R)$ (observe que con esta elección

no perdemos generalidad en virtud de que, como lo mencionamos párrafos arriba, nuestra definición de medibilidad no depende del rectángulo que contenga a A).

1) \Rightarrow 2) Sea $\varepsilon > 0$. Como A es Jordan-medible, sabemos que χ_A es integrable sobre este rectángulo R (que contiene a A) de tal forma que existe \mathcal{P} partición de R tal que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) < \varepsilon \quad (1.4)$$

Nótese que en este caso se tiene que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} m(R_i)$$

y

$$\underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{R_i \subset A} m(R_i)$$

donde los R_i representan a los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} . Así, tenemos que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{R_i \cap A \neq \emptyset \\ \text{y} \\ R_i \cap A^c \neq \emptyset}} m(R_i)$$

Sean R_1, \dots, R_k los subrectángulos de R , inducidos por la partición \mathcal{P} , tales que

$$R_i \cap A \neq \emptyset \quad \text{y} \quad R_i \cap A^c \neq \emptyset \quad (1.5)$$

A fin de concluir la prueba de la condición 2, por la desigualdad 1.4, sólo resta probar que $Fr(A) \subset R_1 \cup \dots \cup R_k$. Para obtener esta contención observe primero que, como $\bar{A} \subset \text{int}(R)$, entonces $Fr(A) \subset \text{int}(R)$. Sea $\hat{x} \in Fr(A)$. Si tenemos la suerte de que $\hat{x} \in \text{int}(R_i)$ para alguno de los subrectángulos inducidos por la partición \mathcal{P} (recuerde que R es la unión de todos esos subrectángulos), es claro que R_i cumple con las condiciones 1.5, en cuyo caso ya habremos acabado. Por otra parte, si \hat{x} no pertenece al interior de alguno de los subrectángulos, entonces \hat{x} está en la frontera de más de uno de los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} ya que $\hat{x} \in Fr(A) \subset \text{int}(R)$ (en realidad debe estar en 2^k para algún $k \in \{1, \dots, n\}$; la figura 1.14 (a) ilustra este hecho en \mathbb{R}^2). En este caso, si todos los subrectángulos que tienen a \hat{x} en su frontera están contenidos en A , entonces $\hat{x} \in \text{int}(A)$ (ver figura 1.14 (b)). De forma análoga, si todos los subrectángulos que tienen a \hat{x} en su frontera están contenidos en A^c , entonces $\hat{x} \in \text{ext}(A)$. En ambas situaciones obtenemos que $\hat{x} \notin Fr(A)$ lo cual es una contradicción. Así pues, de entre todos los subrectángulos para los cuales \hat{x} pertenece a su frontera, debe existir alguno, llamémoslo R_i , para el que se satisfacen las condiciones 1.5. Con esto concluimos la prueba de la condición 2.

2) \Rightarrow 3) En este inciso tenemos que probar que el conjunto $Fr(A)$ es Jordan-medible, por lo que es suficiente probar que su función característica $\chi_{Fr(A)}$ es integrable sobre el rectángulo R , ya que $Fr(A) \subset R$. Por otra parte, de acuerdo con nuestra hipótesis, existen R_1, \dots, R_k rectángulos tales que

$$Fr(A) \subset R_1 \cup \dots \cup R_k$$

y

$$\sum_{i=1}^k m(R_i) < \varepsilon$$

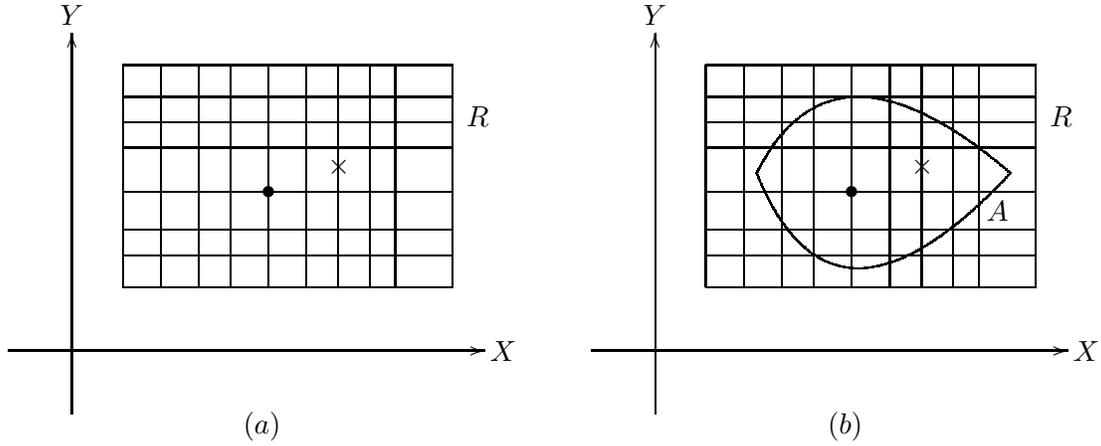


Figura 1.14: En \mathbb{R}^2 , si un punto $\hat{x} \in \text{int}(R)$ no pertenece al interior de ninguno de los subrectángulos inducidos por una partición \mathcal{P} , entonces \hat{x} pertenece a la frontera de $2 = 2^1$ subrectángulos adyacentes (\times), o es un vértice de $4 = 2^2$ de ellos (\bullet). Si todos los subrectángulos que tienen a \hat{x} en su frontera están contenidos en A , entonces $\hat{x} \in \text{int}(A)$.

Lo primero que vamos a destacar, apoyados por el segundo inciso del problema 2, es que los rectángulos R_1, \dots, R_k los podemos elegir de tal forma que, además de tener la propiedad de que la suma de sus medidas es menor que ε , también tienen la propiedad de que

$$\text{Fr}(A) \subset \text{int}(R_1) \cup \dots \cup \text{int}(R_k) \tag{1.6}$$

(observe que el problema citado dice, en otras palabras, que todo rectángulo se puede “agrandar” un poquito; ¡tan poquito como se quiera!). Una vez aclarado lo anterior, notemos que también podemos suponer que cada $R_i \subset R$ (de no ser así, bastaría con tomar los subrectángulos $R_i \cap R$ los cuales siguen teniendo las mismas propiedades que le estamos pidiendo a los rectángulos R_i). Ahora “extendamos” los “lados” de cada uno de los rectángulos R_i y llamemos \mathcal{P} a la partición que dichas extensiones generan sobre R (la figura 1.15 ilustra este proceso en \mathbb{R}^2). Si bien es cierto que los subrectángulos R'_i inducidos por esta partición sobre R , no coinciden necesariamente con los rectángulos originales R_1, \dots, R_k (¡lo más seguro es que casi nunca coincidan!), también es cierto que si tomamos cualquiera de estos nuevos subrectángulos R'_i que interseccione a la $\text{Fr}(A)$, entonces éste debe estar contenido en alguno de los R_j , lo cual es una consecuencia de 1.6 (esperamos que el lector coincida en que lo difícil de esta afirmación no está en imaginar su prueba, sino en ¡escribirla!).

En síntesis, podemos asegurar que, si R'_1, \dots, R'_l son todos los subrectángulos de R inducidos por la partición \mathcal{P} tales que

$$\text{Fr}(A) \cap R'_i \neq \emptyset \text{ con } i = 1, \dots, l$$

entonces

$$R'_1 \cup \dots \cup R'_l \subset R_1 \cup \dots \cup R_k$$

y por lo tanto tendremos que

$$\sum_{i=1}^l m(R'_i) \leq \sum_{i=1}^k m(R_i) < \varepsilon$$

Como

$$\bar{S}(\chi_{\text{Fr}(A)}, \mathcal{P}) = \sum_{R'_i \cap \text{Fr}(A) \neq \emptyset} m(R'_i)$$

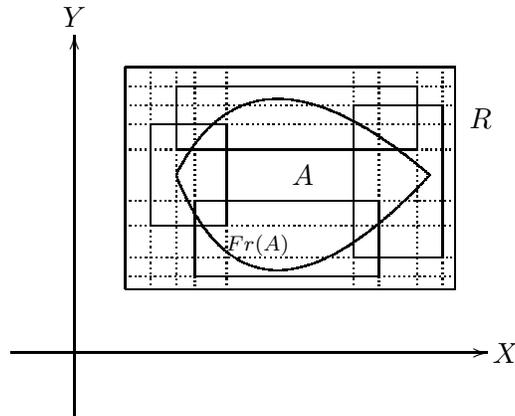


Figura 1.15: “Extendiendo” los lados de cada uno de los rectángulos R_i para obtener una partición \mathcal{P} del rectángulo R

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^l m(R'_i) \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

por el problema 8 podemos concluir que la función $\chi_{Fr(A)}$ es integrable sobre R y que además

$$\int_R \chi_{Fr(A)} = 0$$

Es decir, $Fr(A)$ es un conjunto Jordan-medible y $J(Fr(A)) = 0$.

3) \Rightarrow 1) Recordemos que R es un rectángulo tal que la cerradura de A está contenida en el interior de R . Por tanto, también tenemos que $Fr(A) \subset R$ de modo que $\int_R \chi_{Fr(A)} = \int_R^- \chi_{Fr(A)} = 0$. De la segunda identidad, podemos concluir que existe \mathcal{P} partición de R tal que, si R_1, \dots, R_l son todos los subrectángulos de R inducidos por la partición \mathcal{P} tales que $Fr(A) \cap R_i \neq \emptyset$ (con $i = 1, \dots, l$), entonces

$$\begin{aligned}
 \overline{S}(\chi_{Fr(A)}, \mathcal{P}) &= \sum_{R_i \cap Fr(A) \neq \emptyset} m(R_i) \\
 &= \sum_{i=1}^l m(R_i) \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

Por otra parte, para la misma partición \mathcal{P} sabemos que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{R'_i \cap A \neq \emptyset \\ \text{y} \\ R'_i \cap A^c \neq \emptyset}} m(R'_i)$$

donde los R'_i también son parte de los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} . Ahora observe que si R'_i es cualquiera de estos subrectángulos que intersecan tanto a A como a A^c , entonces éste debe

de intersecar a la $Fr(A)$ (problema 4 de este capítulo). En resumen, si R'_1, \dots, R'_k son todos los subrectángulos que intersecan tanto a A como a A^c entonces $\{R'_1, \dots, R'_k\} \subset \{R_1, \dots, R_l\}$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) &= \sum_{\substack{R'_i \cap A \neq \emptyset \\ \text{y} \\ R'_i \cap A^c \neq \emptyset}} m(R'_i) \\ &= \sum_{i=1}^k m(R'_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^l m(R_i) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

con lo que podemos concluir que la función χ_A es integrable sobre R y que por lo tanto A es un conjunto Jordan-medible, como se quería demostrar. ■

Sin duda la demostración de este teorema fue un poco larga, pero no se podrá negar que es un teorema que nos proporciona información muy valiosa. Para empezar, nos dice que para saber si un conjunto es Jordan-medible, es suficiente con que su frontera también sea un conjunto Jordan-medible, pero además de medida cero (es decir, “flaco”). Y para terminar, los incisos 2 y 3 nos dan condiciones necesarias y suficientes para que dicha frontera resulte ser un conjunto Jordan-medible y de medida cero. Esto último nos hace ver que los conjuntos Jordan-medibles y de medida cero resultan ser muy importantes (sobre todo si son la frontera de otro conjunto). Es por esta razón que nuestro siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto (aunque no sea la frontera de otro) tenga estas importantes características; por supuesto que dichas condiciones están sugeridas por los mismos incisos 2 y 3, y su prueba resulta muy análoga a lo que hicimos antes, razón por la cual se deja como un problema para el lector.

Teorema 1.25 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto acotado. A es Jordan-medible y $J(A) = 0$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen R_1, \dots, R_k rectángulos tales que:*

1. $A \subset R_1 \cup \dots \cup R_k$, y
2. $\sum_{i=1}^k m(R_i) < \varepsilon$

Lo siguiente que vamos a mostrar es que este concepto de medida de conjuntos se lleva bastante bien con las operaciones entre conjuntos (¡como es de esperarse de cualquier concepto de medida que se respete!).

Teorema 1.26 *Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son Jordan-medibles entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también son Jordan-medibles y además*

$$J(A \cup B) = J(A) + J(B) - J(A \cap B) \tag{1.7}$$

Dem. Primero demostraremos que $A \cup B$ y $A \cap B$ son Jordan-medibles. Para ello, basta recordar que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ y $Fr(A \cap B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ de tal forma que, por el teorema 1.24 (la equivalencia de los incisos 1 y 3, en ambos sentidos) y el problema 21 (ambos incisos), podemos concluir que $A \cup B$ y $A \cap B$ son Jordan-medibles.

En cuanto a la identidad 1.7 basta observar que se satisface la siguiente identidad de funciones

$$\chi_{A \cup B} + \chi_{A \cap B} = \chi_A + \chi_B$$

la cual se puede probar fácilmente analizando los casos: $\hat{x} \in A \cap B$, $\hat{x} \in A \setminus B$, $\hat{x} \in B \setminus A$ y $\hat{x} \notin A \cup B$. Si ahora tomamos un rectángulo R tal que $A, B \subset R$, dado que por la primera parte de esta prueba ya sabemos que las funciones $\chi_{A \cup B}$ y $\chi_{A \cap B}$ son integrables sobre R , usando el primer inciso del teorema 1.16 obtenemos la fórmula deseada. ■

Como se recordará, parte de la motivación para contar con una forma de medir conjuntos estaba en la posibilidad de decidir cuándo un conjunto es “flaco” (o “gordo”), lo cual a su vez estaba relacionado con la posibilidad de decidir la “forma” que debería tener el conjunto de discontinuidades de una función para que ésta resultara ser integrable (de hecho, habíamos adelantado que ser de medida cero era una manera de decidir que un conjunto era “flaco”). Pues bien, terminaremos esta sección con un resultado que cumple parcialmente con este objetivo. Y decimos que lo cumple parcialmente en virtud de que las condiciones de este resultado sólo son suficientes.

Teorema 1.27 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R . Si el conjunto de discontinuidades de f en R ($D_{f,R}$) es un conjunto Jordan-medible y de medida cero entonces f es integrable sobre R .*

Dem. Sea $M > 0$ tal que $|f(\hat{x})| \leq M$ para toda $\hat{x} \in R$. Usaremos el teorema 1.11 para demostrar que f es integrable sobre R . Sea pues $\varepsilon > 0$. Dado que $J(D_{f,R}) = 0$ sabemos que existe una partición \mathcal{P} del propio rectángulo R tal que

$$\overline{S}(\chi_{D_{f,R}}, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Si R_1, \dots, R_l son los subrectángulos de R inducidos por la partición \mathcal{P} que tienen la propiedad de que $R_i \cap D_{f,R} \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, l$), tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^l m(R_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Si ahora R_{l+1}, \dots, R_k son el resto de los subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} , sabemos entonces que f es continua en cada uno de ellos de tal forma que, por el teorema 1.12, f es integrable sobre cada R_i ($i = l+1, \dots, k$). Nuevamente por el teorema 1.11, para cada uno de estos subrectángulos podemos encontrar una partición $\mathcal{P}^{(i)}$ tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{2(k-l)}$$

para cada $i = l+1, \dots, k$. Ahora, cada una de estas particiones $\mathcal{P}^{(i)}$ la extendemos a todo el rectángulo R y junto con la partición inicial \mathcal{P} , formamos una nueva partición del rectángulo R a la que llamaremos \mathcal{Q} (la figura 1.16 ilustra este procedimiento en \mathbb{R}^2).

Es importante hacer notar que, por la forma en que la construimos, la partición \mathcal{Q} es un refinamiento de la partición \mathcal{P} de modo que cada subrectángulo R_i ($i = 1, \dots, k$) inducido por \mathcal{P} es la unión de subrectángulos inducidos por \mathcal{Q} ; o dicho de otra forma, si los subrectángulos inducidos por \mathcal{Q} los denotamos por $R'_{j,i}$, en donde i es un índice que corre desde 1 hasta k , y para cada una de estas i 's, j es un índice que corre desde 1 hasta una cierta k_i , entonces

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} R'_{j,i}$$

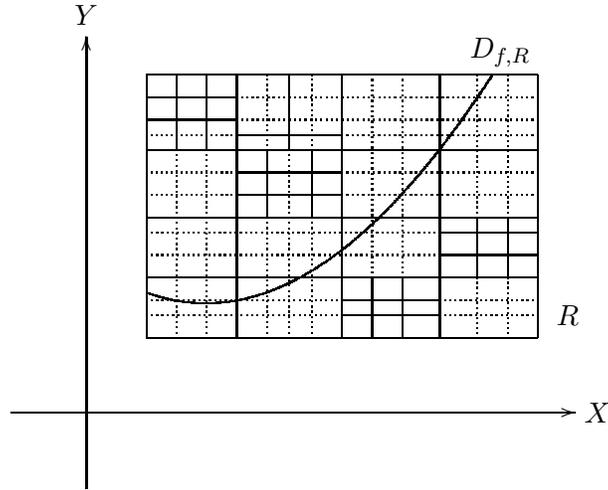


Figura 1.16: En cada subrectángulo R_i que no interseca al conjunto de las discontinuidades de f en R ($D_{f,R}$), “extendemos” su partición $\mathcal{P}^{(i)}$ para obtener otra partición \mathcal{Q} del rectángulo R (en la figura sólo se hizo en cinco de éstos)

para $i = 1, \dots, k$.

Obsérvese también que para cada $i = l + 1, \dots, k$, los $R'_{j,i}$ ($j = 1, \dots, k_i$) son subrectángulos de R_i inducidos por alguna partición $\mathcal{Q}^{(i)}$ que refina a $\mathcal{P}^{(i)}$ (en la figura 1.16 también se alcanza a notar este hecho), de modo tal que

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) &\leq \overline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2(k-l)} \end{aligned}$$

Una vez aclarado lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \mathcal{Q}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}) &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^{k_i} (M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{k_i} (M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i}) \right) + \sum_{i=l+1}^k \left(\sum_{j=1}^{k_i} (M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i}) \right) \\ &= \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{k_i} (M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i}) \right) + \sum_{i=l+1}^k \left(\overline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{k_i} 2M \cdot m(R'_{j,i}) \right) + \sum_{i=l+1}^k \left(\overline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) \right) \\ &< 2M \cdot \sum_{i=1}^l \left(\sum_{j=1}^{k_i} m(R'_{j,i}) \right) + \sum_{i=l+1}^k \frac{\varepsilon}{2(k-l)} \\ &= 2M \cdot \sum_{i=1}^l m(R_i) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< 2M \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

en donde, como era de esperarse, $M'_{j,i} = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R'_{j,i}\}$, y $m'_{j,i} = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R'_{j,i}\}$ para $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, k_i$.

Como se podrá observar, con esto terminamos la prueba del teorema. ■

Como dijimos antes, este teorema es una respuesta parcial al problema de caracterizar a las funciones integrables en términos de la medida de su conjunto de discontinuidades. Es un hecho desafortunado que, si una función es integrable sobre un rectángulo, no se pueda asegurar que su conjunto de discontinuidades sea Jordan-medible, lo que se puede comprobar con la función del problema 9. Por cierto que, si se supiera que el conjunto de discontinuidades de una función integrable es Jordan-medible, éste tendría que ser necesariamente de medida cero, como se pide probar en el ejercicio 26.

Sin embargo, y como casi todo mundo lo sabe, los matemáticos no suelen quedarse con una duda y no faltó uno de ellos que se diera a la tarea de buscar una nueva forma de medir conjuntos que permitiera caracterizar a las funciones integrables (o más específicamente, a el conjunto de discontinuidades de una función integrable). Este trabajo lo realizó el matemático francés Henri León Lebesgue (1875-1941) quien introdujo un nuevo concepto de medida de conjuntos (y que por razones obvias ahora se le conoce como *medida de Lebesgue*). En particular, los conjuntos que resultan ser “flacos” con esta medida (es decir, los conjuntos de medida de Lebesgue cero) se caracterizan por una propiedad análoga a la que sirve para caracterizar a los conjuntos de medida de Jordan cero, y que nosotros probamos en el teorema 1.25. Específicamente se tiene la siguiente

Definición 1.28 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto acotado. A tiene medida de Lebesgue cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad numerable de rectángulos $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ tales que:*

1. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, y
2. $\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) < \varepsilon$

En este caso escribimos que $\lambda(A) = 0$ (en donde $\lambda(A)$ denota la medida de Lebesgue de A).

Lo mejor de todo esto es que, sin tener que saber cómo se define en general la medida de Lebesgue, y sólo contando con la definición anterior, podemos formular el teorema que nos permite caracterizar plenamente a las funciones integrables sobre un rectángulo R . Este teorema es conocido como el *Teorema de Lebesgue* (¡uno de los muchos que probó!) y dice lo siguiente

Teorema 1.29 (de Lebesgue) *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R . f es integrable sobre R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f sobre R ($D_{f,R}$) es un conjunto de medida de Lebesgue cero (es decir, $\lambda(D_{f,R}) = 0$).*

La prueba de este teorema requiere de algunos resultados previos relacionados con los conjuntos de medida de Lebesgue cero los cuales, aunque sencillos de probar, escapan a los objetivos de este texto. Por esta razón, dichos resultados y la prueba del propio teorema se incluyen en un apéndice.

1.5 La integral sobre conjuntos Jordan-medibles

En esta sección mostraremos que el concepto de integral se puede extender a conjuntos más generales que los rectángulos. En principio, podremos extenderlo a cualquier conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ (de hecho, así lo haremos), aunque rápidamente nos daremos cuenta de que, para ciertos conjuntos acotados, algunas funciones tan sencillas como las funciones constantes (distintas de la constante cero) no resultarán ser integrables. En este sentido, si queremos que funciones tan “elementales” (como por ejemplo la función constante uno) resulten ser integrables, lo más apropiado será que nos concentremos en los conjuntos Jordan-medibles.

Una vez aclarado lo anterior, procedemos a dar nuestra definición

Definición 1.30 Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto acotado A . Definimos $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_A(\hat{x}) = \begin{cases} f(\hat{x}) & \text{si } \hat{x} \in A \\ 0 & \text{si } \hat{x} \notin A \end{cases}$$

(ver figura 1.17).

Decimos que f es integrable sobre A si la función f_A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga a A . En este caso diremos que la integral de f sobre A (que denotaremos por $\int_A f$) está dada por

$$\int_A f = \int_R f_A$$

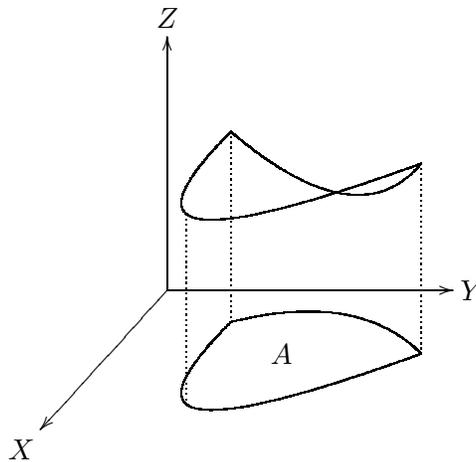


Figura 1.17: La gráfica de la función f_A de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

De forma análoga a como lo hicimos cuando definimos los conjuntos Jordan-medibles, debe hacerse notar que la definición anterior no depende del rectángulo R que se elija. Usando la misma herramienta que en ese caso se puede probar que, si la función f_A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga al conjunto A , entonces es integrable sobre cualquier otro rectángulo que lo contenga.

Asimismo vale la pena destacar que, si la función f es la función constante uno sobre A ($f \equiv 1$) entonces la función f_A no es más que la función característica de A , de forma tal que pedir que esta función sea integrable sobre A , es lo mismo que pedir que A sea un conjunto Jordan-medible. He

aquí la razón por la que decimos que nuestra definición de integral sobre conjuntos más arbitrarios que los rectángulos, en realidad debiera de circunscribirse a los conjuntos Jordan-medibles.

La discusión anterior también sirve para mostrar que, si no suponemos que el conjunto A sobre el cual queremos integrar es Jordan-medible, entonces podemos tomar funciones que, a pesar de que se porten muy bien sobre dicho conjunto (como por ejemplo que sean continuas sobre A), de cualquier forma no resultan ser integrables sobre A (¡qué mejor ejemplo que la función constante uno!). Por el contrario, si suponemos que el conjunto es Jordan-medible, se puede probar que cualquier función que sea continua sobre A resulta ser integrable sobre él. Más aún, con ayuda del teorema 1.27 podemos probar un resultado un poco más general y del cual la afirmación previa resultará ser un corolario.

Teorema 1.31 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A . Si el conjunto de discontinuidades de f sobre A ($D_{f,A}$) es un conjunto Jordan-medible y de medida cero entonces f es integrable sobre A .*

Dem. Sea R un rectángulo que contenga a A . De acuerdo con la definición, hay que probar que la función f_A es integrable sobre este rectángulo. Para obtener esto, por el teorema 1.27 basta probar que el conjunto de discontinuidades de la función f_A sobre el rectángulo R es un conjunto Jordan-medible y de medida cero, lo cual a su vez se obtiene de la contención que se prueba en el ejercicio 30, del hecho que la $Fr(A)$ es un conjunto Jordan-medible y de medida cero (puesto que A es Jordan-medible (teorema 1.24)), y de ambos incisos del problema 21. ■

Corolario 1.32 *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua sobre el conjunto Jordan-medible A entonces f es integrable sobre A .*

Esta manera de extender el concepto de integral a otros conjuntos tiene todas las propiedades básicas que se pueden esperar de ella. Sobre todo aquellas que tienen que ver con las operaciones entre funciones (suma, multiplicación, etc.), en donde incluso ni siquiera hace falta suponer que el conjunto sobre el cual estemos integrando, es Jordan-medible. Estas propiedades quedan resumidas en el siguiente teorema y su prueba, como era de esperarse, se deja al lector.

Teorema 1.33 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrables sobre el conjunto A . Entonces:*

1. $f + g$ es integrable sobre A y además $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$
2. si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable sobre A y además $\int_A cf = c \cdot \int_A f$
3. fg es integrable sobre A
4. si $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$ entonces $\int_A f \geq 0$
5. si $f(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in A$, entonces $\int_A f \leq \int_A g$
6. $|f|$ es integrable sobre A y además $\left| \int_A f \right| \leq \int_A |f|$
7. las funciones $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son integrables sobre A

Además de trabajar bien con las operaciones entre funciones, este concepto de integral también se lleva bien con las operaciones entre conjuntos. Esto significa que, si una función es integrable sobre un par de conjuntos, entonces es integrable sobre la intersección y la unión de ambos. Como en el caso del teorema anterior, estas propiedades son válidas aun cuando los conjuntos en cuestión no sean Jordan-medibles, como se establece en el siguiente

Teorema 1.34 *Si $f : A \cup B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre A y sobre B entonces f es integrable sobre $A \cap B$ y $A \cup B$ y además*

$$\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f - \int_{A \cap B} f \quad (1.8)$$

Dem. Primero observemos que, como f es integrable sobre A y sobre B , entonces f_A y f_B son integrables (sobre algún rectángulo R que contenga a $A \cup B$) de tal forma que, por el problema 14 sabemos que $(f_A)_+$ y $(f_B)_+$ son integrables sobre R . Ahora, por la primera identidad del primer inciso del problema 35 se tiene que $(f_{A \cap B})_+$ es integrable sobre R . Análogamente se prueba que $(f_{A \cap B})_-$ es integrable sobre R . Por otra parte, dado que $f_{A \cap B} = (f_{A \cap B})_+ + (f_{A \cap B})_-$ se tiene que $f_{A \cap B}$ es integrable sobre R , es decir, f es integrable sobre $A \cap B$. Finalmente, por la identidad del segundo inciso del mismo problema 35 tenemos que

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B}$$

de tal forma que podemos concluir que f es integrable sobre $A \cup B$, además de que también obtenemos la fórmula 1.8. ■

Para concluir esta sección (¡y este capítulo!), probaremos las correspondientes versiones de “el Teorema del Valor Promedio” y “el Teorema del Valor Promedio Generalizado” que también son válidos para la integral con la que estamos tratando, sólo que a diferencia de los teoremas anteriores, para éstos sí hace falta suponer que el conjunto sobre el cual se está integrando sea Jordan-medible (además de otra propiedad).

Teorema 1.35 *Sean, $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que, f es continua y acotada en A , g es integrable sobre A y A es un conjunto conexo y Jordan-medible. Entonces:*

1. $\int_A f = f(\hat{\xi}) \cdot J(A)$ para alguna $\hat{\xi} \in A$
2. si $g(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$ entonces $\int_A fg = f(\hat{\xi}) \cdot \int_A g$ para alguna $\hat{\xi} \in A$

Dem. Sean $m = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in A\}$ y $M = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in A\}$. Entonces

$$m \leq f(\hat{x}) \leq M \quad (1.9)$$

para toda $\hat{x} \in A$. Como A es Jordan-medible, por el inciso 5 del teorema 1.33, tenemos que

$$m \cdot J(A) \leq \int_A f \leq M \cdot J(A) \quad (1.10)$$

Obsérvese que si $J(A) = 0$ entonces, de las desigualdades anteriores, concluimos que $\int_A f = 0$ de tal forma que la identidad del inciso 1 se cumple para cualquier $\hat{\xi} \in A$. Supongamos por tanto que $J(A) > 0$. En este caso, por el inciso a) del problema 22 y el problema 38 (aplicado a las funciones

$f - m$ y/o $M - f$), podemos asegurar que, si en 1.9 se satisface alguna (o ambas) de las desigualdades, para toda $\hat{x} \in A$, entonces en 1.10 también se satisface la correspondiente desigualdad. De esta forma, aún cuando en 1.9 se cumpliera alguna (o ambas) desigualdad estricta (para toda $\hat{x} \in A$), dado que f es continua sobre el conjunto conexo A , podemos asegurar que el número $(\int_A f) / J(A)$ pertenece a $f(A)$ (la imagen de A bajo f), o lo que es lo mismo, que existe $\hat{\xi} \in A$ tal que

$$\frac{\int_A f}{J(A)} = f(\hat{\xi})$$

con lo cual terminamos la prueba del inciso 1).

Para la prueba del inciso 2, si en 1.9 multiplicamos por $g(\hat{x})$ tenemos que

$$m \cdot g(\hat{x}) \leq f(\hat{x}) \cdot g(\hat{x}) \leq M \cdot g(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in A$ de tal forma que, nuevamente por el inciso 5 del teorema 1.33, se tiene que

$$m \cdot \int_A g \leq \int_A fg \leq M \cdot \int_A g \quad (1.11)$$

Como en la prueba del inciso 1, si $\int_A g = 0$, por las desigualdades anteriores tenemos que $\int_A fg = 0$ y por tanto la identidad del inciso 2 se cumple para cualquier $\hat{\xi} \in A$. Supongamos entonces que $\int_A g > 0$. En este caso, por el problema 38 (en un sentido aplicado a la función g y en el otro a las funciones $fg - mg$ y/o $Mg - fg$) de nueva cuenta podemos concluir que, si en 1.9 alguna de las desigualdades es estricta para toda $\hat{x} \in A$, entonces la correspondiente en 1.11 también es estricta. Por este hecho, y por las mismas hipótesis sobre f y sobre A que usamos en la prueba del primer inciso, podemos asegurar que el número $(\int_A fg) / (\int_A g)$ pertenece a $f(A)$, o lo que es lo mismo, que existe $\hat{\xi} \in A$ tal que

$$\frac{\int_A fg}{\int_A g} = f(\hat{\xi})$$

con lo cual terminamos la prueba del inciso 2. ■

1.6 Problemas

1. Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rectángulo en \mathbb{R}^n . Pruebe que:
 - (a) si $b_i - a_i < \delta$ para $i = 1, \dots, n$, entonces $d(R) < \sqrt{n} \cdot \delta$
 - (b) si $\hat{x}, \hat{y} \in R$, entonces $\|\hat{x} - \hat{y}\| \leq d(R)$
 - (c) si $\hat{x}_0 \in R$ y $r > d(R)$, entonces $R \subset B_r(\hat{x}_0)$
2. Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rectángulo en \mathbb{R}^n . Dado $\varepsilon > 0$, pruebe que existen R_1, R_2 rectángulos tales que
 - (a) $R_1 \subset \text{int}(R)$ y $m(R) - \varepsilon < m(R_1)$
 - (b) $R \subset \text{int}(R_2)$, y $m(R_2) < m(R) + \varepsilon$.
3. Pruebe que, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, entonces existe R un rectángulo en \mathbb{R}^n tal que $A \subset R$.

4. Pruebe que si $A \subset \mathbb{R}^n$ y R es un rectángulo en \mathbb{R}^n tal que $R \cap A \neq \emptyset$ y $R \cap A^c \neq \emptyset$ entonces $R \cap Fr(A) \neq \emptyset$.
5. Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos particiones del rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que \mathcal{Q} refina a \mathcal{P} si y sólo si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.
6. Pruebe que, si f es integrable sobre el rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es integrable sobre cualquier rectángulo $R' \subset R$.
7. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que $f(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \text{int}(R)$. Pruebe que f es integrable sobre R y que $\int_R f = 0$.
8. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada tal que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe \mathcal{P} una partición de R tal que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ entonces f es integrable sobre R y $\int_R f = 0$.
9. Sea $f : R = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ o } y \text{ es irracional, } 0 \text{ o } 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } y = \frac{p}{q} \text{ con } (m, n) \text{ y } (p, q) \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Determine si f es integrable sobre R . Pruebe su respuesta.

10. Sean, $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, $I \in \mathbb{R}$, y $\{\mathcal{P}^{(k)}\}, \{\mathcal{Q}^{(k)}\}$ dos sucesiones de particiones del rectángulo R tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(k)}) = I = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{S}(f, \mathcal{Q}^{(k)})$$

Pruebe que f es integrable sobre R y que además

$$\int_R f = I$$

11. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R . Pruebe que, si M y m son tales que $m \leq f(\hat{x}) \leq M$ para toda $\hat{x} \in R$, entonces $m \cdot m(R) \leq \int_R f \leq M \cdot m(R)$
12. Sean f, g funciones integrables sobre el rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f + g$ y cf son integrables sobre R , y además

$$\int_R (f + g) = \int_R f + \int_R g \quad \text{y} \quad \int_R cf = c \int_R f$$

13. Sean R, R_1, R_2 rectángulos en \mathbb{R}^n tales que $R = R_1 \cup R_2$ e $\text{int}(R_1) \cap \text{int}(R_2) = \emptyset$ (observe que, si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $a_i < c < b_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ entonces $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, c] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $R_2 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [c, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ son dos rectángulos que satisfacen las condiciones de este problema. Sin embargo, lo más importante de esta observación es que ¡también se cumple lo recíproco! Es decir, si R, R_1, R_2 son rectángulos que satisfacen las condiciones de este problema, entonces deben de poderse escribir justo como lo que acabamos de describir). Pruebe que:

$$(a) \int_{-R} f = \int_{-R_1} f + \int_{-R_2} f \quad \text{y} \quad \int_R^- f = \int_{R_1}^- f + \int_{R_2}^- f$$

- (b) f es integrable sobre R si y sólo si f es integrable sobre R_1 y R_2 . Además, en ambos casos se tiene que $\int_R f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$

14. Pruebe que, si $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre R , entonces:

- (a) f_+ definida como

$$f_+(\hat{x}) = \begin{cases} f(\hat{x}) & \text{si } f(\hat{x}) > 0 \\ 0 & \text{si } f(\hat{x}) \leq 0 \end{cases}$$

es integrable sobre R

- (b) f_- definida como

$$f_-(\hat{x}) = \begin{cases} f(\hat{x}) & \text{si } f(\hat{x}) < 0 \\ 0 & \text{si } f(\hat{x}) \geq 0 \end{cases}$$

es integrable sobre R (sugerencia: pruebe, y use, que $f = f_+ + f_-$)

- (c) $|f|$ es integrable sobre R y además

$$\left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$$

(sugerencia: pruebe, y use, que $|f| = f_+ - f_-$)

- (d) si además $g : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre R , entonces $\min\{f, g\}$ y $\max\{f, g\}$ son integrables sobre R .

15. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada

- (a) Suponga que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Pruebe que, si $M = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$, $M' = \sup\{f^2(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$, $m = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$ y $m' = \inf\{f^2(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$, entonces $M' = M^2$ y $m' = m^2$. ¿Es indispensable la hipótesis de que f sea no negativa? Justifique su respuesta.

- (b) Pruebe que, si f es integrable sobre R entonces f^2 es integrable sobre R .

- (c) Pruebe que, si f y g son integrables sobre R entonces fg es integrable sobre R

16. Pruebe los incisos (c) y (b) de los problemas 14 y 15, respectivamente, usando la proposición 1.19.

17. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Pruebe que, si f^2 es integrable sobre R entonces $|f|$ es integrable sobre R . ¿ f es integrable sobre R ?

18. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(\hat{x}) \leq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Pruebe que:

(a) $\int_R f \leq 0$

(b) si f es continua en $\hat{x}_0 \in R$ y $f(\hat{x}_0) < 0$, entonces $\int_R f < 0$

(c) si f es menor que cero para toda $\hat{x} \in R$, entonces $\int_R f < 0$

19. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Pruebe que R es Jordan-medible y que $J(R) = m(R)$

20. Pruebe el teorema 1.25.
21. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados. Pruebe que:
- (a) si $J(B) = J(A) = 0$, entonces $J(A \cup B) = 0$
 - (b) si $B \subset A$ y $J(A) = 0$, entonces B es Jordan-medible y además $J(B) = 0$
22. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Jordan-medible. Pruebe que:
- (a) $J(A) > 0 \Leftrightarrow \text{int}(A) \neq \emptyset$
 - (b) $J(A) = 0 \Leftrightarrow A \subset Fr(A)$
 - (c) $\text{int}(A)$ es Jordan-medible y además $J(\text{int}(A)) = J(A)$
 - (d) si B es un conjunto tal que $\text{int}(A) \subseteq B \subseteq (A \cup Fr(A))$, entonces B es Jordan-medible y además $J(B) = J(A)$
23. Sea $\{A_k \subset \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos Jordan-medibles tales que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ son acotados. ¿Los conjuntos $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ son Jordan-medibles? Pruebe su respuesta.
24. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-medibles. Pruebe que $A \setminus B$ es Jordan-medible y además $J(A \setminus B) = J(A) - J(A \cap B)$
25. Determine si el conjunto de discontinuidades de cada una de las funciones de los ejemplos 1.9 y 1.13, y el problema 9 son Jordan-medibles, y diga cuál es su medida. Pruebe sus respuestas.
26. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el rectángulo R tal que $D_{f,R}$ es un conjunto Jordan-medible. Pruebe que $J(D_{f,R}) = 0$.
27. Sean, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1 \text{ y } x, y \in \mathbb{Q}\}$, y $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$$

en donde $x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q}$ y $(m, n), (p, q)$ son primos relativos.

- (a) ¿ A es un conjunto Jordan-medible?
 - (b) ¿ f es integrable sobre A ?
Pruebe sus respuestas.
28. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $J(A) = 0$ y f es acotada sobre A . Pruebe que f es integrable sobre A y además $\int_A f = 0$.
29. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A . Pruebe que, si $f(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \text{int}(A)$ entonces f es integrable sobre A y además $\int_A f = 0$.
30. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Pruebe que $D_{f,A,R} \subset Fr(A) \cup D_{f,A}$. ¿Es necesaria la hipótesis de que A sea un conjunto Jordan-medible? Pruebe su respuesta.
31. Pruebe el teorema 1.33.

32. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A . Pruebe que la gráfica de f ($G_f = \{(\hat{x}, f(\hat{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{x} \in A\}$) es un conjunto Jordan-medible (en \mathbb{R}^{n+1}) y de medida cero.
33. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continuas sobre el conjunto cerrado, acotado y Jordan-medible A , tales que $f(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in A$. Pruebe que el conjunto

$$\{(\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\hat{x}) \leq y \leq g(\hat{x}), \hat{x} \in A\}$$

es Jordan-medible (en \mathbb{R}^{n+1}).

34. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre A y $B \subset A$.

- (a) ¿ f es integrable sobre B ? Pruebe su respuesta
- (b) ¿bajo que condiciones sobre B es cierto que f es integrable sobre B ? Pruebe su respuesta
- (c) pruebe que, si f es integrable sobre B entonces f es integrable sobre $A \setminus B$
- (d) pruebe que, si f es integrable sobre B y además $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$, entonces $\int_B f \leq \int_A f$

35. Sea $f : A \cup B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto acotado $A \cup B$. Pruebe que:

- (a) $(f_{A \cap B})_+ = \min\{(f_A)_+, (f_B)_+\}$ y $(f_{A \cap B})_- = \max\{(f_A)_-, (f_B)_-\}$ (consulte el problema 14 para la definición de estas funciones)
- (b) $f_{A \cup B} + f_{A \cap B} = f_A + f_B$

36. Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ que $A = B \cup C$. Pruebe que, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable sobre A , sobre $A \setminus B$ y sobre $A \setminus C$ entonces f es integrable sobre B , sobre C y sobre $B \cap C$ y además

$$\int_A f = \int_B f + \int_C f - \int_{B \cap C} f$$

37. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A tal que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$. Pruebe que, si f es continua en $\hat{x}_0 \in \text{int}(A)$ y $f(\hat{x}_0) > 0$ entonces $\int_A f > 0$. ¿Es indispensable la hipótesis de que $\hat{x}_0 \in \text{int}(A)$?
38. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A . Suponga que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$ y sea $B = \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) > 0\}$. Pruebe que: $\int_A f > 0$ si y sólo si $\text{int}(B) \neq \emptyset$.
39. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A . Sea $B = \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) \neq 0\}$
- (a) ¿ B es un conjunto Jordan-medible?
- (b) pruebe que f es integrable sobre B y que además $\int_A f = \int_B f$

Capítulo 2

Calculando integrales

Si bien es cierto que por el material expuesto en el capítulo 1 sabemos cómo se define la integral de una función de varias variables con valores reales, también es cierto que hasta ahora no contamos con herramientas sencillas que nos permitan calcular, salvo en casos muy específicos, el valor de este tipo de integrales.

Pues bien, la intención de este capítulo es la de desarrollar dichas herramientas, las cuales están basadas fundamentalmente en dos resultados: el Teorema de Fubini¹ y el Teorema de Cambio de Variable.

2.1 Integrales iteradas

Como se recordará, para el caso de una función f definida sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ en \mathbb{R}^2 , y de valores positivos, la integral de f sobre R se puede interpretar geoméricamente como el volumen de la región que se encuentra “por arriba” del rectángulo R y “por abajo” de la gráfica de la función f . Y tratándose del cálculo de volúmenes, seguramente el lector alguna vez habrá escuchado hablar del principio de Cavalieri², aunque en realidad aquí haremos referencia *al método* de Cavalieri para el cálculo de volúmenes.

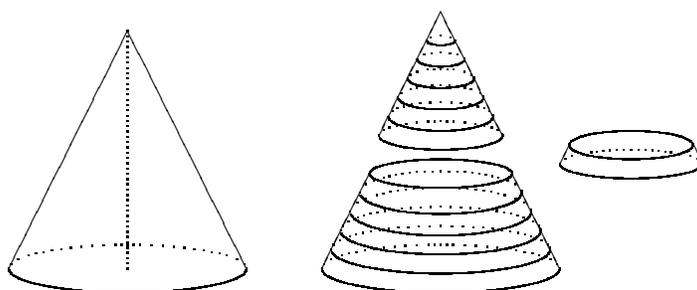


Figura 2.1: El método de Cavalieri para aproximar el volumen de un objeto consiste en: “rebanar” el objeto; después, para cada rebanada, calcular el área de alguna de sus “caras” (o de alguna “cara intermedia”), multiplicarla por el “grosor” de dicha rebanada (obteniendo así un volumen) y finalmente sumar todos estos volúmenes

¹Guido Fubini, matemático italiano (1879-1943)

²Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano discípulo de Galileo, cuyo principio establece que, si existe una manera de colocar dos objetos sobre una base de tal forma que al realizar cortes en ambos objetos con planos paralelos a dicha base, el área de las dos figuras que se forman en cada plano, son iguales, entonces sus volúmenes son iguales.

En términos generales, dicho método consiste en “rebanar” nuestro objeto; después, para cada rebanada, calcular el área de alguna de sus “caras” (o de alguna “cara intermedia”), multiplicarla por el “grosor” de dicha rebanada (obteniendo así un volumen) y finalmente sumar todos estos volúmenes (ver figura 2.1). Como seguramente el lector se habrá percatado, este método no es más que una forma pintoresca de describir la construcción de lo que ahora llamamos sumas de Riemann de una cierta función, que en este caso sería aquella que asigna el área de las “caras” de cualquier “rebanada” o corte que hagamos, y de cuya disponibilidad depende el éxito del método de Cavalieri.

Pues bien, para el caso en \mathbb{R}^2 que nos ocupa, resulta que sí hay formas de cortar nuestra región de tal manera que sí podemos tener la función que nos asigna el área de la figura que se obtiene en cada corte. De hecho, podemos hacer los cortes de dos formas diferentes y en ambas es posible obtener dicha función. Observe que, si cortamos nuestra región por un plano paralelo al plano YZ a la “altura” del punto $x_0 \in [a, b]$ del eje X , la figura que se obtiene es justo la misma que obtenemos al considerar aquella que está por debajo de la gráfica de la función $f_{x_0} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ (ver figura 2.2). De esta forma, el área de la figura correspondiente al corte realizado a la altura x_0 , que denotaremos por $\alpha(x_0)$, coincide con ser

$$\begin{aligned} \alpha(x_0) &= \int_c^d f_{x_0}(y) dy \\ &= \int_c^d f(x_0, y) dy \end{aligned}$$

Nótese que α es una función definida sobre el intervalo $[a, b]$ y es justo una función que es útil para aplicar el método de Cavalieri.

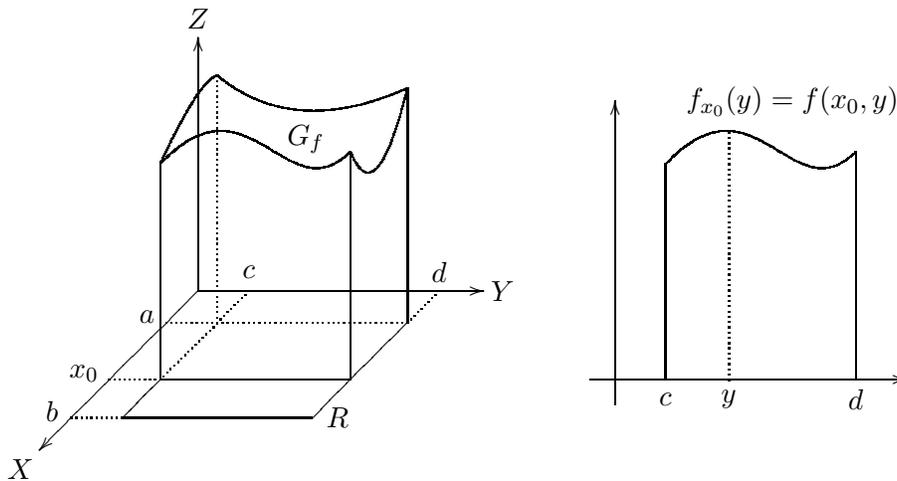


Figura 2.2: Si a la región que se encuentra “por arriba” del rectángulo R y “por abajo” de la gráfica de la función f (G_f), la “cortamos” por un plano paralelo al plano YZ a la “altura” del punto $x_0 \in [a, b]$ del eje X , la figura que se obtiene es justo la misma que obtenemos al considerar aquella que está por debajo de la gráfica de la función $f_{x_0} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$

También podemos hacer cortes con planos paralelos al plano XZ ; así, si cortamos a la altura del punto $y_0 \in [c, d]$ del eje Y , la figura que se obtiene coincide con la que está por debajo de la

gráfica de la función $f_{y_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$, de tal forma que el área de la figura obtenida con este corte (ver figura 2.3), que denotaremos por $\beta(y_0)$, estará dada por

$$\begin{aligned}\beta(y_0) &= \int_a^b f_{y_0}(x) dx \\ &= \int_a^b f(x, y_0) dx\end{aligned}$$

En este caso, β es una función definida sobre el intervalo $[c, d]$ y con ella también podemos aplicar el método de Cavalieri.

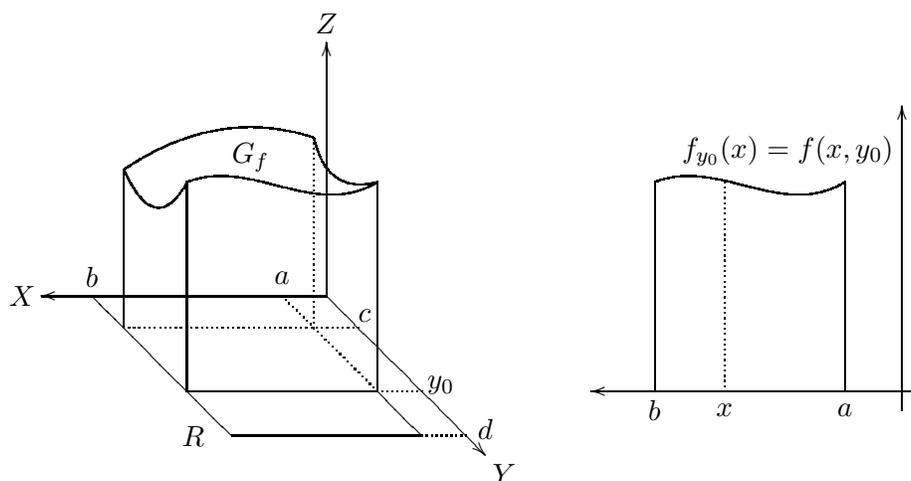


Figura 2.3: También podemos hacer cortes con planos paralelos al plano XZ . Si cortamos a la altura del punto $y_0 \in [c, d]$ del eje Y , la figura que se obtiene coincide con la que está por debajo de la gráfica de la función $f_{y_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$

Si todo lo dicho anteriormente está bien (que sí lo estará, salvo por uno que otro “pequeño ajuste”), el volumen de la región que describimos al principio, y que “geoméricamente” es lo que representa la integral de f sobre R ($\int_R f$), deberá estar dado por

$$\begin{aligned}\int_R f &= \int_a^b \alpha(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx\end{aligned}$$

o por

$$\begin{aligned}\int_R f &= \int_c^d \beta(y) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy\end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en el segundo renglón de cada una de las identidades anteriores, se llaman integrales iteradas, se calculan de “adentro hacia afuera”, y de la misma forma que en el caso de la derivación parcial, en cada paso, las variables diferentes a la variable de integración, se consideran como constantes.

Es importante destacar que las identidades anteriores nos proporcionan dos métodos para calcular la integral de f sobre R , y además ambos métodos nos dan el mismo resultado. El teorema de Fubini es famoso por esta propiedad, y ésta se resume diciendo que podemos integrar en el orden que queramos. Si bien esto es cierto (bajo ciertas hipótesis), es sólo una parte. La otra, es justo la que establece que la integral de una función de varias variables se puede integrar por medio de integraciones iteradas.

Una vez que hemos llegado hasta aquí, es necesario precisar algunas cuestiones. La primera de ellas tiene que ver con las funciones α y β que definimos párrafos arriba. Y la pregunta es: ¿ α y β están definidas para todo $x \in [a, b]$ y para toda $y \in [c, d]$, respectivamente? Y bueno, si sólo sabemos que la función original f es integrable sobre R , entonces la respuesta es: no. Y un ejemplo que prueba esta afirmación nos lo proporciona la función del ejercicio 9 del capítulo anterior.

Ejemplo 2.1 Recordemos que esta función está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ o } y \text{ es irracional, } 0 \leq x, y \leq 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } y = \frac{p}{q} \text{ con } (m, n) \text{ y } (p, q) \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Observemos que, si $x_0 \in [0, 1]$ es irracional, entonces $f_{x_0}(y) = f(x_0, y) = 0$ para toda $y \in [0, 1]$ en cuyo caso la correspondiente función α sí está definida para este punto, y además

$$\begin{aligned} \alpha(x_0) &= \int_0^1 f_{x_0}(y) dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, si $x_0 \in [0, 1]$ es racional, con $x_0 = m_0/n_0$, entonces

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n_0} + \frac{1}{q} & \text{si } y = \frac{p}{q} \text{ con } p \text{ y } q \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Es fácil comprobar para esta función que su integral inferior $\int_0^1 f_{x_0}(y) dy = 0$ y que su integral superior $\int_0^1 f_{x_0}(y) dy = 1/n_0$, lo que significa que no es integrable en el intervalo $[0, 1]$ y que por lo tanto la función α no está definida para estos valores de x . El lector puede verificar que se da una situación análoga para la función β .

El ejemplo anterior no deberá rompernos el corazón puesto que para una clase muy grande de funciones (las continuas) no tendremos ningún problema en definir a las ya famosas funciones α y β de los párrafos anteriores, lo cual se deduce fácilmente del problema 1. Y aún menos descorazonador nos resultará dicho ejemplo, si observamos que, si bien no es posible definir las funciones α y β puesto que las integrales $\int_0^1 f_x(y) dy$ y $\int_0^1 f_y(x) dx$ no existen para todo $x \in [0, 1]$ y/o todo $y \in [0, 1]$, de las que sí podemos estar seguros que sí existen, son las integrales inferiores y superiores de las mismas funciones f_x y f_y . Es decir, sin importar qué valores $x \in [0, 1]$ y $y \in [0, 1]$ escojamos, los

números $\int_0^1 f_x(y)dy$, $\int_0^{-1} f_x(y)dy$, $\int_0^1 f_y(x)dx$ y $\int_0^{-1} f_y(x)dx$ siempre existen. Así, dado $x \in [0, 1]$ le podemos asociar dos números, que ahora denotaremos por $\phi(x)$ y $\Phi(x)$, de la siguiente forma

$$\phi(x) = \int_{-0}^1 f_x(y)dy = \int_{-0}^1 f(x, y)dy = 0 \quad \text{para toda } x \in [0, 1]$$

y

$$\Phi(x) = \int_0^{-1} f_x(y)dy = \int_0^{-1} f(x, y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

Y lo mejor de todo esto es que este par de funciones $\phi(x)$ y $\Phi(x)$ ($x \in [0, 1]$) que obtenemos de esta manera, ¡son integrables! con la propiedad de que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(x)dx &= 0 \\ &= \int_R f \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(x)dx &= 0 \\ &= \int_R f \end{aligned}$$

Por supuesto que también se cumple lo mismo si para cada $y \in [0, 1]$, definimos las funciones

$$\psi(y) = \int_0^1 f_y(x)dx = \int_0^1 f(x, y)dx = 0 \quad \text{para toda } y \in [0, 1]$$

y

$$\Psi(y) = \int_0^{-1} f_y(x)dx = \int_0^{-1} f(x, y)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } y = \frac{p}{q} \end{cases}$$

que también resultarán integrables, con la propiedad de que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(y)dy &= 0 \\ &= \int_R f \end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 \Psi(y) dy = 0$$

$$= \int_R f$$

Lo que vamos hacer a continuación es mostrar que estas propiedades no son exclusivas de la función del ejemplo 2.1. Más aun, veremos que las ideas que están detrás del método descrito párrafos arriba para calcular el volumen de una figura que se puede expresar como la integral de una función definida sobre un rectángulo en \mathbb{R}^2 , se pueden extender a funciones que son integrables sobre rectángulos en \mathbb{R}^n . Hay varias formas de hacer esto, y la que expondremos aquí nos permitirá mostrar que, bajo ciertas condiciones, el cálculo de este tipo de integrales se puede reducir al cálculo de integrales iteradas.

La herramienta más importante para lograr todo esto nos la da el teorema de Fubini, del cual aquí daremos una de sus tantas versiones. Antes, simplemente recordaremos un resultado muy elemental acerca del ínfimo y el supremo de conjuntos acotados de números reales, que seguramente resultará muy familiar al lector, y que dice lo siguiente: si $A, B \subset \mathbb{R}$ son conjuntos no vacíos y acotados (superior e inferiormente) tales que $A \subset B$ entonces

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \tag{2.1}$$

Teorema 2.2 (de Fubini) Sean $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ un índice fijo, y $R^{i_0} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i_0-1}, b_{i_0-1}] \times [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Para cada $\hat{y} = (x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \in R^{i_0}$ definimos:

1. $f_{\hat{y}} : [a_{i_0}, b_{i_0}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_{\hat{y}}(x) = f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

2. $\phi, \Phi : R^{i_0} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(\hat{y}) = \int_{-a_{i_0}}^{b_{i_0}} f_{\hat{y}}(x) dx$$

y

$$\Phi(\hat{y}) = \int_{a_{i_0}}^{b_{i_0}} f_{\hat{y}}(x) dx$$

Si f es integrable sobre R entonces ϕ y Φ son integrables sobre el rectángulo R^{i_0} y además

$$\int_{R^{i_0}} \phi = \int_R f = \int_{R^{i_0}} \Phi$$

Dem. Lo primero que hay que destacar es que las funciones ϕ y Φ definidas en el enunciado satisfacen que

$$\phi(\hat{y}) \leq \Phi(\hat{y})$$

para toda $\hat{y} \in R^{i_0}$.

Para continuar, estableceremos la notación que vamos a usar en esta demostración.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ es una partición del rectángulo R , sabemos que cada \mathcal{P}_i es una partición del correspondiente intervalo $[a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Si $\mathcal{P}_{i_0} = \{a_{i_0} = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b_{i_0}\}$ y R_j (con $j = 1, \dots, m$) son los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{P}^{i_0} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_{i_0-1} \times \mathcal{P}_{i_0+1} \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ en el rectángulo R^{i_0} , entonces los subrectángulos de R inducidos por la partición \mathcal{P} (que serán $k \cdot m$) los denotaremos por R_{lj} , y que se puede interpretar como el que se obtiene de “insertar” el intervalo $[t_{l-1}, t_l]$ en la i_0 -coordenada del rectángulo R_j , para cada $l = 1, \dots, k$ y cada $j = 1, \dots, m$.

Para cada uno de estos mismos índices, llamamos

$$m_{lj}(f) = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_{lj}\} \quad \text{y} \quad M_{lj}(f) = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_{lj}\}$$

Si $\hat{y} \in R^{i_0}$ entonces

$$m_l(f_{\hat{y}}) = \inf\{f_{\hat{y}}(x) \mid x \in [t_{l-1}, t_l]\} \quad \text{y} \quad M_l(f_{\hat{y}}) = \sup\{f_{\hat{y}}(x) \mid x \in [t_{l-1}, t_l]\}$$

para cada $l \in \{1, \dots, k\}$.

Finalmente, para cada $j = 1, \dots, m$ denotamos como

$$m_j(\phi) = \inf\{\phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\} \quad \text{y} \quad M_j(\phi) = \sup\{\phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\}$$

para la función ϕ , y

$$m_j(\Phi) = \inf\{\Phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\} \quad \text{y} \quad M_j(\Phi) = \sup\{\Phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\}$$

para la función Φ .

Observe que, si $\hat{y} = (x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \in R_j$ se tiene que

$$\{f_{\hat{y}}(x) = f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \mid x \in [t_{l-1}, t_l]\} \subset \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_{lj}\}$$

de tal forma que por las desigualdades 2.1 tenemos que

$$m_{lj}(f) \leq m_l(f_{\hat{y}}) \leq M_l(f_{\hat{y}}) \leq M_{lj}(f)$$

para cada $l \in \{1, \dots, k\}$.

Ahora, si multiplicamos las desigualdades anteriores por $t_l - t_{l-1} > 0$, obtenemos que

$$m_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq M_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq M_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

de tal forma que sumando sobre las l 's, se tiene que

$$\sum_{l=1}^k m_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \sum_{l=1}^k m_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \sum_{l=1}^k M_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \sum_{l=1}^k M_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

desigualdades que, usando la notación de sumas superiores y sumas inferiores, se escriben como

$$\sum_{l=1}^k m_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \underline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \overline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \sum_{l=1}^k M_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

Si ahora recordamos la definición de las funciones ϕ y Φ , podemos concluir que

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \underline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \phi(\hat{y}) \leq \Phi(\hat{y}) \leq \overline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

para toda $\hat{y} \in R_j$. Esto prueba que los números de los extremos de estas desigualdades son cota inferior y superior (respectivamente) tanto de ϕ como de Φ en el subrectángulo R_j , y por lo tanto tendremos que

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\phi) \leq M_j(\phi) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

y

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\Phi) \leq M_j(\Phi) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

para cada $j = 1, \dots, m$. Ahora, si en ambos grupos de desigualdades multiplicamos por $m(R_j) > 0$, tenemos que

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\phi) \cdot m(R_j) \leq M_j(\phi) \cdot m(R_j) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

y

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\Phi) \cdot m(R_j) \leq M_j(\Phi) \cdot m(R_j) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

de tal forma que si sumamos con respecto al índice j , se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) &\leq \sum_{j=1}^m m_j(\phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m M_j(\phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) &\leq \sum_{j=1}^m m_j(\Phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m M_j(\Phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) \end{aligned}$$

Ya que $m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) = m(R_{lj})$, si usamos nuevamente la notación de sumas inferiores y superiores, concluimos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(\phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

y

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\Phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(\Phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

Como podrá notar el lector, estas desigualdades son suficientes para probar que, si f es integrable sobre el rectángulo R , entonces las funciones ϕ y Φ son integrables sobre el rectángulo R^{i_0} y además

$$\int_{R^{i_0}} \phi = \int_R f = \int_{R^{i_0}} \Phi$$

■

Hay una manera más general de formular el teorema de Fubini (como se verá en el problema 2), pero la forma en que lo hemos hecho aquí tiene que ver con la manera más común en que suele aplicarse. Dejando un poco de lado el formalismo del lenguaje matemático, podemos leer este teorema de la siguiente manera; si de lo que se trata es de calcular la integral de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ sobre un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, síganse los siguientes pasos:

1. elija un índice $i_1 \in \{1, \dots, n\}$
2. integre a la función $f(x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_n)$ con respecto a la variable x_{i_1} sobre el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$ (lo que significa que debe tratar “como constantes” a las variables distintas de x_{i_1}). Si por desgracia la función $f(x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_n)$ no es integrable con respecto a la variable x_{i_1} sobre el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$, no se preocupe, calcule la integral inferior o la integral superior de la misma función (con respecto a la misma variable). El resultado de lo anterior es una expresión (o una función) que sólo depende (a lo más) de las variables $x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n$
3. el teorema de Fubini asegura que la función del inciso anterior es integrable sobre el rectángulo $R^{i_1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (que se obtiene del rectángulo R “quitándole” el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$) por lo que se puede volver al paso uno eligiendo ahora un índice en $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$

Los incisos anteriores tienen la intención de bosquejar el algoritmo que se debe seguir a fin de calcular la integral de una función de varias variables. Como se podrá notar, éstos nos dicen que la integral de una función sobre un rectángulo en \mathbb{R}^n se puede “reducir” a la integral de otra función sobre un rectángulo en \mathbb{R}^{n-1} , por lo que después de un número finito de pasos (a lo más n , que es el número máximo de variables) habremos terminado. Una particularidad que es importante destacar, y por la cual es más conocido el teorema de Fubini, es que el orden en que vayamos eligiendo los índices es totalmente arbitrario. Es decir, nosotros podemos ir eligiendo la variable de integración que más nos convenga en cada paso, lo cual, como veremos en algunos ejemplos, resulta muy conveniente. Esta propiedad se suele expresar diciendo que el teorema de Fubini nos permite intercambiar “el orden de integración” de la forma que queramos.

Todo esto queda resumido en el siguiente resultado, que es un corolario del teorema de Fubini. Con el fin de evitar la posibilidad de que las funciones que se mencionan en el inciso 2 no sean integrables, para este corolario vamos a suponer que la función que deseamos integrar es continua (ver el problema 1).

Corolario 2.3 Sea $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua en R , y sean $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$ diferentes dos a dos (es decir, $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$). Entonces

$$\int_R f = \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\int_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \right) dx_{i_2} \right) \cdots \right) dx_{i_{n-1}} \right) dx_{i_n}$$

Dem. Como el lector seguramente lo sospechaba, esta prueba se hará por *inducción sobre el número de variables* y la iniciaremos desde $k = 2$. Este es el caso con el que se inició la discusión de esta sección, está directamente relacionado con el método de Cavalieri, y es una consecuencia directa del teorema de Fubini.

Supongamos ahora que el resultado es válido para cualquier función de n variables y continua sobre un rectángulo en \mathbb{R}^n .

Ahora, sea $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en R , y sean $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, n+1\}$ diferentes dos a dos. Elegimos el índice i_1 y definimos $\phi : R' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i_1-1}, b_{i_1-1}] \times [a_{i_1+1}, b_{i_1+1}] \times \cdots \times [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) dx$$

para cada $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) \in R'$. Nótese que ϕ está bien definida, pues f es continua en R ; entonces $f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1})$ es también una función continua de la variable $x \in [a_{i_1}, b_{i_1}]$, y por lo tanto integrable sobre el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$. Así, por el teorema de Fubini sabemos que

$$\int_R f = \int_{R'} \phi$$

Por otra parte, tenemos que ϕ es una función de n variables indexadas por el conjunto $\{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1\} = \{i_2, \dots, i_{n+1}\}$, y por el segundo inciso del problema 1, sabemos que es continua en el rectángulo R' . Por lo tanto, por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{R'} \phi \\ &= \int_{a_{i_{n+1}}}^{b_{i_{n+1}}} \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \phi(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, x_{n+1}) dx_{i_2} \right) dx_{i_3} \right) \cdots \right) dx_{i_n} \right) dx_{i_{n+1}} \\ &= \int_{a_{i_{n+1}}}^{b_{i_{n+1}}} \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) dx \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_3} \right) \cdots \right) dx_{i_n} \right) dx_{i_{n+1}} \end{aligned}$$

de tal forma que, cambiando el nombre de la variable de integración x por x_{i_1} , obtenemos que

$$\int_R f = \int_{a_{i_{n+1}}}^{b_{i_{n+1}}} \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{i_1} \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_3} \right) \cdots \right) dx_{i_n} \right) dx_{i_{n+1}}$$

concluyendo con esto la inducción. ■

Sin duda, una vez que hemos llegado hasta aquí, lo que sigue son algunos ejemplos de como aplicar el corolario anterior.

Ejemplo 2.4 1. calcular la integral $\int_R \text{sen}(x + y)$ donde $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Solución. De acuerdo con el teorema de Fubini, sabemos que:

$$\begin{aligned} \int_R \text{sen}(x + y) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x + y) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos(x + y) \Big|_0^{\pi/2} dy \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(\pi/2 + y) + \cos(y)) dy \\ &= -\text{sen}(\pi/2 + y) \Big|_0^{\pi/2} + \text{sen}(y) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= (-\text{sen}(\pi/2 + \pi/2) + \text{sen}(\pi/2 + 0)) + (\text{sen}(\pi/2) - \text{sen}(0)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. calcular la integral $\int_R x \cos(xy)$ donde $R = [0, \pi/2] \times [0, 1]$.

Solución. Nuevamente, por el teorema de Fubini sabemos que esta integral la podemos calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_R x \cos(xy) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 x \cos(xy) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}(xy) \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx \\ &= -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Se deja al lector que calcule la misma integral usando el otro orden de integración, que de acuerdo con el teorema de Fubini, también se vale hacerlo así.

Si el lector hace la tarea del segundo inciso del ejemplo anterior, se podrá dar cuenta de las ventajas que se tienen al poder elegir el orden de integración.

2.2 Calculando integrales sobre otros conjuntos

Como seguramente se recordará, el concepto de integración lo extendimos a los conjuntos Jordan-medibles y por la forma en que lo hicimos, integrar una función definida sobre uno de estos conjuntos se reduce a integrar una cierta función sobre algún rectángulo que lo contenga. Hay un tipo de conjuntos Jordan-medibles para los cuales todo esto resulta muy conveniente a la hora de calcular la integral de funciones definidas sobre ellos.

Este tipo de conjuntos es como el que se definió en el problema 33 del capítulo uno y un ejemplo, en \mathbb{R}^2 , es la región acotada entre la gráfica de dos funciones α, β (continuas) definidas sobre un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que tienen la propiedad de que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ para toda $x \in [a, b]$ (ver figura 2.4). Es decir, si consideramos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad (2.2)$$

por el problema antes mencionado sabemos que A es un conjunto Jordan-medible de tal forma que, si f es una función continua sobre A y $R \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo tal que $A \subset R$, entonces

$$\int_A f = \int_R f_A$$

En particular, podemos tomar $R = [a, b] \times [m, M]$ en donde m es el mínimo valor de α en $[a, b]$ y M es el máximo valor de β en $[a, b]$.

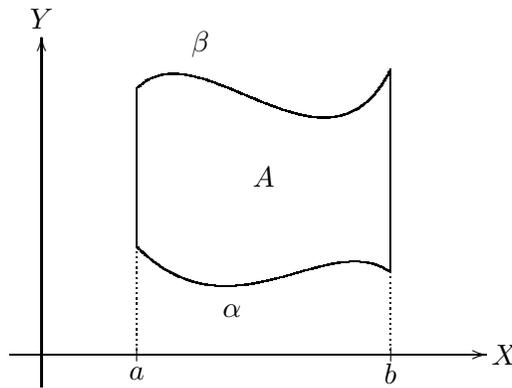


Figura 2.4: La región en \mathbb{R}^2 definida como $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ es un conjunto Jordan-medible

Así, dado que para cada $x \in [a, b]$ podemos estar seguros de que la función $(f_A)_x : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $(f_A)_x(y) = f_A(x, y)$ es integrable (a lo más es discontinua en un par de puntos), tendremos que

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_R f_A \\ &= \int_a^b \left(\int_m^M f_A(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_m^{\alpha(x)} f_A(x, y) dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_A(x, y) dy + \int_{\beta(x)}^M f_A(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_A(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx
 \end{aligned}$$

en donde $\int_m^{\alpha(x)} f_A(x, y) dy = \int_{\beta(x)}^M f_A(x, y) dy = 0$ dado que $f_A(x, y) = 0$ si $y \in [m, \alpha(x)) \cup (\beta(x), M]$. Es importante hacer notar que la forma en que está definido el conjunto A determina el orden en que se toman las variables de integración de esta integral iterada.

En \mathbb{R}^2 hay otra forma de construir un conjunto similar al definido en 2.2. Así como en ese caso se tiene que la coordenada y de cualquier punto en A (que tenga una coordenada $x \in [a, b]$) está entre el valor de dos funciones de x , ahora la coordenada x de cualquier punto (que tenga una coordenada $y \in [c, d]$) estará entre el valor de dos funciones de y . En términos más precisos, estamos hablando de un conjunto definido de la siguiente forma: si $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y tales que $\varphi(y) \leq \psi(y)$ para toda $y \in [c, d]$, consideramos

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d] \text{ y } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (2.3)$$

La figura 2.5 ilustra un conjunto de este tipo.

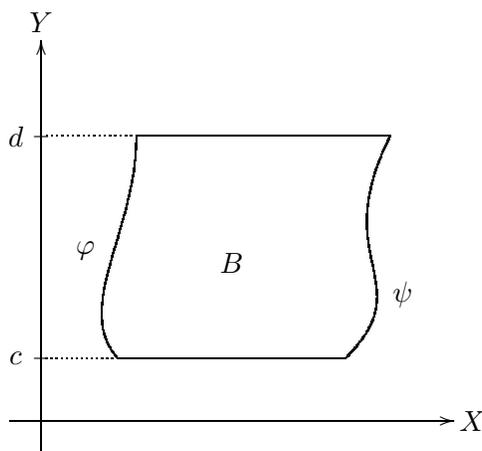


Figura 2.5: La región en \mathbb{R}^2 definida como $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d] \text{ y } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ también es un conjunto Jordan-medible

Procediendo como en el caso del conjunto A , es fácil deducir ahora que si f es una función continua sobre el conjunto Jordan-medible B , entonces

$$\begin{aligned}
 \int_B f &= \int_R f_B \\
 &= \int_c^d \left(\int_{m'}^{M'} f_B(x, y) dx \right) dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_c^d \left(\int_{m'}^{\varphi(y)} f_B(x, y) dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_B(x, y) dx + \int_{\psi(y)}^{M'} f_B(x, y) dx \right) dy \\
 &= \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_B(x, y) dx \right) dy \\
 &= \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy
 \end{aligned}$$

tomando $R = [m', M'] \times [c, d]$ y en donde m' es el mínimo de φ en $[c, d]$ y M' es el máximo de ψ en $[c, d]$.

Vale la pena destacar que para las integrales iteradas que se obtuvieron para calcular la integral de una función continua f definida sobre conjuntos como los definidos en 2.2 y en 2.3, no tiene mucho sentido hablar del cambio en el orden de integración. Es decir, ni $\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$ es igual a $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ ni $\int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$ es igual a $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ porque, entre otras cosas, integrales iteradas como $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ o $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ no tienen un significado preciso puesto que no nos conducen a algún resultado numérico específico (observe que en ambos casos las últimas integrales están evaluadas de $\alpha(x)$ a $\beta(x)$ o de $\varphi(y)$ a $\psi(y)$, respectivamente, ¡sin que quede claro cuál valor de x o de y habría que elegir!).

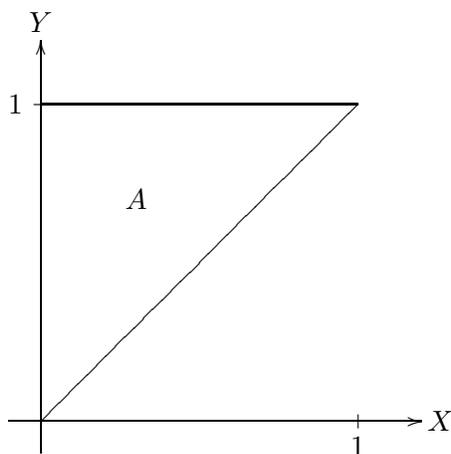
De aquí en adelante a los conjuntos definidos como en 2.2 y en 2.3 los llamaremos regiones (de \mathbb{R}^2) tipo I y tipo II, respectivamente. Aunque el tipo de la región determina el orden en que se toman las variables de integración, si un conjunto Jordan-medible (en \mathbb{R}^2) C se puede expresar como una región tipo I y como una región tipo II, entonces la integral de cualquier función continua definida sobre C se puede calcular por medio de integrales iteradas con los dos ordenes de integración posibles. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.5 Calcular $\int_A f$ en donde $f(x, y) = x + y$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \leq y \leq 1\}$ (ver figura 2.6).

Solución. Como se podrá notar, A está descrito como una región tipo I, tomando $\alpha(x) = x$ y $\beta(x) \equiv 1$ (la función constante uno) para $x \in [0, 1]$. Por tanto, sabemos que

$$\begin{aligned}
 \int_A f &= \int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\int_x^1 (x + y) dy \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x + y)^2 \Big|_x^1 \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 ((x + 1)^2 - (x + x)^2) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(-x^3 \Big|_0^1 + x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$


 Figura 2.6: La región A del ejemplo 2.5

Ahora, como A también se puede expresar de la forma $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ y } 0 \leq x \leq y\}$, es decir, como una región tipo II con $\varphi(y) \equiv 0$ y $\psi(y) = y$ para $y \in [0, 1]$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 \int_A f &= \int_0^1 \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^y (x + y) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (x + y)^2 \Big|_0^y \right) dy \\
 &= \int_0^1 \frac{3}{2} y^2 dy \\
 &= \frac{1}{2} y^3 \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Este ejemplo no sólo ilustra que, si un conjunto es de ambos tipos, entonces la integral de una función continua sobre éste se puede expresar en términos de integrales iteradas correspondientes

a los dos diferentes órdenes de integración posibles, sino que en algunos casos uno de ellos resulta más fácil de realizar que el otro o, como se verá en uno de los ejercicios de este capítulo, sólo con uno de ellos es posible calcular el valor de la integral.

Hasta ahora sólo hemos trabajado en \mathbb{R}^2 pero como seguramente el lector intuirá, todo esto se puede extender a cualquier \mathbb{R}^n . En \mathbb{R}^3 , por ejemplo, podemos considerar conjuntos como los siguientes:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ y } \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\} \\ E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in B \text{ y } \lambda(x, z) \leq y \leq \mu(x, z)\} \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in C \text{ y } \eta(y, z) \leq x \leq \sigma(y, z)\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

en donde A, B y C son regiones tipo I y/o tipo II en \mathbb{R}^2 , y $\gamma, \delta, \lambda, \mu, \eta$ y σ son funciones continuas (de valores reales) tales que $\gamma \leq \delta, \lambda \leq \mu$ y $\eta \leq \sigma$ sobre A, B y C , respectivamente. Las figuras 2.7 (a), y 2.7 (b) ilustran algunos ejemplos de este tipo de conjuntos.

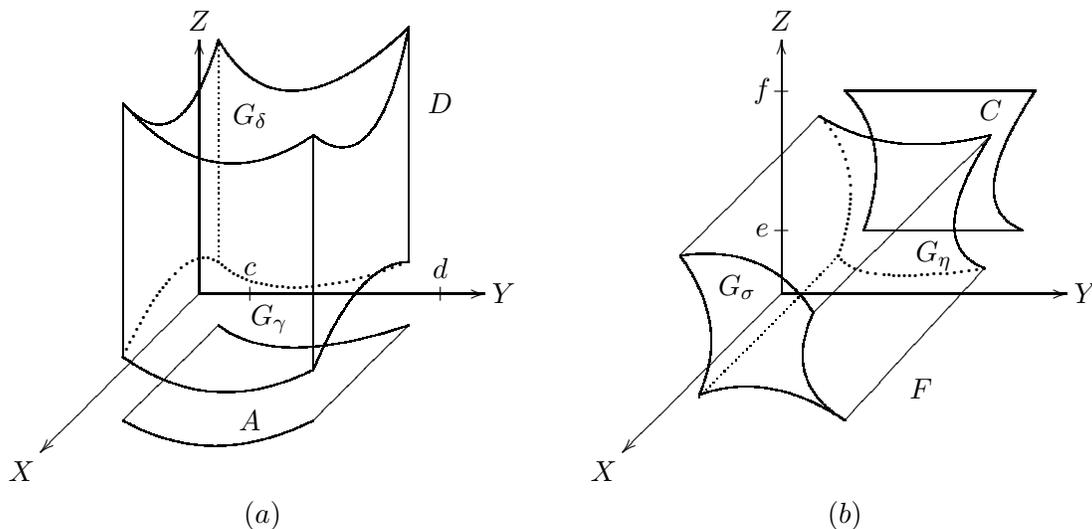


Figura 2.7: Ejemplos de conjunto tipo $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ y } \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}$ y tipo $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in C \text{ y } \eta(y, z) \leq x \leq \sigma(y, z)\}$

Así, si f es una función continua definida sobre el conjunto D , sabemos que

$$\int_D f = \int_R f_D$$

en donde $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo que contiene a D . Si ahora suponemos que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que aparece en la descripción del conjunto D es una región tipo I, es decir de la forma 2.2, entonces podemos tomar $R = [a, b] \times [m, M] \times [m', M']$ en donde m es el mínimo valor de la función α en $[a, b]$, M es el máximo valor de la función β en $[a, b]$, m' es el mínimo valor de la función γ en A y M' es el máximo valor de la función δ en A . De esta forma, obtendremos que:

$$\int_D f = \int_R f_D$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{[a,b] \times [m,M]} \left(\int_{m'}^{M'} f_D(x, y, z) dz \right) \\
 &= \int_a^b \left(\int_m^M \left(\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f_D(x, y, z) dz \right) dy \right) dx \\
 &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dy \right) dx
 \end{aligned}$$

Nuevamente vale la pena insistir en que el orden en que se toman las variables de integración en esta integral iterada, está determinado por la forma en que está descrito el conjunto D .

Se deja al lector escribir las integrales iteradas que se obtienen al integrar una función f sobre conjuntos como E o F . A los conjuntos descritos en 2.4, sin importar el tipo de región (en \mathbb{R}^2) que sean los conjuntos A, B y C que ahí aparecen, los llamaremos regiones (en \mathbb{R}^3) tipo I, tipo II y tipo III, respectivamente.

Como es de suponerse, daremos un ejemplo de cómo se calculan integrales de este tipo.

Ejemplo 2.6 Sea D la región acotada por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0, z = 1, x = 0, x = 1$, y sea $f(x, y, z) = xz$. Calcule $\int_D f$.

Solución. En este caso, D es un ejemplo (en \mathbb{R}^3) de la clase de conjuntos que se pueden expresar como regiones de cualquiera de los tres tipos. Aquí lo describiremos como una región de tipo II. En efecto, tenemos que D se puede expresar como sigue:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq z, -\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2} \right\}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \int_D f &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} xz dy \right) dx \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^z xz \left(y \Big|_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} \right) dx \right) dz \\
 &= \int_0^1 \left(z \int_0^z 2x\sqrt{z^2-x^2} dx \right) dz \\
 &= \int_0^1 z \left(-\frac{2}{3} (z^2 - x^2)^{3/2} \Big|_0^z \right) dz \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^1 z^4 dz \\
 &= \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

En gran medida, el problema de calcular la integral de una función reside en identificar y expresar adecuadamente el conjunto sobre el cual se quiere integrar, como lo ilustran los ejemplos que hemos dado.

Terminaremos esta sección con un resultado muy útil y muy importante, en cuya demostración el teorema de Fubini juega un papel central.

Teorema 2.7 Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $[a, b] \times [c, d]$. Definimos $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Entonces g es derivable en $[c, d]$ y además

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

Dem. Primero notemos que para cada $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$\int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt = f(x, y) - f(x, c)$$

de tal forma que

$$f(x, y) = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt + f(x, c)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_a^b f(x, y) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt + f(x, c) \right) dx \\ &= \int_c^y \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dx \right) dt + \int_a^b f(x, c) dx \end{aligned}$$

Nótese que es en el primer sumando de la última identidad en donde usamos el Teorema de Fubini, lo cual nos está permitido puesto que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a, b] \times [c, y]$ para toda $y \in [c, d]$. Por otra parte, usando nuevamente el hecho de que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$, y por lo tanto uniformemente continua ahí mismo, concluimos que $h(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dx$ es una función continua de la variable t , de tal forma que por el primer Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que $\int_c^y h(t) dt$ es una función derivable con respecto de y . Como $\int_a^b f(x, c) dx$ es una constante, concluimos que g es derivable con respecto a y y además

$$g'(y) = h(y)$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

que es lo que se quería demostrar. ■

De entre sus muchas aplicaciones, este último teorema nos proporciona una herramienta muy útil para resolver integrales, como se muestra en el siguiente

Ejemplo 2.8 Calcule la integral

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}^2(x) + a^2 \cos^2(x)) dx \quad (a \neq 0)$$

Solución. Definimos la función $f : (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x, y) = \ln(\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x))$ la cual es C^∞ en su dominio (y por lo tanto en cualquier rectángulo cerrado contenido ahí). De esta forma, si definimos $g : (0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)) dx$$

por el teorema anterior, sabemos que g es derivable y además

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} (\ln(\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x))) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2y \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx \end{aligned}$$

De esta expresión se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned} g'(1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ahora, si $y \neq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2y \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx \\ &= \frac{2y}{y^2 - 1} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} \right) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{2y}{y^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx \right)$$

Resolviendo la última integral (lo cual se puede lograr si hacemos el cambio de variable $u = \tan(x)$ ³) obtenemos que

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{2y}{y^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2y} \right) \\ &= \frac{\pi}{y + 1} \end{aligned}$$

para toda $y > 0$. De esta última identidad, junto con el hecho de que $g(1) = 0$, se tiene que

$$g(y) = \pi \ln \left(\frac{y + 1}{2} \right)$$

de modo que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}^2(x) + a^2 \cos^2(x)) dx = \pi \ln \left(\frac{a + 1}{2} \right)$$

2.3 El Teorema de Cambio de Variable

Sin duda el lector conoce un teorema que lleva el mismo nombre que el de esta sección. Se trata de un teorema para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} que es muy útil para resolver integrales indefinidas (de este mismo tipo de funciones), aunque también existe su versión para integrales definidas.

De acuerdo con este conocido teorema, si nuestro problema es resolver una integral indefinida de la forma

$$\int f(x) dx$$

escribimos a la variable x en función de otra variable t , es decir, $x = g(t)$ (de ahí el nombre de “cambio de variable”) lo que nos conduce a resolver la integral⁴

$$\int f(g(t))g'(t) dt$$

El criterio para elegir a la función g tiene que ver fundamentalmente con el hecho de que el nuevo integrando $f(g(t))g'(t)$ resulte más fácil de resolver. Si este es el caso y nos es más fácil encontrar

³Con este cambio de variable, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du \\ &= \frac{1}{y} \left(\arctan \left(\frac{u}{y} \right) \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{\pi}{2y} \end{aligned}$$

⁴Si el lector no recuerda por qué cuando hacemos el cambio de variable $x = g(t)$ el nuevo integrando está dado por $f(g(t))g'(t)$, sólo considere que, si F es una primitiva de f , entonces usando la regla de la cadena podemos comprobar que $G = F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)g'$

una primitiva de $f(g(t))g'(t)$, digamos una $G(t)$, entonces se puede comprobar que la función $F(x) = G(g^{-1}(x))$ resulta ser una primitiva de $f(x)$ (esto es lo que nos asegura el Teorema de Cambio de Variable y sería muy adecuado que el lector comprobara esta afirmación).

Si analizamos con más detenimiento todo lo hecho hasta aquí, concluimos que la función g tiene que ser una función derivable, con derivada continua (para garantizar la integrabilidad de $f(g(t))g'(t)$) y además invertible. En la práctica no solemos hacer mucho caso de estas condiciones y lo que realmente nos importa es que el cambio de variable “funcione”.

Seguramente no escapa a la atención del lector el hecho de que, en el concepto de integral para funciones de varias variables que se ha venido trabajando hasta ahora, no hemos mencionado nada parecido al concepto de “integral indefinida” (o, equivalentemente, al concepto de “primitiva”). Es por esta razón que esta formulación del Teorema de Cambio de Variable para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} no es muy útil a fin de guiarnos hacia su generalización para funciones de varias variables. Afortunadamente existe una formulación para integrales definidas y esa sí que nos será útil.

En el caso de integrales definidas, el Teorema de Cambio de Variable para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} se escribe de la siguiente manera: si g es una función con derivada continua en $[c, d]$ y f es una función continua en $g([c, d])$ (la imagen bajo g del intervalo $[c, d]$) entonces

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt \quad (2.5)$$

Usando un lenguaje menos riguroso, esta igualdad se podría leer de la siguiente manera: si el intervalo sobre el cual se integra a una función f (digamos $[a, b]$) se puede ver como la imagen de otro intervalo (digamos $[c, d]$) bajo una cierta función g , entonces la integral de f sobre el intervalo $[a, b]$ es igual a la integral de la función $(f \circ g)g'$ sobre el intervalo $[c, d]$.

Esta forma de leer la identidad 2.5 (que no es muy precisa pero sí bastante ilustrativa) nos permite dar un primer paso hacia la generalización del Teorema de Cambio de Variable para funciones de varias variables, haciéndonos la siguiente pregunta: si queremos integrar una función f sobre un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^n$, y sabemos que este conjunto A se puede ver como la imagen bajo una cierta función g de otro conjunto Jordan-medible $B \subset \mathbb{R}^n$, es decir $A = g(B)$, ¿la integral de f sobre A es igual a la integral sobre B de alguna función que involucra a f y a g ?

Con el fin de encontrar una respuesta, es conveniente esbozar los argumentos que nos permiten convencernos de que la identidad 2.5 es cierta. Una manera de hacerlo es justo usando el concepto de primitiva (esta es la manera en que suele hacerse) pero como dicho concepto no lo conocemos para las funciones de varias variables, recurriremos a otro más elemental, el de las sumas de Riemann.

Aunque en la identidad 2.5 no es necesario que g sea una función inyectiva, con el fin de que nuestros argumentos sean más sostenibles, ahora supondremos que sí lo es. Sea $\mathcal{P} = \{x_0 < \dots < x_k\}$ una partición muy “fina” del intervalo que tiene como extremos a $g(c)$ y a $g(d)$ (y que denotaremos por $[a, b]$). En este caso, sabemos que las sumas de Riemann correspondientes a esta partición se aproxima mucho a la integral de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, es decir

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^k f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (2.6)$$

para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, k$).

Como estamos suponiendo que $[a, b] = g([c, d])$ entonces sabemos que existe una partición $\mathcal{Q} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[c, d]$ tal que $x_i = g(t_i)$ para cada $i = 1, \dots, k$. Ahora, por el

valiosísimo Teorema del Valor Medio sabemos que existe η_i entre t_{i-1} y t_i tal que

$$\begin{aligned} x_i - x_{i-1} &= g(t_i) - g(t_{i-1}) \\ &= g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

(nuevamente para cada $i = 1, \dots, k$) de tal forma que, tomando en 2.6 la suma de Riemann correspondiente a los números $\xi_i = g(\eta_i)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^k f(g(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k f(g(\eta_i))g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Si se observa bien, esta última suma es una suma de Riemann de la función $f(g(t))g'(t)$ correspondiente a la partición \mathcal{Q} del intervalo $[c, d]$ de modo que

$$\sum_{i=1}^k f(g(\eta_i))g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \approx \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

y por lo tanto

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx \approx \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Si bien es cierto que los “argumentos” que acabamos de dar son imprecisos, también es cierto que nos sugieren un camino para encontrar una formulación del Teorema de Cambio de Variable para funciones de varias variables.

Procediendo como en los párrafos anteriores sabemos que, si R es un rectángulo que contiene a A , entonces

$$\int_A f = \int_R f_A$$

de tal forma que si \mathcal{P} es una partición muy “fina” del rectángulo R , entonces

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_R f_A \\ &\approx \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} f(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) \end{aligned} \tag{2.7}$$

en donde los R_i son subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} y $\hat{\xi}_i \in R_i \cap A$.

A diferencia de la suma de Riemann que aparece en 2.6, en donde la medida del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (a saber $x_i - x_{i-1}$) se puede expresar en términos de la medida del subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (a saber $t_i - t_{i-1}$), gracias a que $g([t_{i-1}, t_i]) = [x_{i-1}, x_i]$ y al Teorema del Valor Medio, en la suma de Riemann que aparece en 2.7 no somos tan afortunados. De hecho, ya sería demasiado pedir que, si R' es un rectángulo que contiene a B , entonces existiera una partición \mathcal{Q} de R' tal que el número de subrectángulos inducidos por \mathcal{Q} en R' fuera el mismo que los que \mathcal{P} induce en R y además cada $R_i = g(R'_i)$ (en donde los R'_i serían los subrectángulos de R' inducidos por \mathcal{Q}).

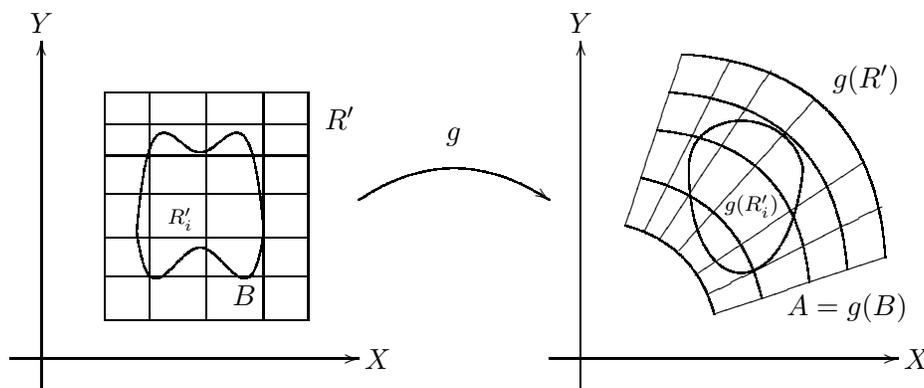


Figura 2.8: La imagen bajo la función g del conjunto Jordan-medible B , del rectángulo R' y del subrectángulo R'_i

Sin embargo nos queda otro recurso. Si consideramos el rectángulo R' y su partición \mathcal{Q} del párrafo anterior, y para cada subrectángulo R'_i que intersecta a B elegimos un $\hat{\eta}_i$ que esté en ambos conjuntos, es decir $\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B$, y nos fijamos en la imagen de R'_i bajo g , como se ilustra en la figura 2.8 para el caso de \mathbb{R}^2 , ¿que podemos esperar de sumas de la forma

$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i))?$$

Bueno, pues lo que nos gustaría es que estas sumas (que son una especie de sumas de Riemann un poco *sui géneris*) se aproximen a $\int_A f$ y que esta aproximación sea mejor en la medida de que \mathcal{Q} sea una partición más fina de R' . De hecho, también habría que asegurar que los conjuntos $g(R'_i)$ son Jordan-medibles y que su medida se pueda expresar (o aproximar) en términos de la medida de R'_i (y seguramente de algún otro factor que dependa de la función g).

Vale la pena escribir con detalle todos estos supuestos (o buenos deseos) que buscamos se cumplan:

1. g es tal que si R'_i es cualquier subrectángulo entonces $g(R'_i)$ es un conjunto Jordan-medible
2. existe una forma de expresar (o aproximar) la medida de $g(R'_i)$ ($m(g(R'_i))$) en términos de la medida de R'_i ($m(R'_i)$) y de la función g
3. si \mathcal{Q} es una partición muy “fina” de R' las sumas de la forma

$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i)) \quad (\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B)$$

se aproximan mucho a $\int_A f$, es decir

$$\int_A f \approx \sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i)) \quad (\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B) \quad (2.8)$$

Como se podrá notar, todas estas propiedades dependen esencialmente de la función g y parte de lo que haremos será buscar cuáles son las características de g que nos las puedan garantizar. Analizaremos lo planteado en el segundo inciso y dejaremos para después los otros dos.

En este problema, las funciones lineales vuelven a ser muy útiles. En efecto, si $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo y g es una función afín (una función lineal seguida de una traslación) entonces $g(R)$ es “casi” un rectángulo en \mathbb{R}^n , sólo que con algunos “ángulos” no rectos. Por ejemplo en \mathbb{R}^2 , $g(R)$ coincide con ser un paralelogramo y en \mathbb{R}^3 con un paralelepípedo “reclinado”, como se muestra en las figuras 2.9 y 2.10. De hecho, en este caso el problema de encontrar la medida de $g(R)$ en términos de la medida de R se resuelve fácilmente.

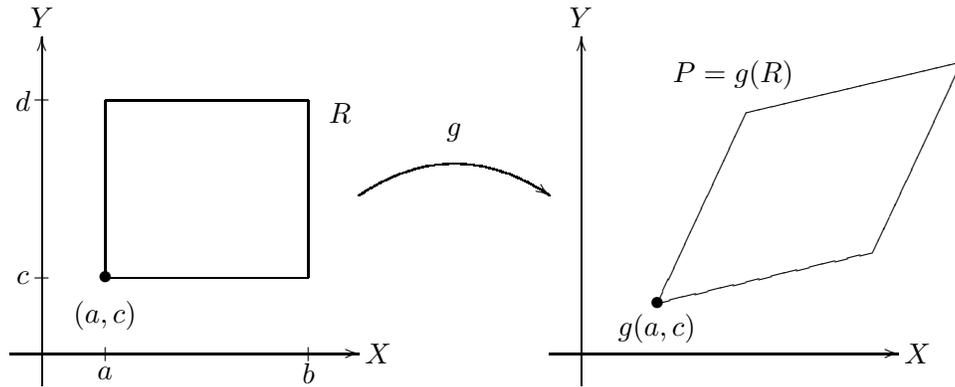


Figura 2.9: La imagen bajo una función afín g (de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2) de un rectángulo R es un paralelogramo P

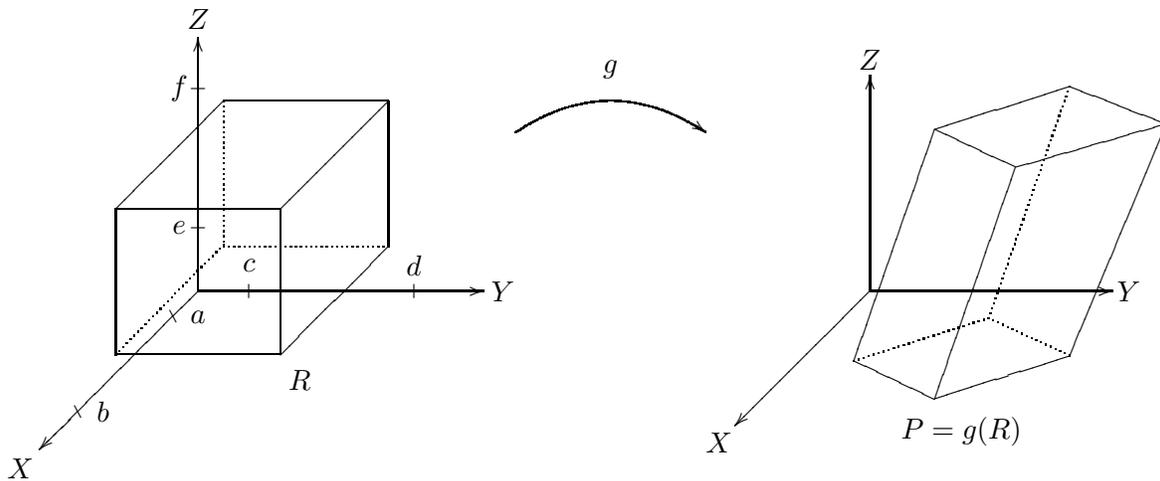


Figura 2.10: La imagen bajo una función afín g (de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3) de un rectángulo R es un paralelepípedo P

Como se recordará de los cursos de Geometría Analítica, si tomamos dos vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en \mathbb{R}^2 , el área del paralelogramo P generado por estos dos vectores (y que es trasladado a cualquier punto (x_0, y_0)), está dada por:

$$\text{área}(P) = |x_1y_2 - x_2y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| \quad (2.9)$$

Así, si g es una función lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada es

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

y tomamos el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces el paralelogramo $P = g(R)$ coincide con el paralelogramo generado por los vectores

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(\alpha, \gamma) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} (x_2, y_2) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d-c \end{pmatrix} \\ &= (d-c)(\beta, \delta) \end{aligned}$$

y que está trasladado al punto $g(a, c)$ (ver la figura 2.9) de tal forma que, usando 2.9, tenemos que

$$\begin{aligned} m(g(R)) &= \text{área}(P) \\ &= |\alpha\delta - \beta\gamma| \cdot (b-a) \cdot (d-c) \\ &= |\det(M)| \cdot \text{área}(R) \\ &= |\det(M)| \cdot m(R) \end{aligned}$$

Si ahora g es una función lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 representada por una matriz M (de 3×3), y $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo, recurriendo otra vez a la Geometría Analítica podemos probar nuevamente que

$$m(g(R)) = |\det(M)| \cdot m(R) \quad (2.10)$$

¡Lo más interesante de todo esto es que la identidad 2.10 es válida en cualquier \mathbb{R}^n ! aunque, desafortunadamente, la Geometría Analítica ya no nos alcanza para probarla en el caso general.

Una vez que hemos analizado nuestro problema para el caso en que g sea una función lineal, es importante recordar que estamos trabajando con particiones muy “finas”, y por lo tanto con rectángulos muy pequeños. Por tal razón, si g es una función tal que en cada punto \hat{x} de su dominio existe su mejor aproximación lineal (es decir su derivada, que denotaremos por $Dg(\hat{x})$), y R es un rectángulo “muy pequeño”, parece muy razonable esperar que

$$m(g(R)) \approx m([Dg(\hat{\xi})](R)) = |\det(Dg(\hat{\xi}))| \cdot m(R) \quad (2.11)$$

en donde $\hat{\xi}$ es algún elemento de R .

Como se podrá notar, la aproximación a que nos conduce 2.11 es justo lo que estábamos buscando. Si ahora esta aproximación la aplicamos en 2.8, tendremos que

$$\begin{aligned} \int_A f &\approx \sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i)) \\ &\approx \sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot |\det(Dg(\hat{\eta}_i))| \cdot m(R'_i) \end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde $\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B$.

Si se observa con cuidado, la segunda suma que aparece en 2.12 ahora sí es una suma de Riemann, una de las asociadas a la función $(f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$ y correspondiente a la partición \mathcal{Q} de R' . En este sentido, si dicha partición es muy “fina” deberá ser cierto que

$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot |\det(Dg(\hat{\eta}_i))| \cdot m(R'_i) \approx \int_B (f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$$

de tal forma que considerando la primera aproximación de 2.12 podemos intuir que

$$\int_A f \approx \int_B (f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$$

Esta última aproximación es la culminación de nuestra búsqueda. A partir de ella, y recogiendo todas las suposiciones que hicimos anteriormente (sobre todo las relacionadas con la función g), ahora estamos en condiciones de formular el Teorema de Cambio de Variable para funciones de varias variables de la siguiente manera:

Teorema 2.9 (de Cambio de Variable) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua en A , $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en Ω y $B \subset \Omega$ Jordan-medible tal que $\bar{B} \subset \Omega$. Si:

1. g es inyectiva en $B \setminus C$, con $C \subset B$ un conjunto de medida de Jordan cero,
2. $\det(Dg(\hat{x})) \neq 0$ para toda $\hat{x} \in B \setminus D$, con $D \subset B$ un conjunto de medida de Jordan cero, y
3. $g(B) = A$

entonces A es Jordan-medible y además

$$\int_A f = \int_B (f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$$

Desafortunadamente la prueba de este teorema es muy elaborada y no se puede incluir en un texto como éste⁵, y esa es la razón por la que nos tomamos tanto trabajo para deducir su formulación. A cambio de la prueba, discutiremos detalladamente algunos ejemplos de funciones (o transformaciones) g que suelen usarse más comunmente en las aplicaciones de este teorema, tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 . También es importante aclarar por qué en la formulación del teorema, además de pedir que g sea derivable, pedimos que dicha derivada sea continua. Esta hipótesis tiene dos razones de ser: una, que con ella garantizamos la integrabilidad de la función $(f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$, y dos, que la aproximación

$$m(g(R)) \approx \left| \det(Dg(\hat{\xi})) \right| \cdot m(R)$$

para rectángulos pequeños R es una buena aproximación, no para alguna, sino para cualquier $\hat{\xi} \in R$. En cuanto a la hipótesis de que g sea “casi” inyectiva en B , esta es necesaria para evitar “duplicaciones” a la hora de obtener al conjunto A como “imagen” de B (bajo g) y, finalmente, la hipótesis de que $\det(Dg(\hat{x}))$ sea distinto de 0 para “casi” toda $\hat{x} \in B$, en realidad sólo se incluye

⁵Para los interesados en la prueba, ésta la pueden encontrar en: Rojas Sánchez, Alejandro Darío. *Prueba de algunos teoremas de Cálculo de varias variables*. Tesis para obtener el título de Matemático, Facultad de Ciencias, UNAM. 2011. O también en: Rojas Sánchez, Alejandro Darío. *Prueba de algunos teoremas de Cálculo de varias variables*. Vínculos Matemáticos, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. 2011.

para hacer mas “cómoda” la aplicación (¡y la prueba!) del teorema ya que el conjunto de puntos en los que $\det(Dg(\hat{x})) = 0$ (el conjunto de puntos críticos de g), “aporta muy poco” a la imagen de B bajo g (un resultado muy importante, el Teorema de Sard, asegura que la imagen de este conjunto es de medida de Lebesgue cero).

Concluimos estos comentarios mencionando cuál es la notación más común que se usa para el término $\det(Dg(\hat{\xi}))$. A este factor se le suele denotar simplemente por

$$Jg(\hat{\xi}) = \det(Dg(\hat{\xi}))$$

y se le conoce como *el jacobiano* de g en $\hat{\xi}$, en correspondencia con el nombre con que se conoce a la matriz asociada a $Dg(\hat{\xi})$, a saber, *matriz jacobiana*⁶.

Antes de analizar los cambios de variable que se usan con más frecuencia, ilustraremos el uso del teorema que acabamos de formular a través del siguiente

Ejemplo 2.10 Calcule la integral de la función $f(x, y) = xy$ sobre el conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^2$, en donde A es la región contenida en el primer cuadrante y acotada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 4$ y las rectas $4y = x$, $y = 4x$.

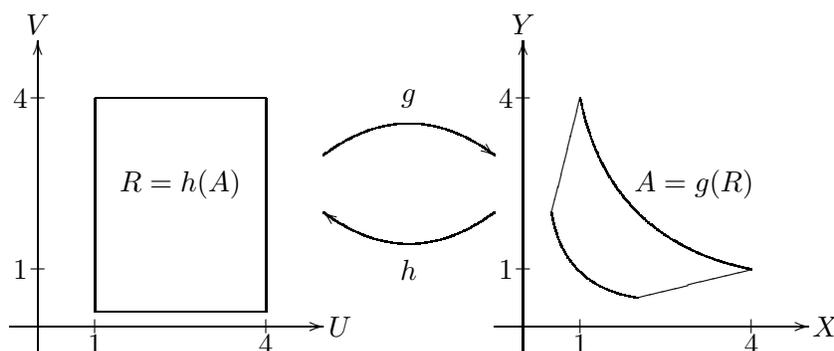


Figura 2.11: Las regiones del ejemplo 2.10

Solución. Dado que la intención de este ejemplo es ilustrar el uso del Teorema de Cambio de Variable, es necesario encontrar otro conjunto Jordan-medible B y una función g (de clase C^1) tal que $g(B) = A$. En este sentido, es importante hacer notar que las curvas que determinan al conjunto A , forman parte de las curvas de nivel de un par de funciones definidas de \mathbb{R}^2 (o de algún subconjunto de éste) en \mathbb{R} ; en efecto, obsérvese que, si hacemos $h_1(x, y) = xy$ y $h_2(x, y) = y/x$, entonces A se puede describir como el conjunto acotado por las curvas de nivel $h_1(x, y) = 1, h_1(x, y) = 4, h_2(x, y) = 1/4$ y $h_2(x, y) = 4$ (ver figura 2.11). De esta forma, si definimos la función

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (h_1(x, y), h_2(x, y)) \\ &= (xy, y/x) \end{aligned}$$

se tiene que la imagen de A bajo esta función h es el rectángulo $R = [1, 4] \times [1/4, 4]$, es decir, $h(A) = R$. La relación que este hecho tiene con nuestro problema, es que si se pudiera encontrar la función inversa de h (a la que llamaremos g , por razones obvias), entonces g es tal que $g(R) = g(h(A)) = A$; es decir, g es una función como la que estamos buscando (y R sería el conjunto B ,

⁶Como el lector recordará, estos nombres son en honor del matemático alemán Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)

lo cual resulta muy conveniente). Calcular g en el ejemplo que nos ocupa no es una tarea difícil; si hacemos

$$\begin{aligned} u &= h_1(x, y) \\ &= xy \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} v &= h_2(x, y) \\ &= y/x \end{aligned}$$

calcular la inversa de h se traduce en expresar a las variables x y y en términos de las variables u y v . En este ejemplo, se verifica fácilmente que, para $(u, v) \in R$,

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{uv} \\ x &= \sqrt{\frac{u}{v}} \end{aligned}$$

lo que significa que la función $g = (g_1, g_2)$ que estamos buscando está dada por

$$\begin{aligned} g(u, v) &= (g_1(u, v), g_2(u, v)) \\ &= \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right) \end{aligned}$$

Una vez hecho esto, ya contamos con todos los elementos necesarios para calcular la integral que se nos pide haciendo uso del Teorema de Cambio de Variable. Así, en virtud de este teorema, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{A=g(R)} f &= \int_R (f \circ g) \cdot |\det(Dg)| \\ &= \int_1^4 \left(\int_{1/4}^4 f(g(u, v)) |\det(Dg(u, v))| dv \right) du \\ &= \int_1^4 \left(\int_{1/4}^4 u \left| -\frac{1}{2v} \right| dv \right) du \\ &= \left(\int_1^4 u du \right) \left(\int_{1/4}^4 \frac{1}{2v} dv \right) \\ &= 15 \ln(2) \end{aligned}$$

Este ejemplo, además de ilustrar el uso del Teorema de Cambio de Variable, establece un método para calcular integrales sobre regiones que estén determinadas por cuatro curvas de nivel de un par de funciones (dos curvas por cada una de ellas), en el caso de \mathbb{R}^2 (o por seis superficies de nivel de tres funciones (dos superficies por cada una de ellas), en el caso de \mathbb{R}^3 , o en general, por $2n$ conjuntos de nivel de n funciones (dos conjuntos de nivel por cada una de ellas), en el caso de \mathbb{R}^n). La única dificultad que se puede encontrar con este método, es a la hora de calcular la inversa de la función que se construye a partir de aquellas que determinan a la región de integración.

2.4 Algunos cambios de variable

Las funciones o transformaciones que aparecen con más frecuencia en la aplicación del teorema de Cambio de Variable están inspiradas principalmente en los diferentes sistemas de coordenadas que pueden usarse tanto en el plano como en el espacio.

2.4.1 Cambio a coordenadas polares

En el caso del plano, además de las coordenadas cartesianas (o euclidianas) están las *coordenadas polares*. Como se recordará, una vez establecido un origen O , llamado polo, y una semirecta \mathcal{L} que parte de dicho punto, llamada eje polar, todo punto P en el plano (distinto de O) está determinado de manera única por los números r y θ : r , que corresponde a la distancia de P al polo O , y θ que corresponde a la medida del ángulo dirigido formado entre el eje polar y la semirecta que parte del origen y pasa por P (ver figura 2.12).

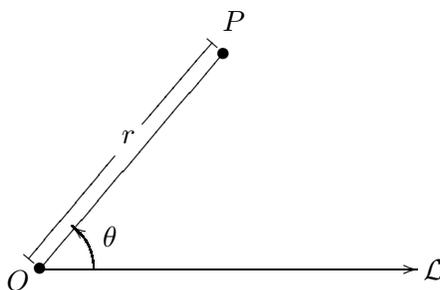


Figura 2.12: En el sistema polar determinado por el punto O (polo) y la semirecta \mathcal{L} (eje polar), el punto P tiene coordenadas (r, θ)

Con las coordenadas polares establecemos una correspondencia biunívoca entre todos los puntos del plano diferentes de O y las parejas de números (r, θ) en donde $0 < r < \infty$ y $0 \leq \theta < 2\pi$; o en forma más general, con el conjunto de parejas (r, θ) en donde $0 < r < \infty$ y $y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$ (o $y_0 < \theta \leq y_0 + 2\pi$) con $y_0 \in \mathbb{R}$, fijo⁷. Sin embargo, aun cuando usando coordenadas polares no necesitamos echar mano de todas las parejas de números reales (\mathbb{R}^2) para representar a los puntos del plano (a diferencia de las coordenadas cartesianas), cualquier pareja de números se puede “interpretar” como las coordenadas polares de un punto en el plano. Tal es el caso de la pareja $(0, 0)$ (o cualquiera de la forma $(0, y)$) que se puede interpretar como las coordenadas polares del punto O (u origen) y que de hecho así se conviene.

Para nuestros fines, lo más interesante es la relación que existe entre el sistema coordenado cartesiano y el sistema polar. Si establecemos un sistema cartesiano cuyo origen coincide con el polo, y la parte positiva del eje de las abscisas (o eje X) coincide con la semirecta \mathcal{L} (ver figura 2.13), sabemos que las coordenadas (x, y) de un punto P en este sistema cartesiano, se pueden obtener a partir de las coordenadas polares (r, θ) de este mismo punto, a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \tag{2.13}$$

⁷Esto, en particular, significa que para un punto del plano hay una infinidad de parejas de números que representan sus coordenadas polares

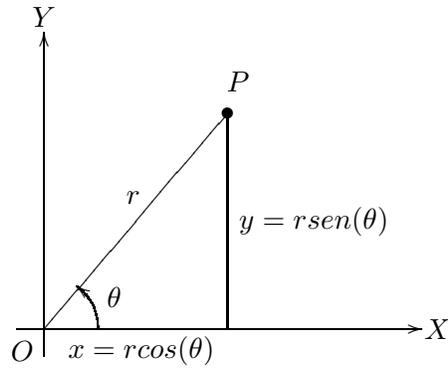


Figura 2.13: Las coordenadas (x, y) de un punto P en un sistema cartesiano cuyo origen coincide con el polo, la parte positiva del eje de las abscisas (o eje X) coincide con el eje polar, y cuyas coordenadas polares son (r, θ)

Como se podrá notar, estas ecuaciones definen una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de las variables r y θ dada por

$$g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sen(\theta))$$

Esta función, además de ser todo lo derivable que se quiera (es C^∞), nos da un ejemplo de una función que transforma regiones rectangulares en regiones circulares. En efecto, si a las parejas (r, θ) y $(r \cos(\theta), r \sen(\theta))$ las interpretamos como coordenadas cartesianas (la primera en el sistema $r\theta$ y la segunda en el sistema XY), se puede ver que el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ en el dominio de g se transforma en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; basta notar que los puntos de la forma (r, θ_0) con $0 \leq r \leq 1$ y θ_0 fijo, y que vistos en el sistema (cartesiano) $r\theta$ forman una línea horizontal de longitud 1 a la altura θ_0 , se transforman en la línea de longitud 1 que parte del origen y hace un ángulo θ_0 con el eje X (el radio de la circunferencia unitaria que está a un ángulo θ_0) (ver figura 2.14).

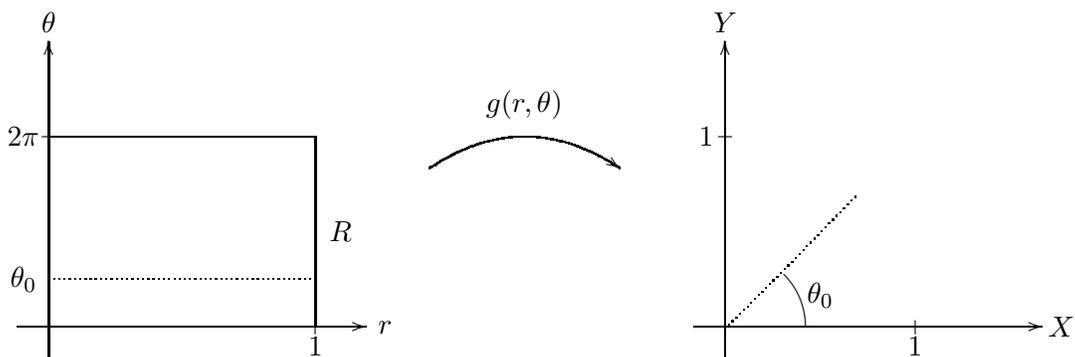


Figura 2.14: Los puntos de la forma (r, θ_0) con $0 \leq r \leq 1$ y θ_0 fijo, que vistos en el sistema (cartesiano) $r\theta$ forman una línea horizontal de longitud 1 a la altura θ_0 , bajo la función $g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sen(\theta))$ se transforman en la línea de longitud 1 que parte del origen y hace un ángulo θ_0 con el eje X (el radio de la circunferencia unitaria que está a un ángulo θ_0)

Análogamente, los puntos de la forma (r_0, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y r_0 fijo, que en el dominio de g forman una línea vertical de longitud 2π y a distancia r_0 del “eje θ ”, se transforman en la circunferencia de radio r_0 con centro en el origen (ver figura 2.15).

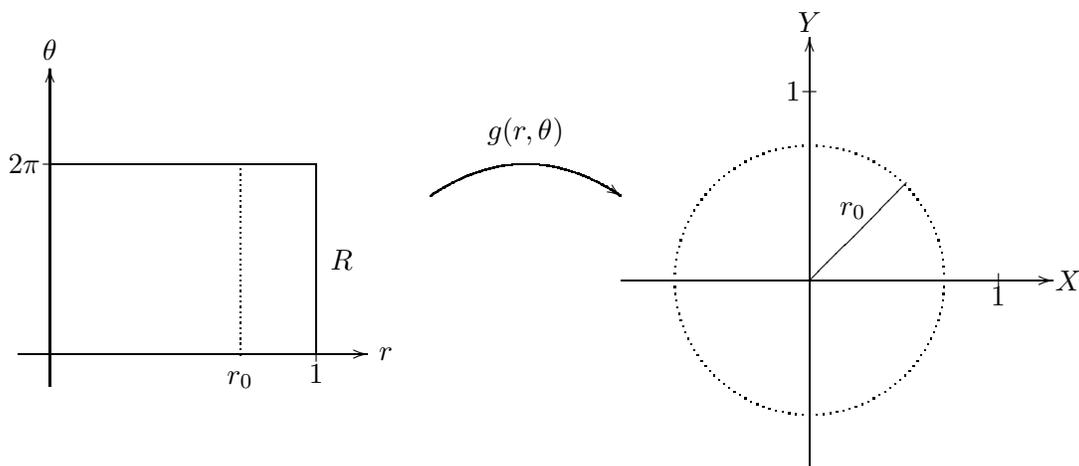


Figura 2.15: Los puntos de la forma (r_0, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y r_0 fijo, que vistos en el sistema (cartesiano) $r\theta$ forman una línea vertical de longitud 2π a distancia r_0 del eje Y , bajo la función $g(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sen(\theta))$ se transforman en la circunferencia de radio r_0 con centro en el origen

Observe que, si el rectángulo R se “genera” por medio de líneas horizontales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de sus radios (¡como si se abriera un abanico!) (ver figura 2.16).

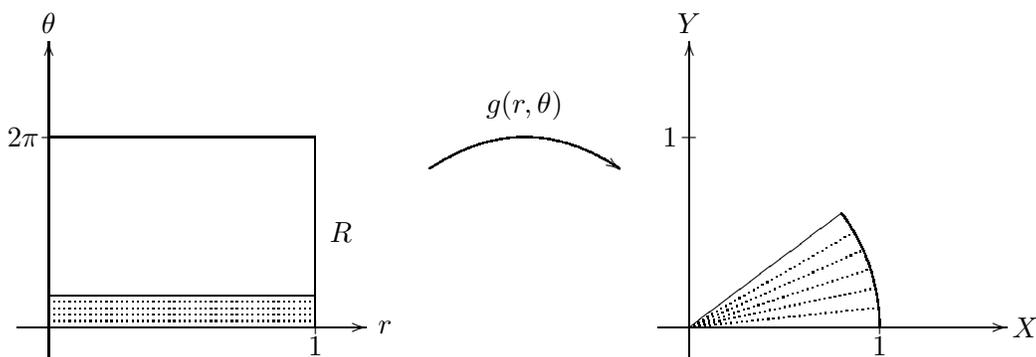


Figura 2.16: Si al rectángulo R lo “generamos” por medio de líneas horizontales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de sus radios (¡como si se abriera un abanico!)

Si por otra parte, ahora al rectángulo R lo “generamos” con líneas verticales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de circunferencias centradas en el origen y cuyo radio va creciendo (¡como cuando nos preparamos un delicioso hot cake!) (ver figura 2.17).

Antes de dar un ejemplo de cómo usar esta función para aplicar el Teorema del Cambio de Variable, conviene hacer un par de observaciones. En primer lugar nótese que, de las ecuaciones

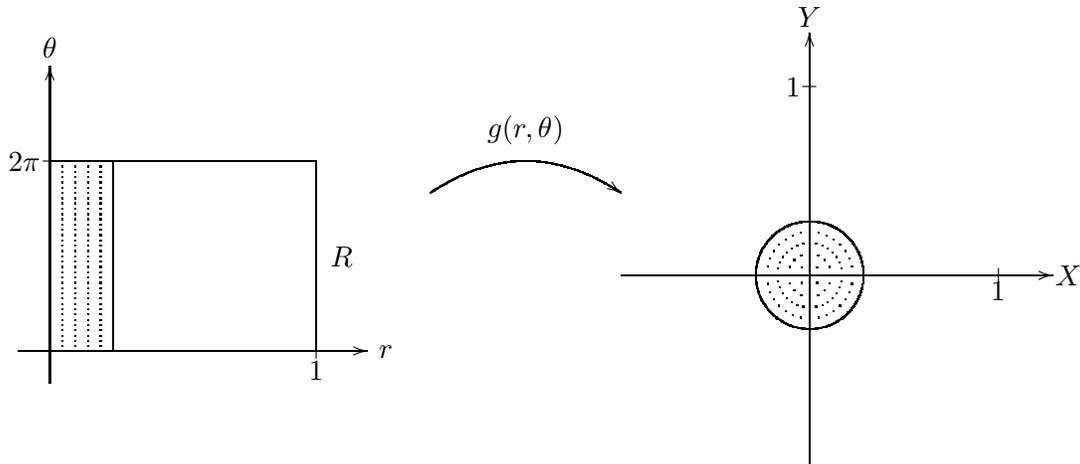


Figura 2.17: Si al rectángulo R lo “generamos” con líneas verticales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de circunferencias centradas en el origen y cuyo radio va creciendo (¡como cuando nos preparamos un delicioso hot cake!)

2.13 se obtienen las identidades

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ó} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.14)$$

y en segundo lugar, el jacobiano de esta función está dado por

$$\begin{aligned} Jg(r, \theta) &= \det(Dg(r, \theta)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= r \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11 Calcule la integral de la función $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solución. Quizás lo primero que habría que señalar en este ejemplo es que, aun cuando la región A es de ambos tipos, no es posible calcular la integral de la función f sobre A , usando las técnicas desarrolladas en la sección anterior (el lector debería confirmar que esta afirmación es cierta). Recurramos entonces al Teorema de Cambio de Variable.

Como se vió párrafos arriba, la región A coincide con ser la imagen, bajo la transformación de coordenadas polares $g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))$ (que es con este nombre como llamaremos de aquí en adelante a esta función), del rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Como dijimos antes, g es de clase C^1 y si la restringimos al subconjunto $(0, 1] \times (0, 2\pi]$ resulta ser inyectiva (es decir, g es inyectiva en R salvo por un conjunto de medida de Jordan cero). Así, tenemos que, por el Teorema de Cambio de Variable

$$\int_A f = \int_R (f \circ g) \cdot |Jg|$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (f \circ g)(r, \theta) \cdot |Jg(r, \theta)| \, dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) \, dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot e^{r^2} \, dr \right) d\theta \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r \cdot e^{r^2} \, dr \right) \\
 &= \pi \cdot \int_0^1 2r \cdot e^{r^2} \, dr \\
 &= \pi \cdot \left(e^{r^2} \Big|_0^1 \right) \\
 &= \pi \cdot (e - 1)
 \end{aligned}$$

En este ejemplo es importante mencionar que la decisión de recurrir a el cambio a coordenadas polares (que es lo que se suele decir cuando se usa esta transformación g) se debe no sólo al hecho de que la región original de integración es un círculo, sino que la función que se deseaba integrar también lo sugería. En efecto, cuando a la función $e^{x^2+y^2}$ se le aplica el cambio a coordenadas polares, obtenemos la función e^{r^2} , para la cual (como el lector debe saber) no es posible encontrar una primitiva en término de “funciones elementales”; sin embargo, como al aplicar el cambio de variable también debemos incluir el jacobiano de la transformación (que en este caso es r), nos queda el integrando $r \cdot e^{r^2}$, el cual, salvo por una constante (un 2) está “completo” (¡tiene una primitiva fácil de identificar!).

2.4.2 Cambio a coordenadas cilíndricas

La siguiente transformación que analizaremos está en el espacio y está inspirada en el sistema de *coordenadas cilíndricas*. Como seguramente es del conocimiento del lector, este sistema de coordenadas es en cierto modo una “combinación” de un sistema polar y un sistema cartesiano. Si fijamos un sistema cartesiano XYZ en el espacio y tomamos P un punto, que tenga coordenadas (x, y, z) , las coordenadas cilíndricas de P están dadas por las siguientes tres cantidades que determinan de manera única al punto: r y θ que serán las coordenadas polares del punto $(x, y, 0)$ (la proyección del punto P en el plano XY); es decir, r es la distancia entre el origen (del sistema XYZ) y el punto $(x, y, 0)$, y θ es el ángulo dirigido formado por la semirecta que parte del origen y pasa por $(x, y, 0)$, y la parte positiva del eje X . Finalmente, la última coordenada cilíndrica coincide con la última coordenada del sistema cartesiano XYZ , es decir “la altura” z . Así, decimos que (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas de P en el sistema cartesiano XYZ (ver figura 2.18).

De esta forma, los puntos del espacio que no pertenecen al eje Z (en el sistema XYZ) están en correspondencia biunívoca con el conjunto de ternas $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$, donde $0 < r < \infty$, $y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$ (o $y_0 < \theta \leq y_0 + 2\pi$) (con $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo) y $-\infty < z < \infty$, es decir con el conjunto $(0, \infty) \times [y_0, y_0 + 2\pi) \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^3$ (o con el conjunto $(0, \infty) \times (y_0, y_0 + 2\pi] \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^3$). Ahora, si recordamos que en el sistema polar cualquier pareja de la forma $(0, \theta)$ representa las

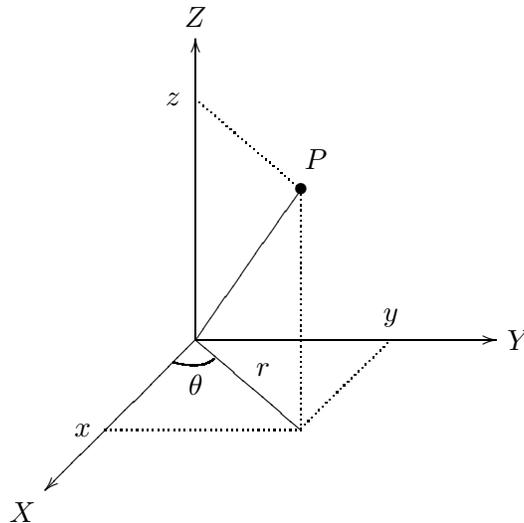


Figura 2.18: La terna (r, θ, z) representa a las coordenadas cilíndricas de P en el sistema cartesiano XYZ

coordenadas polares del origen, entonces para un punto arbitrario P del eje Z , cuyas coordenadas cartesianas sean $(0, 0, z)$, tendremos que las ternas de la forma $(0, \theta, z)$ representarán las coordenadas cilíndricas de P . Nuevamente, aunque para representar las coordenadas cilíndricas de los puntos del espacio no necesitamos todas las ternas de \mathbb{R}^3 , cualquiera de ellas se puede interpretar como las coordenadas de este tipo de algún punto del espacio.

Como en el caso de las coordenadas polares, para nosotros es de particular importancia la relación que existe entre el sistema cartesiano XYZ y el sistema cilíndrico asociado con éste. De hecho, dada la relación tan estrecha entre estos dos sistemas, las ecuaciones que nos permiten obtener las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P del espacio en términos de sus correspondientes coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , son muy parecidas al caso polar, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\theta) \\y &= r \operatorname{sen}(\theta) \\z &= z\end{aligned}$$

(observe que la última de estas ecuaciones pareciera un poco absurda, pero no es más que una consecuencia de un abuso de notación; ¡estamos usando la misma letra para denotar la última coordenada en ambos sistemas!).

De nueva cuenta, estas ecuaciones nos permiten definir una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

$$g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z) \quad (2.15)$$

y las características, sobre todo geométricas, de esta función las describiremos a continuación.

Sin duda la función g definida en 2.15 tiene todas las propiedades de derivabilidad que queramos, así que nos concentraremos en sus propiedades geométricas. Para ello, analizaremos la forma en que transforma al rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]$ (del sistema cartesiano $r\theta Z$). En particular, veremos cómo actúa la función g cuando una de sus variables permanece fija; esto, en términos de coordenadas cilíndricas, equivale a identificar los conjuntos de puntos del espacio que se obtienen al fijar cada una de estas coordenadas (que por lo general resultan ser superficies).

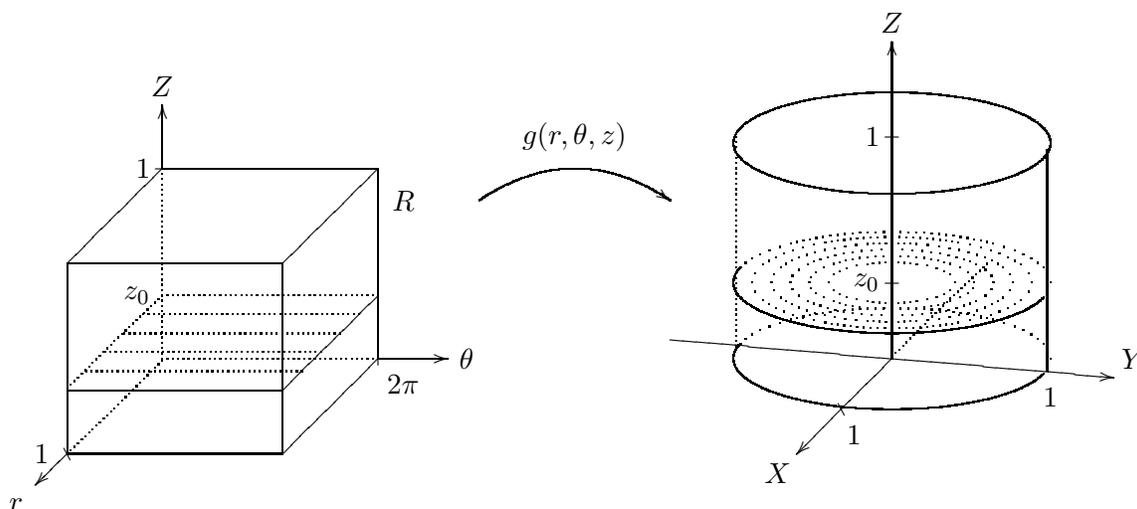


Figura 2.19: Si consideramos puntos de la forma $(r, \theta, z_0) \in R$ (con $z_0 \in [0, 1]$ fijo) y que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $r\theta$ a la altura z_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ en un círculo unitario con centro en el punto $(0, 0, z_0)$ y contenido en el plano $z = z_0$ (paralelo al plano XY)

Obsérvese que si tomamos puntos de la forma $(r, \theta, 0)$, lo cual equivale a considerar la base del rectángulo R , la función g actúa de forma idéntica a la transformación polar, de tal manera que dichos puntos van a dar a el círculo unitario con centro en el origen y contenido en el plano XY . De forma más general, si consideramos puntos de la forma (r, θ, z_0) (con $z_0 \in [0, 1]$ fijo, y que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $r\theta$ a la altura z_0), dicho conjunto de puntos se transforma en un círculo unitario con centro en el punto $(0, 0, z_0)$ y contenido en el plano $z = z_0$ (paralelo al plano XY) (ver figura 2.19). De esta forma, si “generamos” el rectángulo R con “rebanadas” paralelas al plano $r\theta$ entonces al aplicarles la transformación g obtenemos un cilindro de base circular de altura 1, “generado” por círculos unitarios.

Si ahora “rebanamos” al rectángulo R con planos paralelos al plano rZ , es decir, si consideramos ternas de la forma (r, θ_0, z) (con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo), al aplicarles la transformación g a dichos conjuntos obtenemos cuadrados de lado 1, perpendiculares al plano XY y “pegados” por uno de sus lados al eje Z (formando justo un ángulo θ_0 con el plano XZ) (ver figura 2.20). En este caso, si “generamos” el rectángulo R con “rebanadas” paralelas al plano rZ , al aplicarles la transformación g “generamos” el mismo cilindro sólo que ahora por medio de cuadrados que giran alrededor del eje Z .

Para terminar, consideremos “rebanadas” del rectángulo R paralelas al plano θZ , es decir, consideremos ternas de la forma (r_0, θ, z) (con $r_0 \in [0, 1]$ fijo). En este caso, la imagen bajo la función g de cada una de estas rebanadas resulta ser la superficie de un cilindro, justo de radio r_0 y perpendicular al plano XY (salvo cuando $r_0 = 0$, en cuyo caso se obtiene el segmento que va de 0 a 1 sobre el eje Z) (ver figura 2.21). Aquí, al generar al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano θZ , aplicando la función g generamos al cilindro a través de superficies cilíndricas cuyo eje está en el eje Z .

Vale la pena destacar que las identidades que aparecen en 2.14 también son válidas para las coordenadas cilíndricas, y que el jacobiano de esta transformación vale lo mismo que en el caso polar ya que

$$Jg(r, \theta, z) = \det(Dg(r, \theta, z))$$

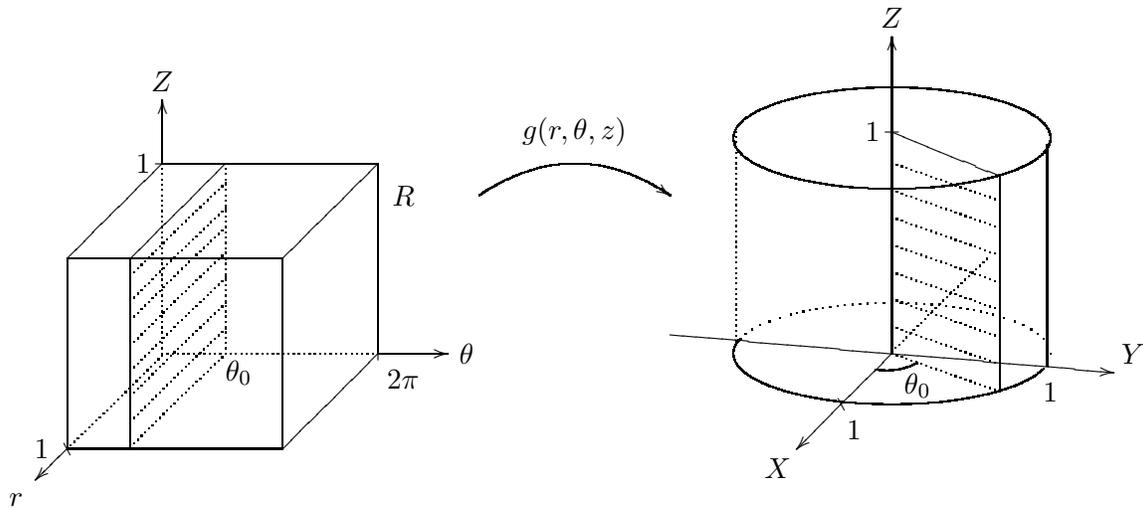


Figura 2.20: Si consideramos puntos de la forma $(r, \theta, z) \in R$ (con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano rZ a la altura θ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ en un cuadrado de lado 1, perpendicular al plano XY y “pegado” por uno de sus lados al eje Z (formando justo un ángulo θ_0 con el plano XZ)

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= r
 \end{aligned}$$

A continuación, damos un ejemplo de como usar esta transformación en el cálculo de una integral.

Ejemplo 2.12 Calcule la integral de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{z\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Solución. Obsérvese con atención que, aplicando la primera identidad de 2.14 a las desigualdades que intervienen en la definición del conjunto A , éstas se transforman en $0 \leq r^2 \leq 1$ (ó $0 \leq r \leq 1$) y $0 \leq z \leq r$. Cuando hacemos esto, en realidad lo que estamos haciendo es expresar al mismo conjunto A sólo que en términos de las coordenadas cilíndricas de sus puntos por lo que, si ahora hacemos $B = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r\}$, B resulta ser un conjunto (en el sistema cartesiano $r\theta z$) que al aplicarle la transformación de coordenadas cilíndricas g es tal que $g(B) = A$ (ver figura 2.22). Una vez hecho esto, que en algunos casos es la parte más importante, al aplicar el Teorema de Cambio de Variable, dado que B es una región en \mathbb{R}^3 de tipo I, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_A f &= \int_B (f \circ g) \cdot |Jg| \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^r (f \circ g)(r, \theta, z) \cdot |Jg(r, \theta, z)| dz \right) dr \right) d\theta
 \end{aligned}$$

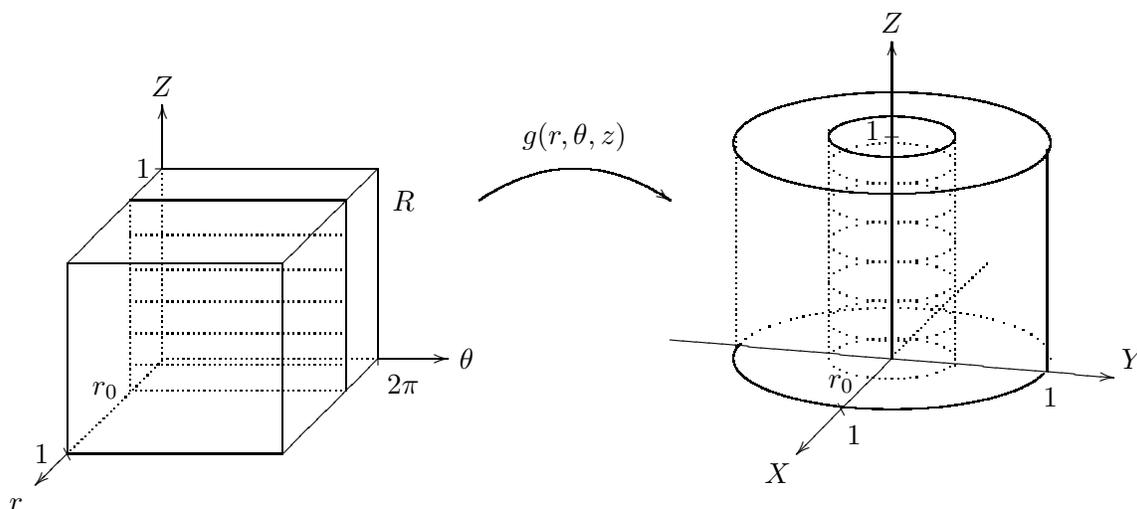


Figura 2.21: Si consideramos puntos de la forma $(r_0, \theta, z) \in R$ (con $r_0 \in [0, 1]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano θZ a la altura r_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \text{sen}(\theta), z)$ en la superficie de un cilindro, justo de radio r_0 y perpendicular al plano XY (salvo cuando $r_0 = 0$, en cuyo caso se obtiene el segmento que va de 0 a 1 sobre el eje Z)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^r r \cdot f(r \cos(\theta), r \text{sen}(\theta), z) dz \right) dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r \cdot \int_0^r r \cdot e^{zr} dz \right) dr \right) d\theta \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r \cdot \left(e^{zr} \Big|_0^r \right) dr \right) \\
 &= \pi \cdot \int_0^1 2r \cdot \left(e^{r^2} - 1 \right) dr \\
 &= \pi \cdot (e - 2)
 \end{aligned}$$

2.4.3 Cambio a coordenadas esféricas

Concluimos esta sección con la transformación asociada a las *coordenadas esféricas*. Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, las coordenadas esféricas están asociadas a un sistema cartesiano. Es decir, dado un sistema cartesiano XYZ y un punto P del espacio, las coordenadas esféricas de P en este sistema están dadas por tres números: ρ la distancia de P al origen del sistema XYZ ; θ el ángulo dirigido formado por la parte positiva del eje X y la semirecta que parte del origen y pasa por el punto en que se proyecta el punto P sobre el plano XY (el mismo ángulo de las coordenadas

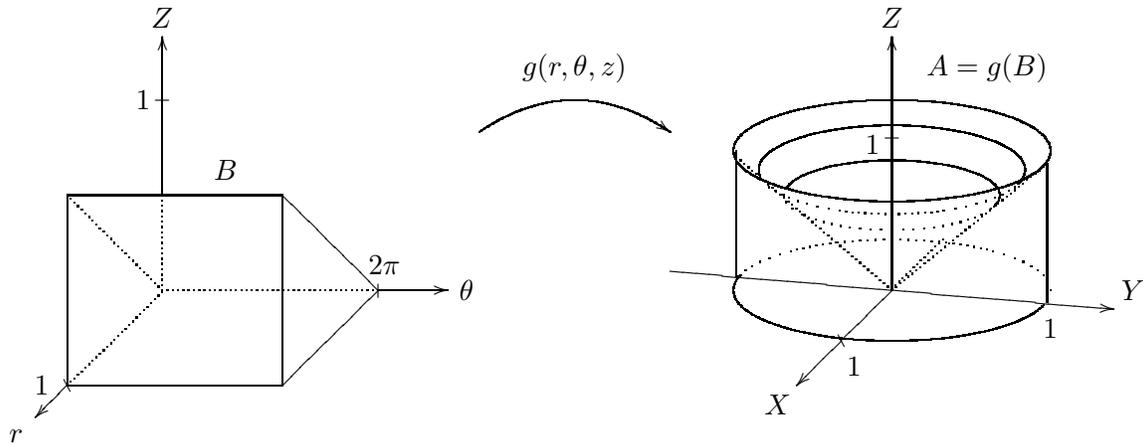


Figura 2.22: $B = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r\}$ es un conjunto (en el sistema cartesiano $r\theta Z$) que al aplicarle la transformación de coordenadas cilíndricas g es tal que $g(B) = A$, en donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ es la región de integración del ejemplo 2.12

cilíndricas); y φ el ángulo⁸ (no dirigido) que forman la parte positiva del eje Z y la semirecta que parte del origen y pasa por el punto P (ver figura 2.23). Así, son las ternas de la forma (ρ, θ, φ) , en donde $0 \leq \rho < \infty, y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$ (ó $y_0 < \theta \leq y_0 + 2\pi$) (con $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo) y $0 \leq \varphi \leq \pi$. Como en el caso de los sistemas coordenados anteriores, aun cuando las coordenadas esféricas no necesitan de todas las ternas de números reales (\mathbb{R}^3), cualquier terna se puede ver como las coordenadas esféricas de un punto en el espacio.

Como antes, lo importante aquí es la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P y sus correspondientes coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) . De la figura 2.23 se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z &= \rho \cos(\varphi) \end{aligned} \tag{2.16}$$

A partir de estas ecuaciones, como en los casos anteriores, podemos definir una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi)) \tag{2.17}$$

la cual tiene, nuevamente, todas las propiedades de derivabilidad que se deseen.

En cuanto a la parte geométrica, mostraremos cuál es la imagen bajo g del rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Bajo la función g , las ternas de la forma $(\rho, \theta, \varphi_0)$ con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ fijo (ternas que se obtienen al “rebanar” al rectángulo R con un plano paralelo al plano $\rho\theta$, justo a la altura φ_0) van a dar a un cono cuyo eje es el eje Z ; esto se deduce del hecho de que, justo los puntos de un cono de este tipo, son puntos para los cuales su coordenada esférica φ es la misma (ver figura

⁸En algunos textos, el segundo ángulo de las coordenadas esféricas se toma como el ángulo dirigido φ' formado por la semirecta que parte del origen y pasa por P , y el plano XY , y cuya relación con el ángulo definido en este texto es: $\varphi' = \pi/2 - \varphi$

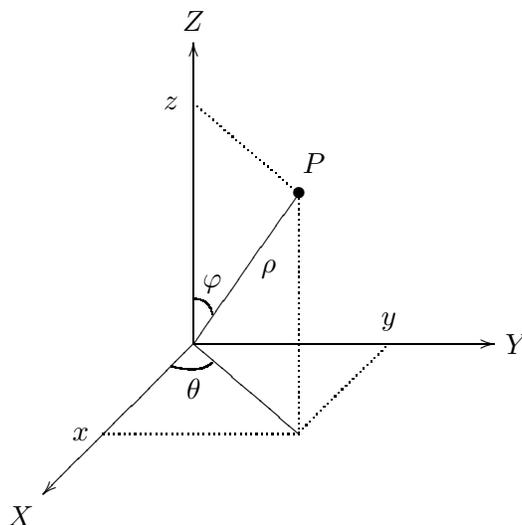


Figura 2.23: La terna (ρ, θ, φ) representa a las coordenadas esféricas de P en el sistema cartesiano XYZ

2.24). Para $\varphi_0 = 0$ se obtiene el segmento que va de 0 a 1 sobre el eje Z y para $\varphi_0 = \pi$ el segmento que va de 0 a -1 (sobre el mismo eje). Así, si generamos al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano $\rho\theta$, al aplicarles la función g “generamos” la esfera unitaria (centrada en el origen) a través de conos.

Si ahora tomamos las ternas de la forma $(\rho, \theta_0, \varphi)$ con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo (ternas que se obtienen al “rebanar” al rectángulo R con un plano paralelo al plano $\rho\varphi$, a la altura θ_0), al aplicar la función g obtenemos el semicírculo unitario que está contenido en el plano que contiene al eje Z y que forma justo un ángulo (dirigido) θ_0 con la parte positiva del eje X (ver figura 2.25). En este caso, si generamos al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano $\rho\varphi$, al aplicarles la función g “generamos” la misma esfera sólo que ahora a través de semicírculos que giran alrededor del eje Z (¡como un abanico que gira!).

Finalmente, si tomamos las ternas de la forma $(\rho_0, \theta, \varphi)$ con $\rho_0 \in [0, 1]$ fijo (ternas que se obtienen al “rebanar” al rectángulo R con un plano paralelo al plano $\theta\varphi$, a la altura ρ_0), al aplicar la función g obtenemos la esfera de radio ρ_0 con centro en el origen (ver figura 2.26). Por tanto, si generamos al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano $\theta\varphi$, al aplicarles la función g “generamos” la misma esfera unitaria sólo que ahora a través de esferas centradas en el origen y cuyo radio “va creciendo”.

De las identidades 2.16 se deduce que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{ó} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y el jacobiano de la función g definida en 2.17 (que de aquí en adelante conoceremos como la transformación de coordenadas esféricas) está dado por:

$$\begin{aligned} Jg(\rho, \theta, \varphi) &= \det(Dg(\rho, \theta, \varphi)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\varphi) \cdot (-\rho^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)) - \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cdot (\rho \operatorname{sen}^2(\varphi)) \end{aligned}$$

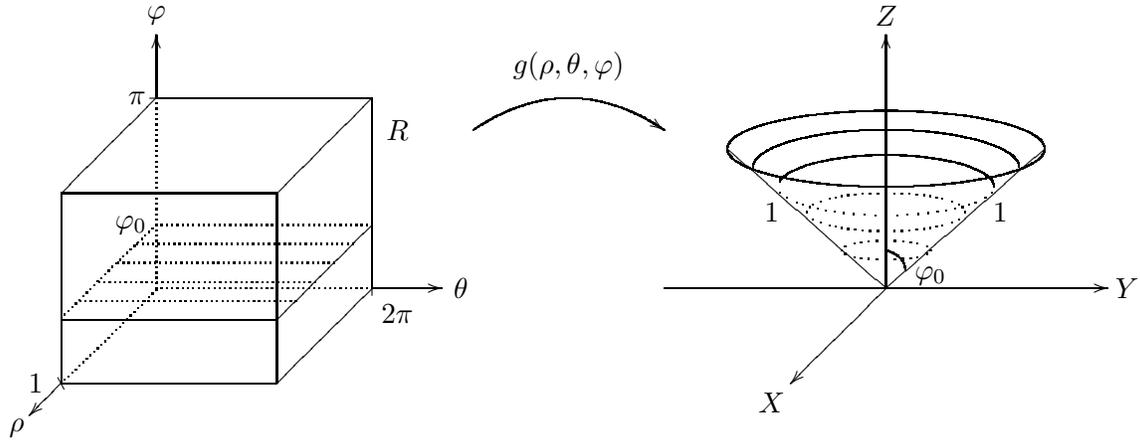


Figura 2.24: Si consideramos puntos de la forma $(\rho, \theta, \varphi_0) \in R$ (con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $\rho\theta$ a la altura φ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ en un cono cuyo eje es el eje Z y que tiene una “apertura” de un ángulo φ_0

$$= -\rho^2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi)$$

Como es de suponerse, terminamos esta sección con un ejemplo que muestra el uso de esta transformación.

Ejemplo 2.13 Calcular el volumen de la región que está dentro de la esfera unitaria con centro en el origen, y fuera del cono determinado por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$. En términos más precisos, se desea calcular el volumen de la región

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2\}$$

Solución. Observese primero que, si tomamos

$$B = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$$

y g la transformación de coordenadas esféricas, entonces

$$g(B) = A$$

Por otra parte, sabemos que si $f \equiv 1$, entonces

$$\begin{aligned} V(A) &= m(A) \\ &= \int_A f \\ &= \int_B (f \circ g) |Jg| \\ &= \int_B |Jg| \end{aligned}$$

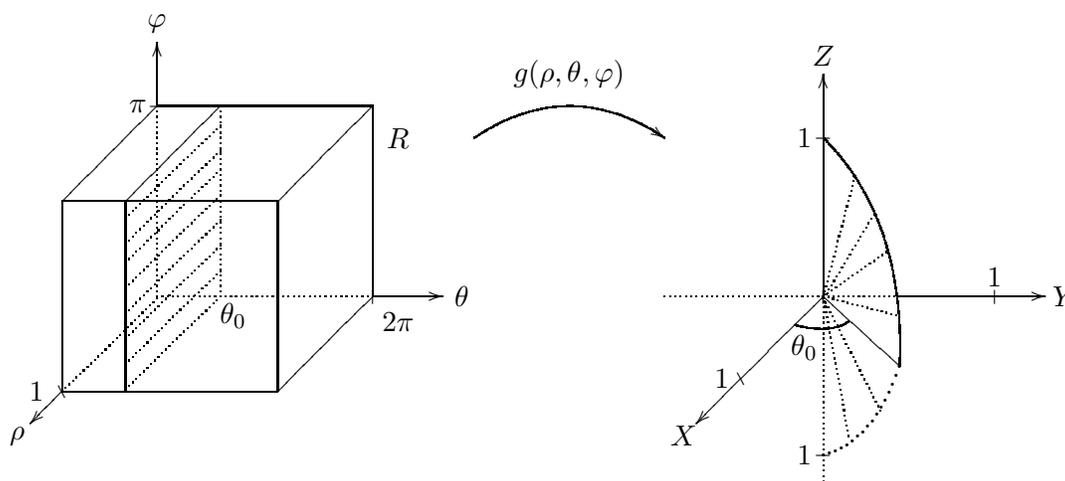


Figura 2.25: Si consideramos puntos de la forma $(\rho, \theta, \varphi) \in R$ (con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $\rho\varphi$ a la altura θ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ en el semicírculo unitario que está contenido en el plano que contiene al eje Z y que forma justo un ángulo (dirigido) θ_0 con la parte positiva del eje X

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\
 &= \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \right) \\
 &= \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) \cdot \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(-\cos(\varphi) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right) \\
 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

2.5 Masa y centro de masa

Iniciamos este texto planteando un problema: ¿cómo calcular la masa total de una lámina si disponemos de una función f que nos proporciona la densidad de masa en cada punto de ésta? Éste fue el problema a partir del cual iniciamos la discusión que finalmente nos condujo al concepto de integral de una función de varias variables (y de valores reales). Ahora sabemos que, si nuestra lámina tiene la forma de un rectángulo R , o de manera más general, coincide con la de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que resulta ser Jordan-medible, entonces la masa total de dicha lámina estará dada por

$$M(A) = \int_A f \tag{2.18}$$

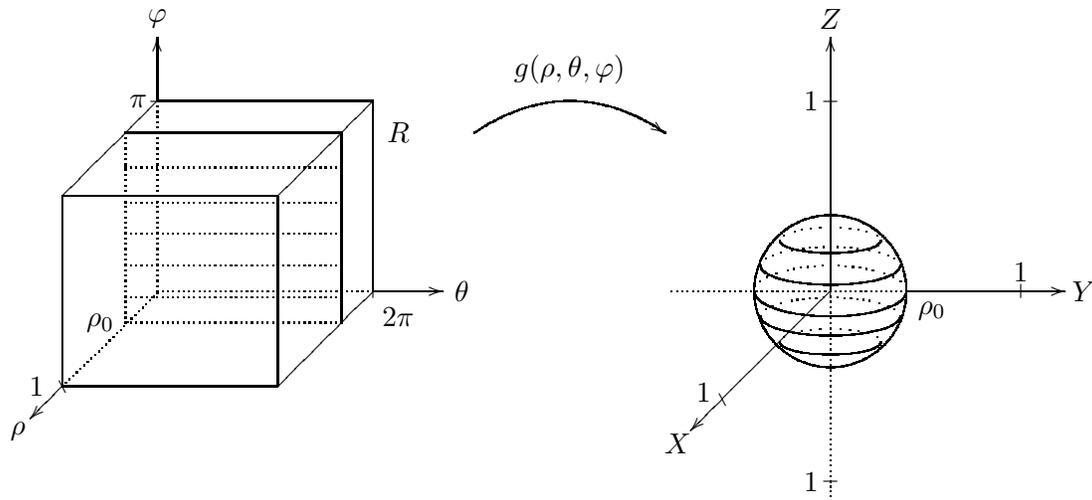


Figura 2.26: Si consideramos puntos de la forma $(\rho_0, \theta, \varphi) \in R$ (con $\rho_0 \in [0, 1]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $\theta\varphi$ a la altura ρ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \text{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \text{sen}(\varphi) \text{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ en la esfera de radio ρ_0 con centro en el origen

De hecho, esto mismo lo podemos extender a objetos en el espacio (o en dimensiones más altas, si hace falta); en efecto, si tenemos un objeto en el espacio cuya forma coincide con la de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ el cual resulta ser Jordan-medible, y además contamos con una función que nos proporciona la densidad de masa del objeto en cada uno de sus puntos, entonces no dudamos en afirmar que la masa total del objeto se puede obtener por medio de la correspondiente integral.

En esta sección mostraremos otro ejemplo de cómo usar el concepto de integral que hemos desarrollado, para resolver un problema muy relacionado con el del cálculo de la masa total de un objeto.

Imaginemos que tenemos un alambre (cuya masa está distribuida de forma homogénea) que flota sobre un cierto líquido. Sobre éste, colocamos objetos de diferente peso (o, para ser más exactos, con diferente masa). La pregunta es: ¿desde qué punto del alambre debemos sostenerlo para que éste no se sumerja y además permanezca horizontal? (ver figura 2.27).

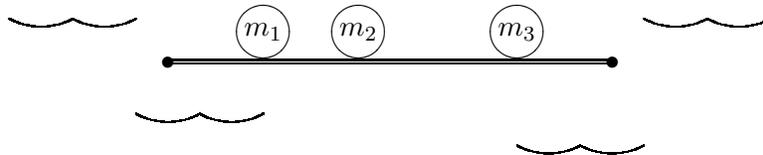


Figura 2.27: En un alambre que flota sobre algún líquido colocamos objetos de diferente masa

Si sostenemos el alambre por alguno de sus puntos, digamos P_1 , y en otro, digamos P_2 , colocamos un objeto de masa m , el efecto producido sobre el alambre dependerá de las posiciones relativas de P_1 y de P_2 . Si el punto P_2 está a la derecha de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la derecha (o girará en el sentido de las manecillas de reloj) y si el punto P_2 está a la izquierda de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la izquierda (o girará en el sentido contrario al de las manecillas de reloj). Si P_1 y P_2 coinciden, entonces el alambre permanecerá horizontal (o “equilibrado”). En los dos primeros

casos, la “fuerza” con que gire el alambre dependerá de dos cosas: una, de la cantidad m de masa que hayamos colocado, y dos, de la distancia d entre los puntos P_1 y P_2 (ver figura 2.28).

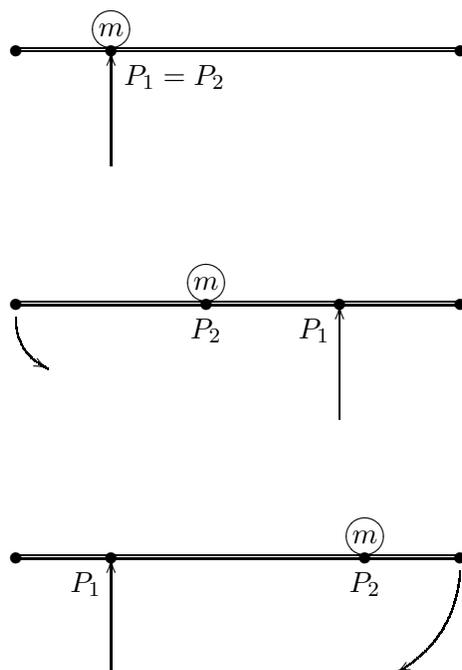


Figura 2.28: Si P_1 y P_2 coinciden, el alambre permanecerá horizontal (o “equilibrado”); si el punto P_2 está a la izquierda de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la izquierda (o girará en el sentido contrario al de las manecillas de reloj); y si el punto P_2 está a la derecha de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la derecha (o girará en el sentido de las manecillas de reloj)

Para simplificar nuestro análisis, vamos a suponer que empezamos sosteniendo el alambre por su punto medio, y que sobre el alambre colocamos una recta que representa a los números reales, haciendo coincidir el origen con dicho punto. Ya que elegimos este sistema de referencia, obsérvese que si la masa de magnitud m la colocamos en un cierto punto del alambre, y dicho punto coincide con el número real x (en cuyo caso diremos que la masa m está colocada en la posición x) entonces el número que se obtiene al multiplicar m y x , es decir $m \cdot x$, es una muy buena forma de medir el giro producido sobre el alambre, incluyendo su orientación, la cual quedará expresada en el signo de dicho número (ver figura 2.29).

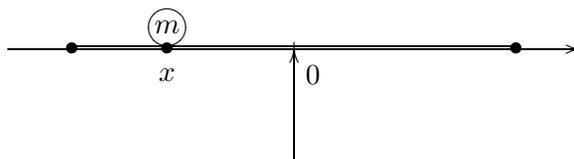


Figura 2.29: Sostenemos el alambre por su punto medio, y sobre el alambre colocamos una recta que representa a los números reales, haciendo coincidir el origen con dicho punto

Una vez establecida esta forma de medir el efecto producido sobre el alambre al colocarle una masa, veremos cómo usando esta medida podemos expresar el hecho de que el alambre está “equilibrado” o en posición horizontal. Se comprueba fácilmente que, si colocamos dos masas de la

misma magnitud m , una en la posición x_1 y otra en la posición x_2 entonces la suma $m \cdot x_1 + m \cdot x_2 = m \cdot (x_1 + x_2)$ nos da un número que vuelve a reflejar el efecto producido sobre el alambre al colocar ambas masas. En efecto, si $x_1 + x_2 > 0$ entonces el alambre gira en el sentido de las manecillas del reloj, si $x_1 + x_2 < 0$ lo hace en el sentido contrario, y si $x_1 + x_2 = 0$ (lo que significa que las posiciones en que colocamos las masas de la misma magnitud son simétricas) entonces, como era de esperarse, el alambre no gira, es decir, está “equilibrado” (ver figura 2.30).

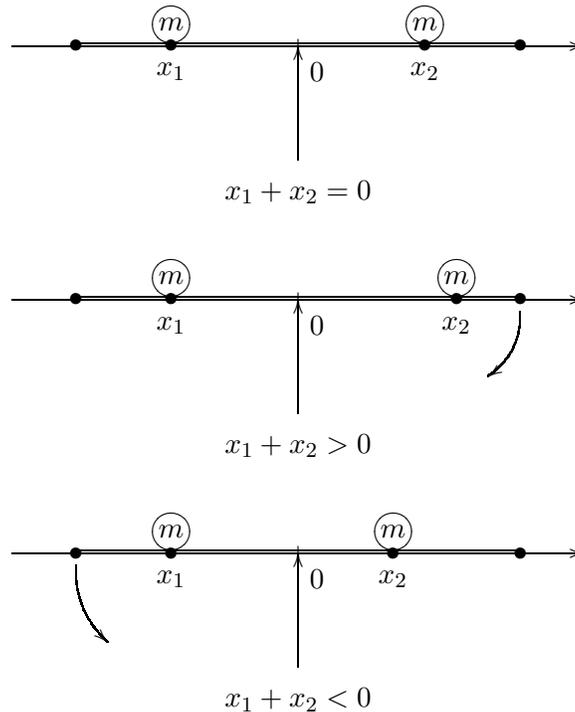


Figura 2.30: Si $x_1 + x_2 > 0$ entonces el alambre gira en el sentido de las manecillas del reloj; si $x_1 + x_2 < 0$ lo hace en el sentido contrario, y si $x_1 + x_2 = 0$ el alambre no gira

Otro caso que también es muy sencillo de verificar es el siguiente: si ahora colocamos dos masas m_1 y m_2 , no necesariamente de la misma magnitud, pero en posiciones x_1 y x_2 simétricas, es decir $x_2 = -x_1$ ó $x_1 + x_2 = 0$, entonces la suma

$$m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = (m_1 - m_2) \cdot x_1$$

es nuevamente un número que refleja con toda precisión el efecto producido sobre el alambre.

En general, se puede comprobar que, si colocamos sobre nuestro alambre masas m_1, \dots, m_k en las posiciones x_1, \dots, x_k , respectivamente, entonces el número

$$m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k \tag{2.19}$$

nos permite medir (y saber) cuál es el giro producido sobre dicho alambre al sostenerlo por su punto medio; en particular, si

$$m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k = 0$$

podemos asegurar que el alambre no girará, o lo que es lo mismo, permanecerá “equilibrado”.

Es importante destacar que hasta ahora la expresión 2.19 sólo nos permite determinar si las masas m_1, \dots, m_k , ubicadas en las posiciones x_1, \dots, x_k , están equilibradas (o no) con respecto

al punto medio del alambre (que por cierto, es el punto del alambre que ocupa la posición 0, de acuerdo con la forma en que ubicamos nuestra recta real). Por esta razón, es pertinente hacernos la siguiente pregunta: ¿cuál es la expresión que nos permite determinar si el mismo conjunto de masas y ubicaciones está equilibrado, si ahora suponemos que el alambre se sostiene desde un punto que está en una posición x_0 arbitraria?

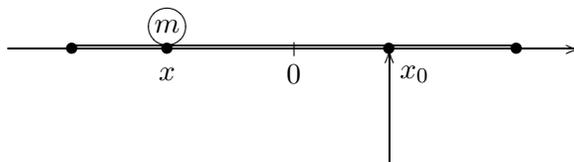


Figura 2.31: Ahora sostenemos el alambre por un punto que ocupa una posición x_0 y colocamos una masa de magnitud m en una posición x

Supongamos entonces que sostenemos el alambre por un punto que ocupa una posición x_0 y que colocamos una masa de magnitud m en una posición x (ver figura 2.31). No es difícil convencerse de que ahora el número $m \cdot (x - x_0)$ es el que nos da una medida del giro (incluyendo la orientación de éste, por medio de su signo) producido sobre nuestro alambre. Y si razonamos como párrafos arriba, también llegaremos a la conclusión de que, al colocar un conjunto de masas m_1, \dots, m_k en las posiciones x_1, \dots, x_k , el número

$$m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \dots + m_k \cdot (x_k - x_0)$$

nos proporciona una manera de saber la magnitud y orientación del giro producido, y en particular que, si

$$m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \dots + m_k \cdot (x_k - x_0) = 0 \quad (2.20)$$

entonces el alambre permanecerá en equilibrio.

Lo más relevante de la identidad 2.20 es que ésta determina al valor x_0 en términos de los valores m_1, \dots, m_k y x_1, \dots, x_k . En efecto, si en esta identidad despejamos a x_0 , obtenemos que

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \end{aligned}$$

Como se podrá observar, esta última identidad resuelve el problema que planteamos inicialmente: si colocamos sobre nuestro alambre k objetos con masas m_1, \dots, m_k en las posiciones x_1, \dots, x_k , respectivamente, entonces la posición dada por la fórmula

$$x_0 = \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \quad (2.21)$$

es aquella desde la cual se debe de sostener al alambre para que éste permanezca equilibrado.

Todo lo discutido párrafos arriba constituye la base de lo que haremos a continuación. Ahora nuestro nuevo problema es el siguiente: si tenemos un alambre cuya distribución de masa no es homogénea, y contamos con una función que nos asigna la densidad de masa en cada punto del

alambre, la pregunta es: ¿cuál es el punto de equilibrio de este alambre?, es decir, ¿desde qué punto debemos sostener a nuestro alambre para que se mantenga en posición horizontal?

¡Manos a la obra! Empecemos por establecer un sistema de referencia sobre el alambre, es decir, lo ubicamos sobre una recta real. Si el extremo izquierdo del alambre se ubica en la posición a y el derecho en la posición b , entonces la función de densidad (de masa) del alambre se puede pensar como una función $\rho : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

El siguiente paso consistirá en subdividir el alambre en pedazos más pequeños, lo que en términos de posiciones equivale a tomar una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ del intervalo $[a, b]$. A continuación, elegimos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada uno de los subintervalos inducidos por \mathcal{P} en $[a, b]$. Ahora, resulta razonable suponer que la cantidad $\rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ es una aproximación a la masa contenida en la porción del alambre representada por el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, y que esta aproximación es mejor en la medida de que dicho subintervalo sea más pequeño, es decir, en la medida de que la partición \mathcal{P} sea más “fina”. Como seguramente se recordará, la masa total m del alambre se parecerá mucho a la suma de estos números, es decir

$$m \approx \sum_{i=1}^k \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

suma que a su vez se parece mucho a

$$\int_a^b \rho(x) dx$$

de donde concluimos que

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

lo cual debe de resultarle muy familiar al lector.

En cuanto al problema de encontrar el punto de equilibrio del alambre, se estará de acuerdo en que nos podemos aproximar a éste através del punto de equilibrio del conjunto de masas (colocadas sobre un alambre homogéneo que flota sobre algún líquido) $m_i = \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ ubicadas en las posiciones ξ_i ($i = 1, \dots, k$) que, de acuerdo con la identidad 2.21, está dado por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot \xi_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k \xi_i \cdot \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})}{\sum_{i=1}^k \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})} \end{aligned}$$

y que esta aproximación será mejor en la medida de que la partición \mathcal{P} sea más fina (ver figura 2.32).

Seguramente el lector coincidirá en que, como

$$\sum_{i=1}^k \xi_i \cdot \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b x \cdot \rho(x) dx$$

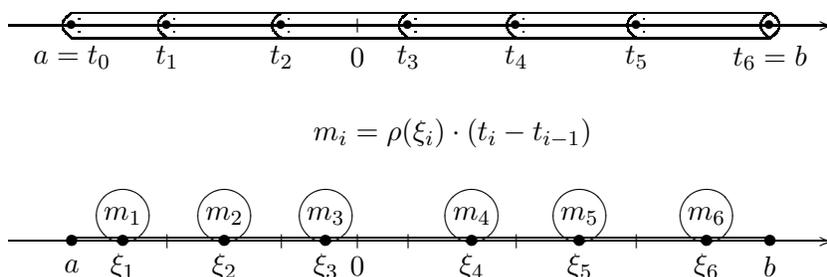


Figura 2.32: El punto de equilibrio de un alambre no homogéneo, se puede aproximar a través del punto de equilibrio del conjunto de masas (colocadas sobre un alambre homogéneo que flota sobre algún líquido) $m_i = \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ ubicadas en las posiciones ξ_i ($i = 1, \dots, k$)

justo cuando la partición \mathcal{P} es más fina, es del todo razonable afirmar que el número

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx} \quad (2.22)$$

nos proporciona la ubicación del punto de equilibrio de nuestro alambre.

Al número que aparece a la derecha de la identidad 2.22 se le conoce como el *centro de masa* de un alambre (identificado con el intervalo $[a, b]$) cuya función de densidad de masa está dada por $\rho : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Como se habrá notado, en todo lo que hemos hecho hasta ahora no han aparecido las integrales de funciones de varias variables, pero como seguramente se sospechará, éstas aparecerán cuando abordemos el problema equivalente para objetos en el plano (láminas) o en el espacio (sólidos).

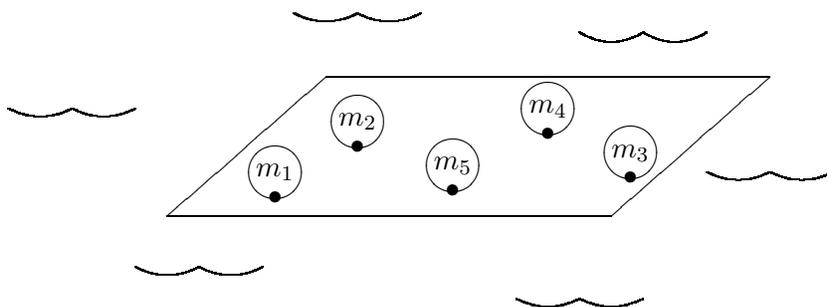


Figura 2.33: En una lámina que flota sobre algún líquido colocamos objetos de diferente masa

¡Y aquí vamos! Imaginemos ahora que tenemos una lámina de forma rectangular (lo que por ahora será irrelevante) que flota sobre un cierto líquido y cuya masa está distribuida de forma homogénea. Sobre ésta, colocamos objetos de diferente masa. La pregunta nuevamente es: ¿desde que punto de la lámina debemos sostenerla para que ésta no se sumerja y además permanezca horizontal? (ver figura 2.33).

Como en el caso del alambre, si ahora sostenemos nuestra lámina por alguno de sus puntos, digamos \hat{P}_0 , y en otro, digamos \hat{P}_1 , colocamos un objeto de masa m , el efecto producido sobre la lámina dependerá, de nueva cuenta, de las posiciones de \hat{P}_0 y de \hat{P}_1 . De hecho, es intuitivamente (y experimentalmente) claro que la lámina se sumergirá en la dirección del punto \hat{P}_1 (visto desde

el punto \hat{P}_0) como si ésta estuviera sostenida a lo largo de toda la línea que pasa por \hat{P}_0 y que es perpendicular a la línea que une a \hat{P}_0 con \hat{P}_1 (ver figura 2.34). También es intuitivamente claro que la “fuerza” con la que hará este movimiento dependerá de la magnitud de la masa y de la distancia entre los puntos. Así, es fácil conversarse de que el vector

$$m \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0)$$

es una muy buena forma de medir el efecto producido sobre la lámina.

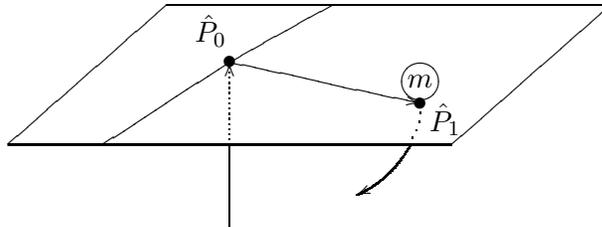


Figura 2.34: La lámina se “sumergirá” en la dirección del punto \hat{P}_1 (visto desde el punto \hat{P}_0) como si ésta estuviera sostenida a lo largo de toda la línea que pasa por \hat{P}_0 y que es perpendicular a la línea que une a \hat{P}_0 con \hat{P}_1

En general, podemos afirmar que, si colocamos k masas de magnitudes m_1, \dots, m_k en los puntos $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$, respectivamente, entonces el efecto producido sobre la lámina (que seguimos suponiendo se sostiene por el punto \hat{P}_0) queda plenamente determinado por el vector

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0)$$

(seguramente el lector se podrá imaginar algunas “configuraciones” sencillas de masas y posiciones que confirman esta afirmación), y en particular, si

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0) = \hat{0} \quad (2.23)$$

entonces podemos asegurar que la lámina permanece horizontal (o en “equilibrio”).

Como en el caso unidimensional, la identidad 2.23 determina de manera única al punto \hat{P}_0 ya que, despejando, tenemos que

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{m_1 + \dots + m_k} \cdot (m_1 \cdot \hat{P}_1 + \dots + m_k \cdot \hat{P}_k) \quad (2.24)$$

con lo cual resolvemos el problema inicialmente planteado.

Si elegimos un sistema cartesiano en el que los puntos $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$ tienen coordenadas $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, respectivamente, entonces las coordenadas (x_0, y_0) (en el mismo sistema) del punto de “equilibrio” \hat{P}_0 (o centro de masa) del conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en dichos puntos, están dadas por

$$x_0 = \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

$$y_0 = \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_k \cdot y_k}{m_1 + \dots + m_k}$$

Con base en lo anterior, podemos resolver ahora el problema de encontrar el punto de “equilibrio” (o centro de masa) de una lámina cuya densidad de masa está dada por un función ρ . Para empezar, supondremos nuevamente que nuestra lámina tiene la forma de un rectángulo R . Como en el caso de un alambre, si damos una partición \mathcal{P} del rectángulo R y consideramos los subrectángulos R_1, \dots, R_k de R inducidos por esta partición, una primera aproximación al punto de “equilibrio” de la lámina se obtiene calculando el punto de “equilibrio” correspondiente al conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en los puntos $\hat{P}_1 = (x_1, y_1), \dots, \hat{P}_k = (x_k, y_k)$, en donde tomamos

$$m_i = \rho(\hat{P}_i) \cdot \text{área}(R_i) = \rho(\hat{P}_i) \cdot m(R_i)$$

y \hat{P}_i es cualquier punto del subrectángulo R_i , para $i = 1, \dots, k$ (ver figura 2.35).

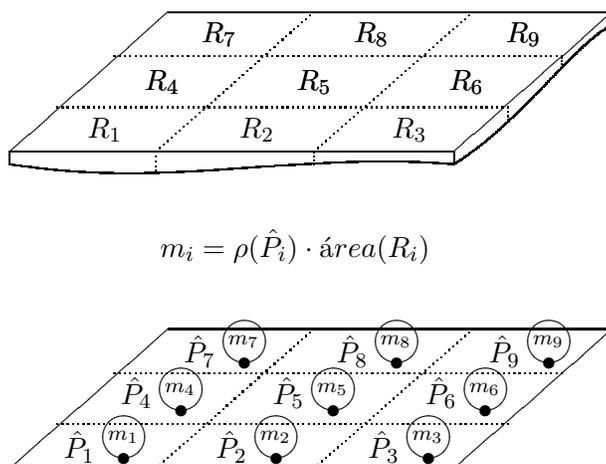


Figura 2.35: El punto de equilibrio de una lámina no homogénea, se puede aproximar a través del punto de equilibrio del conjunto de masas (colocadas sobre una lámina homogénea) $m_i = \rho(\hat{P}_i) \cdot \text{área}(R_i)$ ubicadas en las posiciones \hat{P}_i ($i = 1, \dots, k$)

Así, el punto \hat{P}_0 cuyas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)}{\sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_k \cdot y_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k y_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)}{\sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)} \end{aligned}$$

son una aproximación a las coordenadas del centro de masa de la lámina, y esta aproximación es mejor entre más “fina” sea la partición \mathcal{P} .

Por otra parte, justo si la partición \mathcal{P} es muy “fina”, sabemos que

$$\sum_{i=1}^k x_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i) \approx \int_R x \cdot \rho(x, y)$$

$$\sum_{i=1}^k y_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i) \approx \int_R y \cdot \rho(x, y)$$

y

$$\sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i) \approx \int_R \rho(x, y)$$

de tal forma que podemos estar seguros de que las coordenadas del centro de masa (o punto de “equilibrio”) de la lámina están dadas por

$$x_0 = \frac{\int_R x \cdot \rho(x, y)}{\int_R \rho(x, y)}$$

$$y_0 = \frac{\int_R y \cdot \rho(x, y)}{\int_R \rho(x, y)}$$

Como el lector deducirá fácilmente, si ahora la forma de nuestra lámina coincide con la de un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^2$, en este caso el centro de masa de dicha lámina estará en el punto cuyas coordenadas son

$$x_0 = \frac{\int_A x \cdot \rho(x, y)}{\int_A \rho(x, y)}$$

$$y_0 = \frac{\int_A y \cdot \rho(x, y)}{\int_A \rho(x, y)}$$

Por nuestra incapacidad para “percibir” una cuarta dimensión espacial (¡en caso de que existiera!), resultaría “poco intuitivo” seguir el mismo procedimiento que en los casos anteriores para “motivar” el concepto de punto de “equilibrio” (o centro de masa) de un conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas ahora en puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$. Es por esta razón que en este caso plantearemos el problema de manera diferente.

Supongamos que tenemos un objeto ubicado en una posición \hat{P}_0 el cual vamos a unir, por medio de resortes de diferente tipo, a un conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en los puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$, respectivamente (ver figura 2.36). Supongamos también que la “tensión” del resorte que une a la masa en el punto \hat{P}_i con el objeto en la posición \hat{P}_0 , es igual al producto de la masa m_i por la distancia entre dichos puntos, de tal forma que la medida de la fuerza (o “tirón”) que se ejerce sobre nuestro objeto está dada por $m_i \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_0)$ ⁹. Por tanto, la fuerza neta que se ejercerá

⁹El lector estará de acuerdo en que este planteamiento también funcionaría para los casos en una y dos dimensiones.

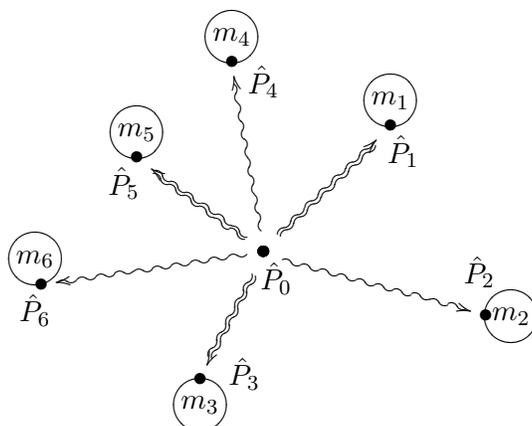


Figura 2.36: Un objeto ubicado en una posición \hat{P}_0 está unido por medio de resortes de diferente tipo, a un conjunto de masas m_1, \dots, m_6 ubicadas en los puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_6$, respectivamente

sobre el objeto que está colocado en el punto \hat{P}_0 estará dada por

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0)$$

y como en los casos anteriores, podremos decir que el punto \hat{P}_0 es el punto de “equilibrio” de nuestro conjunto de masas y resortes si

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0) = \hat{0}$$

Como en los otros casos, esta última identidad determina de manera única al punto \hat{P}_0 por lo que diremos que el punto de “equilibrio” (o centro de masa) del conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en los puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$ está dado por

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{m_1 + \dots + m_k} \cdot (m_1 \cdot \hat{P}_1 + \dots + m_k \cdot \hat{P}_k)$$

Si estos puntos tienen (en algún sistema de referencia) coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_k, y_k, z_k)$, respectivamente, entonces las coordenadas (x_0, y_0, z_0) (en el mismo sistema) del punto de “equilibrio” \hat{P}_0 del conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en dichos puntos, están dadas por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ y_0 &= \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_k \cdot y_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ z_0 &= \frac{m_1 \cdot z_1 + \dots + m_k \cdot z_k}{m_1 + \dots + m_k} \end{aligned}$$

Si ahora seguimos el mismo procedimiento que en los casos anteriores (y que a estas alturas el lector debe saberse de memoria) debe ser claro que, si tenemos un sólido cuya forma coincide con la de un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^3$ y su densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z)$, entonces las coordenadas (x_0, y_0, z_0) del centro de masa \hat{P}_0 de este sólido, están dadas por

$$x_0 = \frac{\int_A x \cdot \rho(x, y, z)}{\int_A \rho(x, y, z)}$$

$$y_0 = \frac{\int y \cdot \rho(x, y, z)}{\int_A \rho(x, y, z)}$$

$$z_0 = \frac{\int z \cdot \rho(x, y, z)}{\int_A \rho(x, y, z)}$$

Concluimos esta sección (y este capítulo) con un ejemplo.

Ejemplo 2.14 Considere una lámina cuya forma coincide con la del conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que se encuentra dentro de la circunferencia unitaria con centro en el origen, y por arriba de la parábola $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Si la densidad de masa de la lámina es homogénea, es decir, $\rho(x, y) \equiv c$, calcule su centro de masa.

Solución. Primero observemos que la región en cuestión se puede escribir como

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}(1 - x^2) \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

Como se sabe, la masa total de la lámina está dada por

$$\begin{aligned} \int_A \rho(x, y) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} c \cdot dy \right) dx \\ &= c \cdot \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2) \right) dx \\ &= c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \int_A x \cdot \rho(x, y) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} c \cdot x dy \right) dx \\ &= c \cdot \int_{-1}^1 x \cdot \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2) \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

se tiene que la abcisa x_0 del centro de masa es igual a 0, como era de esperarse, puesto que la región A es simétrica con respecto al eje Y y la lámina es homogénea.

Por otra parte, como

$$\int_A y \cdot \rho(x, y) = \int_{-1}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} c \cdot y dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= c \cdot \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \left((1-x^2) - \frac{1}{4}(1-x^2)^2 \right) \right) dx \\
 &= \frac{c}{2} \cdot \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^4 \right) dx \\
 &= \frac{8 \cdot c}{15}
 \end{aligned}$$

se tiene que la ordenada del centro de masa es

$$\begin{aligned}
 y_0 &= \frac{\int_A y \cdot \rho(x, y)}{\int_A \rho(x, y)} \\
 &= \frac{8c/15}{c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)} \\
 &= \frac{8}{15 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)}
 \end{aligned}$$

la cual, por cierto, es independiente de la densidad c . Por tanto, el centro de masa de nuestra lámina es

$$\left(0, \frac{8}{15 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)} \right)$$

2.6 Problemas

1. Sea $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua en R , y sean $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tales que $i_l < i_{l+1}$ para $l = 1, \dots, k-1$ y $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ con $j_l < j_{l+1}$ para $l = 1, \dots, n-k-1$. Si $y_{i_1} \in [a_{i_1}, b_{i_1}], \dots, y_{i_k} \in [a_{i_k}, b_{i_k}]$ pruebe que:

- (a) la función $f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}} : R_{j_1, \dots, j_{n-k}} = [a_{j_1}, b_{j_1}] \times \cdots \times [a_{j_{n-k}}, b_{j_{n-k}}] \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = f((x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})_{(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})})$$

en donde $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})_{(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}$ denota al elemento de \mathbb{R}^n cuya i_l coordenada es y_{i_l} (para $l = 1, \dots, k$) y su j_l coordenadas es x_{j_l} (para $l = 1, \dots, n-k$), es continua en $R_{j_1, \dots, j_{n-k}}$.

- (b) la función $\phi : R_{i_1, \dots, i_k} = [a_{i_1}, b_{i_1}] \times \cdots \times [a_{i_k}, b_{i_k}] \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}$$

es continua en R_{i_1, \dots, i_k} .

2. (Teorema de Fubini generalizado) Sean, $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R , y $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tales que $i_l < i_{l+1}$ para $l = 1, \dots, k-1$. Usando la misma notación del ejercicio anterior, definimos las funciones $\phi, \Phi : R_{i_1, \dots, i_k} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \int_{-R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}$$

y

$$\Phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}$$

para cada $(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) \in R_{i_1, \dots, i_k}$. Pruebe que ϕ y Φ son integrables sobre R_{i_1, \dots, i_k} y que

$$\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \phi = \int_R f = \int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \Phi$$

3. Considere las hipótesis, los conjuntos y las funciones definidas en el problema 1. Agregue la función $\psi : R_{j_1, \dots, j_{n-k}} \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\psi(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = \int_{R_{i_1, \dots, i_k}} f_{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}}$$

Pruebe que

$$\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \phi = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} \psi$$

o lo que es lo mismo, que

$$\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \left(\int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}} \right) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} \left(\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} f_{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}} \right)$$

4. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A abierto. Pruebe, usando el teorema de Fubini que, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son continuas en A , entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) \text{ para toda } (u, v) \in A$$

5. Sean $f_i : [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) funciones continuas. Si definimos $f : R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$, pruebe que f es integrable sobre R y además

$$\int_R f = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right)$$

6. Sea $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. Definimos $F : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x, y) = \int_{[a, x] \times [c, y]} f \quad \text{para toda } (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

Pruebe que F es de clase C^2 en $\text{int}(R)$. Calcule todas las derivadas parciales hasta de orden dos de F .

7. Sea $f : R = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Pruebe que la integral iterada $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ existe pero que sin embargo f no es integrable sobre R .

8. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ y $R = [a, b] \times [a, b]$. Pruebe que para toda $u \in [a, b]$:

$$\int_a^b \left(\int_a^u f(u) f(v) dv \right) du = \int_a^b \left(\int_u^b f(u) f(v) dv \right) du = \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(t) dt \right)^2$$

9. Sea $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $f_{x,y} : [a_3, b_3] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{x,y}(z) = f(x, y, z)$ es integrable para toda $(x, y) \in R' = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en R . Si definimos $g : R' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz$, pruebe que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ existe para toda $(x, y) \in R'$ y además

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dz$$

10. Sea f como en el problema anterior y suponga que $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$. Si definimos $F : [a_1, b_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_{a_1}^x \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz \right) dy$$

(a) ¿bajo qué condiciones F es derivable?

(b) si F es derivable, pruebe que $F'(x) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, x, z) dz + \int_{a_1}^x \left(\int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) dz \right) dy$

11. Determine las regiones de integración que conducen a las siguientes integrales múltiples, y evalúelas

$$(i) \int_0^2 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} x dx \right) dy \right) dz \quad (ii) \int_{-1}^1 \left(\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy \right) dx$$

$$(iii) \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz \right) dy \right) dx \quad (iv) \int_0^3 \left(\int_0^{6-2z} \left(\int_0^{4-(2y/3)-4z/3} yz dx \right) dy \right) dz$$

$$(v) \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx \right) dy \quad (vi) \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x (x^n + y^m) dy \right) dx$$

12. Pruebe que, si $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección de clase C^1 y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot |g'(t)| dt$$

13. Sea $f : [0, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

- (a) identifique la región que conduce a la siguiente integral

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(z)dz \right) dy \right) dx$$

- (b) use el teorema de Fubini para probar la identidad

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(z)dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(z)(a-z)^2 dz$$

14. Calcule la integral de la función f sobre la región A , donde:

- (a) A es la región acotada por la parte positiva de los ejes X y Y y la recta $3x + 4y = 10$ y $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (b) A es la región comprendida entre el círculo de radio 1 y el círculo radio 2, ambos con centro en el origen, y $f(x, y) = 1 + xy$
- (c) A es la región acotada por el eje Y y la parábola $x = -4y^2 + 3$, y $f(x, y) = x^3y$
- (d) A es la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 5$ y $z = 10$, y $f(x, y, z) = 1$
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq x + 3, x + y \leq 0\}$ y $f(x, y) = xy$
- (f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \leq y \leq 1\}$ y $f(x, y) = e^{y^2}$
- (g) A es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = x$ y la superficie $y^2 = 4 - 2x$, y $f(x, y, z) = 1$
- (h) A es la región encerrada por las superficies $y^2 + z^2 = 4a$ y $|x| = 4a$, y $f(x, y, z) = x^2$
- (i) A es la intersección de los cilindros sólidos $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + z^2 \leq 1$, y $f(x, y, z) = 1$
15. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, -\phi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$ donde $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y no negativa. Pruebe que:
- (a) si $(x, y) \in A$, entonces $(x, -y) \in A$
- (b) si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x, -y) = -f(x, y)$, entonces $\int_A f = 0$

16. En cada inciso, encuentra la imagen bajo la transformación g de la región A e integre la función f sobre $g(A)$, donde:

- (a) $g(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ y } u^2 + v^2 \leq 1\}$, y $f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$

- (b) $g(u, v) = (u+v, u^2-v)$, $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ y } u+v \leq 2\}$, y $f(x, y) = \frac{1}{1+\sqrt{4x+4y+1}}$
 (c) $g(u, v) = (u, v(1+u^2))$, $A = [0, 3] \times [0, 2]$ y $f(x, y) = x$
 (d) $g(u, v) = (u, v(1+2u))$, (¿cuál es la imagen de las líneas horizontales bajo esta transformación?) $A = [0, 3] \times [1, 3]$ y $f(x, y) = 1$

17. Calcule el área de las siguientes regiones:

- (a) la región acotada por las curvas cuyas ecuaciones polares son $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r = \theta^2$
 (b) la región acotada por la curva $r^2 = 2a^2 |\cos(2\theta)|$ (dibújela)
 (c) la región que está dentro de la curva $r = 1 + \cos(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1$
 (d) la región que está dentro de la curva $r = 3 \sin(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1 + \sin(\theta)$

18. Calcule el volumen de las siguientes regiones:

- (a) la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo de la esfera de radio 2 con centro en el origen y arriba del plano XY
 (b) la región que está dentro del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$

19. Sea $M > 0$.

- (a) muestre que

$$\pi(1 - e^{-M^2}) \leq \int_{[-M, M] \times [-M, M]} e^{-(x^2+y^2)} \leq \pi(1 - e^{-2M^2})$$

- (b) pruebe que

$$\pi(1 - e^{-M^2}) \leq \left(\int_{-M}^M e^{-t^2} dt \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2M^2})$$

- (c) ¿cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$?

20. Calcule la integral de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre el conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^3$, en donde A es la región acotada por los planos $4x - y = 0$, $x - 4y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 4$, $x + y - z = 0$ y $z = 0$ (sugerencia: proceda como en el ejemplo 2.10).

21. Una bola en \mathbb{R}^4 de radio $R \geq 0$ con centro en el origen se define como $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2\}$. Calcule el “volumen” de esta bola.

22. Si g es la transformación de coordenadas esféricas, verifique que los puntos de la forma $g(\rho, \theta, \varphi_0)$ (φ_0 fijo) satisfacen la ecuación de un cono.

23. Usando el cambio de coordenadas “adecuado”, integra la función f sobre la región A , donde:

- (a) A es la región que está fuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, y $f(x, y, z) = kz^2$

- (b) A es la región que está dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, y $f(x, y, z) = kz$
- (c) A es la región que está dentro del paraboloides $x^2 + y^2 = z$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, y $f(x, y, z) = 2$
- (d) A es la región que está fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$, y $f(x, y, z) = x$
- (e) A es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y fuera del hiperboloides $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, y $f(x, y, z) = y$
- (f) A es la región que está por debajo del paraboloides $x^2 + y^2 = z$, arriba del plano $z = 0$ y dentro del cilindro recto cuya base tiene la forma de la curva $r = 1 + \cos(\theta)$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (esboce la región)
- (g) A es la región que está dentro del paraboloides $x^2 + y^2 = z$ y por debajo del plano $x - 2z + 2 = 0$, y $f(x, y, z) = 2$
- (h) A es la región que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y dentro del cilindro recto cuya base tiene la forma de la curva $r = \cos(2\theta)$, y $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (esboce la región)
24. Sea $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Deduzca, usando coordenadas cilíndricas, cuál es el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando se gira la gráfica de h con respecto al eje X .
25. De una esfera de radio ρ se corta una cuña mediante dos planos que se intersectan en un diámetro de la esfera. Si el ángulo entre los planos es $\frac{\pi}{3}$, ¿cuál es el volumen de la cuña?
26. Defina, en general, el concepto de masa y centro de masa para un “objeto en n dimensiones” cuya forma coincide con la de un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^n$ y cuya “densidad” está dada por la función $\rho : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
27. Considere dos objetos cuyas formas coinciden con los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-medibles, respectivamente, tales que $J(A \cap B) = 0$, y con función de densidad $\rho : A \cup B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si \hat{P}_A, \hat{P}_B , y $\hat{P}_{A \cup B}$ son puntos de \mathbb{R}^n que representan los centros de masa de A, B y $A \cup B$, respectivamente. Pruebe que

$$\hat{P}_{A \cup B} = \frac{M(A)}{M(A) + M(B)} \cdot \hat{P}_A + \frac{M(B)}{M(A) + M(B)} \cdot \hat{P}_B$$

Interprete “geoméricamente” (el lector estará de acuerdo en que este problema “justifica” de alguna manera la expresión: “un objeto (o masa) ubicado(a) en un punto”, que sin duda “idealiza” una situación que es muy difícil que se cumpla en “la realidad”).

28. Considere una lámina de densidad constante 1 cuya forma coincide con la del conjunto $A = [-2, 2] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.
- (a) muestre que cualquier recta que pasa por su centro de masa la divide en dos partes con la misma masa (o área)
- (b) si ahora la lámina tiene la forma del conjunto $A = [-2, 0] \times [-2, 2] \cup [0, 2] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, ¿se sigue cumpliendo la misma propiedad del inciso anterior?
29. Sea A la región que está dentro de la circunferencia de radio 1 con centro en el $(0, 1)$. Si A es la forma de una placa metálica cuya densidad de masa ρ está dada por la función $\rho(x, y) = x^2 + y^2$, calcule:

- (a) la masa total de la placa
- (b) el centro de masa de la placa

30. Sea A la región que está dentro de la circunferencia de radio 1 con centro en el $(0, 1)$. Si A es la forma de una placa metálica cuya densidad de masa ρ está dada por la función

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ y^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

calcule:

- (a) la masa total de la placa
- (b) el centro de masa de la placa

31. Considere la región del problema 23 inciso (a). Si A es el complemento (en la esfera) de dicha región y es tal que su densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcule:

- (a) la masa total de A
- (b) el centro de masa de A

32. Una placa metálica tiene la forma de la región que está dentro de la curva $r = 3 \operatorname{sen}(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$, y tiene una función de densidad de masa en el punto P igual al cuadrado de la distancia que hay de P al eje polar. Calcule:

- (a) la masa total de la placa
- (b) el centro de masa de la placa

33. Encuentre la masa total y el centro de masa del sólido que está en el interior, tanto del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ como de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, suponiendo que la densidad de masa en el punto P es directamente proporcional a la distancia de P al plano XY .

Capítulo 3

Integrando sobre curvas

En el capítulo anterior vimos cómo calcular la masa total de un alambre, aun cuando éste fuera de densidad no homogénea, pero suponiendo que era recto. Surge entonces la pregunta de cómo hacer el mismo cálculo, pero suponiendo ahora que nuestro alambre está curvado. Y ya metidos en gastos, por supuesto que también nos podemos preguntar lo mismo para láminas no necesariamente planas. Parte de lo que haremos en este capítulo será desarrollar las herramientas necesarias para contestar la primera pregunta y en el siguiente, las necesarias para responder la segunda.

En este capítulo también desarrollaremos herramientas que nos permitirán dar sentido a la idea de integrar una función de valores reales sobre una curva (de este tipo es la función que nos da la densidad de masa de un alambre no homogéneo), y más aun, veremos que hay ciertos problemas (de la Física, ¡por supuesto!) que nos conducen al concepto de integral sobre una curva de una función de valores vectoriales.

3.1 Curvas y trayectorias

La herramienta más adecuada para describir la forma de un alambre que no es recto, son las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^2 (si nuestro alambre no es recto pero es plano) o de \mathbb{R} en \mathbb{R}^3 , justo porque las imágenes de este tipo de funciones se ven como curvas. Para ser más precisos, trabajaremos con funciones que están definidas sobre algún intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ y cuyos valores están en \mathbb{R}^n , en general. Necesitaremos también que estas funciones sean derivables¹, o cuando menos que lo sean por pedazos, y que esta derivada sea continua (para no tener problemas si nos topamos con alguna expresión que la incluya y que vayamos a integrar). Este tipo de funciones reciben un nombre particular el cual queda establecido en la siguiente

Definición 3.1 *Una función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es suave por pedazos si existe una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que γ tiene derivada continua (de clase C^1) en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (para $i = 1, \dots, k$). A la imagen $\Gamma = \gamma([a, b])$ de una función γ suave por pedazos la llamaremos curva suave por pedazos y diremos que γ es una parametrización suave por pedazos de Γ . A $\gamma(a)$ se le conoce como el punto inicial de γ y a $\gamma(b)$ como el punto final, y si $\gamma(a) = \gamma(b)$ decimos que γ es cerrada.*

Un ejemplo típico de una curva suave por pedazos es la siguiente:

¹Existen funciones definidas sobre el intervalo $[0, 1]$ con valores en \mathbb{R}^2 , continuas, cuya imagen es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Se les conoce con el nombre de “curvas de Peano” en honor del matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932).

Ejemplo 3.2 Considere el cuadrado (en \mathbb{R}^2) con vértices en los puntos $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ (ver figura 3.1). Una parametrización (suave por pedazos) para esta curva puede ser la función $\gamma : [0,4] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1) & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t) & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

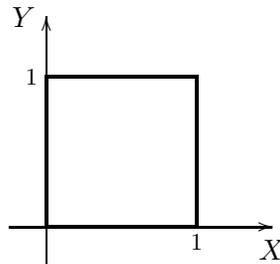


Figura 3.1: Cuadrado unitario

Es un hecho conocido que una curva con “picos” se puede ver como la imagen de una función $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivable en todo su dominio (sólo que en estos “picos” es necesario que la velocidad se haga cero, para que se pueda hacer un cambio “brusco” de dirección). Tal es el caso de la gráfica de la función $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1,1]$ (ver figura 3.2) para la cual se puede conseguir una parametrización que sea derivable y que además dicha derivada sea continua en todo su dominio (es un buen ejercicio encontrar esta parametrización). Sin embargo, la función $\gamma : [-1,1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\gamma(t) = (t, |t|)$ también es una parametrización suave por pedazos de la misma curva (basta tomar la partición $\{-1,0,1\}$), en donde además la derivada de γ en los correspondientes subintervalos nunca se hace cero.

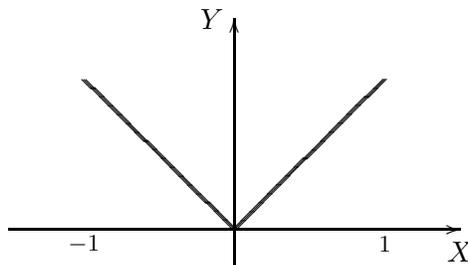


Figura 3.2: Valor absoluto

Observe que el ejemplo anterior no es más que un caso particular de algo que se puede hacer de manera más general. Nótese que, si $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave por pedazos, entonces la gráfica de f ($G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b]\}$) también es una curva suave por pedazos y la función $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida como $\gamma(x) = (x, f(x))$ es una parametrización (suave por pedazos) de ella (ver figura 3.3).

Muchas de las propiedades de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n ya las conocemos, así que sólo agregaremos algunas muy específicas de las suaves por pedazos.

La primera de ellas, y que usaremos con mucha frecuencia, es que este tipo de funciones se pueden “unir” o “pegar”. En efecto, si dos funciones γ y δ son suaves por pedazos, con la propiedad

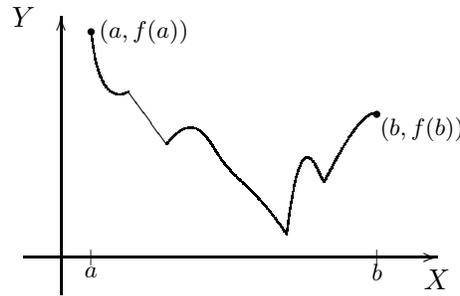


Figura 3.3: La gráfica de una función también es una curva

de que δ “empieza” donde “termina” γ , entonces podemos construir una tercera función (o curva) suave por pedazos, que denotaremos por $\gamma + \delta$, y que se obtiene “pegando” ambas funciones (ver figura 3.4). Formalizamos esta “operación” en la siguiente

Definición 3.3 Sean, $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones suaves por pedazos tales que $\gamma(b) = \delta(c)$. Definimos la función $\gamma + \delta : [a, b + (d - c)] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

$$(\gamma + \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \delta(t - b + c) & \text{si } t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$

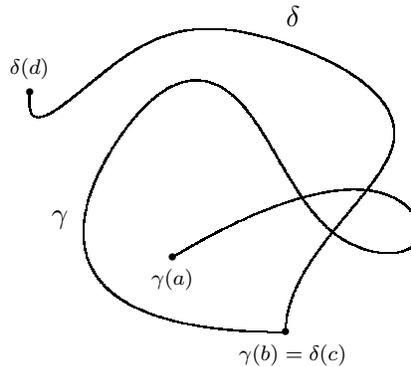


Figura 3.4: La curva $\gamma + \delta$

Se deja como ejercicio al lector probar que en efecto, $\gamma + \delta$ es nuevamente una función suave por pedazos, y por lo tanto, que la unión de sus imágenes también es una curva suave por pedazos.

Otro concepto importante relacionado con las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n es el que tiene que ver con la idea de cambio de parámetro o reparametrización. Incluimos todo lo relacionado con este concepto en la siguiente

Definición 3.4 Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave por pedazos y $\alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ suprayectiva en $[a, b]$, y de clase C^1 en $[c, d]$. Si la función $\gamma \circ \alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (cuya imagen es la misma que la de γ) es nuevamente suave por pedazos, decimos que $\gamma \circ \alpha$ es una reparametrización de la curva $\Gamma = \gamma([a, b])$. Si adicionalmente la función α es inyectiva, se debe tener que $\alpha'(t) \geq 0$ para toda $t \in [c, d]$ ó $\alpha'(t) \leq 0$ para toda $t \in [c, d]$. En el primer caso (en el que se debe de cumplir que $\alpha(c) = a$ y $\alpha(d) = b$) decimos que $\gamma \circ \alpha$ es una reparametrización que preserva la dirección, y en el segundo (en el que se debe de cumplir que $\alpha(c) = b$ y $\alpha(d) = a$) que invierte la dirección.

Dada $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave por pedazos, hay una reparametrización muy particular de ésta que usaremos con mucha frecuencia y que por tanto merece mención aparte. Es la que se obtiene al considerar la función $\alpha : [a, b] \rightarrow [a, b]$ definida como $\alpha(t) = a + b - t$. Como se verifica fácilmente, $\gamma \circ \alpha$ es una reparametrización que invierte la orientación y que tiene la particularidad de recorrer la misma curva $\Gamma = \gamma([a, b])$, sólo que en sentido contrario; el punto inicial de $\gamma \circ \alpha$ es el punto final de γ y el punto final de $\gamma \circ \alpha$ es el punto inicial de γ . A esta reparametrización específica de γ la denotaremos como $-\gamma$ (ver figura 3.5). Resumiendo, si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función suave por pedazos, definiremos $-\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

que también es una función suave por pedazos.

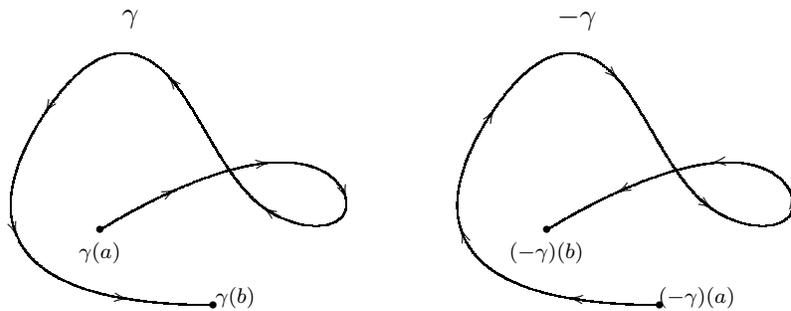


Figura 3.5: Las curvas γ y $-\gamma$

Concluimos esta sección recordando cómo se usan las parametrizaciones para calcular la longitud de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Supongamos por ahora que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización inyectiva y de clase C^1 de esta curva. Como es intuitivamente claro, un método para aproximarse a la longitud de la curva Γ consiste en tomar un número finito de puntos de ésta (empezando y terminando en los puntos inicial y final), digamos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$, y calcular la longitud entre cada dos consecutivos, es decir $\|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$. De esta forma, la suma de todos estos números $\left(\sum_{i=1}^k \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|\right)$ es una aproximación a la longitud de la curva, y esta será mejor si tomamos más puntos y más cercanos entre sí (ver figura 3.6).

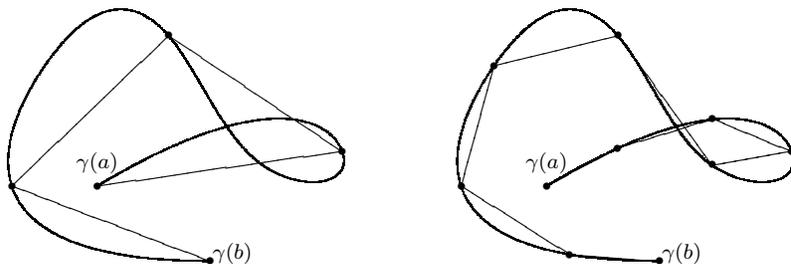


Figura 3.6: Aproximación a la longitud de la curva γ

Dado que estamos suponiendo que γ es una parametrización inyectiva de Γ , existe una única partición $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\hat{P}_i = \gamma(t_i)$, y por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Por otra parte, como estamos suponiendo que $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ es una función de clase C^1 en $[a, b]$, por el Teorema del Valor Medio para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} , tenemos que existen $t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(n)} \in [t_{i-1}, t_i]$ tales que

$$\begin{aligned} \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= (\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), \dots, \gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})) \\ &= \left(\gamma'_1(t_i^{(1)}) \cdot (t_i - t_{i-1}), \dots, \gamma'_n(t_i^{(n)}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \right) \\ &= (t_i - t_{i-1}) \left(\gamma'_1(t_i^{(1)}), \dots, \gamma'_n(t_i^{(n)}) \right) \end{aligned}$$

Ahora, si los puntos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$ son muchos y muy cercanos entre sí (los consecutivos), entonces la partición \mathcal{P} será muy fina, de tal forma que t_{i-1} y t_i también serán puntos muy cercanos. Así, por la continuidad de la derivada de γ debemos tener que

$$\left(\gamma'_1(t_i^{(1)}), \dots, \gamma'_n(t_i^{(n)}) \right) \approx \left(\gamma'_1(\xi_i), \dots, \gamma'_n(\xi_i) \right)$$

para cualquier $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. De esta forma, debemos tener entonces que

$$\begin{aligned} \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1}) \left(\gamma'_1(t_i^{(1)}), \dots, \gamma'_n(t_i^{(n)}) \right) \\ &\approx (t_i - t_{i-1}) \left(\gamma'_1(\xi_i), \dots, \gamma'_n(\xi_i) \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

para cualquier $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ y para cada $i = 1, \dots, k$.

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \left\| \hat{P}_i - \hat{P}_{i-1} \right\| &= \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &\approx \sum_{i=1}^k \left\| \left(\gamma'_1(\xi_i), \dots, \gamma'_n(\xi_i) \right) \right\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

y como el lector sabrá reconocer, esta última suma es una suma de Riemann correspondiente a la integral

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

por lo que es de esperarse que la longitud de la curva Γ , que denotaremos por $l(\Gamma)$, coincida con esta integral, es decir, se debe tener que

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \tag{3.2}$$

Es importante destacar que la integral que aparece en la identidad anterior está bien definida aun cuando γ sea una función suave por pedazos, en virtud de que $\|\gamma'(t)\|$ será una función acotada y continua en $[a, b]$, salvo por un número finito de puntos. Por otra parte, si γ no es una función inyectiva entonces esta integral no representa la longitud de la curva descrita, sino la longitud total recorrida por un objeto que sigue la trayectoria descrita por γ . Esta última observación es muy relevante, puesto que expresa el otro uso que le vamos a dar a las funciones como γ ; es decir, este tipo de funciones también las usaremos para describir el recorrido o trayectoria seguida por un objeto.

Para terminar esta sección, vale la pena decir que la aproximación expresada en 3.1 funciona muy bien y por tanto será muy usada en lo que resta de este capítulo.

3.2 Integrando funciones escalares

Una vez que hemos definido y establecido las propiedades básicas de la herramienta con la cual vamos a trabajar (las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n suaves por pedazos), estamos en condiciones de abordar el primer problema que nos planteamos al inicio de este capítulo.

Supongamos que tenemos un alambre no homogéneo cuya forma coincide con la de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ (claro, con $n = 2$ ó $n = 3$) y cuya densidad de masa está dada por la función ρ . Por ahora, vamos a suponer que Γ es la imagen de una función $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ inyectiva y de clase C^1 . La pregunta es: ¿cómo calcular la masa total del alambre?

De forma análoga a como hicimos en el caso del cálculo de la longitud de una curva, todo parece indicar que lo más apropiado es proceder de la siguiente manera (ver figura 3.7):

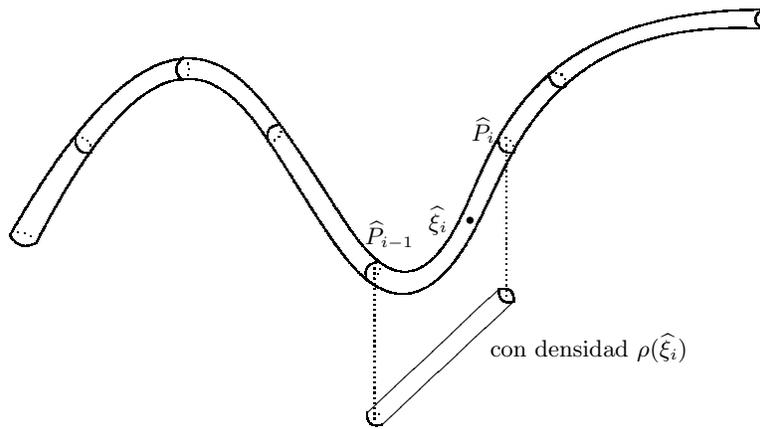


Figura 3.7: Un alambre no homogéneo cuya forma coincide con la de una curva Γ

1. elegir nuevamente un número finito de puntos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$
2. en cada arco de curva $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$ elegir un punto $\hat{\xi}_i$
3. suponer que la densidad de masa a lo largo de cada arco $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$ está dada por $\rho(\hat{\xi}_i)$
4. aproximar la longitud del arco $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$ por la distancia entre los puntos \hat{P}_i y \hat{P}_{i-1} , es decir, por $\|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$

Siguiendo estos pasos se tiene que la cantidad $\rho(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$ es una aproximación a la cantidad de masa contenida en el pedazo de alambre representado por el arco $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$, por lo que la suma

$$\sum_{i=1}^k \rho(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| \quad (3.3)$$

es una aproximación a la masa total, la cual, como siempre sucede y sucederá en estos casos, será mejor en la medida de que tomemos muchos puntos, y muy bien distribuidos, a lo largo de Γ .

Si ahora recordamos que la curva Γ está parametrizada por la función γ , la selección de los puntos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$ se corresponde con una partición $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que

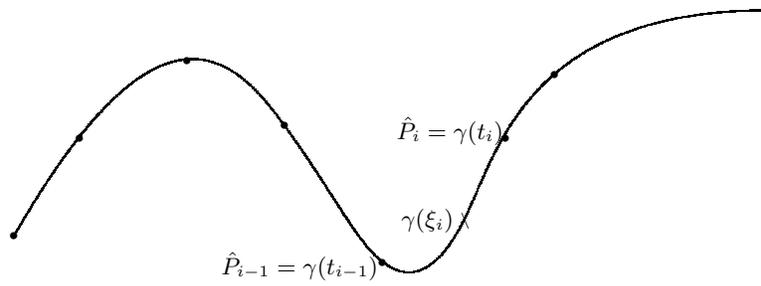


Figura 3.8: Los puntos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$ se corresponden con los elementos de una partición $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[a, b]$

$\hat{P}_i = \gamma(t_i)$, y la elección de los puntos $\hat{\xi}_i \in \widehat{P_{i-1}P_i}$, con la elección de un punto $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, \dots, k$ (ver figura 3.8). De esta forma, la suma 3.3 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^k \rho(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

y esta suma se aproximará cada vez mejor a la masa del alambre si la partición \mathcal{P} es cada vez más fina.

Por otra parte, si usamos 3.1 tendremos que

$$\sum_{i=1}^k \rho(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^k \rho(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (3.4)$$

y nuevamente, el ojo bien entrenado del lector reconocerá rápidamente que la suma de la derecha es una suma de Riemann correspondiente a la integral

$$\int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \quad (3.5)$$

y que dicha suma se parecerá más a esta integral, justo en la medida de que \mathcal{P} sea una partición muy fina.

Dado que la suma que está a la izquierda en 3.4 se parece más a la masa total de nuestro alambre en la medida de que \mathcal{P} sea una partición muy fina, y en esta misma medida, la suma de la derecha se parece más a la integral 3.5, es fácil concluir entonces que la masa total deberá estar dada por esta integral. De hecho obsérvese que, si el alambre es homogéneo, es decir, ρ es una función constante, entonces el valor de esta integral es igual a esta constante multiplicada por la longitud de la curva $l(\Gamma)$, como era de esperarse.

Es importante destacar que la integral que aparece en 3.5 está perfectamente bien definida aun cuando γ sea una curva suave por pedazos, razón por la cual todos nuestros razonamientos son aplicables en este caso.

Ilustraremos la discusión anterior con el siguiente

Ejemplo 3.5 Considere un alambre cuya forma coincide con la imagen de la función $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$ con $t \in [-1, 1]$ (un resorte), y su densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = 1 - z^2$. Calcular la masa total del alambre.

Solución. Dado que $\gamma'(t) = (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi \operatorname{cos}(2\pi t), 1)$ entonces $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4\pi^2}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt &= \sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt \\ &= \sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2} \end{aligned}$$

Hay otro problema, en este caso geométrico, cuya solución nos conduce a calcular una integral como la que aparece en 3.5. Supóngase que se tiene una barda cuya base tiene la forma de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ y su altura, que varía en cada punto de esta curva, está dada por una función f (la que supondremos que es continua, aunque podemos suponer menos que eso) (ver figura 3.9). Como es de imaginarse, la pregunta en este caso es: ¿cuál es el área total de la barda?

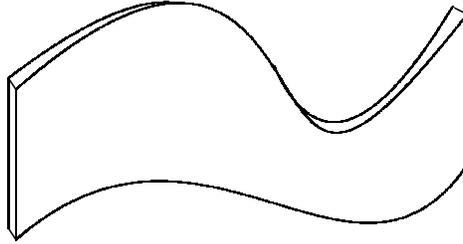


Figura 3.9: Una barda de altura variable (dada por la función f) y cuya base tiene la forma de la curva γ

Si seguimos exactamente los mismos cuatro pasos que en el caso anterior, aclarando que en el paso 3 ahora lo que supondríamos es que la altura de la barda a lo largo del arco $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$ está dada por $f(\hat{\xi}_i)$, entonces la cantidad $f(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$ representa el área de una tabla que se parece mucho a la barda en ese arco de la curva (ver figura 3.10). De esta forma, la suma

$$\sum_{i=1}^k f(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$$

será una aproximación al área total de la barda.

Si ahora suponemos que tenemos una parametrización γ de la curva Γ , con las mismas características de antes, y aplicamos la misma aproximación para la cantidad

$$\|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| = \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \approx \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k f(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| \approx \sum_{i=1}^k f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

y como la suma de la derecha es una suma de Riemann de la integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \tag{3.6}$$

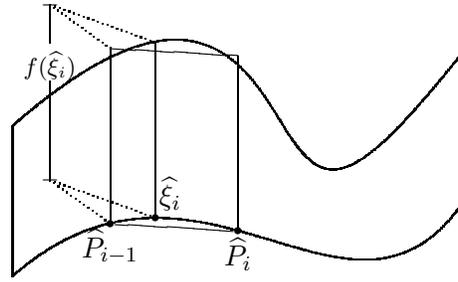


Figura 3.10: Una tabla que se parece mucho a la barda en un subarco de la curva γ

llegamos a la conclusión de que el área de la barda debe estar dada por esta integral.

El siguiente ejemplo muestra que estamos en lo correcto.

Ejemplo 3.6 Considere una barda circular (de radio 1) cuya altura en cada punto está dada por la función $f(x, y) = 1 - y$ (ver figura 3.11). Calcular el área de la barda.

Solución. Lo primero que se debe destacar es que el área que se quiere calcular, coincide con ser la mitad del área de un cilindro de base circular (de radio 1) y altura 2 (perímetro de la base $(2\pi) \times$ altura $(2) = 4\pi$). Por esta razón, el valor al que debemos llegar es 2π .

Para calcular la integral 3.6, parametrizaremos la base de la barda con la función $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Por tanto, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ de tal forma que

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin(t)) \cdot 1 dt = 2\pi$$

como habíamos previsto.

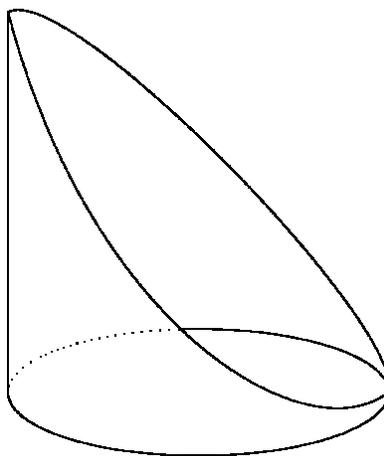


Figura 3.11: Una barda circular

El trabajo desarrollado hasta aquí es parte de la motivación para introducir el concepto matemático que definiremos a continuación. Se trata del concepto de integral de una función f (de valores reales) sobre una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por una función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. A este tipo de

integral se le conoce con el nombre de *integral de línea* de una función f (o de un *campo escalar* f , como también se le nombra a este tipo de funciones por su cercanía con la Física). En términos estrictamente matemáticos, la definición es la siguiente:

Definición 3.7 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave por pedazos, parametrizada por una función (suave por pedazos) $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, definimos la integral de f sobre Γ , según la parametrización γ , (que denotaremos por $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$) como

$$\int_{\Gamma} f \|d\gamma\| = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Por el trabajo realizado hasta aquí, este tipo de integral puede tener varias interpretaciones (masa, área, etc.) de acuerdo con el contexto en el que se esté trabajando, lo que por cierto, es una característica común a muchos conceptos matemáticos.

Lo siguiente que haremos será mostrar algunas de las propiedades de este nuevo concepto, todas ellas muy sencillas. La primera se relaciona con la aritmética del tipo de funciones que se integran, y dice lo siguiente:

Proposición 3.8 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave por pedazos parametrizada por la función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $f, g : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g) \|d\gamma\| = \alpha \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| + \beta \int_{\Gamma} g \|d\gamma\|$$

Como es de suponerse, la prueba de esta proposición se deja al lector.

La siguiente propiedad que mencionaremos tiene que ver con lo se puede llamar la “aritmética de las curvas” sobre las que se integra, y establece que, si una curva se puede ver como la “suma” de otras dos (ver definición 3.3), entonces la integral de una función sobre la curva original, es igual a la suma de las integrales sobre cada una de ellas.

Proposición 3.9 Sean, $\Gamma, \Delta \subset \mathbb{R}^n$ curvas suaves por pedazos parametrizadas por las funciones $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente, tales que $\Gamma \cup \Delta$ es suave por pedazos y está parametrizada por $\gamma + \delta$. Si $f : \Gamma \cup \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua entonces

$$\int_{\Gamma \cup \Delta} f \|d(\gamma + \delta)\| = \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| + \int_{\Delta} f \|d\delta\|$$

Dem. De acuerdo con la definición de $\gamma + \delta$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cup \Delta} f \|d(\gamma + \delta)\| &= \int_a^{b+d-c} f((\gamma + \delta)(t)) \cdot \|(\gamma + \delta)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f((\gamma + \delta)(t)) \cdot \|(\gamma + \delta)'(t)\| dt + \int_b^{b+d-c} f((\gamma + \delta)(t)) \cdot \|(\gamma + \delta)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt + \int_b^{b+d-c} f(\delta(t-b+c)) \cdot \|\delta'(t-b+c)\| dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| + \int_b^{b+d-c} f(\delta(t-b+c)) \cdot \|\delta'(t-b+c)\| dt$$

Ahora, si en la segunda integral del último renglón hacemos el cambio de variable $s = t - b + c$, tendremos que

$$\begin{aligned} \int_b^{b+d-c} f(\delta(t-b+c)) \cdot \|\delta'(t-b+c)\| dt &= \int_c^d f(\delta(s)) \cdot \|\delta'(s)\| ds \\ &= \int_{\Delta} f \|d\delta\| \end{aligned}$$

con lo cual concluimos la prueba. ■

Esta propiedad tiene un valor práctico muy importante, ya que nos permite “ahorrarnos” el cálculo de la parametrización $\gamma + \delta$. Ilustraremos esto con un ejemplo.

Ejemplo 3.10 Considere el cuadrado Γ parametrizado por la función γ (suave por pedazos) del ejemplo 3.2, y la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calcule $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$.

Solución. De acuerdo con el problema 4, se tiene que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ de modo que, por la proposición 3.9

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| &= \int_{\Gamma_1} f \|d\gamma_1\| + \int_{\Gamma_2} f \|d\gamma_2\| + \int_{\Gamma_3} f \|d\gamma_3\| + \int_{\Gamma_4} f \|d\gamma_4\| \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+t^2) dt + \int_0^1 (1+(1-t)^2) dt + \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (4-4t+4t^2) dt \\ &= 4 - 2 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

en donde $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 son la curva imagen (cada uno de los lados del cuadrado) de las funciones $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ y γ_4 , respectivamente.

Una pregunta que es muy pertinente hacerse con relación a este tipo de integral es la siguiente: ¿qué tanto depende el valor de $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$ de la parametrización γ ? Cuando se calculó la longitud de una curva Γ (o la masa total de un alambre, o el área de una barda) supusimos que la parametrización con la que estábamos trabajando era inyectiva, y esto se hizo con el fin de no “agregar de más” a lo que estábamos calculando. Esto nos lleva a sospechar que, en tanto dos parametrizaciones γ y δ recorran “el mismo número de veces” a la curva Γ , sin importar la rapidez y la orientación con que lo hagan, al realizar la integral con cualquiera de ellas nos debe de dar el mismo resultado. Esta idea de que dos parametrizaciones recorran “el mismo número de veces” a la curva Γ , se puede formalizar usando el concepto de reparametrización definida en 3.4, de la

siguiente manera: si δ se puede escribir como una reparametrización inyectiva de γ (sin importar si preserva o no la orientación) entonces diremos que γ y δ recorren “el mismo número de veces” a la curva Γ . La siguiente proposición, con la que concluimos esta sección, concreta estas ideas.

Proposición 3.11 Sean, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave por pedazos y $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones de Γ tales que existe $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una biyección de clase C^1 con la propiedad de que $\delta = \gamma \circ \alpha$, entonces

$$\int_{\Gamma} f \|d\gamma\| = \int_{\Gamma} f \|d\delta\|$$

Dem. Como se establece en la definición 3.4 (y se pide probar en el problema 5), dado que $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección, se debe tener que $\alpha'(s) \geq 0$ para toda $s \in [c, d]$ ó $\alpha'(s) \leq 0$ para toda $s \in [c, d]$. Supongamos que ocurre la segunda posibilidad (la primera se deja como problema al lector) en cuyo caso se debe tener que $\alpha(c) = b$ y $\alpha(d) = a$. Ahora, si en la integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

hacemos el cambio de variable $t = \alpha(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_d^c f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s) ds \\ &= - \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot (-\alpha'(s)) ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot |\alpha'(s)| ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\| ds \\ &= \int_c^d f((\gamma \circ \alpha)(s)) \cdot \|(\gamma \circ \alpha)'(s)\| ds \\ &= \int_c^d f(\delta(s)) \cdot \|\delta'(s)\| ds \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} f \|d\delta\|$$

■

Una consecuencia de la proposición anterior que es importante mencionar, es que

$$\int_{\Gamma} f \|d\gamma\| = \int_{\Gamma} f \|d(-\gamma)\|$$

Concluimos esta sección mostrando otra interpretación del concepto de integral de una función escalar f sobre una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$. Un problema que suele ser importante resolver, es el de conocer el “promedio” de los valores de la función f a lo largo de la curva Γ (si, por ejemplo, f representa la densidad de masa de un alambre que tiene la forma de la curva Γ , suele ser importante saber cuál es la “densidad promedio” de dicho alambre).

A fin de contestar esta pregunta, empezaremos por subdividir a la curva Γ en k subarcos $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ de la misma longitud y elegir en cada uno de ellos puntos $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_k$. De esta forma, el número

$$\frac{f(\hat{\xi}_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k)}{k}$$

es una aproximación al promedio de los valores de la función f sobre la curva Γ , y esta aproximación será mejor en la medida de que k sea más grande.

Dado que subdividimos en subarcos Γ_i de la misma longitud, se tiene que

$$\frac{l(\Gamma_i)}{l(\Gamma)} = \frac{1}{k}$$

para cada $i = 1, \dots, k$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{\xi}_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k)}{k} &= f(\hat{\xi}_1) \frac{1}{k} + \dots + f(\hat{\xi}_k) \frac{1}{k} \\ &= f(\hat{\xi}_1) \frac{l(\Gamma_1)}{l(\Gamma)} + \dots + f(\hat{\xi}_k) \frac{l(\Gamma_k)}{l(\Gamma)} \\ &= \frac{1}{l(\Gamma)} \left(f(\hat{\xi}_1) l(\Gamma_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k) l(\Gamma_k) \right) \end{aligned}$$

Ahora, si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización inyectiva de Γ , si tomamos la partición $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = \Gamma_i$ y elegimos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ tal que $\gamma(\xi_i) = \hat{\xi}_i$ (para cada $i = 1, \dots, k$), entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{\xi}_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k)}{k} &= \frac{1}{l(\Gamma)} \left(f(\hat{\xi}_1) l(\Gamma_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k) l(\Gamma_k) \right) \\ &\approx \frac{1}{l(\Gamma)} \sum_{i=1}^k f(\hat{\xi}_i) \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &\approx \frac{1}{l(\Gamma)} \sum_{i=1}^k f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| \end{aligned}$$

de donde es claro que el número

$$\frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$$

es la forma adecuada de calcular el “promedio” de los valores de f a lo largo de la curva Γ (sin olvidar que γ debe ser una parametrización inyectiva de Γ).

3.3 Integrando funciones vectoriales

Como en los casos anteriores, plantearemos un problema cuya solución nos conduzca a la definición del concepto de integral de línea de funciones vectoriales, que desarrollaremos en esta sección.

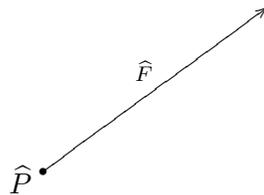


Figura 3.12: Una fuerza \hat{F} “actuando” en un punto \hat{P}

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que significa que en un cierto punto \hat{P} del espacio (o del plano) esté “actuando” una fuerza \hat{F} . Este hecho lo podemos representar geoméricamente si en este punto \hat{P} colocamos una flecha que represente a esa fuerza \hat{F} (ver figura 3.12). Un ejemplo de esto es la fuerza de gravedad que ejerce la tierra y que actúa en cada punto del espacio. En general, sabemos que hay situaciones en las que, ya sea por la presencia de un objeto de masa muy grande, de un objeto que posea carga eléctrica, o de un imán, en cada punto alrededor de ellos “actúa” una fuerza, es decir, se crea un “campo de fuerzas”, o en términos más generales, un “campo vectorial” (ver figura 3.13).

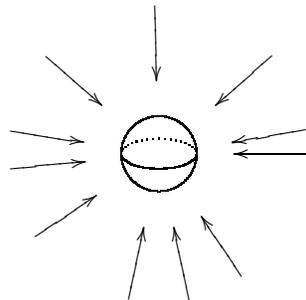


Figura 3.13: Un campo de fuerzas

Para empezar con algo sencillo, supongamos que en el plano tenemos un campo de fuerzas constante, es decir, que en cada punto \hat{P} del plano actúa la misma fuerza hacia abajo \hat{F} , como se muestra en la figura 3.14 (así suele suponerse que es el campo gravitatorio de la tierra para escalas muy pequeñas).

Si ahora suponemos que un objeto se mueve desde un punto \hat{P} hacia un punto \hat{Q} sobre el segmento de recta que los une. Existen básicamente tres situaciones que se pueden distinguir en cuanto a las posiciones de estos puntos:

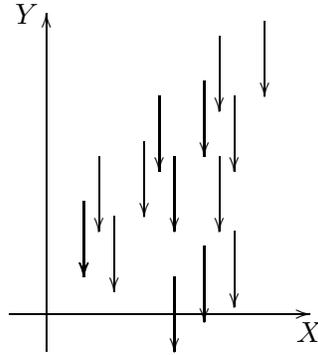


Figura 3.14: Un campo de fuerzas constante

1. \hat{P} está más elevado que \hat{Q}
2. \hat{Q} está más elevado que \hat{P}
3. \hat{P} y \hat{Q} están a la misma altura

En el primer caso, en cada punto del trayecto de \hat{P} a \hat{Q} el campo de fuerzas actúa en “favor” del movimiento; en el segundo caso actúa en “contra” del movimiento y en el tercero, ni en “favor” ni en “contra” del movimiento (situaciones que seguramente todos las hemos experimentado) (ver figura 3.15). Una manera de medir la magnitud de esta “acción” del campo es a través de la componente de la fuerza \hat{F} en la dirección del vector $\hat{Q} - \hat{P}$ (que es el que determina la dirección del movimiento) y que está dada por:

$$\hat{F} \cdot \left(\frac{\hat{Q} - \hat{P}}{\|\hat{Q} - \hat{P}\|} \right)$$

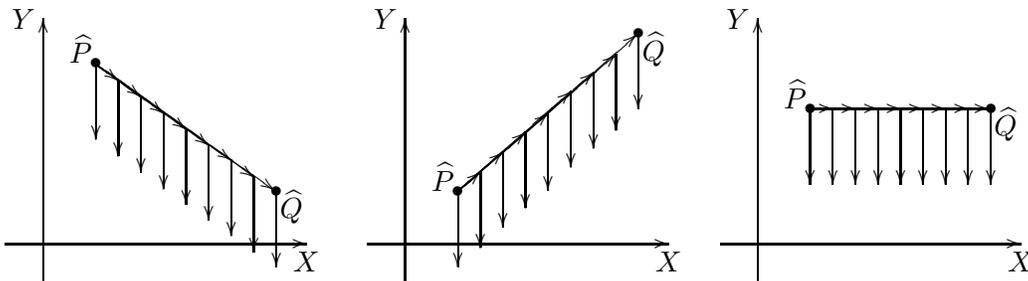


Figura 3.15: Posibles posiciones de los puntos \hat{P} y \hat{Q}

Nótese que este número nos da una medida muy precisa del efecto producido por el campo en cada punto del recorrido. Justo cuando el campo no actúa en favor o en contra del movimiento, este número es cero; y si no es cero, su valor absoluto es una medida de la magnitud con la que actúa, y su signo nos dice si lo hace en favor o en contra del movimiento. En la Física, a este número, multiplicado por la distancia recorrida, es decir,

$$\hat{F} \cdot \left(\frac{\hat{Q} - \hat{P}}{\|\hat{Q} - \hat{P}\|} \right) \cdot \|\hat{Q} - \hat{P}\| = \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) \quad (3.7)$$

se le conoce como el *trabajo* realizado por el campo de fuerzas a lo largo de ese segmento.

Como es de suponerse, este concepto de trabajo se puede extender a un campo de fuerzas arbitrario y a una trayectoria (o curva) arbitraria que una a dos puntos. Supongamos que tenemos una función F que a cada punto \hat{x} del plano le asocia un vector $F(\hat{x})$ (también en el plano) que representa a la fuerza que actúa en \hat{x} , y que $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función que describe la trayectoria que sigue un objeto para ir de un punto $\hat{P} = \gamma(a)$ hacia un punto $\hat{Q} = \gamma(b)$. ¿Cuál es, y cómo lo calculamos, el trabajo total (o el trabajo “neto”, como sería más adecuado llamarlo) realizado por el campo de fuerzas F a lo largo de la trayectoria descrita por γ ?

Hagamos lo siguiente:

1. tomemos una partición $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[a, b]$
2. en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ elijamos un punto ξ_i (para cada $i = 1, \dots, k$), y
3. supongamos que en cada punto del segmento de recta que une a los puntos $\gamma(t_{i-1})$ y $\gamma(t_i)$ el campo de fuerzas F tiene un valor constante $F(\gamma(\xi_i))$

Entonces, de acuerdo con 3.7, el número

$$F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

es el trabajo realizado por el campo F si el objeto se mueve del punto $\gamma(t_{i-1})$ hacia el punto $\gamma(t_i)$ sobre el segmento de recta que los une, y sería una aproximación a lo que bien podría calificarse como el trabajo realizado por el campo F , cuando se empieza y se termina en estos mismos puntos, pero siguiendo la trayectoria descrita por γ (restringida al intervalo $[t_{i-1}, t_i]$). De esta forma, la suma

$$\sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \tag{3.8}$$

será una buena forma de “medir” el trabajo realizado por el campo F cuando el objeto se mueve del punto $\hat{P} = \gamma(a)$ hacia el punto $\hat{Q} = \gamma(b)$, siguiendo la trayectoria descrita por γ .

La mejor parte de este procedimiento es que si ahora usamos la aproximación

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx (t_i - t_{i-1}) (\gamma'_1(\xi_i), \dots, \gamma'_n(\xi_i)) = (t_i - t_{i-1}) \gamma'(\xi_i)$$

que establecimos en 3.1 para este vector, la suma 3.8 será muy parecida a la suma

$$\sum_{i=1}^k (F(\gamma(\xi_i)) \cdot \gamma'(\xi_i)) (t_i - t_{i-1})$$

la cual es fácilmente reconocible como una suma de Riemann de la integral

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \tag{3.9}$$

Dado que todas las estimaciones que estamos haciendo, tanto para “medir” el trabajo realizado por el campo, como para calcular la integral anterior, son mejores en la medida de que la partición \mathcal{P} sea cada vez más fina, es del todo razonable concluir que la integral 3.9 es la forma más adecuada de extender el concepto de trabajo realizado por un campo arbitrario F sobre una trayectoria γ , también arbitraria.

Vale la pena destacar que, al menos en el caso en que F es un campo constante (es decir, que $F(\hat{x}) = \hat{F}$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$) y γ es la trayectoria que recorre el segmento de recta que une a \hat{P} con \hat{Q} (empezando en \hat{P} y terminando en \hat{Q}), la integral 3.9 nos conduce a lo mismo que definimos en 3.7. En efecto, si tomamos $\gamma(t) = \hat{P} + t(\hat{Q} - \hat{P})$ con $t \in [0, 1]$, entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^1 \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) dt \\ &= \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) \cdot \int_0^1 dt \\ &= \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) \end{aligned}$$

El concepto (físico) de trabajo (realizado por un campo de fuerzas) es una de las motivaciones más importantes para definir el concepto (matemático) de integral de línea (o de trayectoria) de una función de valores vectoriales. Nuestro siguiente trabajo será formalizar este último concepto y exponer sus propiedades más importantes, la mayoría de las cuales serán motivadas e interpretadas en términos de este concepto físico.

Definición 3.12 Sean, $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en el conjunto U , abierto y conexo, una curva $\Gamma \subset U$ y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave por pedazos tal que $\Gamma = \gamma([a, b])$. Definimos la integral de F sobre la curva Γ según la parametrización γ (que denotaremos por $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$) como

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Es relevante destacar que dos de las herramientas más importantes que se usan en esta definición son:

1. las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n con las cuales describimos a los campos de fuerza de la siguiente manera: cada n -ada (x_1, \dots, x_n) del dominio representará las coordenadas (casi siempre en un sistema euclideo) del punto \hat{x} sobre el que actúa la fuerza $F(\hat{x})$, que a su vez se representará por la n -ada $(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ la cual (casi siempre) se interpretará como las coordenadas de un vector en el mismo sistema euclideo, sólo que trasladado al punto \hat{x} . En cuanto al dominio de estas funciones, de aquí en adelante siempre supondremos que es un conjunto abierto y conexo, y para abreviar, a este tipo de conjunto simplemente le llamaremos *región*.
2. las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R}^n suaves por pedazos, con las cuales describiremos a la trayectoria seguida entre dos puntos, y cuyas propiedades ya discutimos anteriormente.

Antes de abordar las propiedades básicas de este nuevo concepto (y que serán muy parecidas a las de la integral de línea de funciones escalares), daremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.13 Considere la función $F(x, y) = (0, -g)$ para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $g \geq 0$. Calcular $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ donde Γ sea:

1. el segmento de recta que va del punto $(0,0)$ al punto $(1,1)$, recorrido en esa dirección
2. el arco de la circunferencia con centro en el $(0,1)$ que une a esos mismos puntos, recorrido en la dirección contraria a las manecillas del reloj y cuyo punto inicial es el $(0,0)$
3. el segmento de la parábola $y = x^2$ que une a estos dos puntos, recorrido del punto $(1,1)$ al punto $(0,0)$

Solución. Para el primer inciso, hacemos $\gamma(t) = (t, t)$ con $t \in [0, 1]$. Entonces, $\gamma'(t) = (1, 1)$ para toda $t \in [0, 1]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^1 (0, -g) \cdot (1, 1) dt \\ &= \int_0^1 -g dt \\ &= -g \end{aligned}$$

Para el segundo inciso, hacemos $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t) + 1)$ con $t \in [-\pi/2, 0]$. Entonces, $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ para toda $t \in [-\pi/2, 0]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{-\pi/2}^0 (0, -g) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= -g \int_{-\pi/2}^0 \cos(t) dt \\ &= -g \left(\sin(t) \Big|_{-\pi/2}^0 \right) \\ &= -g (\sin(0) - \sin(-\pi/2)) \\ &= -g \end{aligned}$$

Para el último inciso, tomamos $\gamma(t) = (1-t, (1-t)^2)$ con $t \in [0, 1]$. Entonces, $\gamma'(t) = (-1, -2(1-t))$ para toda $t \in [0, 1]$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^1 (0, -g) \cdot (-1, -2(1-t)) dt \\ &= -g \int_0^1 -2(1-t) dt \\ &= -g \left((1-t)^2 \Big|_0^1 \right) \\ &= -g(0-1) \\ &= g \end{aligned}$$

Los resultados de este ejemplo darán lugar a algunas reflexiones importantes acerca de este tipo de integrales, pero antes veremos sus propiedades básicas.

Las dos primeras son totalmente equivalentes a las que vimos para el caso de funciones escalares y en su formulación casi es suficiente nada más cambiar el nombre de la integral.

Proposición 3.14 Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, y $\Gamma \subset U$ una curva suave por pedazos parametrizada por la función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $F, G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ son continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_{\Gamma} (\alpha F + \beta G) \cdot d\gamma = \alpha \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \beta \int_{\Gamma} G \cdot d\gamma$$

Proposición 3.15 Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, y $\Gamma, \Delta \subset U$ curvas suaves por pedazos parametrizadas por las funciones $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, respectivamente, tales que $\Gamma \cup \Delta$ es suave por pedazos y está parametrizada por $\gamma + \delta$. Si $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua entonces

$$\int_{\Gamma \cup \Delta} F \cdot d(\gamma + \delta) = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \int_{\Delta} F \cdot d\delta$$

Como es de suponerse, la prueba de estas proposiciones se deja como un problema para el lector.

Con respecto a la tercera proposición que probamos para el caso de la integral de funciones escalares, si bien hay una equivalente para el caso de la integral de funciones vectoriales, tenemos que ser más cuidadosos a la hora de formularla puesto que, como se puede apreciar en su definición, la “dirección” con que se hace un recorrido afecta la forma que en que “actúa” un campo de fuerzas (simplemente tenga presente el lector, por ejemplo, que bajo la influencia del campo gravitatorio de la tierra no es lo mismo ir para “arriba” que para “abajo” (¡como en muchas otras situaciones de la vida!)).

Proposición 3.16 Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, $\Gamma \subset U$ una curva suave por pedazos, y $F : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua. Si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos parametrizaciones de Γ tales que existe $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$ una biyección de clase C^1 con la propiedad de que $\delta = \gamma \circ \alpha$, entonces:

1. si α preserva la dirección, se tiene que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} F \cdot d\delta$$

2. si α invierte la dirección, se tiene que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = - \int_{\Gamma} F \cdot d\delta$$

En particular

$$\int_{\Gamma} F \cdot d(-\gamma) = - \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

Dem. Probaremos el segundo inciso y el primero queda como un problema para el lector. En el caso que nos ocupamos, se tiene que $\alpha(c) = b$ y $\alpha(d) = a$. Ahora, si en la integral

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

hacemos el cambio de variable $t = \alpha(s)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_d^c F(\gamma(\alpha(s))) \cdot \gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds \\ &= - \int_c^d F(\delta(s)) \cdot \delta'(s) ds \\ &= - \int_{\Gamma} F \cdot d\delta \end{aligned}$$

■

Con base en el segundo inciso de esta última proposición podemos concluir que, si en el tercer inciso del ejemplo 3.13 calculamos $\int_{\Gamma} F \cdot d(-\gamma)$, entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d(-\gamma) = -g$$

de tal forma que el trabajo realizado por el campo F es el mismo para los tres recorridos ahí descritos (los cuales empiezan en el $(0,0)$ y terminan en el $(1,1)$). Esta característica de este campo F constituye el punto de arranque de la siguiente sección.

3.4 Campos conservativos (primera parte)

Como se recordará, el tipo de problemas que motivan la definición del concepto de integral de línea de funciones escalares, están relacionados con el cálculo de la masa de un alambre o el área de una barda. Así, si dos alambres coinciden en sus extremos pero son de formas diferentes, aun cuando hubiera una sola función que describa la densidad de masa de ambos alambres, en general no hay porque esperar que sus masas sean iguales. De esta forma, lo más seguro es que las integrales de una función escalar sobre dos curvas que coinciden en sus puntos extremos, en general no tengan por qué ser iguales (¡lo más seguro es que casi nunca lo sean!).

Este no es el caso de la integral de línea de una función de valores vectoriales. Por el contrario, cuando se tiene un campo de fuerzas $F(\hat{x})$, una de las preguntas importantes a responder es si el trabajo realizado por dicho campo a lo largo de una trayectoria γ que une a dos puntos \hat{P} y \hat{Q} , depende de la trayectoria γ que se siguió, o sólo de los puntos extremos de ésta (\hat{P} y \hat{Q}) (ver figura 3.16).

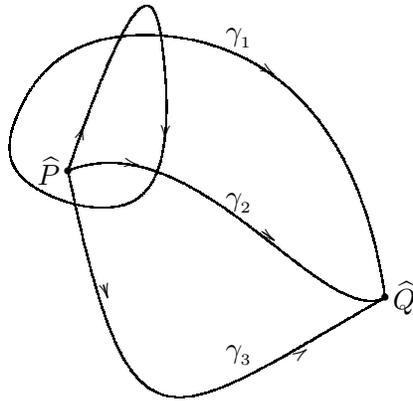


Figura 3.16: Distintas curvas (o trayectorias) que inician en \hat{P} y terminan en \hat{Q}

El campo de fuerzas definido por la función del ejemplo 3.13 (que por cierto es la forma en que suele representarse al campo gravitacional de la tierra a pequeñas escalas y en un plano), pareciera ser uno de esos campos para los cuales el trabajo realizado sólo dependerá de los puntos extremos de la trayectoria y no de ésta.

En términos más técnicos, la pregunta que abordaremos en esta sección es la siguiente:

¿si $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua, y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos funciones suaves por pedazos, una describiendo una curva $\Gamma \subset U$ y la otra una curva $\Delta \subset U$, tales que $\gamma(a) = \hat{P} = \delta(c)$ y $\gamma(b) = \hat{Q} = \delta(d)$ (es decir, que empiezan en el mismo punto $\hat{P} \in U$ y terminan en el mismo punto $\hat{Q} \in U$) entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Delta} F \cdot d\delta?$$

En el caso particular de la función del ejemplo 3.13 es fácil verificar que esta propiedad sí se cumple. Supongamos que $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\delta = (\delta_1, \delta_2) : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfacen las condiciones requeridas y que F es la función dada en ese ejemplo. En particular, tendremos que:

$$\gamma_2(a) = \delta_2(c) \quad \text{y} \quad \gamma_2(b) = \delta_2(d)$$

Entonces, usando el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo para funciones suaves por pedazos (problema 2), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (0, -g) \cdot ((\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))) dt \\ &= -g \int_a^b \gamma_2'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -g(\gamma_2(b) - \gamma_2(a)) \\
 &= -g(\delta_2(d) - \delta_2(c)) \\
 &= -g \int_c^d \delta_2'(t) dt \\
 &= \int_c^d (0, -g) \cdot (\delta_1'(t), \delta_2'(t)) dt \\
 &= \int_c^d F(\delta(t)) \cdot \delta'(t) dt \\
 &= \int_{\Delta} F \cdot d\delta
 \end{aligned}$$

El ejemplo anterior sugiere que la clave de nuestra pregunta se encuentra en la expresión

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

y si el lector tiene buena memoria, recordará que una expresión similar a ésta aparece en la fórmula de cambio de variable para integrales de funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} (ecuación 2.5 del capítulo 2) y que ésta coincidiría con ser la derivada de una composición de funciones, si F tuviera una especie de “primitiva”.

Las funciones cuya derivada se representa en términos de un vector son las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . En efecto, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una de estas funciones, su derivada en cada punto $\hat{x} \in U$ (a la cual se le conoce con el nombre de gradiente de φ en \hat{x} y se denota por $\nabla\varphi(\hat{x})$) es un vector en \mathbb{R}^n , de tal forma que si

$$F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x}) \quad \text{para toda } \hat{x} \in U \tag{3.10}$$

entonces

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t)$$

para toda $t \in [a, b]$, y de esta manera se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\
 &= (\varphi \circ \gamma) \Big|_a^b \\
 &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \\
 &= \varphi(\hat{Q}) - \varphi(\hat{P})
 \end{aligned}$$

con lo cual concluimos que, si una función F satisface la condición 3.10 para alguna función φ , entonces la integral de línea de F sobre una curva Γ parametrizada por una función γ sólo depende de los puntos extremos de γ ! (y de la función φ). ¡Obsérvese que la identidad

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \quad (3.11)$$

cuando $F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x})$, es una especie de generalización del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo!

De la identidad 3.11 también se desprende una propiedad que está muy relacionada con el problema que planteamos en un principio. Nótese que, si en particular la función γ describe una trayectoria cerrada, es decir que $\gamma(a) = \gamma(b)$, entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

En resumen, si la función (o el campo) F satisface la condición 3.10, entonces necesariamente sucede lo siguiente:

1. la integral de línea de F sobre una curva Γ parametrizada por una función γ sólo depende de los puntos extremos de γ
2. la integral de línea de F sobre cualquier curva Γ parametrizada por una trayectoria cerrada γ , vale cero

La mejor parte de esta historia es que ¡es suficiente que alguna de las condiciones anteriores se cumpla para que podamos asegurar que existe una función φ para la cual se satisface 3.10!

Si una función φ satisface la multicitada condición 3.10 entonces se dice que la función F es un *campo conservativo* (o *gradiente*) y este concepto lo formalizamos en la siguiente

Definición 3.17 Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en la región U . Decimos que F es un campo conservativo (o gradiente) en U si existe $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x}) \quad \text{para toda } \hat{x} \in U$$

En este caso decimos que φ es un gradiente (o un potencial)² de F .

Un ejemplo de un campo conservativo es justo el que definimos en el ejemplo 3.13. Nótese que, si tomamos $\varphi(x, y) = -gy$ entonces

$$\nabla\varphi(x, y) = (0, -g) = F(x, y)$$

para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, es decir, esta función F es un campo conservativo en la región $U = \mathbb{R}^2$, lo que por cierto explica los resultados obtenidos en ese ejemplo.

Toda la discusión anterior queda sintetizada en el siguiente

Teorema 3.18 Sea $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en la región U . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

²Como es de suponer, el término “potencial” proviene de la Física.

1. F es un campo conservativo en U
2. la integral de línea de F sobre cualquier curva $\Gamma \subset U$ parametrizada por una función suave por pedazos y cerrada γ vale cero, es decir

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

3. la integral de línea de F sobre cualquier curva $\Gamma \subset U$ parametrizada por una función suave por pedazos γ sólo depende de los puntos extremos de γ . Es decir, si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son dos funciones suaves por pedazos, una describiendo una curva $\Gamma \subset U$ y la otra una curva $\Delta \subset U$, tales que $\gamma(a) = \delta(c)$ y $\gamma(b) = \delta(d)$ entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Delta} F \cdot d\delta$$

Dem. 1) \Rightarrow 2) Se sigue de manera inmediata de la identidad 3.11 y de que γ es una parametrización cerrada, es decir, que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

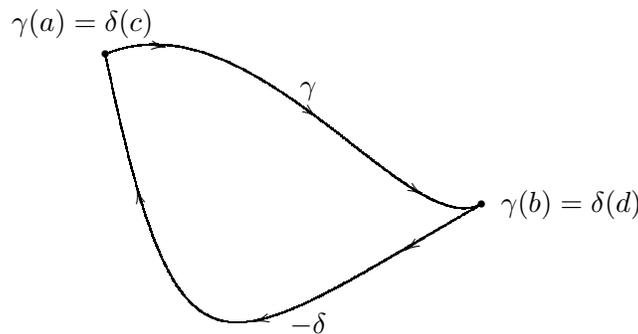


Figura 3.17: La curva $\Gamma \cup \Delta$ parametrizada por $\gamma + (-\delta)$

2) \Rightarrow 3) Sean $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos funciones suaves por pedazos, una describiendo una curva $\Gamma \subset U$ y la otra una curva $\Delta \subset U$, tales que $\gamma(a) = \delta(c)$ y $\gamma(b) = \delta(d)$. Por estas dos últimas identidades, y el hecho de que $(-\delta)(c) = \delta(d) = \gamma(b)$ y $(-\delta)(d) = \delta(c) = \gamma(a)$, podemos construir la parametrización $\gamma + (-\delta)$ de $\Gamma \cup \Delta$ y además concluir que es cerrada (ver figura 3.17). De esta forma, por la hipótesis tenemos que

$$\int_{\Gamma \cup \Delta} F \cdot d(\gamma + (-\delta)) = 0$$

Por otra parte, por la proposición 3.15 y el segundo inciso de la proposición 3.16, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cup \Delta} F \cdot d(\gamma + (-\delta)) &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \int_{\Delta} F \cdot d(-\delta) \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{\Delta} F \cdot d\delta \end{aligned}$$

con lo cual, considerando ambas identidades, obtenemos el resultado deseado.

3) \Rightarrow 1) Sea $\hat{x}_0 \in U$ un punto fijo. Definiremos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: dado $\hat{x} \in U$, hacemos

$$\varphi(\hat{x}) = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

en donde $\Gamma \subset U$ es cualquier curva formada por segmentos paralelos a los ejes coordenados (en el problema 18 se pide probar que siempre existe al menos una de estas curvas) (ver figura 3.18) parametrizada por una función suave por pedazos $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(a) = \hat{x}_0$ y $\gamma(b) = \hat{x}$. Nótese que por nuestra hipótesis, podemos asegurar que el valor $\varphi(\hat{x})$ no depende ni de la curva $\Gamma \subset U$ ni de su parametrización γ , siempre y cuando ésta última empiece en \hat{x}_0 y termine en \hat{x} . Por esta razón, φ está bien definida.

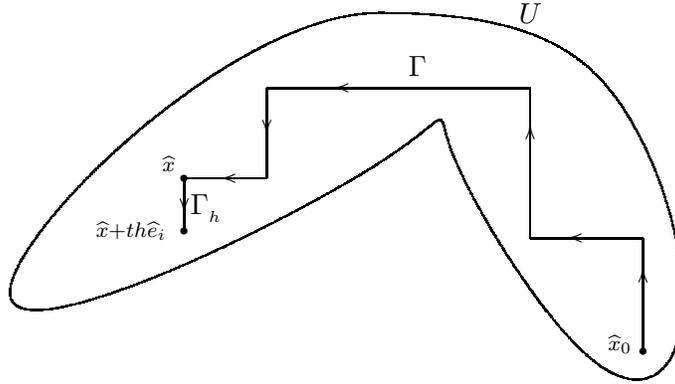


Figura 3.18: La curva $\Gamma \cup \Gamma_h$

Probaremos ahora que $\nabla\varphi(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ sabemos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_i) - \varphi(\hat{x})}{h}$$

en donde \hat{e}_i es el i -ésimo vector básico de \mathbb{R}^n (el que tiene un 1 en la i -ésima coordenada y cero en las demás).

Supongamos que Γ y γ son como en la definición de $\varphi(\hat{x})$ y sea Γ_h el segmento de recta que va del punto \hat{x} al punto $\hat{x} + h\hat{e}_i$ y $\gamma_h(t) = \hat{x} + th\hat{e}_i$ con $t \in [0, 1]$, una parametrización de éste (ver figura 3.18). Usando estas curvas y sus parametrizaciones, podemos escribir que

$$\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_i) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_h} F \cdot d(\gamma + \gamma_h)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_i) - \varphi(\hat{x})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\int_{\Gamma \cup \Gamma_h} F \cdot d(\gamma + \gamma_h) - \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{\Gamma_h} F \cdot d\gamma_h \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^1 F(\gamma_h(t)) \cdot \gamma_h'(t) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^1 F(\hat{x} + th\hat{e}_i) \cdot (h\hat{e}_i) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(\hat{x} + th\hat{e}_i) dt \\
 &= F_i(\hat{x})
 \end{aligned}$$

en donde la última identidad se sigue de la continuidad de F (y por tanto de cada F_i) y con la cual concluimos la prueba. ■

La importancia del teorema anterior está en el hecho de que establece dos maneras diferentes de responder a la pregunta con que iniciamos esta sección. Por lo general, la condición del primer inciso suele ser útil para mostrar cuándo el trabajo realizado por un campo de fuerzas no depende de la trayectoria que une a dos puntos, y la condición del segundo inciso suele ser más útil cuando sucede lo contrario. Estas características quedan ilustradas en los siguientes ejemplos.

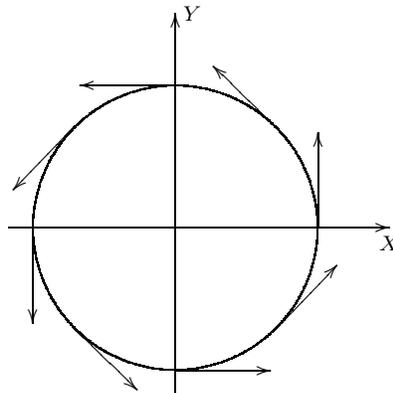


Figura 3.19: El campo F y la curva Γ del ejemplo 3.19

Ejemplo 3.19 Considere el campo definido por la función

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \quad (3.12)$$

con $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Mostraremos, usando el inciso dos del teorema 3.18, que este campo no es conservativo en su dominio U .

Solución. En efecto, sea $\Gamma \subset U$ la circunferencia de radio $r > 0$ con centro en el origen,

parametrizada por la función $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin(t)}{(r \cos(t))^2 + (r \sin(t))^2}, \frac{r \cos(t)}{(r \cos(t))^2 + (r \sin(t))^2} \right) \cdot (-r \sin(t), r \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} (r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto, dado que γ es una parametrización cerrada de Γ , el inciso dos del teorema 3.18 nos asegura que este campo no es conservativo en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Vale la pena aclarar que en este ejemplo lo que se prueba es que el campo definido por la función de 3.12 *no es conservativo* en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, aclaración cuya razón de ser será comprendida más adelante.

En realidad, hasta ahora no contamos con ninguna herramienta que nos permita, ya no digamos decidir, sino cuando menos sospechar, cuándo un campo cumple alguna de las tres condiciones del teorema 3.18. Si bien es cierto que la elección que hicimos de la curva Γ (y de su parametrización γ) del ejemplo anterior se podría justificar “geométricamente”³, esto es algo que en general sólo se puede hacer con algunos ejemplos. Proceder con audacia (o ingenuidad, si se prefiere) puede tener sus compensaciones, como se ilustra en el siguiente

Ejemplo 3.20 *Considere el campo definido por la función $F(x, y) = (-e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ con $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2$. ¿ F es un campo conservativo en la región U ?*

Solución. Si partimos del supuesto de que la respuesta es afirmativa, esto significa que debe existir una función $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -e^x \cos(y) \quad y \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = e^x \sin(y) \quad (3.13)$$

para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

De la primera de estas identidades concluimos entonces que

$$\varphi(x, y) = -e^x \cos(y) + g(y)$$

donde g es una función que sólo depende de la variable y . Ahora, si la expresión anterior la derivamos con respecto de la variable y tendremos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = e^x \sin(y) + g'(y)$$

³Observe el lector que en cada punto de esta curva, el campo F siempre “actúa” en la dirección del movimiento determinada por la parametrización γ (ver figura 3.19), lo cual “explica” por qué el trabajo neto realizado por el campo F a lo largo de esa curva cerrada no es cero.

y comparando con la segunda identidad de 3.13, llegamos a que

$$g'(y) = 0$$

para toda y , o lo que es lo mismo, que g debe ser una función constante. Por tanto, nuestra conclusión es que

$$\varphi(x, y) = -e^x \cos(y) + c$$

para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, con $c \in \mathbb{R}$ una constante. Como el lector podrá comprobar fácilmente, ¡cualquier función φ de este tipo cumple con ser un gradiente para nuestro campo F !

No se puede negar que la función del ejemplo anterior es muy sencilla y que el procedimiento que ahí se sigue se puede complicar si el número de variables aumenta. Sin embargo, el hecho de suponer que un campo sí es conservativo nos puede llevar a conclusiones muy interesantes.

En efecto, nótese que si un campo $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un campo conservativo en U , esto significa que existe $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad (3.14)$$

para toda $(x, y) \in U$. Si ahora también suponemos que F es una función de clase C^1 en U (como en el ejemplo anterior), las identidades anteriores nos llevan a concluir que φ es entonces una función de clase C^2 en U y justo para este tipo de funciones existe una propiedad muy importante: la propiedad de las derivadas parciales cruzadas (ver problema 4 del capítulo 2) que establece que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y)$$

para toda $(x, y) \in U$. Dado que, por las identidades 3.14, los dos elementos de la identidad anterior se pueden escribir en términos de las funciones P y Q , entonces debemos tener que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

para toda $(x, y) \in U$.

Como el lector habrá notado, la discusión anterior nos permite establecer un primer criterio para determinar si un campo F es un campo conservativo. Aún cuando lo hicimos para campos en \mathbb{R}^2 , su generalización es muy sencilla para campos en \mathbb{R}^n y así lo establecemos en la siguiente

Proposición 3.21 *Sea $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U . Si F es un campo conservativo en U entonces*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x}) \quad (3.15)$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Dem. Se deja al lector ■

La proposición anterior establece lo que se conoce como una consecuencia (o condición) necesaria del hecho de que un campo F sea un campo conservativo en una región U . Como suele suceder, este tipo de condiciones son más útiles cuando no se satisfacen. En efecto, si la identidad 3.15 no se cumple para al menos una $\hat{x} \in U$ podemos asegurar entonces que el campo F no es conservativo en U . El siguiente ejemplo ilustra esto.

Ejemplo 3.22 *Considere el campo definido por la función*

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \\ &= \left(\frac{-yz}{x^2 + y^2}, \frac{xz}{x^2 + y^2}, \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) \end{aligned}$$

con $(x, y, z) \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. ¿ F es un campo conservativo en U ?

Solución. De las tres identidades que debieran satisfacerse en caso de que este campo fuera conservativo, dos de ellas no se satisfacen para toda $(x, y, z) \in U$. En efecto

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

las cuales difieren, por ejemplo, en $(x, y, z) = (1, 0, 0) \in U$.

Análogamente

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

que también difieren en el mismo punto. Por tanto, la proposición 3.21 nos permite asegurar que el campo F no es un campo conservativo en $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

Sin duda la pregunta que surge de manera natural e inmediata es si la condición 3.15 de la proposición 3.21 también es una condición suficiente para que un campo F sea un campo conservativo en una región U , y como seguramente el lector ya se sospecha, la respuesta es negativa. Y el contraejemplo nos lo proporciona la función del ejemplo 3.19. En efecto, si tomamos

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

sabemos que este campo no es un campo conservativo en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para toda $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

¿Cuál es el problema? ¿hace falta pedir alguna condición adicional a la función F ? La respuesta a estas preguntas requiere de la introducción de otros conceptos y de algunos resultados relacionados con ellos, trabajo que haremos en la siguiente sección. Estos nuevos conceptos y resultados nos mostrarán que el problema que aparece aquí tiene que ver con la “geometría” (o topología) del dominio de F .

3.5 El rotacional en el plano

Como lo hemos hecho a lo largo de este texto, empezaremos por plantear un problema físico que, por ahora, sólo lo discutiremos para el caso del espacio de dos dimensiones.

Supongamos que tenemos un disco D de radio $r > 0$, “infinitamente delgado” (y por tanto “sin volumen”) el cual se encuentra sujeto por su centro (con un alfiler) en un punto \hat{x}_0 de un plano. Ahora, si en un punto \hat{x} del perímetro Γ del disco D (en este caso una circunferencia) aplicamos una fuerza \hat{F} , es de esperarse que dicha fuerza produzca una rotación (o un giro) del disco (ver figura 3.20).

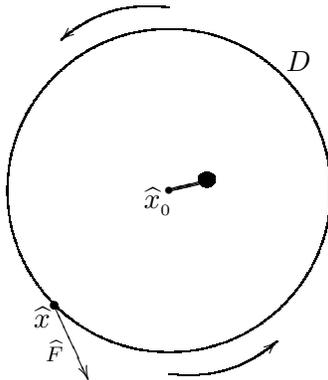


Figura 3.20: Una fuerza \hat{F} “actuando” sobre el punto \hat{x} que está en el “borde” del disco (“infinitamente delgado”) D centrado (y “sujetado” por un alfiler) en el punto \hat{x}_0

¿Cómo medimos esta rotación? Es claro que la intensidad de esta rotación dependerá de “la forma” en que la fuerza \hat{F} pegue sobre el punto $\hat{x} \in \Gamma$. Por ejemplo, si la fuerza pega en “dirección perpendicular” al disco, éste no girará, mientras que si lo hace de “dirección tangencial”, seguramente será de esta manera como se produzca la máxima rotación posible (ver figura 3.21).

Como el lector se habrá dado cuenta, cuando hablamos de “la forma” en que la fuerza \hat{F} pega sobre el punto \hat{x} , en realidad nos referimos al ángulo que forman dicha fuerza y el disco en ese

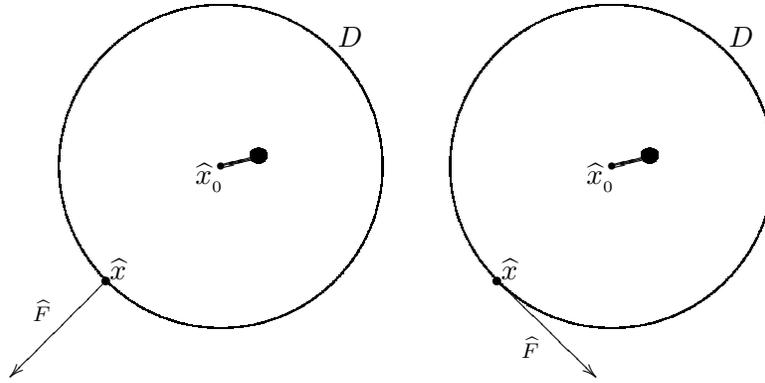


Figura 3.21: La fuerza \hat{F} “pegando” sobre el punto \hat{x} en “dirección perpendicular” a D y en “dirección tangencial” a D

punto. De hecho, si $\hat{T}_{\hat{x}}$ es un vector unitario y tangente a la circunferencia Γ en el punto \hat{x} , “la parte” de \hat{F} que realmente actúa para producir una rotación es justo la componente de \hat{F} a lo largo de $\hat{T}_{\hat{x}}$, la cual está dada por el número $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$, número que a su vez sirve para medir el ángulo entre \hat{F} y D (en \hat{x}). Además de lo anterior, nótese también que el signo de $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$ indica si la fuerza \hat{F} actúa en la dirección de $\hat{T}_{\hat{x}}$ o en la contraria, lo que sin duda será de utilidad para determinar “la dirección de la rotación” producida, la que por cierto, sólo tiene dos opciones: o rota en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, o rota en la contraria. Con respecto a esto, obsérvese que cualquier vector $\hat{T}_{\hat{x}}$ tangente a la circunferencia Γ sólo puede “apuntar” en alguna de estas dos posibles “direcciones de rotación” (o “direcciones de recorrido”) (ver figura 3.22). Con el fin de evitar ambigüedades, aquí supondremos que siempre tomamos los vectores tangentes que apuntan en la “dirección de rotación” (o “dirección de recorrido”) contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

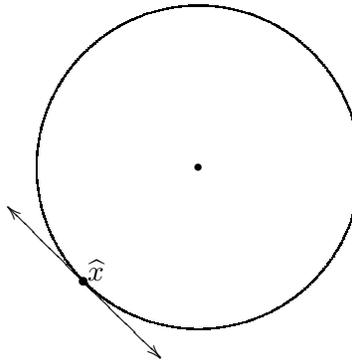


Figura 3.22: Un vector tangente al disco D en un punto \hat{x} de su “borde” siempre “apunta hacia” alguna de las dos posibles “direcciones de rotación” (o “direcciones de recorrido”) de D

Así pues, por todas estas razones, es un hecho que el número

$$\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$$

es una buena forma de medir la fuerza neta ejercida (que produce rotación) sobre el disco D al aplicar la fuerza \hat{F} en el punto \hat{x} de su perímetro Γ , y no sólo su intensidad, sino también su

dirección: si este número es negativo, significa que la fuerza ejercida actúa en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, y si es positivo, en la contraria.

Una vez que hemos determinado la fuerza neta ejercida sobre el disco D al aplicar la fuerza \hat{F} en el punto \hat{x} de su perímetro Γ , podemos determinar cuál es la intensidad del movimiento de rotación producido por la acción de dicha fuerza. Recuérdese que, como una consecuencia de la Primera Ley de Newton (o Ley de la Inercia), si en un instante dado un objeto es golpeado por una fuerza que produce una aceleración de $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$ (*unidades de longitud*)/(*unidades de tiempo*)², y después de ese instante no lo vuelve a afectar ninguna otra fuerza, entonces este objeto viajará en línea recta y a una rapidez constante de $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$ (*unidades de longitud*)/(*unidades de tiempo*), lo que a su vez significa que en una unidad de tiempo recorrerá una distancia de $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$ (*unidades de longitud*). Dado que en nuestro caso el disco D estará sujeto por su centro, para obtener el número de revoluciones (o giros) que éste realizará en una unidad de tiempo, bastará con dividir la distancia que recorrería en línea recta ($\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$) por su perímetro ($2\pi r$) de tal forma que el número

$$\frac{\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}}{2\pi r}$$

será una medida de la rotación producida por la fuerza \hat{F} sobre el disco D y su signo determinará la orientación en la que rota, en donde (como debe de ser) dicha rotación está medida en (*número de revoluciones (o giros)*)/(*unidades de tiempo*).

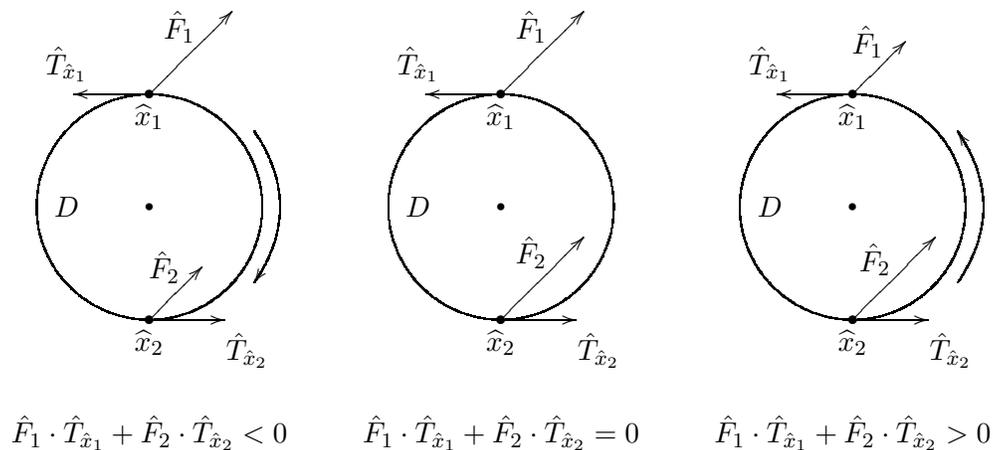


Figura 3.23: La fuerza “neta” ejercida sobre el disco D por las fuerzas \hat{F}_1 y \hat{F}_2 aplicadas (simultáneamente) en los puntos \hat{x}_1 y \hat{x}_2 (respectivamente), está “bien medida” con el número $\hat{F}_1 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_1} + \hat{F}_2 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_2}$

Si ahora tomamos un número finito de puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en Γ y suponemos que en cada uno de ellos actúa una fuerza $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$, respectivamente, el lector estará de acuerdo en que la fuerza neta ejercida sobre el disco D estará bien medida con el número

$$\hat{F}_1 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_1} + \dots + \hat{F}_k \cdot \hat{T}_{\hat{x}_k}$$

(hay muchas formas sencillas de tomar puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en Γ , y fuerzas $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$ que “experimentalmente” confirmarían esta afirmación (ver figura 3.23)), de tal manera que la magnitud del movimiento de rotación producido por dichas fuerzas estará dado por

$$\frac{\hat{F}_1 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_1} + \dots + \hat{F}_k \cdot \hat{T}_{\hat{x}_k}}{2\pi r}$$

Ahora el siguiente paso es suponer que tenemos todo un campo de fuerzas que actúa en cada punto de la circunferencia Γ y el primer problema que tenemos que resolver es el de calcular la fuerza neta ejercida sobre el disco D por dicho campo de fuerzas. Desafortunadamente, y a diferencia del caso finito, no estamos en condiciones de calcular dicha fuerza. Lo que si podemos calcular, incluso de manera muy sencilla y echando mano de uno de los conceptos que hemos definido en este mismo capítulo, es la fuerza promedio ejercida por el campo que actúa sobre la circunferencia Γ .

Supongamos que el campo de fuerzas está representado por una función continua $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $D \subset U$. Asociado a este campo, definimos el campo escalar $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: para cada $\hat{x} \in \Gamma$, hacemos

$$f(\hat{x}) = F(\hat{x}) \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$$

en donde $\hat{T}_{\hat{x}}$ es el vector unitario tangente a Γ en \hat{x} que apunta en la “dirección de recorrido” contrario al movimiento de las manecillas del reloj. De acuerdo con lo que discutimos párrafos arriba, f es justo la función tal que, para cada $\hat{x} \in \Gamma$, $f(\hat{x})$ nos asocia la fuerza neta ejercida sobre el disco D al aplicar la fuerza $F(\hat{x})$.

Ahora, si tomamos la parametrización de Γ , $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + \hat{x}_0$ con $t \in [0, 2\pi]$, que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces la función $f \circ \gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ asocia a cada valor de t el valor de la fuerza ejercida por el campo F en el punto $\gamma(t)$ ($f(\gamma(t))$), y como sabemos que el valor promedio de esta función está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) dt}{2\pi - 0} &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) r dt \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

entonces tenemos que la fuerza promedio (por unidad de distancia) ejercida por el campo F sobre la circunferencia Γ , que denotaremos por F_p , estará dada por la integral de línea del campo escalar f sobre la circunferencia Γ , dividida por la longitud de Γ . Es decir,

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|}{2\pi r} \\ &= \frac{\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|}{l(\Gamma)} \end{aligned}$$

Si volvemos a escribir explícitamente la definición de esta integral, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

de tal forma que la fuerza promedio F_p también se puede calcular como

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{2\pi r} \\ &= \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{l(\Gamma)} \end{aligned}$$

(observe que esta expresión es consistente en términos de unidades).

Hagamos un ejemplo para ilustrar lo anterior.

Ejemplo 3.23 Considere el campo $F(x, y) = (-xy, xy)$. ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por el campo F sobre un disco D de radio $r > 0$ con centro en el punto $\hat{x}_0 = (x_0, y_0)$?

Solución. En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-(r \sin(t) + y_0)(r \cos(t) + x_0), (r \sin(t) + y_0)(r \cos(t) + x_0)) \cdot (-r \sin(t), r \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2 \sin(t) \cos(t) + x_0 r \sin(t) + y_0 r \cos(t) + x_0 y_0) r \sin(t) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (r^2 \sin(t) \cos(t) + x_0 r \sin(t) + y_0 r \cos(t) + x_0 y_0) r \cos(t) dt \\ &= x_0 r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt + y_0 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt \\ &= \pi r^2 (x_0 + y_0) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$F_p = \frac{r}{2}(x_0 + y_0)$$

Observe que, si tomamos $(x_0, y_0) = (2, 0)$ y $r = 1$ entonces $F_p = 1$, mientras que si $(x_0, y_0) = (-2, 0)$ y $r = 1$ entonces $F_p = -1$.

Ya que hemos calculado la fuerza promedio ejercida por el campo F sobre el disco D , estamos en condiciones de calcular la rotación promedio producida sobre dicho disco, la cual denotaremos por $Rot_r F(\hat{x}_0)$. Como hicimos en el caso en el que sólo actuaban un número finito de fuerzas, el número

$$\begin{aligned} Rot_r F(\hat{x}_0) &= \frac{F_p}{2\pi r} \\ &= \frac{(\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma / 2\pi r)}{2\pi r} \end{aligned}$$

$$= \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{(2\pi r)^2}$$

será entonces una medida de la rotación promedio producida por el campo F , en donde dicho número indicará la cantidad de revoluciones (o giros) realizadas por unidad de tiempo.

Una vez que hemos llegado hasta aquí, lo que sigue es hacerse la siguiente pregunta: ¿existe una manera de medir la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 ? Es posible que esta pregunta cause en un principio cierto desconcierto y resulte poco intuitiva, pero ¿no es cierto acaso que esta idea tiene tanto sentido como la de calcular la velocidad de un objeto en un instante?

Con el fin de responder a esta pregunta, y como el lector seguramente ya se imaginará, si el

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{(2\pi r)^2} \quad (3.16)$$

existe, a ese valor límite lo podemos interpretar como la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 .

Obsérvese que la rotación promedio $Rot_r F(\hat{x}_0)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} Rot_r F(\hat{x}_0) &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)} \right) \end{aligned}$$

y que la existencia del límite 3.16 es equivalente a la existencia del límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)}$$

Dado que, salvo por una constante, el valor del límite anterior se puede interpretar como la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 , cuando exista dicho límite lo llamaremos *el rotacional de F en \hat{x}_0* , y lo denotaremos por $Rot F(\hat{x}_0)$. Es decir

$$Rot F(\hat{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)}$$

Más adelante mostraremos que la elección de discos centrados en \hat{x}_0 es irrelevante para la definición de este concepto y que hay otra forma de hacerlo. Sin embargo, por ahora así lo manejaremos en la siguiente

Definición 3.24 (provisional) Sean, $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua en la región U , $\hat{x}_0 \in U$, $D \subset U$ el disco de radio $r > 0$ con centro en \hat{x}_0 , y $\Gamma = Fr(D) = \partial D$. Decimos que F produce rotación en el punto \hat{x}_0 si existe

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)} \quad (3.17)$$

en donde γ es la parametrización de Γ definida como $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sen(t)) + \hat{x}_0$ con $t \in [0, 2\pi]$, que la recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj. A este valor límite le llamaremos *el rotacional de F en \hat{x}_0* y lo denotaremos por $Rot F(\hat{x}_0)$, es decir

$$\begin{aligned} Rot F(\hat{x}_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \end{aligned}$$

Si tomamos la función $F(x, y) = (-xy, xy)$ del ejemplo 3.23 y el resultado que obtuvimos ahí, se tiene que al calcular el límite 3.17 para este caso, obtenemos que

$$\text{Rot } F(x, y) = x + y$$

para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esta forma rápida y simple de calcular el rotacional de un campo no es algo que sólo suceda para este ejemplo. El resultado que vamos a dar a continuación justo lo que prueba es que si un campo $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 en su dominio, entonces el $\text{Rot } F$ tiene una expresión sencilla en términos de P y de Q .

Proposición 3.25 *Sea $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en la región U . Entonces*

$$\begin{aligned} \text{Rot } F(\hat{x}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \end{aligned}$$

para toda $\hat{x} \in U$.

Dem. Para empezar recordemos que, como F es un campo de clase C^1 en su dominio, dado $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$, por el Teorema de Taylor sabemos que

$$P(x, y) = P(\hat{x}_0) + \nabla P(\hat{x}_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + R_P(x, y)$$

y

$$Q(x, y) = Q(\hat{x}_0) + \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + R_Q(x, y)$$

para toda $(x, y) \in B_r(\hat{x}_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x - x_0, y - y_0)\| < r\} \subset U$, y en donde R_P y R_Q son tales que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_P(x, y)}{\|(x, y) - \hat{x}_0\|} = 0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_Q(x, y)}{\|(x, y) - \hat{x}_0\|} \quad (3.18)$$

Ahora, si $\gamma(t) = (r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0$ con $t \in [0, 2\pi]$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (P((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0), Q((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0)) \cdot (-r \text{sen}(t), r \cos(t)) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} r \text{sen}(t) P((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0) dt + \int_0^{2\pi} r \cos(t) Q((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0) dt \end{aligned}$$

Analizaremos por separado cada una de estas dos últimas integrales. Para la primera, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} r \text{sen}(t) P((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0) dt = \int_0^{2\pi} r \text{sen}(t) [P(\hat{x}_0) + \nabla P(\hat{x}_0) \cdot (r \cos(t), r \text{sen}(t)) + R_P(\gamma(t))] dt$$

$$\begin{aligned}
 &= rP(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \text{sen}(t)dt + r^2 \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos(t) \text{sen}(t)dt + \\
 &r^2 \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt + r \int_0^{2\pi} R_P(\gamma(t)) \text{sen}(t)dt \\
 &= \pi r^2 \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + r \int_0^{2\pi} R_P(\gamma(t)) \text{sen}(t)dt
 \end{aligned}$$

y para la segunda

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} r \cos(t)Q((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0)dt &= \int_0^{2\pi} r \cos(t) [Q(\hat{x}_0) + \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot (r \cos(t), r \text{sen}(t)) + R_Q(\gamma(t))] dt \\
 &= rQ(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos(t)dt + r^2 \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + \\
 &r^2 \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) \cos(t)dt + r \int_0^{2\pi} R_Q(\gamma(t)) \cos(t)dt \\
 &= \pi r^2 \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) + r \int_0^{2\pi} R_Q(\gamma(t)) \cos(t)dt
 \end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
 \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{r} \text{sen}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{r} \cos(t)dt \\
 &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \text{sen}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \cos(t)dt
 \end{aligned}$$

de tal forma que, como

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \text{sen}(t)dt = 0 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \cos(t)dt$$

(lo cual es una consecuencia casi directa de 3.18), tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Rot } F(\hat{x}_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \\
 &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \text{sen}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \cos(t)dt \right) \\
 &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0)
 \end{aligned}$$



Lo más interesante del resultado anterior es que la identidad

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x})$$

se sigue cumpliendo aun cuando el rotacional no se calcule con base en discos centrados en \hat{x} . Lo siguiente que vamos a mostrar es que si $\text{Rot } F(\hat{x})$ lo definimos ahora en términos de cuadrados con centro en \hat{x} , entonces la identidad anterior sigue siendo válida cuando F es nuevamente una función de clase C^1 .

Proposición 3.26 Sean, $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en la región U , y $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$. Dado $r > 0$ tal que $R_r = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subset U$, hacemos $\Gamma_r = \partial R_r = Fr(R_r)$ (la frontera de R_r) y tomamos γ_r una parametrización que la recorra una vez y en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 3.24). Entonces

$$\text{Rot } F(\hat{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)}$$

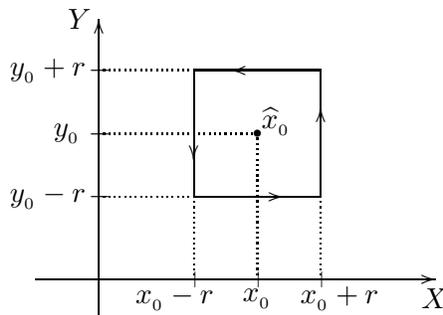


Figura 3.24: El cuadrado R_r de la proposición 3.26

Dem. Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r &= \int_{-r}^r F(x_0 + t, y_0 - r) \cdot (1, 0) dt + \int_{-r}^r F(x_0 + r, y_0 + t) \cdot (0, 1) dt \\ &\quad - \int_{-r}^r F(x_0 + t, y_0 + r) \cdot (1, 0) dt - \int_{-r}^r F(x_0 - r, y_0 + t) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_{-r}^r [Q(x_0 + r, y_0 + t) - Q(x_0 - r, y_0 + t)] dt - \int_{-r}^r [P(x_0 + t, y_0 + r) - P(x_0 + t, y_0 - r)] dt \end{aligned}$$

de tal forma que, por el Teorema del Valor Promedio, existen $\xi_r, \eta_r \in [-r, r]$ tales que

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r = 2r(Q(x_0 + r, y_0 + \xi_r) - Q(x_0 - r, y_0 + \xi_r)) - 2r(P(x_0 + \eta_r, y_0 + r) - P(x_0 + \eta_r, y_0 - r)) \quad (3.19)$$

y por el Teorema del Valor Medio existen $\xi'_r, \eta'_r \in (-r, r)$ tales que

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r = (2r)(2r) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + \xi'_r, y_0 + \xi_r) - (2r)(2r) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + \eta_r, y_0 + \eta'_r)$$

Por lo tanto, como $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son funciones continuas y $\xi'_r, \xi_r, \eta_r, \eta'_r \rightarrow 0$ si $r \rightarrow 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{(2r)(2r) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + \xi'_r, y_0 + \xi_r)}{4r^2} - \frac{(2r)(2r) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + \eta_r, y_0 + \eta'_r)}{4r^2} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + \xi'_r, y_0 + \xi_r) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + \eta_r, y_0 + \eta'_r) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \text{Rot } F(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Sin duda las dos últimas proposiciones nos conducen a replantear la definición de rotacional que dimos anteriormente. Todo parece indicar que la definición más adecuada es la siguiente.

Definición 3.27 Sea $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial P}{\partial y}$ y $\frac{\partial Q}{\partial x}$ existen para toda \hat{x} en la región U . Definimos el rotacional de F en $\hat{x} \in U$, que denotamos por $\text{Rot } F(\hat{x})$, como

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x})$$

Como es de suponerse, esta nueva operación definida para las funciones (o campos) de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 se lleva bien con la suma y multiplicación por un escalar de este tipo de funciones, lo cual establecemos en la siguiente proposición y cuya prueba se deja al lector.

Proposición 3.28 Sean, $F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Si $\text{Rot } F(\hat{x})$ y $\text{Rot } G(\hat{x})$ existen para toda $\hat{x} \in U$ entonces $\text{Rot}(\alpha F + \beta G)(\hat{x})$ existe para toda $\hat{x} \in U$ y además

$$\text{Rot}(\alpha F + \beta G)(\hat{x}) = \alpha \text{Rot } F(\hat{x}) + \beta \text{Rot } G(\hat{x})$$

3.5.1 El teorema de Green

Lo importante de todo el trabajo que realizamos antes de llegar a la definición 3.27 es que ahora sabemos que si $F = (P, Q)$ es un campo de clase C^1 en su dominio, entonces $\text{Rot } F(\hat{x})$ se puede ver como un límite (o dos, para ser más exactos). De hecho, la conclusión de la proposición 3.26 nos será de gran utilidad para deducir uno de los teoremas más importantes de este capítulo: el Teorema de Green⁴.

Antes de entrar en materia, es necesario definir con precisión ese tipo de curva que, esencialmente (es decir, “topológicamente”), “es como” una circunferencia.

Definición 3.29 Sea $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave por pedazos. Decimos que Γ es una curva cerrada simple (suave por pedazos) si existe $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrización de Γ tal que γ es cerrada ($\gamma(a) = \gamma(b)$) e inyectiva en (a, b) (o en $[a, b)$).

⁴George Green (1793-1841) matemático autodidacta inglés (su famoso teorema lo publicó en 1828), quien ingresó como estudiante a la universidad de Cambridge a la edad de 40 años.

Son ejemplos de curvas cerradas simples, el perímetro de un triángulo, el de un cuadrilátero (o en general, el perímetro de cualquier figura poligonal, que no se autointerseca), elipses, etc. (ver figura 3.25).

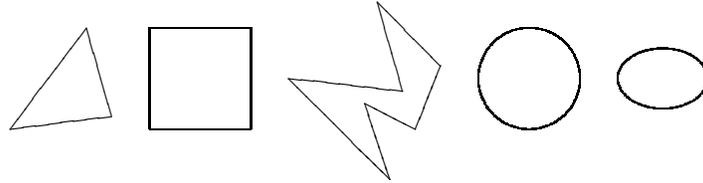


Figura 3.25: Curvas cerradas simples

Una vez establecido este concepto, procedemos a deducir el Teorema de Green. Supongamos que tenemos un campo $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en su dominio, y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una curva cerrada simple. Dado que F es de clase C^1 entonces $\text{Rot } F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ es una función continua en Ω y por lo tanto integrable sobre este conjunto. De esta forma, sabemos que

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F \approx \sum_{i=1}^k \text{Rot } F(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) = \sum_{i=1}^k \text{Rot } F(\hat{\xi}_i) \cdot \text{área}(R_i)$$

en donde $\hat{\xi}_i \in R_i$ y los R_i son los subrectángulos inducidos por una partición \mathcal{P} de algún rectángulo R que contiene al conjunto Ω y tales que $R_i \cap \Omega \neq \emptyset$ (ver figura 3.26). De hecho, como podemos suponer que tanto R como los R_i son cuadrados, si tomamos cada $\hat{\xi}_i$ como el centro de R_i , por la proposición 3.26 tenemos que

$$\text{Rot } F(\hat{\xi}_i) \cdot \text{área}(R_i) \approx \int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i$$

en donde Γ_i es el perímetro de R_i y γ_i es una parametrización de éste que lo recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por tanto

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F \approx \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i$$

y esta aproximación será mejor en la medida de que \mathcal{P} sea una partición muy fina.

Ahora obsérvese que, dado que cada una de las integrales $\int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i$ se puede descomponer como la suma de cuatro integrales (sobre cada uno de los lados del cuadrado R_i), si R_i y R_j son dos cuadrados adyacentes, entonces en la suma

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i + \int_{\Gamma_j} F \cdot d\gamma_j$$

se cancela justo la integral sobre el lado común a ambos cuadrados de tal forma que esta suma es igual a la integral de F sobre el perímetro del rectángulo $R_i \cup R_j$, recorrido en el sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 3.27).

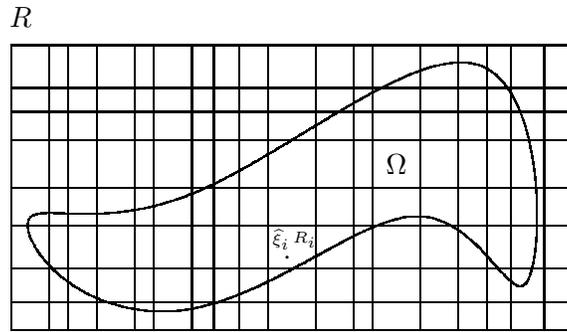


Figura 3.26: Los R_i son los subrectángulos inducidos por una partición \mathcal{P} de algún rectángulo R que contiene al conjunto Ω y tales que $R_i \cap \Omega \neq \emptyset$

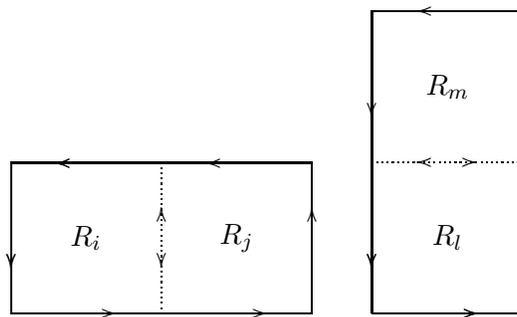


Figura 3.27: Las integrales sobre el lado común de dos subrectángulos adyacentes R_i y R_j se cancelan ya que se recorre en sentidos opuestos

Si este proceso de “cancelación” de integrales sobre lados adyacentes lo hacemos para todos los R_i , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i = \int_{\tilde{\Gamma}} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

en donde $\tilde{\Gamma}$ es una curva poligonal de lados paralelos a los ejes y $\tilde{\gamma}$ es una parametrización de ésta que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver figura 3.28).

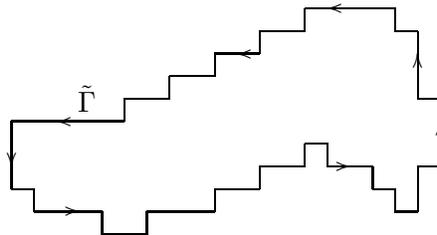


Figura 3.28: La curva $\tilde{\Gamma}$

Lo mejor de todo esto es que, si los cuadrados R_i son muy pequeños (es decir, la partición \mathcal{P} es

muy fina) entonces $\tilde{\Gamma} \approx \Gamma = \partial\Omega$ y por lo tanto

$$\int_{\tilde{\Gamma}} F \cdot d\tilde{\gamma} \approx \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

en donde γ es una parametrización de $\Gamma = \partial\Omega$ que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver figura 3.29).

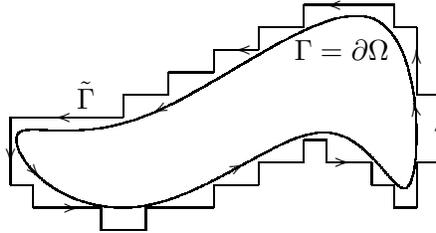


Figura 3.29: Las curvas $\tilde{\Gamma}$ y $\Gamma = \partial\Omega$ se “parecen”

Todas estas identidades y aproximaciones sugieren que

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

¡y esto es justo lo que asegura el Teorema de Green!

Formularemos el Teorema de Green en los mismos términos en que acabamos de deducirlo, aun cuando la prueba sólo la haremos para cierto tipo de regiones Ω .

Teorema 3.30 (de Green) Sean, $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $\Gamma = \partial\Omega = \text{Fr}(\Omega)$ es una curva cerrada simple y $\Omega \cup \Gamma \subset U$. Entonces

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

donde γ es una parametrización de Γ que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Dem. Haremos esta prueba para el caso en que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sea una región tipo I y tipo II, simultáneamente. Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

analizaremos cada una de estas integrales por separado.

Dado que Ω es una región tipo I, sabemos que existen $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b (P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x))) dx \end{aligned}$$

Por otra parte, nótese que $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + (-\gamma_3) + (-\gamma_4)$, con $\gamma_1, \gamma_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas como $\gamma_1(x) = (x, \alpha(x))$, $\gamma_3(x) = (x, \beta(x))$, y $\gamma_2(x) = (b, x)$ con $x \in [\alpha(b), \beta(b)]$, $\gamma_4(x) = (a, x)$ con $x \in [\alpha(a), \beta(a)]$, es una parametrización de $\Gamma = \partial\Omega$ que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, de tal forma que si consideramos el campo $(P, 0)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma = \partial\Omega} (P, 0) \cdot d\gamma &= \int_{\Gamma_1} (P, 0) \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (P, 0) \cdot d\gamma_2 - \int_{\Gamma_3} (P, 0) \cdot d\gamma_3 - \int_{\Gamma_4} (P, 0) \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_a^b (P(x, \alpha(x)), 0) \cdot (1, \alpha'(x)) dx + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} (P(b, x), 0) \cdot (0, 1) dx \\ &\quad - \int_a^b (P(x, \beta(x)), 0) \cdot (1, \beta'(x)) dx - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} (P(a, x), 0) \cdot (0, 1) dx \\ &= \int_a^b P(x, \alpha(x)) dx - \int_a^b P(x, \beta(x)) dx \\ &= - \int_a^b (P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x))) dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

donde $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 son los cuatro subarcs en que se subdivide a $\Gamma = \partial\Omega$ y que están parametrizados por $\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3$ y $-\gamma_4$, respectivamente (ver figura 3.30).

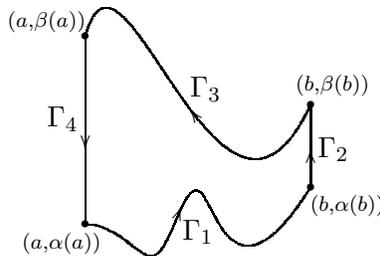


Figura 3.30: $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ y Γ_4 son los cuatro subarcs en que se subdivide a $\Gamma = \partial\Omega$

Si ahora usamos el hecho de que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ también es una región tipo II, por un procedimiento análogo al anterior se prueba que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} (0, Q) \cdot d\gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} (0, Q) \cdot d\gamma + \int_{\Gamma=\partial\Omega} (P, 0) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} ((0, Q) + (P, 0)) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} (P, Q) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma \end{aligned}$$

con lo cual termina la prueba. ■

El lector no debería de quedar muy a disgusto por la suposición que se hizo acerca de Ω en la prueba anterior. Esta no es una suposición muy restrictiva, sobre todo si se toma en cuenta que justo las regiones de tipo I y tipo II son aquellas para las cuales realmente se saben calcular integrales.

Por otra parte, también vale la pena destacar cierta analogía entre el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de Green. En efecto, si recordamos la definición provisional que dimos del rotacional de un campo F , dicho concepto se puede interpretar como una cierta “derivada”, de tal forma que integrar esta “derivada” sobre una región Ω ¡se reduce a “evaluar” (de cierta forma) la función original F sobre el borde (o frontera) $\Gamma = \partial\Omega$ de la región! (el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo clásico también se puede ver de esta forma).

Dado que el Teorema de Green relaciona una integral de línea de una función de valores vectoriales con una integral de Riemann de una función de valores reales (ambas en el plano), este teorema se suele usar para sustituir el cálculo de alguna de estas integrales en términos de la otra. El siguiente ejemplo muestra cómo se hace esto para el campo definido en el ejemplo 3.19, resultado que por cierto nos será muy útil cuando retomemos el problema de los campos conservativos.

Ejemplo 3.31 Sea $F = (P, Q) : U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

y $\Omega \subset U$ una región tal que $\Gamma = Fr(\Omega) = \partial\Omega$ es una curva cerrada simple y $(0,0) \notin \Omega \cup \Gamma$. Calcule

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

en donde γ es una parametrización de Γ que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Solución. Como se mostró anteriormente, para este campo F se tiene que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

para toda $(x,y) \in U$, de tal forma que $\text{Rot } F \equiv 0$ en la región U . Dado que la región Ω y F satisfacen las condiciones del teorema de Green, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que en particular este resultado es válido si Γ es cualquier circunferencia, o el perímetro de cualquier rectángulo, siempre y cuando el $(0,0)$ no quede “encerrado” por Γ .

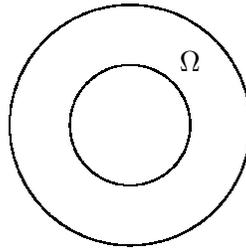


Figura 3.31: La frontera o “borde” de la región Ω está formada por dos circunferencias

El Teorema de Green se puede extender a regiones Ω cuya frontera esté formada por más de una curva cerrada simple, como sería el caso de un anillo (ver figura 3.31). Para deducir el tipo de identidad que se obtiene en este caso, podemos recurrir al mismo procedimiento que seguimos antes: si a la región Ω la “metemos” dentro de un cuadrado R y a éste lo subdividimos (o lo particionamos) en cuadrados muy pequeños, haciendo las mismas aproximaciones, sustituciones y cancelaciones que en el caso anterior, llegaremos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \cdots + \int_{\Gamma_k} F \cdot d\gamma_k \end{aligned}$$

en donde $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ son las curvas cerradas simples tales que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$, con Γ_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto) y $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ parametrizaciones de éstas, respectivamente, todas ellas recorriéndolas una vez, $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ en el sentido de las manecillas del reloj y γ_0 en el contrario (ver figura 3.32).

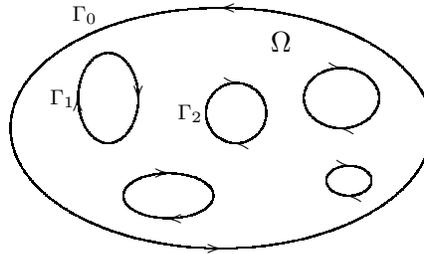


Figura 3.32: Ejemplo de región Ω sobre la que se aplica la versión general del Teorema de Green

Aun cuando formularemos esta versión más general del teorema de Green, no estamos en condiciones de dar una prueba “rigurosa” de ella. Sería necesario precisar algunos conceptos, como el de que Γ_0 es la curva “más exterior” (o que “rodea” al resto), lo cual escapa a los objetivos de este texto.

Teorema 3.32 (de Green (versión general)) Sean, $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$, con $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ curvas cerradas simples y Γ_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto). Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \dots + \int_{\Gamma_k} F \cdot d\gamma_k \end{aligned}$$

donde $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$ son parametrizaciones de $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, todas ellas recorriéndolas una vez, $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ en el sentido de las manecillas del reloj y γ_0 en el contrario.

De hecho, en la mayoría de los problemas en los que se puede aplicar la versión anterior del teorema de Green, también se pueden resolver adaptándolos a una aplicación de la versión más sencilla. El siguiente ejemplo, además de ilustrar lo anterior, también muestra en qué tipo de situaciones suele ser útil este teorema.

Ejemplo 3.33 Calcule la integral $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ donde

$$F(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

y Γ es el perímetro del cuadrado $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Solución. Lo primero que hay que decir es que, si bien intentar calcular directamente la integral de línea no es una tarea imposible, sí puede resultar bastante laboriosa. Por otra parte, la primera versión del teorema de Green no se puede aplicar en este caso puesto que R (ni ningún otro conjunto que tenga como frontera a Γ) está contenido en el dominio de F , es decir, $R \not\subset U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

El camino que seguiremos será el siguiente: tomamos $\Omega = R \setminus B_r((0, 0))$ con $0 < r < 1$ de tal forma que $\Omega \subset U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $\partial\Omega = Fr(\Omega) = \Gamma \cup C_r$, donde C_r es la circunferencia de radio r con

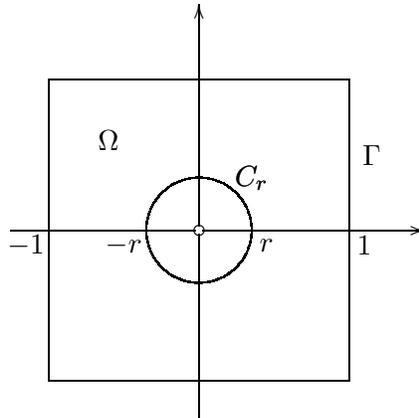


Figura 3.33: La región Ω del ejemplo 3.33

centro en el $(0,0)$ (ver figura 3.33). Dado que en este caso se tiene que $\text{Rot } F(x, y) = 0$ para toda $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si γ_r es una parametrización de C_r que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, por la versión más general del teorema de Green tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \text{Rot } F \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

como se calculó en el ejemplo 3.19.

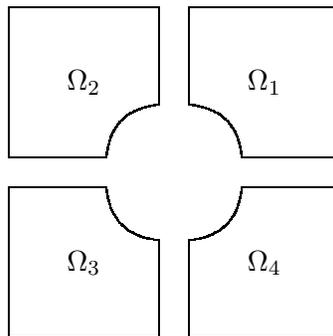


Figura 3.34: Una manera de subdividir la región Ω del ejemplo 3.33 para después aplicar (en cada pedazo) la versión más sencilla del Teorema de Green

Si no quisiéramos echar mano de la versión más general del teorema de Green, observe que la región Ω se puede subdividir en cuatro regiones $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ y Ω_4 , las que se obtienen de intersectar a Ω

con cada uno de los cuadrantes (que por cierto, cada una de estas regiones es de tipo I y tipo II, simultáneamente) (ver figura 3.34). Dado que $\text{Rot } F(x, y) = 0$ para toda $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, por el teorema de Green (la primera versión) tenemos que

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i = 0$$

en donde $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ y γ_i es una parametrización que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, para $i = 1, 2, 3$ y 4. Si ahora observamos que en cada segmento que sea común a dos de estas curvas Γ_i y Γ_j , en las correspondientes integrales dicho segmento es recorrido en sentidos contrarios (ver figura 3.35), concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} F \cdot d\gamma_3 + \int_{\Gamma_4} F \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

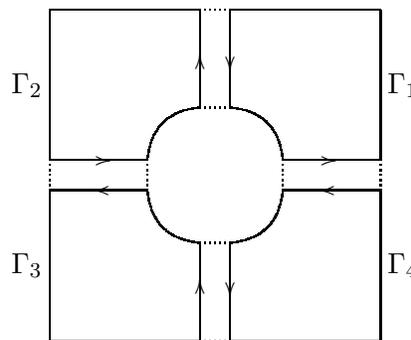


Figura 3.35: Las curvas Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 y Γ_4 del ejemplo 3.33

Como se muestra en el ejemplo anterior, la versión más general del teorema de Green suele ser útil para sustituir el cálculo de una integral de línea por otra(s) más sencilla(s) de realizar.

Otra consecuencia importante del teorema de Green es que, en el caso de un campo F de clase C^1 , el rotacional de F en un punto \hat{x} ($\text{Rot } F(\hat{x})$) se puede ver como un límite, y no sólo para circunferencias o cuadrados centrados en \hat{x} (como se hizo al inicio de esta sección) sino para regiones más generales. En la siguiente proposición establecemos este hecho y sólo es necesario recordar que, si $A \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto acotado, entonces $\text{diam}(A) = \sup \{\|\hat{x} - \hat{y}\| \mid \hat{x}, \hat{y} \in A\}$.

Proposición 3.34 Sean, $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U , $\hat{x} \in U$ y $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de subconjuntos de U , Jordan-medibles, cerrados y acotados, y tales que: $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon =$

$Fr(\Omega_\varepsilon)$ es una curva cerrada simple, $\hat{x} \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$ y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$. Entonces

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

donde γ_ε es una parametrización de Γ_ε que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

Dem. De acuerdo con el teorema de Green, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot m(\Omega_\varepsilon) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot \text{área}(\Omega_\varepsilon) \end{aligned}$$

para alguna $\hat{\xi}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ (Teorema del Valor Promedio). Como $\frac{\partial Q}{\partial x}$ y $\frac{\partial P}{\partial y}$ son continuas y $\hat{\xi}_\varepsilon \rightarrow \hat{x}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, ya que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$ y $\hat{x} \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \\ &= \text{Rot } F(\hat{x}) \end{aligned}$$

que es lo que se deseaba demostrar. ■

3.5.2 El rotacional en coordenadas polares

Una de las ventajas de poder usar una gama amplia de regiones para ver al rotacional de un campo F (en un punto \hat{x}) como un límite, es que podremos deducir cómo se calcula este valor en el caso en que el campo F esté expresado en otros sistemas coordenados. Lo siguiente que haremos será encontrar una expresión para $\text{Rot } F(\hat{x})$ suponiendo que F está dado en términos de coordenadas polares.

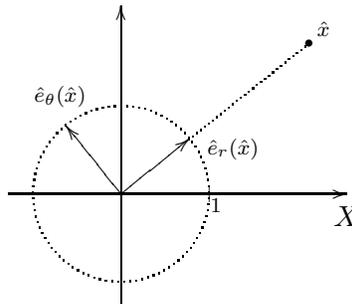


Figura 3.36: El sistema cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x})$ y $\hat{e}_\theta(\hat{x})$ asociado al punto \hat{x}

Antes de hacer cualquier cosa, es necesario aclarar lo que significa que un campo vectorial F esté dado en términos de coordenadas polares. A un punto \hat{x} en el dominio de F lo representaremos por una pareja de números (r, θ) que denotarán las coordenadas polares de \hat{x} en un cierto sistema polar $r\theta$. Al valor de F en \hat{x} (el vector $F(\hat{x})$) lo representaremos por una pareja de números $(F_r(\hat{x}), F_\theta(\hat{x}))$ que denotarán las coordenadas del vector $F(\hat{x})$ en el sistema cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x})$ y $\hat{e}_\theta(\hat{x})$, en donde $\hat{e}_r(\hat{x})$ es un vector unitario en la dirección de \hat{x} (por lo que será necesario suponer que $\hat{x} \neq \hat{0}$) y $\hat{e}_\theta(\hat{x})$ es el vector que se obtiene al girar $\hat{e}_r(\hat{x})$ un ángulo de noventa grados en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj (ver figura 3.36). De esta forma, se tiene que

$$F(\hat{x}) = F_r(\hat{x})\hat{e}_r(\hat{x}) + F_\theta(\hat{x})\hat{e}_\theta(\hat{x})$$

o

$$F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_r(\hat{x}) = F_r(\hat{x}) \quad \text{y} \quad F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x}) = F_\theta(\hat{x}) \quad (3.20)$$

Es importante destacar que en el sistema cartesiano XY asociado al sistema polar $r\theta$ (aquel cuyo eje real positivo coincide con el eje polar) el vector $\hat{e}_r(\hat{x})$ tiene coordenadas $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ y el vector $\hat{e}_\theta(\hat{x})$ coordenadas $(-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$ (ver figura 3.37). Dado que el punto \hat{x} está representado por sus coordenadas polares (r, θ) , F_r y F_θ son funciones (de valores reales) de las variables r y θ .

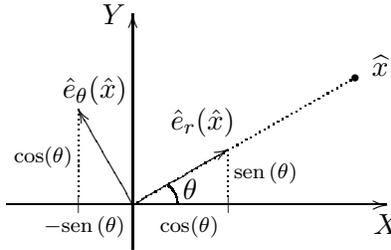


Figura 3.37: Las coordenadas de los vectores $\hat{e}_r(\hat{x})$ y $\hat{e}_\theta(\hat{x})$ en el sistema cartesiano XY asociado están dadas por $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ y $(-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$, respectivamente

Por cierto, suponer que un campo que está dado en términos de coordenadas polares cumple con estas características, no es una ocurrencia o un mero capricho. Estas características están justificadas en el siguiente hecho. Los campos vectoriales más comunes son aquellos que se obtienen como el gradiente de una función $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Ahora, si esta función está dada en términos de las coordenadas polares (r, θ) de \hat{x} , ¿cómo obtenemos una expresión para el campo $F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x})$?

Dada la función φ , las derivadas que podemos calcular en cada punto $\hat{x} \in U$ son precisamente $\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\hat{x})$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\hat{x})$, por lo que vale la pena recordar qué relación tienen con el $\nabla\varphi(\hat{x})$.

De la definición de $\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\hat{x})$ se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(\hat{x}) &= \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(r+h, \theta) - \varphi(r, \theta)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_r(\hat{x})) - \varphi(\hat{x})}{h} \\ &= D_{\hat{e}_r(\hat{x})}\varphi(\hat{x}) \\ &= \nabla\varphi(\hat{x}) \cdot \hat{e}_r(\hat{x}) \end{aligned}$$

donde $D_{\hat{e}_r(\hat{x})}\varphi(\hat{x})$ representa la derivada direccional de φ en \hat{x} en la dirección del vector $\hat{e}_r(\hat{x})$.

Por otra parte, si consideramos la función $g(h) = (r \cos(\theta + h), r \operatorname{sen}(\theta + h))$ (o $g(h) = (r, \theta + h)$ si la expresamos en coordenadas polares) y la componemos con la función φ , tenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g)'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi \circ g)(0 + h) - (\varphi \circ g)(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(g(h)) - \varphi(g(0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(r, \theta + h) - \varphi(r, \theta)}{h} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) \end{aligned}$$

de tal forma que, por la regla de la cadena obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) &= (\varphi \circ g)'(0) \\ &= \nabla \varphi(g(0)) \cdot g'(0) \\ &= \nabla \varphi(\hat{x}) \cdot (-r \operatorname{sen}(\theta), r \cos(\theta)) \\ &= \nabla \varphi(\hat{x}) \cdot (r \hat{e}_\theta(\hat{x})) \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) = \nabla \varphi(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x})$$

Por tanto

$$\begin{aligned} F(\hat{x}) &= \nabla \varphi(\hat{x}) \\ &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}(\hat{x}) \right) \hat{e}_r(\hat{x}) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) \right) \hat{e}_\theta(\hat{x}) \end{aligned}$$

Esto prueba que, dada φ , lo que podemos calcular en cada punto $\hat{x} \in U$ son justo las coordenadas del $\nabla \varphi(\hat{x})$ en el sistema coordenado cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x})$ y $\hat{e}_\theta(\hat{x})$, y esto es lo que justifica la forma en que supondremos que están dados los campos vectoriales en coordenadas polares.

Una vez aclarado lo anterior, procederemos a calcular $\operatorname{Rot} F(\hat{x})$ para un campo $F = (F_r, F_\theta) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 que está dado en términos de coordenadas polares. Sea $\hat{x}_0 \in U$ tal que sus coordenadas polares son (r_0, θ_0) . Dado $\varepsilon > 0$ definimos

$$\Omega_\varepsilon = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0 - \varepsilon \leq r \leq r_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \varepsilon\}$$

en donde (r, θ) representa coordenadas polares (ver figura 3.38). Observe que Ω_ε cumple con las condiciones de la proposición 3.34 (y que además siempre se puede descomponer en una unión finita de regiones que son tipo I y tipo II, simultáneamente), por lo que podemos asegurar que

$$\operatorname{Rot} F(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\operatorname{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

Para calcular $\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon$, subdividimos a la curva Γ_ε en los segmentos Γ_1, Γ_3 y en los subarcos Γ_2, Γ_4 y los parametrizamos por

$$\gamma_1(t) = (t \cos(\theta_0 - \varepsilon), t \operatorname{sen}(\theta_0 - \varepsilon)) \quad \text{con } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$

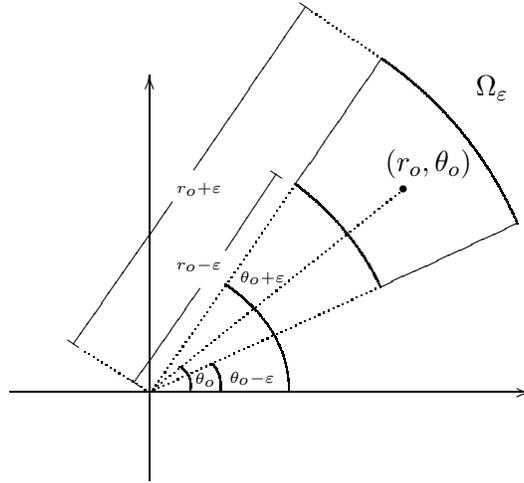


Figura 3.38: La región Ω_ε

$$\begin{aligned}\gamma_2(t) &= ((r_0 + \varepsilon) \cos(t), (r_0 + \varepsilon) \operatorname{sen}(t)) && \text{con } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \\ \gamma_3(t) &= (t \cos(\theta_0 + \varepsilon), t \operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon)) && \text{con } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \\ \gamma_4(t) &= ((r_0 - \varepsilon) \cos(t), (r_0 - \varepsilon) \operatorname{sen}(t)) && \text{con } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]\end{aligned}$$

respectivamente, de modo que

$$\begin{aligned}\gamma_1'(t) &= (\cos(\theta_0 - \varepsilon), \operatorname{sen}(\theta_0 - \varepsilon)) = \hat{e}_r(\gamma_1(t)) && \text{para toda } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \\ \gamma_2'(t) &= (-(r_0 + \varepsilon) \operatorname{sen}(t), (r_0 + \varepsilon) \cos(t)) = (r_0 + \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_2(t)) && \text{para toda } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \\ \gamma_3'(t) &= (\cos(\theta_0 + \varepsilon), \operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon)) = \hat{e}_r(\gamma_3(t)) && \text{para toda } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon] \\ \gamma_4'(t) &= (-(r_0 - \varepsilon) \operatorname{sen}(t), (r_0 - \varepsilon) \cos(t)) = (r_0 - \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_4(t)) && \text{para toda } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]\end{aligned}$$

Por tanto, si hacemos $\gamma_\varepsilon = \gamma_1 + \gamma_2 + (-\gamma_3) + (-\gamma_4)$ tenemos que

$$\begin{aligned}& \int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon \\ &= \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma_2 - \int_{\Gamma_3} F \cdot d\gamma_3 - \int_{\Gamma_4} F \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt - \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) dt - \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_4(t)) \cdot \gamma_4'(t) dt \\ &= \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_1(t)) \cdot \hat{e}_r(\gamma_1(t)) dt + \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_2(t)) \cdot ((r_0 + \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_2(t))) dt - \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_3(t)) \cdot \hat{e}_r(\gamma_3(t)) dt \\ &\quad - \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_4(t)) \cdot ((r_0 - \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_4(t))) dt\end{aligned}$$

Ahora, si usamos las identidades 3.20, escribimos a los puntos $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, $\gamma_4(t)$ en términos de sus coordenadas polares (es decir, $\gamma_1(t) = (t, \theta_0 - \varepsilon)$, $\gamma_2(t) = (r_0 + \varepsilon, t)$, $\gamma_3(t) = (t, \theta_0 + \varepsilon)$ y

$\gamma_4(t) = (r_0 - \varepsilon, t)$ ⁽⁵⁾, y llamamos g a la función de las variables polares (r, θ) definida como $g(r, \theta) = rF_\theta(r, \theta)$, tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon \\ &= - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} (F_r(\gamma_3(t)) - F_r(\gamma_1(t))) dt + \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} ((r_0 + \varepsilon)F_\theta(\gamma_2(t)) - (r_0 - \varepsilon)F_\theta(\gamma_4(t))) dt \\ &= - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} (F_r(t, \theta_0 + \varepsilon) - F_r(t, \theta_0 - \varepsilon)) dt + \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} ((r_0 + \varepsilon)F_\theta(r_0 + \varepsilon, t) - (r_0 - \varepsilon)F_\theta(r_0 - \varepsilon, t)) dt \\ &= - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} (F_r(t, \theta_0 + \varepsilon) - F_r(t, \theta_0 - \varepsilon)) dt + \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} (g(r_0 + \varepsilon, t) - g(r_0 - \varepsilon, t)) dt \end{aligned}$$

Así, por el Teorema del Valor Promedio, existen $\theta_\varepsilon \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ y $r_\varepsilon \in (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$ tales que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon = -2\varepsilon (F_r(r_\varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) - F_r(r_\varepsilon, \theta_0 - \varepsilon)) + 2\varepsilon (g(r_0 + \varepsilon, \theta_\varepsilon) - g(r_0 - \varepsilon, \theta_\varepsilon))$$

y por el Teorema del Valor Medio, existen $\theta'_\varepsilon \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$ y $r'_\varepsilon \in (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$ tales que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon = -(2\varepsilon)(2\varepsilon) \frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon) + (2\varepsilon)(2\varepsilon) \frac{\partial g}{\partial r}(r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$$

de modo que, como $\frac{\partial F_r}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial r}$ son continuas y $(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon), (r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \rightarrow (r_0, \theta_0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Rot } F(r_0, \theta_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} & (3.21) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon(r_0 + \varepsilon)^2 - \varepsilon(r_0 - \varepsilon)^2} \left(-(2\varepsilon)(2\varepsilon) \frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon) + (2\varepsilon)(2\varepsilon) \frac{\partial g}{\partial r}(r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r_0} \left(-\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon) + \frac{\partial g}{\partial r}(r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{1}{r_0} \left(-\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) + \frac{\partial g}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right) \\ &= \frac{1}{r_0} \left(-\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) + \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right) \\ &= \frac{\partial F_\theta}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{1}{r_0} F_\theta(r_0, \theta_0) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \end{aligned}$$

⁵Sin duda hacer esto se puede ver como un abuso de notación puesto que párrafos arriba se escribió que estos mismos puntos $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t)$ eran iguales a otras parejas de números. Esto se puede “resolver” si justo los pensamos como puntos del plano. En general, si \hat{x} es un punto del plano y establecemos un sistema coordenado cartesiano XY (en el que, por cierto, el origen no está en \hat{x}), el punto \hat{x} se puede designar por dos parejas de números asociadas al mismo sistema coordenado XY ; una correspondiente a las coordenadas cartesianas (digamos (x, y)) y otra a las coordenadas polares (digamos (r, θ)). De esta forma, escribir que $\hat{x} = (x, y)$ ó $\hat{x} = (r, \theta)$ no debiera causar confusión, siempre y cuando se aclare de qué coordenadas estamos hablando.

Aun cuando los cálculos que acabamos de hacer fueron un poco más extensos que los que hicimos en la prueba de la proposición 3.26 (ahora fuimos más específicos con las parametrizaciones que usamos), seguramente el lector se ha percatado de la similitud que hay entre ellos. De hecho vale la pena resaltar que, mientras en la proposición 3.26 usamos los rectángulos R_r acotados por las rectas cuyas ecuaciones cartesianas están dadas por $x = x_0 - r$, $x = x_0 + r$, $y = y_0 - r$ y $y = y_0 + r$, en lo que acabamos de hacer usamos las regiones Ω_ε acotadas por las curvas cuyas ecuaciones polares están dadas por $r = r_0 - \varepsilon$, $r = r_0 + \varepsilon$, $\theta = \theta_0 - \varepsilon$ y $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. ¿Está clara la analogía?

Antes de pasar al último tema de esta sección, veremos un ejemplo de cómo se usa el cálculo que acabamos de hacer.

Ejemplo 3.35 Sea $F : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido en coordenadas polares como $F(r, \theta) = (f(r), 1/r)$, con $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 . Calcular $\text{Rot } F(r_0, \theta_0)$ para todo $(r_0, \theta_0) \in U$.

Solución. En este caso tenemos que $F_r(r, \theta) = f(r)$ y $F_\theta(r, \theta) = 1/r$, de tal forma que, de acuerdo a lo que obtuvimos en 3.21, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Rot } F(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial F_\theta}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{1}{r_0} F_\theta(r_0, \theta_0) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \\ &= -\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

¡Si $f \equiv 0$, compare con el campo del ejemplo 3.19!

3.6 La divergencia en el plano

En esta sección introduciremos el concepto de divergencia de un campo $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, concepto que motivaremos a partir del siguiente problema. Supongamos ahora que F representa al campo de velocidades de un fluido en un cierto instante; es decir, si $\hat{x} \in U$ es un punto por el cual pasa el fluido, entonces $F(\hat{x})$ representará la velocidad con la que “viaja el fluido” (o una “molécula” o porción muy pequeña de éste) en ese punto (y en ese instante).

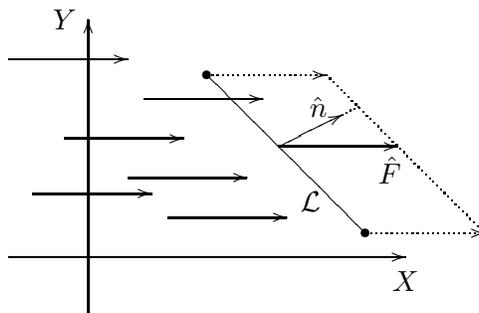


Figura 3.39: Si el fluido tiene una velocidad constante \hat{F} , la zona “cubierta” por éste al pasar durante una unidad de tiempo a través de un segmento \mathcal{L} , tiene la forma de un paralelogramo cuya área está dada por $(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{longitud}(\mathcal{L})$

Empecemos por suponer también que F es constante, es decir, que $F(\hat{x}) = \hat{F}$ para toda \hat{x} . Ahora, si colocamos un segmento de recta \mathcal{L} por donde pasa el fluido y elegimos un vector \hat{n} que apunte en una dirección normal (de las dos posibles) a \mathcal{L} , nuestro primer problema será encontrar

una forma de medir qué tanto se “expandirá” el fluido a través de \mathcal{L} en la dirección de \hat{n} en una unidad de tiempo. Sin duda una muy buena manera de medir esta “expansión” es por medio del área de la zona “cubierta” por el fluido después de que se le deja “fluir” a través del segmento \mathcal{L} durante una unidad de tiempo. Bajo el supuesto que estamos haciendo de que nuestro fluido tiene una velocidad constante, es “intuitivamente” claro que la zona “cubierta” en este caso por el fluido coincide con un paralelogramo, como se muestra en la figura 3.39.

Si el vector \hat{F} “apunta” hacia el mismo “lado” que \hat{n} , sabemos que el área de este paralelogramo está dada por $(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{longitud}(\mathcal{L})$, en donde $\hat{F} \cdot \hat{n}$ nos da la altura de dicho paralelogramo. De hecho, este último número también se puede interpretar como una medida de qué tanto “cruza el vector \hat{F} al segmento \mathcal{L} ”. Nótese que, si \hat{F} tiene una dirección muy parecida a la del segmento \mathcal{L} , en cuyo caso nuestra intuición nos dice que el vector \hat{F} lo “cruza poco”, justo este número es pequeño, siendo igual a cero cuando \hat{F} es paralelo a \mathcal{L} , lo que concuerda con la noción intuitiva de que en esa posición \hat{F} no “cruza” a \mathcal{L} . Por lo que se refiere al signo de $\hat{F} \cdot \hat{n}$, éste también proporciona información importante puesto que nos indica hacia qué lado cruza \hat{F} a \mathcal{L} : hacia el lado en que apunta \hat{n} , si es positivo, y hacia el lado contrario al que apunta \hat{n} , si es negativo.

De esta forma, resulta entonces razonable decir que el número

$$(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{longitud}(\mathcal{L}) \quad (3.22)$$

nos da la medida (en términos de un área) de qué tanto se “expande” el fluido a través de \mathcal{L} en una unidad de tiempo, y que esta “expansión” es en la dirección en la que apunta \hat{n} si el número es positivo, o en la dirección contraria a la que apunta \hat{n} , si es negativo⁶.

Una vez resuelto este problema, pasamos al siguiente. Sea $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función que representa el campo de velocidades de un fluido en un instante dado, y $\Gamma \subset U$ una curva suave. Nuestro problema ahora es encontrar una forma de medir qué tanto se “expandirá” el fluido a través de Γ (¡y en qué dirección!) en una cierta unidad de tiempo, si durante dicho lapso de tiempo conserva la misma velocidad que tiene en ese instante dado.

Tomamos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$; si denotamos por $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$ al vector que se obtiene de girar noventa grados en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj al vector $\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}$ (es decir, si $\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}$ tiene coordenadas (x, y) entonces $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$ tiene coordenadas $(y, -x)$) el número

$$\left(F(\hat{\xi}_i) \cdot \frac{(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp}{\|(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp\|} \right) \|(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})\| = F(\hat{\xi}_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$$

(con $\hat{\xi}_i$ un punto en el subarco Γ_i de Γ que une a los puntos \hat{P}_{i-1} y \hat{P}_i) es una aproximación a la “expansión” del fluido a través del subarco Γ_i en la dirección del vector $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$ (ver figura 3.40), por lo que

$$\sum_{i=1}^k F(\hat{\xi}_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp \quad (3.23)$$

será una aproximación a la “expansión neta” del fluido a través de toda la curva Γ en la dirección determinada por los vectores $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$.

⁶Nótese que, si lo que quisiéramos calcular fuera la “cantidad de fluido” que cruzaría a través de \mathcal{L} en esa unidad de tiempo, habría que multiplicar a este número por la densidad de masa del fluido. En este sentido, el número dado en 3.22 sólo es una medida de qué tanto se “expande” nuestro fluido a través de \mathcal{L} en la dirección del vector \hat{n} .

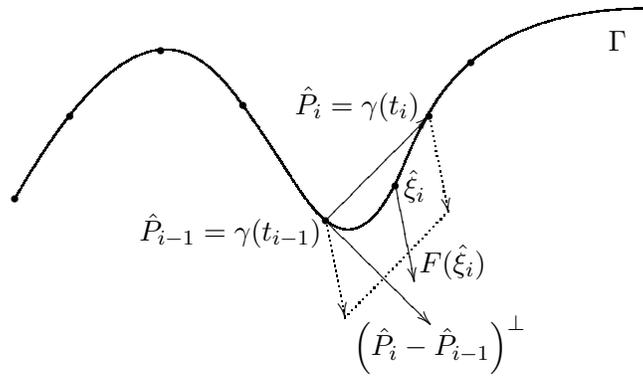


Figura 3.40: Si $\hat{\xi}_i$ es un punto en el subarco de Γ que une a los puntos \hat{P}_{i-1} y \hat{P}_i , una aproximación a la “expansión” del fluido (descrito por el campo F) a través de dicho subarco en la dirección del vector $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$ está dada por $F(\hat{\xi}_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$

Ahora, si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización de Γ que la recorre una vez, y $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$ es una partición de $[a, b]$ que se corresponde con los puntos $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$ entonces la suma 3.23 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))^\perp$$

en donde $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ es tal que $\gamma(\xi_i) = \hat{\xi}_i$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Como en ocasiones anteriores, si la partición \mathcal{P} es muy fina, además de que esta suma será una mejor aproximación a la “expansión neta” del fluido a través de toda la curva Γ en “la dirección determinada por los vectores $(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))^\perp$ ”, se tiene que $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$ (para cada $i = 1, \dots, k$) y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))^\perp &\approx \sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^\perp \\ &= \sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma'(\xi_i))^\perp (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))^\perp dt \end{aligned}$$

Por estas aproximaciones, podemos concluir que esta integral será una buena forma de medir qué tanto se “expande” un fluido cuyo campo de velocidades está descrito por F a través de la curva Γ en “la dirección determinada por los vectores $(\gamma'(t))^\perp$ ”, los que por cierto, son normales a Γ .

Antes de continuar con nuestro problema, estableceremos una notación específica para esta última integral. En general, si Γ es una curva suave por pedazos y $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de Γ , denotaremos por $\int_\Gamma F \cdot (d\gamma)^\perp$ a la integral $\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))^\perp dt$, es decir

$$\int_\Gamma F \cdot (d\gamma)^\perp = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))^\perp dt$$

en donde recuérdese que $(x, y)^\perp = (y, -x)$. Como vimos, esta integral se puede interpretar como una medida de la “expansión” producida por el campo F a través de Γ en “la dirección determinada por los vectores normales a Γ inducidos por la parametrización γ , $(\gamma'(t))^\perp$ ”.

Vale la pena hacer notar que, si $F = (P, Q)$ y $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp &= \int_{\Gamma} (P, Q) \cdot (d\gamma)^\perp \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))^\perp dt \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) dt \\ &= \int_a^b (-Q(\gamma(t)), P(\gamma(t))) \cdot (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) dt \\ &= \int_{\Gamma} (-Q, P) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} (-F)^\perp \cdot d\gamma \end{aligned}$$

Una vez resuelto este problema, pasamos al siguiente. Sean $\hat{x}_0 \in U$ y $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; la pregunta ahora es: ¿existe una manera de medir que tanto se tiende a “expandir” alrededor de \hat{x}_0 (en un instante dado) un fluido cuyo campo de velocidades está descrito por F ?

Con el fin de responder a esta pregunta, tomemos Γ_r ($r > 0$) la circunferencia de radio r con centro en \hat{x}_0 y γ_r una parametrización de Γ_r que la recorre una vez y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (ver figura 3.41). Obsérvese que en este caso, los vectores $(\gamma'_r(t))^\perp$ siempre apuntan hacia “afuera” de la circunferencia Γ_r , de tal forma que el signo de la integral $\int_{\Gamma_r} F \cdot (d\gamma_r)^\perp$ tiene la siguiente interpretación: si es positivo, significa que la “expansión hacia afuera” de la circunferencia fue mayor que la “expansión hacia adentro”, mientras que si es negativo, significa que la “expansión hacia adentro” de la circunferencia fue mayor que la “expansión hacia afuera”.

Una vez aclarado lo anterior, tenemos entonces que la integral $\int_{\Gamma_r} F \cdot (d\gamma_r)^\perp$ es una medida de la “expansión” (dada en términos de un área) producida por el campo de velocidades F a través de la circunferencia Γ_r , de tal forma que el cociente

$$\frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot (d\gamma_r)^\perp}{\pi r^2} \tag{3.24}$$

se puede interpretar como la “expansión” promedio producida por F a través del disco de radio r con centro en \hat{x}_0 . Como seguramente el lector ya sospecha, si el cociente de arriba tiene límite cuando $r \rightarrow 0$, a este valor límite se le podrá considerar como la “expansión” producida por F en el punto \hat{x}_0 .

Dado que

$$\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp = \int_{\Gamma} (-F)^\perp \cdot d\gamma$$

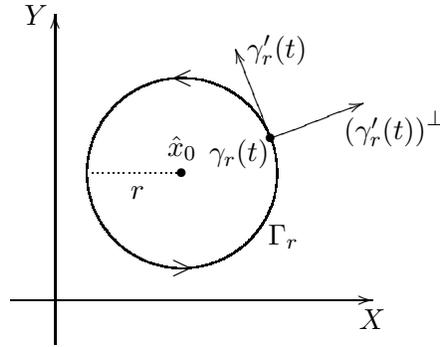


Figura 3.41: Si Γ_r es la circunferencia de radio r con centro en \hat{x}_0 y γ_r una parametrización que la recorre una vez y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, los vectores $(\gamma'_r(t))^\perp$ siempre apuntan hacia “afuera” de la circunferencia Γ_r .

para cualquier curva suave por pedazos Γ , y que a estas alturas contamos con herramientas tan importantes (y potentes) como el Teorema de Green, es fácil mostrar que si la función $F = (P, Q)$ que describe al campo de velocidades es de clase C^1 (en su dominio U) entonces el cociente 3.24 siempre tiene límite. Más aún, en la siguiente proposición mostraremos que dicho cociente tiene límite incluso para regiones más generales que los discos con centro en el punto \hat{x}_0 .

Proposición 3.36 Sean, $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U , $\hat{x}_0 \in U$ y $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de regiones contenidas en U , Jordan-medibles, cerradas y acotadas, y tales que: $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon = Fr(\Omega_\varepsilon)$ es una curva cerrada simple, $\hat{x}_0 \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$ y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$. Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

existe y además

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0)$$

Dem. Dado que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp = \int_{\Gamma_\varepsilon} (-F)^\perp \cdot d\gamma_\varepsilon$$

y que el campo $(-F)^\perp$ también es de clase C^1 en U , por la proposición 3.34 se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} (-F)^\perp \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} \\ &= \text{Rot}((-F)^\perp)(\hat{x}_0) \\ &= \text{Rot}(-Q, P)(\hat{x}_0) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

■

Como es de suponerse, la proposición anterior nos da la pauta para definir el concepto de *divergencia* de un campo $F = (P, Q)$.

Definición 3.37 Sea $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x}$ y $\frac{\partial Q}{\partial y}$ existen para toda \hat{x} en la región U . Definimos la divergencia de F en $\hat{x} \in U$, que denotamos por $\operatorname{div} F(\hat{x})$, como

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x})$$

Aun cuando el concepto de divergencia no lo definimos como un límite (ni siquiera provisionalmente, tal como sucedió en el caso del rotacional), es importante hacer notar que cuando $F = (P, Q)$ sea de clase C^1 en su dominio, la $\operatorname{div} F(\hat{x})$ sí se puede ver como un límite, el cual tiene una interpretación muy específica. De hecho, la proposición anterior se puede reformular en términos de este concepto de la siguiente manera:

Proposición 3.38 Sean, $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en U , $\hat{x}_0 \in U$ y $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de regiones contenidas en U , Jordan-medibles, cerradas y acotadas, y tales que: $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon = \operatorname{Fr}(\Omega_\varepsilon)$ es una curva cerrada simple, $\hat{x}_0 \in \operatorname{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$ y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$. Entonces

$$\operatorname{div} F(\hat{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma)^\perp}{\operatorname{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

La identidad que se dio párrafos arriba, en la que se establece que si $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp = \int_{\Gamma} (-F)^\perp \cdot d\gamma$$

es la base sobre la cual se deduce la estrecha relación que hay entre la divergencia del campo $F = (P, Q)$ y el rotacional del campo $(-F)^\perp = (-Q, P)$, relación que por cierto ya usamos en la prueba de la proposición 3.36 y que de acuerdo con nuestra notación se escribe como

$$\operatorname{div}(P, Q)(\hat{x}) = \operatorname{Rot}(-Q, P)(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$.

Aunque la identidad anterior no se da para el mismo campo (lo cual es muy importante tenerlo siempre muy presente), y que físicamente los conceptos de divergencia y rotacional no son lo mismo, desde un punto de vista puramente matemático sí da lugar a que, para cualquier resultado que sea válido para el rotacional, exista uno casi igual para la divergencia. Tan es así, que el Teorema de Green se podría reformular usando el concepto de $\operatorname{div} F$ y la integral $\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp$ (lo que se deja como un problema para el lector) y a esta sección se le pudo haber titulado “Divergencia y rotacional en el plano”. Es por esta razón que ya no tenemos mucho más que agregar con relación al concepto de divergencia.

Sin embargo, las cosas serán diferentes en el espacio. Ambos conceptos se van a generalizar para campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 y mientras que para estos campos la divergencia seguirá siendo una cantidad escalar, el rotacional de uno de ellos ya no se definirá por medio de un sólo número. Afortunadamente para definir el concepto de rotacional para campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 no hace falta más que el concepto de integral de línea de funciones de valores vectoriales que hemos desarrollado en este capítulo, por lo que procederemos a hacerlo en la siguiente sección. Para definir la divergencia de campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 habrá que esperar el desarrollo del concepto de integral de superficie, lo que haremos en el siguiente capítulo.

3.7 El rotacional en el espacio

Motivaremos el concepto de rotacional para un campo $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ planteando el mismo problema que para el caso de \mathbb{R}^2 sólo que con una condición adicional.

Sea $\hat{x}_0 \in U$ y $D_r \subset U$ un disco (infinitamente delgado, es decir “sin volumen”) de radio $r > 0$ cuyo centro está “sujeto” en el punto \hat{x}_0 . Si una fuerza \hat{F} golpea a este disco en un punto \hat{x} de su borde Γ_r (una circunferencia de radio r con centro en \hat{x}_0) el movimiento producido sobre el disco D_r puede ser muy difícil de describir (¡y mucho más de medir!). Por esta razón, vamos a suponer adicionalmente que el disco D_r se encuentra confinado en un plano P del cual no puede salirse. A este plano P lo describiremos por medio de un vector (unitario) normal a él que denotaremos por \hat{n} (ver figura 3.42).

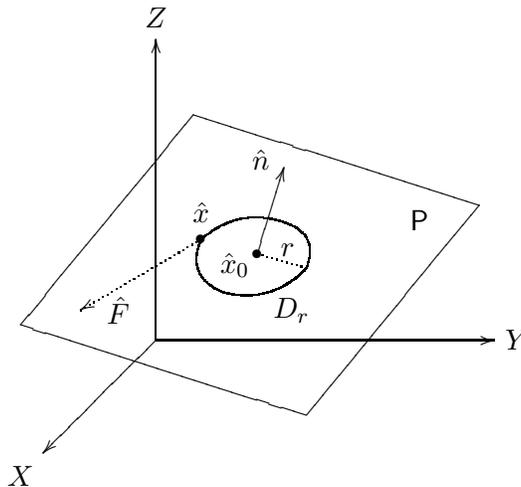


Figura 3.42: Una fuerza \hat{F} golpea en el punto \hat{x} que pertenece al borde de la circunferencia D_r (de radio r y centro en \hat{x}_0) la cual se encuentra confinada al plano P (que pasa por \hat{x}_0 y tiene vector normal \hat{n})

En esta situación, es claro que el efecto producido sobre el disco D_r por una fuerza \hat{F} que lo golpea en un punto \hat{x} de su borde Γ_r sólo puede ser el de girar (dentro de P) o permanecer inmóvil (sin duda en este caso hay muchas más posiciones de la fuerza \hat{F} para las que no se produce ningún movimiento). Como hicimos en la sección anterior, es fácil convencerse de que el número

$$\frac{\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}}{2\pi r} \quad (3.25)$$

en donde $\hat{T}_{\hat{x}}$ es un vector tangente (unitario) a Γ_r en \hat{x} y contenido en el plano P, es una buena forma de medir la rotación producida por la fuerza \hat{F} sobre el disco D_r .

Con respecto al número dado en 3.25 hace falta hacer una precisión en cuanto a la forma de interpretar su signo. Nótese que el giro de un disco contenido en un plano P del espacio no tiene una “dirección” prestablecida y que la determinación de la “dirección” de este giro depende desde cuál de los dos “lados” (aquellos en que queda subdividido el espacio por el plano P) lo observemos (ver figura 3.43).

Afortunadamente esta situación se puede resolver con el mismo vector \hat{n} que usamos para determinar al plano P puesto que dicho vector “apunta” hacia uno de estos dos lados. En efecto, si establecemos que $\hat{T}_{\hat{x}}$ es el vector tangente (unitario) a Γ_r en \hat{x} (y contenido en el plano P) que apunta

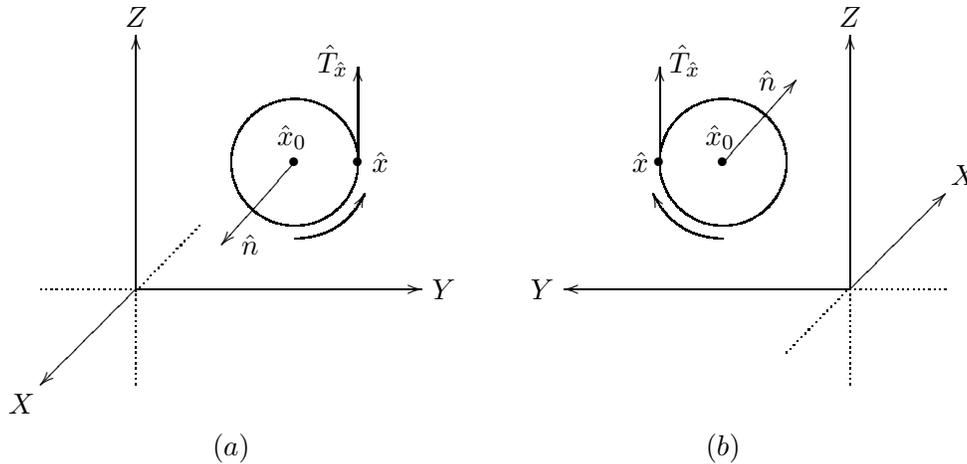


Figura 3.43: (a) Si se observa una circunferencia en el plano YZ desde el “lado” al que “apunta” el vector \hat{n} (parte positiva del eje X), el vector tangente $\hat{T}_{\hat{x}}$ “apunta” en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj; (b) si se observa desde el “lado” contrario al que “apunta” el vector \hat{n} (parte negativa del eje X), el mismo vector tangente $\hat{T}_{\hat{x}}$ “apunta” en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj

en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el “lado” al que apunta el vector \hat{n} (ver figura 3.43 (a)), entonces podremos asegurar que: si $(\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}})/2\pi r$ es positivo, se tiene que D_r gira en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, y si es negativo, entonces D_r gira en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, en ambos casos, cuando se le ve desde el “lado” al que apunta el vector \hat{n} .

Como en el caso de \mathbb{R}^2 , si ahora F representa a un campo de fuerzas que actúa sobre el disco D_r , el número dado por

$$\frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{2\pi r}$$

será el adecuado para medir la fuerza promedio ejercida por el campo F sobre el disco D_r , de tal forma que al número

$$\frac{\left(\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r / 2\pi r\right)}{2\pi r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(D_r)}$$

se le puede interpretar como la rotación promedio producida sobre el disco D_r , debida a la acción del campo F .

Con base en lo anterior, estamos en condiciones de dar la siguiente

Definición 3.39 Sean, $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua en la región U , $\hat{x}_0 \in U$, $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano tal que $\hat{x}_0 \in P$, $D_r \subset P$ el disco de radio $r > 0$ con centro en \hat{x}_0 , Γ_r la curva perímetro (o borde) de D_r y γ_r una parametrización de Γ_r que la recorre (una vez) en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le ve desde \hat{n} , un vector (unitario) normal a P . Si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(D_r)} \quad (3.26)$$

existe, definimos la rotación (con referencia al vector \hat{n}) producida por el campo F sobre el plano

P en el punto \hat{x}_0 , que denotamos por $Rot_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$, como

$$Rot_{\hat{n}}F(\hat{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(D_r)}$$

Lo siguiente que habría que hacer sería mostrar que el límite de 3.26 siempre existe si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función de clase C^1 en su dominio, y encontrar su valor. Esta tarea se dejará como un problema para el lector, y lo que aquí haremos será mostrar que ese límite también existe si en lugar de tomar los discos D_r , tomamos rectángulos $R_r \subset P$ centrados en \hat{x}_0 (ver figura 3.44). Como en el caso de \mathbb{R}^2 , lo que se espera es que ambos límites sean iguales y que su valor se pueda expresar en términos de $F = (P, Q, R)$, \hat{x}_0 y \hat{n} .

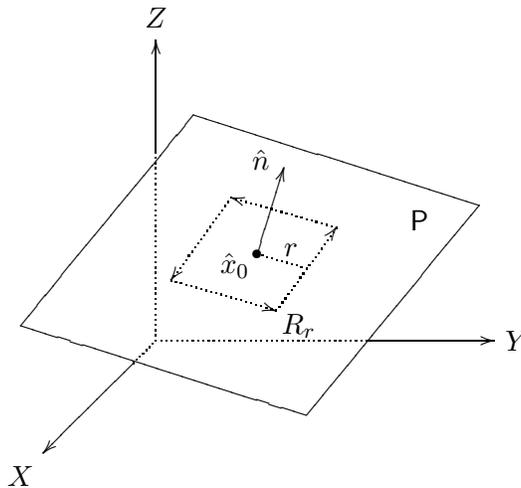


Figura 3.44: Un rectángulo R_r centrado en el punto \hat{x}_0 y contenido en el plano P

Antes de formular la proposición que contiene este resultado, necesitamos hacer algunos preparativos.

Denotemos por $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a una rotación del espacio con la propiedad de que

$$\begin{aligned} L(\hat{e}_3) &= L(0, 0, 1) \\ &= \hat{n} \end{aligned}$$

Si esta rotación está representada (en la base canónica) por la matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tendremos entonces que los vectores $L(\hat{e}_1) = L(1, 0, 0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $L(\hat{e}_2) = L(0, 1, 0) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$ y $L(\hat{e}_3) = L(0, 0, 1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$ forman una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , lo que significa que

$$\sum_{l=1}^3 a_{li}a_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3$$

y

$$\hat{n} = L(\hat{e}_3) \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
 &= L(\hat{e}_1) \times L(\hat{e}_2) \\
 &= (a_{11}, a_{21}, a_{31}) \times (a_{12}, a_{22}, a_{32}) \\
 &= (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}, a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})
 \end{aligned}$$

Dado que $\{L(x, y, 0) + \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbf{P}$ entonces el conjunto

$$R_r = \{L(x, y, 0) + \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [-r, r]\} \quad (3.28)$$

es un rectángulo contenido en \mathbf{P} y centrado en el punto \hat{x}_0 . Al borde (o perímetro) de R_r lo denotamos por Γ_r y lo subdividimos en los cuatro segmentos $\Gamma_{r,1}, \Gamma_{r,2}, \Gamma_{r,3}$, y $\Gamma_{r,4}$ a los cuales parametrizamos por las funciones

$$\begin{aligned}
 \gamma_{r,1}(t) &= L(r, t, 0) + \hat{x}_0 \\
 \gamma_{r,2}(t) &= L(t, r, 0) + \hat{x}_0 \\
 \gamma_{r,3}(t) &= L(-r, t, 0) + \hat{x}_0 \\
 \gamma_{r,4}(t) &= L(t, -r, 0) + \hat{x}_0
 \end{aligned} \quad (3.29)$$

tomando $t \in [-r, r]$ para todas ellas.

Nótese que la parametrización $\gamma_r = \gamma_{r,1} + (-\gamma_{r,2}) + (-\gamma_{r,3}) + \gamma_{r,4}$ recorre a la curva Γ_r en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, cuando a ésta se le mira desde el lado en que apunta el vector \hat{n} , y que además, por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned}
 \gamma'_{r,1}(t) &= DL(r, t, 0) \cdot (0, 1, 0)^t = M \cdot (0, 1, 0)^t = L(\hat{e}_2) \\
 \gamma'_{r,2}(t) &= DL(t, r, 0) \cdot (1, 0, 0)^t = M \cdot (1, 0, 0)^t = L(\hat{e}_1) \\
 \gamma'_{r,3}(t) &= DL(-r, t, 0) \cdot (0, 1, 0)^t = M \cdot (0, 1, 0)^t = L(\hat{e}_2) \\
 \gamma'_{r,4}(t) &= DL(t, -r, 0) \cdot (1, 0, 0)^t = M \cdot (1, 0, 0)^t = L(\hat{e}_1)
 \end{aligned}$$

Finalmente, enunciamos un lema que nos permitirá simplificar sustancialmente la prueba de la proposición que vamos a formular. En este lema y la proposición que le sigue, supondremos que $r > 0$ es tal que el rectángulo R_r (definido en 3.28) está contenido en U .

Lema 3.40 *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en U . Si $c, d \in [-r, r]$ entonces existen $\xi, \eta \in [-r, r]$ tales que*

$$f(L(r, c, 0) + \hat{x}_0) - f(L(-r, c, 0) + \hat{x}_0) = 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1)$$

y

$$f(L(d, r, 0) + \hat{x}_0) - f(L(d, -r, 0) + \hat{x}_0) = 2r \nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2)$$

Dem. Definimos $h, g : [-r, r] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $h(t) = f(L(t, c, 0) + \hat{x}_0)$ y $g(t) = f(L(d, t, 0) + \hat{x}_0)$. Por el Teorema del Valor Medio sabemos que existe $\xi, \eta \in [-r, r]$ tales que

$$\begin{aligned}
 f(L(r, c, 0) + \hat{x}_0) - f(L(-r, c, 0) + \hat{x}_0) &= h(r) - h(-r) \\
 &= 2rh'(\xi) \\
 &= 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot (DL(\xi, c, 0) \cdot (1, 0, 0)^t) \\
 &= 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot (M \cdot (1, 0, 0)^t) \\
 &= 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1)
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 f(L(d, r, 0) + \hat{x}_0) - f(L(d, -r, 0) + \hat{x}_0) &= g(r) - g(-r) \\
 &= 2rg'(\eta) \\
 &= 2r\nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot (DL(d, \eta, 0) \cdot (0, 1, 0)^t) \\
 &= 2r\nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot (M \cdot (0, 1, 0)^t) \\
 &= 2r\nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2)
 \end{aligned}$$

■

Una vez hecho todo lo anterior, formulamos la proposición que anunciamos.

Proposición 3.41 Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , y $\hat{x}_0 \in U$. Si tomamos R_r , Γ_r y γ_r como se definieron en los párrafos anteriores, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)}$$

existe.

Dem. Usando las parametrizaciones dadas por 3.29 tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r &= \int_{\Gamma_{r,1}} F \cdot d\gamma_{r,1} - \int_{\Gamma_{r,2}} F \cdot d\gamma_{r,2} - \int_{\Gamma_{r,3}} F \cdot d\gamma_{r,3} + \int_{\Gamma_{r,4}} F \cdot d\gamma_{r,4} \\
 &= \int_{-r}^r F(\gamma_{r,1}(t)) \cdot \gamma'_{r,1}(t) dt - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,2}(t)) \cdot \gamma'_{r,2}(t) dt \\
 &\quad - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,3}(t)) \cdot \gamma'_{r,3}(t) dt + \int_{-r}^r F(\gamma_{r,4}(t)) \cdot \gamma'_{r,4}(t) dt \\
 &= \int_{-r}^r F(\gamma_{r,1}(t)) \cdot L(\hat{e}_2) dt - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,2}(t)) \cdot L(\hat{e}_1) dt \\
 &\quad - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,3}(t)) \cdot L(\hat{e}_2) dt + \int_{-r}^r F(\gamma_{r,4}(t)) \cdot L(\hat{e}_1) dt \\
 &= \int_{-r}^r [F(\gamma_{r,1}(t)) - F(\gamma_{r,3}(t))] \cdot L(\hat{e}_2) dt - \int_{-r}^r [F(\gamma_{r,2}(t)) - F(\gamma_{r,4}(t))] \cdot L(\hat{e}_1) dt
 \end{aligned}$$

Dado que las funciones que aparecen en estas integrales son continuas, por el Teorema del Valor Promedio sabemos que existen $\xi_r, \eta_r \in [-r, r]$ tales que

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r = 2r ([F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r))] \cdot L(\hat{e}_2)) - 2r ([F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r))] \cdot L(\hat{e}_1))$$

Por otra parte, como $\gamma_{r,1}(\xi_r) = L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0$ y $\gamma_{r,3}(\xi_r) = L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0$, por el lema anterior (3.40) aplicado a cada una de las coordenadas del vector $F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r))$, sabemos que existen ξ_r^P, ξ_r^Q y $\xi_r^R \in [-r, r]$ tales que

$$\begin{aligned} P(L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) - P(L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla P(L(\xi_r^P, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \\ Q(L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) - Q(L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla Q(L(\xi_r^Q, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \\ R(L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) - R(L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla R(L(\xi_r^R, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \end{aligned}$$

es decir que

$$\begin{aligned} &F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r)) \\ &= 2r \left(\nabla P(L(\xi_r^P, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1), \nabla Q(L(\xi_r^Q, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1), \nabla R(L(\xi_r^R, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \right) \end{aligned}$$

Análogamente, dado que $\gamma_{r,2}(\eta_r) = L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0$ y $\gamma_{r,4}(\eta_r) = L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0$, para cada una de las coordenadas del vector $F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r))$ existen η_r^P, η_r^Q y $\eta_r^R \in [-r, r]$ tales que

$$\begin{aligned} P(L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0) - P(L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla P(L(\eta_r, \eta_r^P, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \\ Q(L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0) - Q(L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla Q(L(\eta_r, \eta_r^Q, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \\ R(L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0) - R(L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla R(L(\eta_r, \eta_r^R, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} &F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r)) \\ &= 2r \left(\nabla P(L(\eta_r, \eta_r^P, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2), \nabla Q(L(\eta_r, \eta_r^Q, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2), \nabla R(L(\eta_r, \eta_r^R, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \right) \end{aligned}$$

Si ahora observamos que $\xi_r, \eta_r, \xi_r^P, \xi_r^Q, \xi_r^R, \eta_r^P, \eta_r^Q$ y $\eta_r^R \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$ y que $L(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, como las funciones P, Q y R son de clase C^1 , tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r \left([F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r))] \cdot L(\hat{e}_2) \right)}{\text{área}(R_r)} &= (\nabla P(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1), \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1), \nabla R(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1)) \cdot L(\hat{e}_2) \\ &= a_{12}a_{11} \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{12}a_{21} \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{12}a_{31} \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ &a_{22}a_{11} \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{22}a_{21} \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{22}a_{31} \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ &a_{32}a_{11} \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{32}a_{21} \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{32}a_{31} \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r \left([F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r))] \cdot L(\hat{e}_1) \right)}{\text{área}(R_r)} &= (\nabla P(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2), \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2), \nabla R(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2)) \cdot L(\hat{e}_1) \\ &= a_{11}a_{12} \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{11}a_{22} \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{11}a_{32} \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ &a_{21}a_{12} \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{21}a_{22} \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{21}a_{32} \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ &a_{31}a_{12} \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{31}a_{22} \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{31}a_{32} \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0) \right) (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) \right) (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \\
 &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot (L(\hat{e}_1) \times L(\hat{e}_2)) \\
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot L(\hat{e}_3) \\
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot \hat{n}
 \end{aligned}$$

■

Aun cuando esta prueba estuvo un poco laboriosa, la identidad

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot \hat{n} \quad (3.30)$$

bien valió la pena todo ese trabajo. Más adelante (en el próximo capítulo) probaremos que si $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ es una familia de superficies (no necesariamente contenidas en un plano) tales que para toda $0 < \varepsilon < c$ se satisface que:

1. $\hat{x}_0 \in \Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$
2. el vector (unitario) normal a Ω_ε en el punto \hat{x}_0 siempre es \hat{n}
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$
4. el borde Γ_ε de Ω_ε (es decir, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$) es una curva cerrada simple, y
5. γ_ε es una parametrización de Γ_ε que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el lado en que apunta el vector \hat{n}

entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot \hat{n}$$

(ver figura 3.45).

Por esta razón, el vector

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right)$$

ocupa un papel muy relevante en el problema de determinar la rotación promedio producida por un campo F , motivo por el cual se le nombra y se le denota de una manera específica en la siguiente

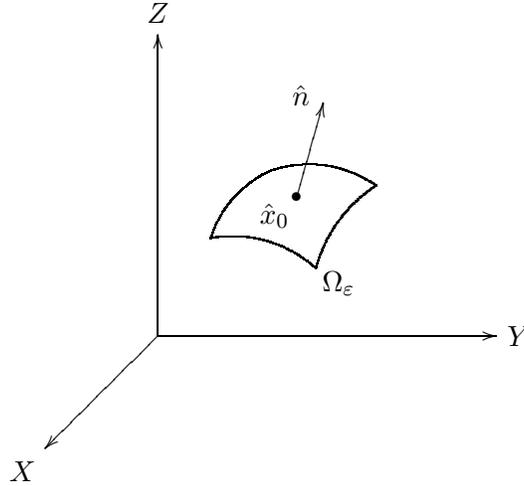


Figura 3.45: Una superficie Ω_ε tal que $\hat{x}_0 \in \Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$ y el vector (unitario) normal a Ω_ε en el punto \hat{x}_0 es \hat{n}

Definición 3.42 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}$ y $\frac{\partial R}{\partial y}$ existen para toda $\hat{x} \in U$. Definimos el rotacional de F en \hat{x} , al cual se denotará por $\mathbf{Rot}F(\hat{x})$, como el vector

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \right)$$

es decir

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \right)$$

Análogamente a lo que sucede en el caso de campos de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , esta nueva operación definida para campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 también se lleva bien con la aritmética básica de este tipo de funciones, como lo formulamos en la siguiente

Proposición 3.43 Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{Rot}F(\hat{x})$ y $\mathbf{Rot}G(\hat{x})$ existen para toda $\hat{x} \in U$.

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\mathbf{Rot}(\alpha F + \beta G)(\hat{x}) = \alpha \mathbf{Rot}F(\hat{x}) + \beta \mathbf{Rot}G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$
2. si $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 entonces $\mathbf{Rot}(fF)(\hat{x}) = f(\hat{x})\mathbf{Rot}F(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x}) \times F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$

Como es de suponerse, la prueba de esta proposición se deja al lector.

Cuando definimos el concepto de rotación puntual (promedio) producida por un campo F en un plano (definido en 3.39), mencionamos que dicha rotación puntual siempre existe si F es un campo de clase C^1 . De hecho, con base en la definición anterior podemos formular el siguiente resultado.

Proposición 3.44 Si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función de clase C^1 en U , y $\hat{x}_0 \in U$, entonces

$$\mathbf{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n}) \quad (3.31)$$

Dem. Se deja al lector (ver problema 33). ■

La identidad 3.31 nos permite dar una interpretación muy interesante del rotacional de un campo F de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 . En términos sencillos, lo que nos dice dicha identidad es que el vector rotacional de un campo F en un punto \hat{x}_0 , es decir $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$, nos indica cuál es el plano sobre el cual el campo F produce la máxima rotación puntual (promedio). Esto significa que, si tomamos un plano que contenga al punto \hat{x}_0 y sobre de éste colocamos una pequeña circunferencia C con centro en \hat{x}_0 (¡de “esas” que no tienen volumen!), entonces la rotación promedio producida por el campo F sobre la circunferencia C alcanzará su máximo valor (y girará en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), justo cuando se tome el plano que es perpendicular al vector $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$ (ver figura 3.46). Seguramente el lector recordará que esta es una propiedad muy similar a la del vector gradiente de una función f en un punto \hat{x}_0 ($\nabla f(\hat{x}_0)$) que nos indica cuál es la dirección, a partir de \hat{x}_0 , en la que la función alcanza su máxima razón de cambio.

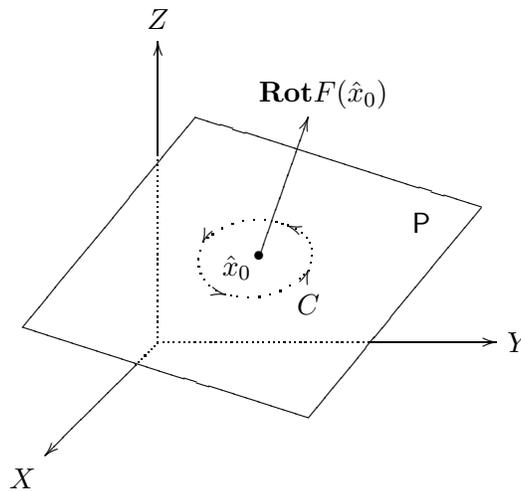


Figura 3.46: Si tomamos un plano P que contenga al punto \hat{x}_0 y sobre de éste colocamos una pequeña circunferencia C con centro en \hat{x}_0 , entonces la rotación promedio producida por el campo F sobre la circunferencia C alcanzará su máximo valor (y girará en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) justo cuando se tome el plano que es perpendicular al vector $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$

A continuación daremos un ejemplo en el que, además de mostrar cómo se calcula la rotación puntual (promedio), veremos que también se confirma la interpretación anterior.

Ejemplo 3.45 Considere el campo $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Calcule la rotación producida por el campo F en el punto $(0, 0, 0)$ sobre el plano perpendicular a un vector unitario \hat{n} , arbitrario.

Solución. Lo primero que hay que observar en este ejemplo es que el campo F representa un campo de fuerzas que siempre actúa paralelamente al plano XY , de tal forma que es de esperarse que la máxima rotación puntual (promedio) en $(0, 0, 0) = \hat{o}$ (o en cualquier otro punto) la produzca en el plano XY (o en uno paralelo a éste). De acuerdo con la definición 3.42

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}F(0, 0, 0) &= \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{o}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{o}), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{o}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{o}), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{o}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{o}) \right) \\ &= (0 - 0, 0 - 0, 1 - (-1)) \\ &= (0, 0, 2) \end{aligned}$$

de modo que, por la identidad 3.31 se tiene que

$$\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{0}) = \frac{1}{4\pi} ((0, 0, 2) \cdot \hat{n})$$

Como se puede observar, este número alcanza su máximo valor justo cuando $\hat{n} = (0, 0, 1)$ lo cual confirma lo que esperábamos.

Terminamos esta sección con un par de observaciones. La primera tiene que ver con la rotación puntual (promedio) producida por un campo F en un punto \hat{x}_0 contenido en un plano P . Como se recordará, la conveniencia de usar a un vector unitario \hat{n} no sólo estaba en el hecho de que con éste determinábamos al plano P , sino que además a través de \hat{n} podíamos establecer la dirección de la rotación producida por F . De esta forma, aún cuando los vectores \hat{n} y $-\hat{n}$ determinan al mismo plano P , si $\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$ es un número positivo (en cuyo caso sabemos que desde el lado en el que apunta el vector \hat{n} , la rotación producida por F se ve en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) se debiera tener que $\text{Rot}_{-\hat{n}}F(\hat{x}_0)$ es un número negativo (desde $-\hat{n}$ el mismo movimiento de rotación se ve en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj); y por la misma razón, si $\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$ es un número negativo, $\text{Rot}_{-\hat{n}}F(\hat{x}_0)$ tiene que ser un número positivo. Observe que la identidad 3.31 confirma esta observación puesto que de ella se deduce que

$$\text{Rot}_{-\hat{n}}F(\hat{x}_0) = -\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$$

Finalmente, aún cuando la expresión para el vector $\mathbf{Rot}F$ parece un poco elaborada, nótese que ésta se puede recordar fácilmente si notamos lo siguiente: su primera coordenada

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$$

se puede pensar como el rotacional del campo (de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2) (Q, R) considerando, a Q y R sólo como funciones de las variables y y z . Es decir, para obtener la primera coordenada de $\mathbf{Rot}F$ basta con “eliminar” la primera coordenada de F (en este caso la función P) y la primera variable (en este caso x) y calcular $\text{Rot}(Q, R)$ en términos de las variables y y z . Para la segunda coordenada de $\mathbf{Rot}F$ siga un procedimiento similar: elimine la segunda coordenada de F (en este caso Q), al campo que le queda (P, R) considérela sólo como función de las variables x y z (“elimine la segunda variable”) y después calcule

$$\begin{aligned} -\text{Rot}(P(x, z), R(x, z)) &= -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento “elimine” la tercera función coordenada de F y la tercera variable, y calcule

$$\text{Rot}(P(x, y), Q(x, y)) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

para obtener la tercera coordenada de $\mathbf{Rot}F$. En resumen, observe que se cumple la siguiente identidad

$$\mathbf{Rot}F = (\text{Rot}(Q(\cdot, y, z), R(\cdot, y, z)), -\text{Rot}(P(x, \cdot, z), R(x, \cdot, z)), \text{Rot}(P(x, y, \cdot), Q(x, y, \cdot)))$$

3.8 Campos conservativos (segunda parte)

Si bien es cierto que el concepto de rotacional, y los teoremas asociados a éste (como el Teorema de Green) son muy importantes por si mismos, también es cierto que juegan un papel muy relevante en el tema de los campos conservativos. En la sección 3.4 probamos la proposición 3.21 la cual se podría reformular para campos de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 o de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 usando el concepto de rotacional, de la siguiente forma:

Proposición 3.46 *Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U , con $n = 2$ ó $n = 3$. Si F es un campo conservativo en U entonces $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$ (si $n = 2$) o $\mathbf{Rot} F(\hat{x}) = (0, 0, 0)$ (si $n = 3$) para toda $\hat{x} \in U$.*

Como vimos en esa misma sección, el campo

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

definido en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, es un campo que no es conservativo (ejemplo 3.19) y satisface que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para toda $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, lo que significa que el $\text{Rot } F(x, y) = 0$ en ese mismo dominio y por lo tanto este campo es un contraejemplo para el recíproco de la proposición anterior.

De hecho, básicamente con este mismo ejemplo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 podemos construir uno que cumpla con el mismo propósito de mostrar que este recíproco tampoco es cierto para campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 . Considere

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

el cual está definido para $(x, y, z) \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$. Es fácil ver que $\mathbf{Rot} G(\hat{x}) = (0, 0, 0)$ para toda $(x, y, z) \in U$ y sin embargo tampoco es un campo conservativo (¡si G fuera un campo conservativo F también lo sería!).

Como dijimos al final de la sección 3.4, el problema con la validez del recíproco de cualquiera de estas dos proposiciones (la 3.21 y la 3.46) tiene que ver con la geometría del dominio del campo en cuestión y la clave de la solución nos la da el Teorema de Green.

Consideremos $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en su dominio y tal que $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$ para toda $(x, y) \in U$. De acuerdo con el teorema 3.18 basta que la integral de F sobre cualquier curva cerrada Γ contenida en U sea cero, para que podamos concluir que F es un campo conservativo en U . De hecho, por el problema 19 sería suficiente que esta afirmación fuera cierta para cualquier curva $\Gamma \subset U$ cerrada y poligonal, con lados paralelos a los ejes, e incluso con el agregado de que Γ fuera simple (si una de estas curvas Γ no es cerrada simple, ¡se puede probar que la integral de un campo F sobre una de estas curvas Γ es igual a una suma finita de integrales sobre curvas cerradas simples de este tipo!).

Ahora, si la región U fuera tal que cualquiera de estas curvas cerradas simples y poligonales $\Gamma \subset U$ se pudiera ver como el borde (o la frontera) de un conjunto Jordan-medible Ω contenido en

U , por el Teorema de Green concluiríamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega} \text{Rot } F \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todas estas curvas y, por el problema 19, ¡ F sería un campo conservativo!

Esta argumentación es tan convincente, que cuando menos para campos de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 , podemos formular un resultado como el siguiente:

Proposición 3.47 *Sea $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 en su dominio y tal que $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$ para toda $(x, y) \in U$. Si U es tal que para cualquier curva cerrada simple y poligonal $\Gamma \subset U$ existe una región Jordan-medible Ω contenida en U tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ entonces F es un campo conservativo en U .*

Dem. Se deja al lector ■

Dado que el campo definido en 3.32 ya sabemos que no es conservativo en su dominio $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, debe de haber una parte de las hipótesis de la proposición anterior que no se cumple en este ejemplo, y justo la parte que no se cumple es la que se refiere al dominio U . En efecto, si se toma la curva cerrada simple y poligonal Γ contenida en U , formada por el cuadrado con vértices en los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, observe que ¡no existe ningún conjunto Jordan-medible (y por lo tanto acotado) Ω contenida en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$! (ver figura 3.47).

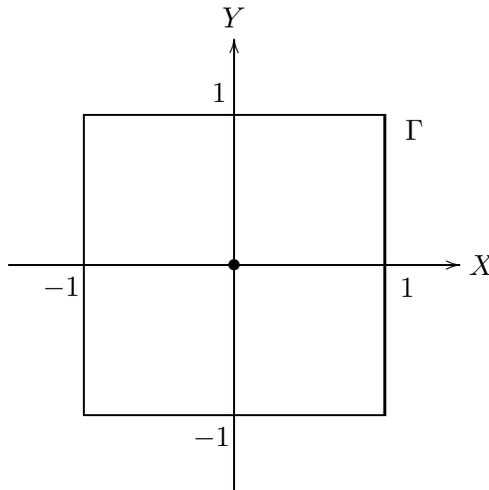


Figura 3.47: Si hacemos $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y Γ la curva cerrada simple contenida en U que está formada por el cuadrado con vértices en los puntos $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ y $(1, -1)$, observe que ¡no existe ningún conjunto Jordan-medible (y por lo tanto acotado) Ω contenida en U tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$!

Desafortunadamente, la condición que le impusimos al dominio $U \subset \mathbb{R}^2$ en la proposición anterior no se puede generalizar a otras dimensiones (además de que tampoco contamos en otras

dimensiones con un resultado “equivalente” al Teorema de Green (¡por ahora!). Sin embargo, existe otra manera de formular esta propiedad.

Observe que la región $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tiene un “hoyo” en el $(0, 0)$ y este “hoyo” es el que impide que esta región U satisfaga la condición de la proposición anterior. Una manera de decir que una región $U \subset \mathbb{R}^2$ no tiene “hoyos”, es justo usando curvas cerradas simples contenidas en U de la siguiente manera: si una región U no tiene “hoyos” entonces cualquier curva cerrada simple $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” a un punto de U sin “salirnos” de U (ver figura 3.48) (lo que por cierto no sucede en el caso de la región $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ya que cualquier curva cerrada simple que “rodee” al origen no se puede “contraer” a un punto sin pasar por el origen (que no está en U)).

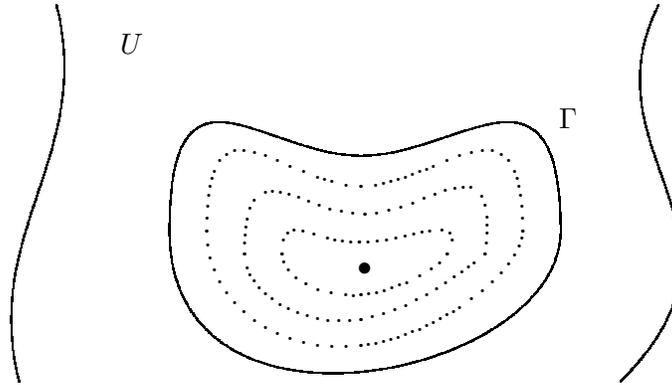


Figura 3.48: Una región $U \subset \mathbb{R}^2$ no tiene “hoyos” si cualquier curva cerrada simple $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” a un punto de U sin “salirnos” de U

Lo mejor de este método para determinar si una región tiene “hoyos”, es que se puede aplicar a regiones contenidas en cualquier \mathbb{R}^n . De hecho, observe que el dominio del campo G (de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3) definido en 3.33 es $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$ y esta región sí tiene un “hoyo”, puesto que cualquier curva cerrada simple que rodee al eje Z no se puede “contraer” a un punto sin pasar por dicho eje (ver figura 3.49). Aún cuando se satisface que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = (0, 0, 0)$ para toda $(x, y, z) \in U$, todo parece indicar que este “hoyo” de U es la razón principal por la que G no es un campo conservativo en U .

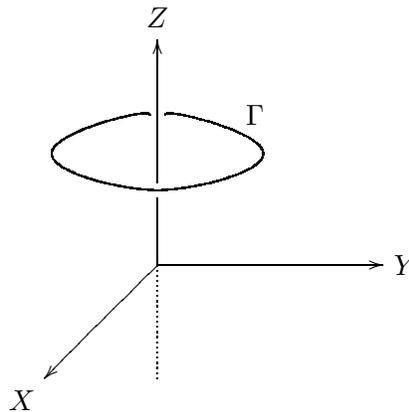


Figura 3.49: La región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$ sí tiene un “hoyo” puesto que cualquier curva cerrada simple que rodee al eje Z no se puede “contraer” a un punto sin pasar por dicho eje

Formalizar de manera rigurosa lo que significa que una curva cerrada simple $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ se pueda

“contraer” a un punto, es algo que escapa a los objetivos de este texto. Simplemente mencionaremos que a las regiones $U \subset \mathbb{R}^n$ que tengan la propiedad de que cualquier curva cerrada simple $\Gamma \subset U$ se puede contraer a un punto de U , sin salirse de U (que geoméricamente significa que U no tiene “hoyos”⁷), se les conoce con el nombre de regiones *simplemente conexas* y que el teorema más general que se puede probar con relación a los campos conservativos y estas regiones, dice lo siguiente:

Teorema 3.48 Sea $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U , con U una región simplemente conexa. Si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($i \neq j$) entonces F es un campo conservativo en U .

Aun cuando no contamos con todo lo necesario para probar este teorema, no hay por qué desanimarse. Afortunadamente existe una clase (muy grande) de regiones en \mathbb{R}^n , cuya definición es muy sencilla y para las cuales se puede probar un teorema completamente análogo al anterior.

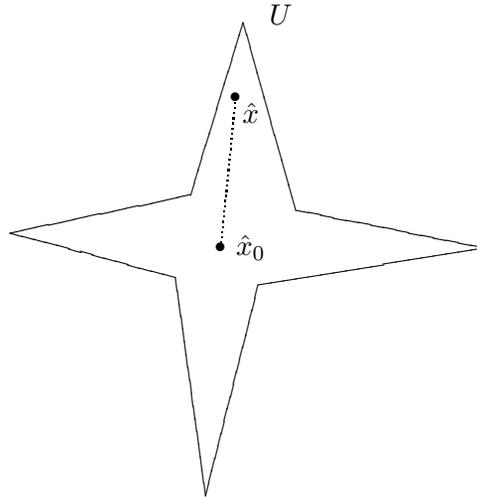


Figura 3.50: Una región $U \subset \mathbb{R}^2$ con forma de estrella o estrellada

Estas regiones están inspiradas en aquellos conjuntos U del plano que tienen forma de estrella y que una de sus principales características es que al menos existe un punto $\hat{x}_0 \in U$ con la propiedad de que el segmento de recta que lo une con cualquier otro punto $\hat{x} \in U$ se queda totalmente contenido en U (ver figura 3.50). Por esta razón se les conoce con el nombre de *regiones en forma de estrella* o *regiones estrelladas*. A continuación damos la definición formal de este tipo de regiones para cualquier \mathbb{R}^n .

Definición 3.49 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ una región. Decimos que U tiene forma de estrella o que U es una región estrellada, si existe $\hat{x}_0 \in U$ tal que para cada $\hat{x} \in U$ el segmento de recta que une a \hat{x}_0 con \hat{x} , y que denotamos por $[\hat{x}_0, \hat{x}]$, está contenido en U . Es decir, si

$$[\hat{x}_0, \hat{x}] = \{\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$$

⁷Existe una manera “más topológica” de decir que una región $U \subset \mathbb{R}^n$ no tiene “hoyos”. Se dice que $U \subset \mathbb{R}^n$ no tiene “hoyos” si cada vez que $U = A \cup B$, con A y B abiertos conexos, se tiene que $A \cap B$ es conexo. En topología general, a los conjuntos que tienen esta propiedad se les conoce con el nombre de conjuntos uniconexos.

para toda $\hat{x} \in U$. En este caso diremos que U es estrellada con respecto a \hat{x}_0 .

Un ejemplo de región estrellada (¡aunque no lo parezca!), es el siguiente.

Ejemplo 3.50 Sea $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$. Pruebe que U es una región estrellada.

Solución. Hacemos $\hat{x}_0 = (1, 0) \in U$ y sea $\hat{x} = (x, y) \in U$ arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0, \hat{x}] &= \{\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0) \mid t \in [0, 1]\} \\ &= \{(1 + t(x - 1), ty) \mid t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

y distinguimos dos casos. Si $y = 0$ entonces $0 < x$ y por lo tanto $1 + t(x - 1) = (1 - t) + tx > 0$ para toda $t \in [0, 1]$ de modo que $\{(1 + t(x - 1), 0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$. Si $y \neq 0$ entonces $ty \neq 0$ para toda $t \in (0, 1]$ y por lo tanto

$$(1 + t(x - 1), ty) \notin \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$$

para toda $t \in [0, 1]$ por lo que también en este caso se satisface que

$$[\hat{x}_0, \hat{x}] = \{\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$$

Por lo tanto U es una región estrellada (ver figura 3.51).

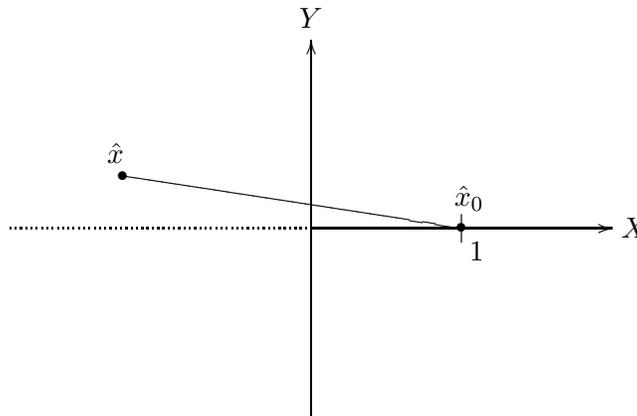


Figura 3.51: La región $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ es estrellada

Como mencionamos párrafos arriba, el siguiente teorema sí que lo podemos probar.

Teorema 3.51 Sea $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en U , con U una región estrellada. Si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($i \neq j$) entonces F es un campo conservativo en U .

Dem. Dado que U es una región estrellada, existe $\hat{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in U$ tal que $[\hat{x}_0, \hat{x}] \subset U$ para toda $\hat{x} \in U$. Ahora, definimos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera: para cada $\hat{x} \in U$, definimos

$$\varphi(\hat{x}) = \int_{\Gamma=[\hat{x}_0, \hat{x}]} F \cdot d\gamma$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^1 F(\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0)) \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0) dt
 \end{aligned}$$

Observe que φ está bien definida puesto que la curva $\Gamma = [\hat{x}_0, \hat{x}] \subset U$ sobre la cual se integra a F está únicamente determinada.

Ahora probaremos que, para cada $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$, se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = F_i(\hat{x})$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Por el teorema 2.7 del capítulo dos (en su versión más general) y la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 F_1(\hat{x}_0(1-t) + t\hat{x})(x_1 - x_1^{(0)}) dt + \dots + \int_0^1 F_i(\hat{x}_0(1-t) + t\hat{x})(x_i - x_i^{(0)}) dt + \right. \\
 &\quad \left. \dots + \int_0^1 F_n(\hat{x}_0(1-t) + t\hat{x})(x_n - x_n^{(0)}) dt \right) \\
 &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F_1(x_1^{(0)}(1-t) + tx_1, \dots, x_i^{(0)}(1-t) + tx_i, \dots, x_n^{(0)}(1-t) + tx_n) \right] (x_1 - x_1^{(0)}) dt \\
 &\quad + \dots + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F_i(x_1^{(0)}(1-t) + tx_1, \dots, x_i^{(0)}(1-t) + tx_i, \dots, x_n^{(0)}(1-t) + tx_n) (x_i - x_i^{(0)}) \right] dt \\
 &\quad + \dots + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[F_n(x_1^{(0)}(1-t) + tx_1, \dots, x_i^{(0)}(1-t) + tx_i, \dots, x_n^{(0)}(1-t) + tx_n) \right] (x_n - x_n^{(0)}) dt \\
 &= \int_0^1 t \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_1 - x_1^{(0)}) dt + \dots + \int_0^1 \left(t \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_i - x_i^{(0)}) + F_i(\gamma(t)) \right) dt \\
 &\quad + \dots + \int_0^1 t \frac{\partial F_n}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_n - x_n^{(0)}) dt
 \end{aligned}$$

y como

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y toda $j \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq i$, se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\gamma(t)) (x_1 - x_1^{(0)}) dt + \dots + \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_i - x_i^{(0)}) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt$$

$$\begin{aligned}
 & + \cdots + \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(\gamma(t)) (x_n - x_n^{(0)}) dt \\
 & = \int_0^1 t \nabla F_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt \\
 & = \int_0^1 t (F_i \circ \gamma)'(t) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt \\
 & = t (F_i \circ \gamma)(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (F_i \circ \gamma)(t) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt \\
 & = F_i(\gamma(1)) \\
 & = F_i(\hat{x})
 \end{aligned}$$

■

Una consecuencia inmediata del teorema anterior, que es importante destacar puesto que de alguna forma representa el recíproco de la proposición 3.46, es el siguiente

Corolario 3.52 Sea $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $n = 2$ o $n = 3$, una función de clase C^1 en U , con U una región estrellada. Si $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$ (si $n = 2$) o $\mathbf{Rot} F(\hat{x}) = (0, 0, 0)$ (si $n = 3$) para toda $\hat{x} \in U$, entonces F es un campo conservativo en U .

Concluimos este capítulo con un ejemplo de cómo aplicar el teorema anterior, y lo haremos con un campo que hemos usado con mucha frecuencia en las últimas secciones.

Ejemplo 3.53 Muestre que el campo

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

es un campo conservativo en la región $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ y encuentre una función $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$.

Solución. En virtud de que la región U es estrellada (3.50) y que $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$, es decir, que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$, por el teorema anterior sabemos que F es un campo conservativo en U . Aún cuando no vamos a obtener una función φ siguiendo la construcción que se dio en la prueba de dicho teorema, se tiene que la función

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

cumple con la propiedad que se desea, cuya verificación se deja como un problema para el lector.

3.9 Problemas

1. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave por pedazos. Pruebe que γ es continua en $[a, b]$.
2. (Teorema Fundamental del Cálculo para funciones suaves por pedazos) Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave por pedazos. Pruebe que

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

3. Pruebe que, si γ y δ son suaves por pedazos, entonces $\gamma + \delta$ es suave por pedazos.
4. Considere las funciones $\gamma_1(t) = (t, 0)$, $\gamma_2(t) = (1, t)$, $\gamma_3(t) = (1 - t, 1)$ y $\gamma_4(t) = (0, 1 - t)$, con $t \in [0, 1]$ para todas ellas. Pruebe que

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

donde γ es la función suave por pedazos definida en el ejemplo 3.2. (Observe que, siendo estrictos, habría que escribir que $\gamma = ((\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3) + \gamma_4$, pero lo dejaremos así para no complicar la notación).

5. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función suave por pedazos y $\alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$ suprayectiva en $[a, b]$, y de clase C^1 en $[c, d]$.
 - (a) Muestre con un ejemplo que la función $\gamma \circ \alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ no siempre resulta ser suave por pedazos.
 - (b) Sea $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ tal que γ tiene derivada continua (de clase C^1) en cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (para $i = 1, \dots, k$). Pruebe que, si el conjunto $\{x \in [c, d] \mid \alpha(x) \in \mathcal{P}\}$ es finito entonces $\gamma \circ \alpha$ es suave por pedazos.
 - (c) Pruebe las afirmaciones que aparecen en la definición 3.4.

6. Pruebe la proposición 3.8.

7. En cada uno de los siguientes problemas calcule $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$, donde:

- (a) Γ es el triángulo de vértices $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$; γ es una parametrización que la recorre en este orden y $f(x, y, z) = x + y + z$.
- (b) Γ es el segmento de la parábola $y = \frac{x^2}{4}$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(4, 4)$ y $f(x, y) = x - y^2$.
- (c) Γ es la parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ que está en el cuadrante superior derecho; γ es una parametrización que la recorre en el sentido de las manecillas del reloj y $f(x, y) = xy \left(\frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 \right)$.
- (d) Γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$; γ es una parametrización que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando la vemos desde el origen, y $f(x, y, z) = xz^2 + xyz$.

8. Calcule el área de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está entre los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$.
9. Deduzca cuáles son las coordenadas del centro de masa de un alambre que tiene la forma de una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ (suave por pedazos) y que tiene una función de densidad $\rho(x, y)$.
10. Un alambre tiene la forma de la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ y una densidad según la función $\rho(x, y) = |x| + \frac{a}{\pi}$. Calcule:

i) la masa del alambre

ii) su centro de masa

11. Pruebe las proposiciones 3.14 y 3.15.
12. Sean $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con derivada continua, tales que $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$ y $g(x) < f(x)$ para toda $x \in (a, b)$. Sea Γ la curva formada por las gráficas de f y g . Si γ es una parametrización de Γ , que la recorre una sola vez en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, pruebe que las integrales

$$\int_{\Gamma} (0, x) \cdot d\gamma \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma} (-y, 0) \cdot d\gamma$$

calculan el área de la región acotada por Γ .

13. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ una parametrización de una curva $\Gamma \subset U$ y supóngase que $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial tal que, en cada punto $\gamma(t) \in \Gamma$, $F(\gamma(t))$ está en la misma dirección que el vector $\gamma'(t)$. Pruebe que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} \|F\| \|d\gamma\|$$

14. Pruebe que

$$\left| \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right| \leq M \cdot l(\Gamma)$$

donde $M = \max\{\|F(\hat{x})\| \mid \hat{x} \in \Gamma\}$ y $l(\Gamma)$ es la longitud de arco de Γ .

15. Una partícula se mueve a lo largo de la curva Γ parametrizada por $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$, ($t \geq 0$). Durante todo su recorrido actúa sobre ella un campo de fuerzas dado por $F(x, y, z) = (y-1, z, x)$. Si la partícula abandona la curva por su tangente en el instante $t = \pi/2$, calcule el trabajo realizado por el campo F sobre la trayectoria seguida por la partícula en los intervalos de tiempo $[0, \pi/2]$ y $[\pi/2, \pi]$.
16. En cada uno de los siguientes incisos calcule $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$, donde:
- (a) $F(x, y, z) = (y, -x, z)$ y Γ es la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $y + z = 1$. La parametrización γ debe ser tal, que vista desde el origen, recorre a Γ en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.
- (b) $F(x, y, z) = (y, (1-x)y, y^2z)$ y Γ es la intersección del hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el cilindro $(x-1)^2 + y^2 = 1$. La parametrización γ debe ser tal que, vista desde el origen, recorre a Γ en el sentido de las manecillas del reloj.

17. Sean $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas;
- pruebe que el campo $F : (a, b) \times (a, b) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido como $F(x, y) = (f(x), g(y))$ es conservativo en su dominio. Calcule una función gradiente para F .
 - si $0 \leq a$, pruebe que el campo $F = (F_1, \dots, F_n) : U = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid a < \|\hat{x}\|^2 < b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde cada función coordenada F_i está definida como $F_i(\hat{x}) = x_i f(\|\hat{x}\|^2)$, es conservativo en su dominio. Si h es una primitiva de f , calcule una función gradiente para F en términos de h .
18. Pruebe que, si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto conexo (una región), entonces cualquier par de puntos en U se puede unir por una curva poligonal formada por segmentos paralelos a alguno de los ejes coordenados.
19. Pruebe que el teorema 3.18 sigue siendo cierto si se supone que todas las curvas que ahí se mencionan, son curvas poligonales y de lados paralelos a los ejes.
20. Sean, $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U , y $F = \nabla\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pruebe que, si $\hat{x}_0, \hat{x}_1 \in U$ pertenecen al mismo conjunto de nivel de φ entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

para cualquier parametrización γ de $\Gamma \subset U$ que empieza en \hat{x}_0 y termina en \hat{x}_1 .

21. Pruebe la proposición 3.21.
22. Dé cuando menos dos argumentos distintos para demostrar que los siguientes campos no son conservativos en su dominio:
- $F(x, y) = (y + x \cos(y), x + y \sin(x))$
 - $F(x, y, z) = (2xy - z^2, y^2 + x \cos(z), x^2 z)$
23. Calcule la integral de línea $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ donde $F(x, y) = (x^2 + xy, y^2 + x^2)$ y Γ es:
- cualquier círculo con centro en el origen
 - el cuadrado $|x| + |y| = 1$
 - cualquier triángulo con vértices $(-a, 1)$, $(a, 1)$ y $(0, b)$, $a \neq 0$ y $b < 0$
 - ιF es un campo conservativo en su dominio? Justifique su respuesta
24. Sea $F(x, y) = (-y, x)$. Pruebe que, si Γ es una curva cerrada simple parametrizada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj por γ , y D es la región acotada por Γ , entonces

$$A(D) = \text{área de } D = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

25. Calcule la integral de línea $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$, donde:
- $F(x, y) = (2xy, x^2 y)$ y Γ es la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ recorrida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

(b) $F(x, y) = (3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3)$ y Γ es el círculo unitario con centro en el origen recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

(c)

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + (y+1)^2}, \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} \right)$$

$(x, y) \neq (0, -1)$ y Γ es el círculo $x^2 + y^2 = 4$ recorrido en el sentido de las manecillas del reloj.

(d)

$$F(x, y) = \left(\frac{-(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

$(x, y) \neq (0, 1), (-1, 0)$ y Γ es el círculo $x^2 + y^2 = 6$ recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

26. Sea

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Calcule $\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^{\perp}$, donde Γ es una curva cerrada simple contenida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y recorrida en sentido positivo (hay dos casos).

27. Sean $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Pruebe que:

(a)

$$\text{Rot}(fF) = f \text{Rot} F + \nabla f \cdot F^{\perp}$$

(b) si $\Omega \subset U$ es un conjunto Jordan-medible tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una curva cerrada simple y $\Omega \cup \Gamma \subset U$ entonces

$$\int_{\Omega} f \text{Rot} F = \int_{\Gamma=\partial\Omega} (fF) \cdot d\gamma - \int_{\Omega} \nabla f \cdot F^{\perp}$$

en donde γ es una parametrización de Γ que la recorre (una vez) en el sentido contrario a las manecillas del reloj (esta identidad se puede interpretar como una *fórmula de integración por partes usando el rotacional en el plano*⁸).

28. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $\Omega = \{\hat{x} \in U \mid f(\hat{x}) \neq 0\}$ es un conjunto Jordan-medible tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una curva cerrada simple y $\Omega \cup \Gamma \subset U$, pruebe que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}$$

(sugerencia: aplique el inciso (b) del problema 27, usando un campo F “adecuado” en cada caso).

29. Sea $F = (F_r, F_{\theta})$ un campo vectorial definido en $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, dado en términos de coordenadas polares (ver página 152 para recordar lo que significa esto). Calcule el $\text{Rot} F(\hat{x})$ a partir de su expresión en coordenadas cartesianas.

⁸Fórmula sugerida por “Carlitos” Prieto López

30. Sea $F = (F_r, F_\theta)$ un campo vectorial definido en $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dado en términos de coordenadas polares. Si Γ es una curva contenida en U y $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una parametrización de Γ tal que la pareja $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ representa coordenadas polares del punto $\gamma(t)$ para cada $t \in [a, b]$, encuentre una expresión para calcular $\int_\gamma F \cdot d\gamma$.
31. Reformule (y pruebe) el Teorema de Green en términos de la $\text{div } F$ y la integral $\int_\Gamma F \cdot (d\gamma)^\perp$.
32. Sea $F = (F_r, F_\theta)$ un campo vectorial definido en $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dado en términos de coordenadas polares. Encuentre una expresión para $\text{div } F(\hat{x})$.
33. Pruebe la proposición 3.44 (*sugerencia*: use la misma rotación L que se usó en la prueba de la proposición 3.41 para parametrizar el borde del disco D_r y después proceda como en la demostración de la proposición 3.25. Esta prueba es laboriosa pero no difícil. ¡Vale la pena hacerla!).
34. Determine si cada uno de los siguientes campos es conservativo en su dominio (en caso afirmativo, calcule una función gradiente). Pruebe su respuesta.
- (a) $F(x, y) = (x^2 + 2xy, x^2 + y)$
 - (b) $F(x, y) = (y^3/(x^2 + y^2)^{3/2}, x^3/(x^2 + y^2)^{3/2})$
 - (c) $F(x, y, z) = (3e^z + 2xy, x^2 + z \text{sen}(y), 3xe^z - \text{cos}(y))$
 - (d) $F(x, y, z) = (x/(x^2 + y^2 + z^2), y/(x^2 + y^2 + z^2), z/(x^2 + y^2 + z^2))$. Diga si este campo es conservativo en $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$. Pruebe su respuesta.
35. Para cada uno de los siguientes campos, determine cuál es el plano sobre el que produce la máxima rotación promedio en el origen:
- (a) $F(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$
 - (b) $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$
 - (c) $F(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$
 - (d) $F(x, y, z) = (y, z, x)$
36. Pruebe, además de las identidades de la proposición 3.43, la siguiente identidad

$$\mathbf{Rot}(F \times G)(\hat{x}) = F(\hat{x}) \times \mathbf{Rot}G(\hat{x}) + \mathbf{Rot}F(\hat{x}) \times G(\hat{x})$$

37. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 en la región U , con $n = 2$ ó $n = 3$. Si $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$ (si $n = 2$) o $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = (0, 0, 0)$ (si $n = 3$) para toda $\hat{x} \in U$ pruebe que para cada $\hat{x} \in U$ existe $r > 0$ tal que F es un campo conservativo en $B_r(\hat{x})$ (lo que significa que todo campo de rotacional cero es, localmente, un campo conservativo).
38. Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, $\hat{x}_0 \in U$ y $\tilde{U} = \{\hat{x} - \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in U\}$. Pruebe que \tilde{U} es estrellada con respecto a $\hat{0}$ (el origen) sí y sólo si U es estrellada con respecto a \hat{x}_0 .
39. Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ funciones de clase C^1 en la región estrellada U , con $n = 2$ ó $n = 3$. Si $\text{Rot } F(\hat{x}) = \text{Rot } G(\hat{x})$ (si $n = 2$) o $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = \mathbf{Rot}G(\hat{x})$ (si $n = 3$) para toda $\hat{x} \in U$ pruebe que existe $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en U tal que $F(\hat{x}) = G(\hat{x}) + \nabla\varphi(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$ (lo que significa que, si dos campos tienen el mismo rotacional en una región estrellada U entonces difieren por un campo conservativo en U). ¿Esta afirmación sigue siendo cierta si U no es una región estrellada (¡ni simplemente conexa!)? Pruebe su respuesta.

40. Demuestre que el campo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, dado por:

$$F(x, y, z, w) = (4wxy + 3yz, 2wx^2 + 3xz, 3xy + 3w^2z^2, 2yx^2 + 2wz^3)$$

es conservativo y calcule una función gradiente para F .

Capítulo 4

Integrando sobre superficies

En el inicio del capítulo tres planteamos el problema de calcular la masa total de una lámina no homogénea y no necesariamente plana. Este, y otro tipo de problemas, son los que nos servirán de motivación para desarrollar el concepto de integral sobre una superficie, tanto de funciones con valores reales, como de funciones con valores vectoriales. Como en el caso de la integral de línea, antes será necesario precisar el concepto de superficie, así como desarrollar algunas de sus características más elementales. Ese es el objetivo de la siguiente sección.

4.1 Superficies

De la misma forma que en el caso de las curvas, para nosotros las superficies serán todos aquellos conjuntos que se puedan ver como la imagen de una función derivable definida sobre ciertos subconjuntos del plano. Aun cuando aquí sólo trataremos con superficies contenidas en el espacio (\mathbb{R}^3), daremos su definición para cualquier \mathbb{R}^n .

Definición 4.1 *Decimos que $S \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie si existen, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en U (abierto), y $A \subset U$ una región de tipo I o tipo II, tales que $S = \sigma(A)$. En este caso, decimos que σ es una parametrización de S .*

A pesar de que en esta definición hacemos el énfasis de que toda parametrización σ de una superficie S debe de estar definida en un conjunto abierto (puesto que se quiere que sea derivable), de aquí en adelante nos concretaremos a describir únicamente al conjunto A que bajo σ nos lleva al conjunto S .

Así, si tomamos $\sigma(x, y) = (\cos(x)\sen(y), \sen(x)\sen(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ tenemos que $S = \sigma(A)$ es la esfera de radio 1 con centro en el origen de la figura 4.1 (a); o si tomamos $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sen(x), y)$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ tenemos que $S = \sigma(A)$ es el cilindro de la figura 4.1 (b); y si $\sigma(x, y) = (x\cos(y), x\sen(y), x)$ con $(x, y) \in A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ tenemos que $S = \sigma(A)$ es el cono de la figura 4.1 (c).

Este último ejemplo es muy interesante porque, al igual que en el caso de las curvas, muestra que las superficies que acabamos de definir, también pueden tener “picos”.

Otras superficies que usaremos con mucha frecuencia, son aquellas que se obtienen por medio de la gráfica de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 (en U). Si $A \subset U$ es una región de tipo I o tipo II, entonces

$$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y)) \tag{4.1}$$

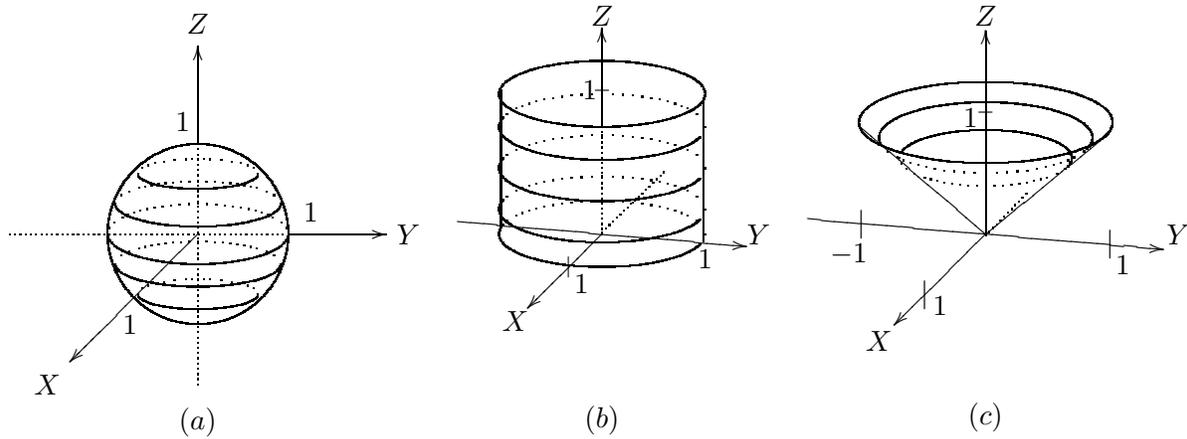


Figura 4.1: Estas superficies están parametrizadas de la siguiente manera: (a) por $\sigma(x, y) = (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$; (b) por $\sigma(x, y) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x), y)$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$; y (c) por $\sigma(x, y) = (x \cos(y), x \operatorname{sen}(y), x)$ con $(x, y) \in A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

con $(x, y) \in A$ es una parametrización de la parte de la gráfica de f que está por arriba del conjunto A , como sería el caso del sector de paraboloides que está por arriba del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ cuando consideramos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (ver figura 4.2).

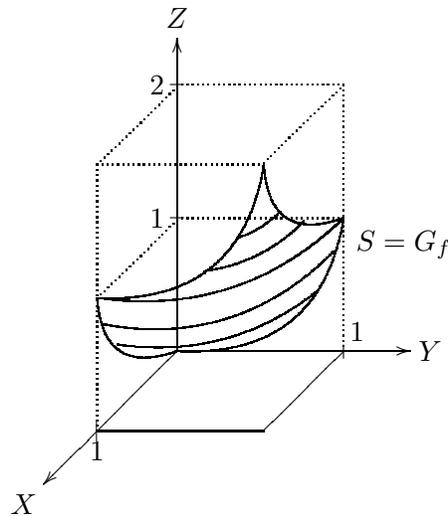


Figura 4.2: La gráfica G_f de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tomada sobre $A \subset U$ (una región de tipo I o tipo II) también es una superficie parametrizada

Así como la parametrización de una curva en general nos permite calcular vectores tangentes (y por lo tanto, rectas tangentes), una parametrización de una superficie también nos proporciona la manera del calcular vectores normales a la superficie (y por lo tanto, planos tangentes). En efecto, si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ entonces $\gamma(t) = \sigma(x_0 + t, y_0)$ y $\delta(t) = \sigma(x_0, y_0 + t)$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, parametrizan a un par de curvas

contenidas en S de tal forma que

$$\gamma'(0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) \right) \quad \text{y} \quad \delta'(0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \quad (4.2)$$

en general serán un par de vectores tangentes a S en el punto $\hat{y}_0 = \sigma(\hat{x}_0)$ (ver figura 4.3). De esta forma, si estos vectores son linealmente independientes, el vector

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) \right) \times \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \right)$$

es distinto del vector cero y será normal a la superficie S en ese punto.

A los vectores que aparecen en 4.2 los denotaremos por $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ respectivamente, es decir

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \right)$$

de tal forma que el vector normal a S en el punto $\hat{y}_0 = \sigma(\hat{x}_0)$ inducido por la parametrización σ será denotado por

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0) \quad (4.3)$$

Observe que en el caso en que \hat{y}_0 sea un “pico” de S , los vectores de 4.2 serán el vector cero y por lo tanto este vector no será un vector normal a S (¡como era de esperarse!).

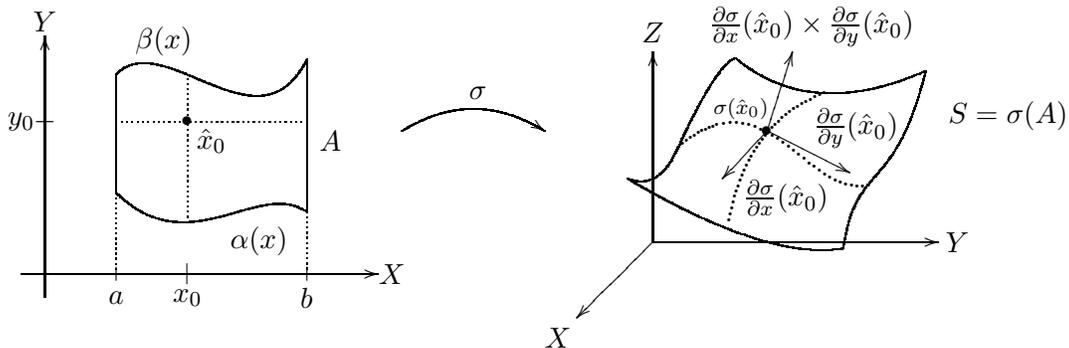


Figura 4.3: Si los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ son linealmente independientes entonces el vector $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ es normal a la superficie S en el punto $\sigma(\hat{x}_0)$

Cuando una superficie S tenga una parametrización σ tal que el vector dado por 4.3 sea distinto del vector cero, entonces diremos que la superficie S es *suave* en el punto $\hat{y}_0 = \sigma(\hat{x}_0)$, y si esto sucede para todo punto $\hat{y}_0 \in S$ diremos que S es una *superficie suave*. Como también es de esperarse, un ejemplo de superficie suave es aquella que coincide con la gráfica de una función derivable f . En efecto, dado que $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ es una parametrización para este tipo de superficies, entonces

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

de modo que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

el cual siempre es un vector distinto de cero.

Es importante hacer notar que los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ también se pueden obtener a través de la derivada de la función σ en el punto \hat{x}_0 ($D\sigma(\hat{x}_0)$). En efecto, como se recordará, esta derivada es la función lineal determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{pmatrix}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2) \end{aligned}$$

Esta manera de obtener a estos vectores nos permitirá deducir una importante propiedad geométrica del vector normal $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, de la siguiente manera. Sea Γ el arco de la circunferencia unitaria, con centro en el origen, que une al punto $\hat{e}_1 = (1, 0)$ con el punto $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Dado que cada punto $\hat{x} \in \Gamma$ se escribe como un combinación lineal de \hat{e}_1 y \hat{e}_2 con coeficientes no negativos, entonces cada punto $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{x})$ que pertenece a la imagen bajo la función lineal $D\sigma(\hat{x}_0)$ del arco Γ , también se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2) = \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ con coeficientes no negativos. Con base en esta observación, podemos concluir que la curva $\tilde{\Gamma} = D\sigma(\hat{x}_0)(\Gamma)$ es una curva (contenida en el plano generado por los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$) que une a la “punta” del vector $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1)$ con la “punta” del vector $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2)$, y que esto lo hace siguiendo el ángulo menor a 180 grados formado por dichos vectores (ver figura 4.4). Si ahora recordamos que la dirección del producto cruz de estos mismos vectores también está determinada por el mismo ángulo (como se muestra en la misma figura 4.4), podemos concluir que el vector $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ tiene la propiedad de que, si γ es una parametrización del arco Γ que lo recorre en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, entonces $\tilde{\gamma} = D\sigma(\hat{x}_0) \circ \gamma$ es una parametrización de la curva $\tilde{\Gamma}$ tal que, vista desde la dirección en la que apunta el vector $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, observaremos que ésta también está recorrida en el mismo sentido (contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

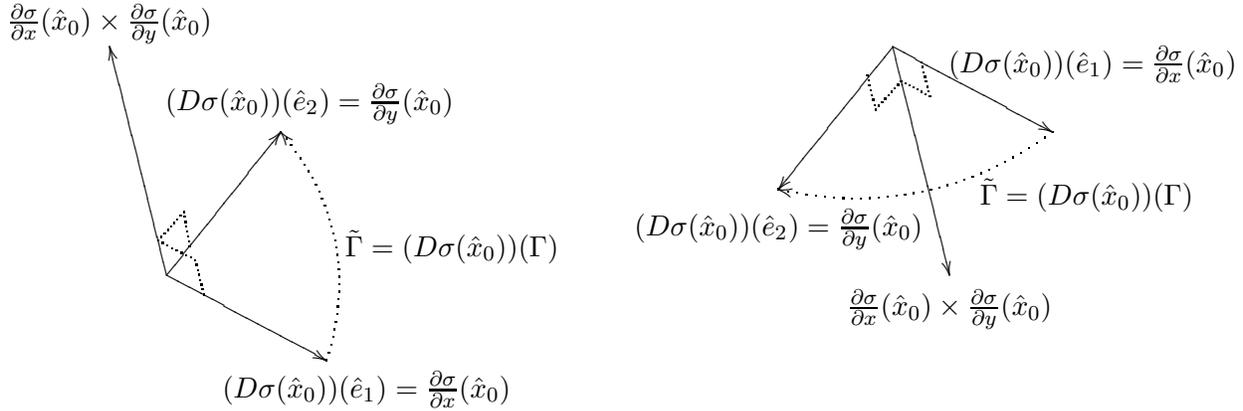


Figura 4.4: Si Γ es el arco de la circunferencia unitaria que está contenido en el primer cuadrante del plano XY que inicia en el punto $\hat{e}_1 = (1, 0)$ y termina en el punto $\hat{e}_2 = (0, 1)$, entonces $\tilde{\Gamma} = (D\sigma(\hat{x}_0))(\Gamma)$ es una curva (contenida en el plano generado por los vectores $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1)$ y $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2)$) que une a la “punta” del vector $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ con la “punta” del vector $\frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, y esto lo hace siguiendo el ángulo menor a 180 grados formado por dichos vectores

Con base en lo anterior ahora podemos asegurar que, si en general Γ es una circunferencia con centro en el origen de radio arbitrario (o cualquier otra curva cerrada simple que “rodea” al origen) parametrizada en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj por una función γ , entonces $\tilde{\gamma} = D\sigma(\hat{x}_0) \circ \gamma$ es una parametrización de la curva $\tilde{\Gamma} = D\sigma(\hat{x}_0)(\Gamma)$ tal que, vista desde la dirección en la que apunta el vector $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, observaremos que ésta también está recorrida en el mismo sentido (contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Finalmente, dado que para puntos \hat{x} muy cercanos a \hat{x}_0 la función $\sigma(\hat{x})$ y la función afin $(D\sigma(\hat{x}_0))(\hat{x} - \hat{x}_0) + \sigma(\hat{x}_0)$ se “parecen” mucho, podemos concluir que, si Γ es una curva cerrada simple (contenida en una vecindad “pequeña” del punto \hat{x}_0) que “rodea” al punto \hat{x}_0 , y dicha curva está parametrizada en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj por una función γ , entonces $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ es una parametrización de la curva $\tilde{\Gamma} = \sigma(\Gamma)$ (que está contenida en la superficie S parametrizada por σ) que tiene la propiedad de que, al observarla desde la dirección en que apunta el vector $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, veremos que ésta también está recorrida en el mismo sentido (contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Otro tipo de puntos de una superficie S que es importante distinguir son aquellos que forman lo que “geométricamente” caracterizamos como el borde de S . Si la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tiene la particularidad de ser plana, es decir, que está contenida en un plano, el borde de S se puede ver como la frontera topológica de S (viendo a S como un subconjunto de \mathbb{R}^2). Sin embargo, esto ya no funciona tan fácilmente para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que no sea plana.

Una posibilidad para caracterizar el borde (“geométrico”) de S es a través de una parametrización $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S ; esta forma consiste en tomar el borde de A y fijarnos en su imagen bajo σ . Denotaremos por $\partial_\sigma S$ a la imagen del borde ∂A (o frontera de A , $Fr(A)$) bajo σ , es decir

$$\partial_\sigma S = \sigma(\partial A) \tag{4.4}$$

Aun cuando una parametrización σ de una superficie S puede ser una herramienta útil para identificar a este tipo de puntos, en general esto no siempre funciona. A continuación daremos una serie de ejemplos en los que mostraremos que el conjunto definido en 4.4 puede, desde coincidir con

ese conjunto que “geoméricamente” identificamos como el borde de S , o ser totalmente ajeno a éste.

Un ejemplo en el que el conjunto $\partial_\sigma S$ coincide con el borde “geométrico” de S es aquel en el que la superficie se puede ver como la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Recuérdese que en este caso S se puede parametrizar con la función $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y para esta parametrización es claro que el conjunto $\partial_\sigma S$ coincide con el borde “geométrico” de S (ver figura 4.2). En este caso, la parametrización σ tiene la propiedad de ser una función inyectiva en todo su dominio, lo que sin duda es una condición suficiente para que el conjunto $\partial_\sigma S$ siempre coincida con el borde “geométrico” de S .

Desafortunadamente no toda superficie S se puede parametrizar por medio de una función inyectiva, y justo cuando no se tiene esta propiedad es que el conjunto $\partial_\sigma S$ no es lo que esperamos. Sólo para ilustrar hasta qué punto el conjunto $\partial_\sigma S$ puede no tener nada que ver con el borde “geométrico” de S , damos el siguiente ejemplo.

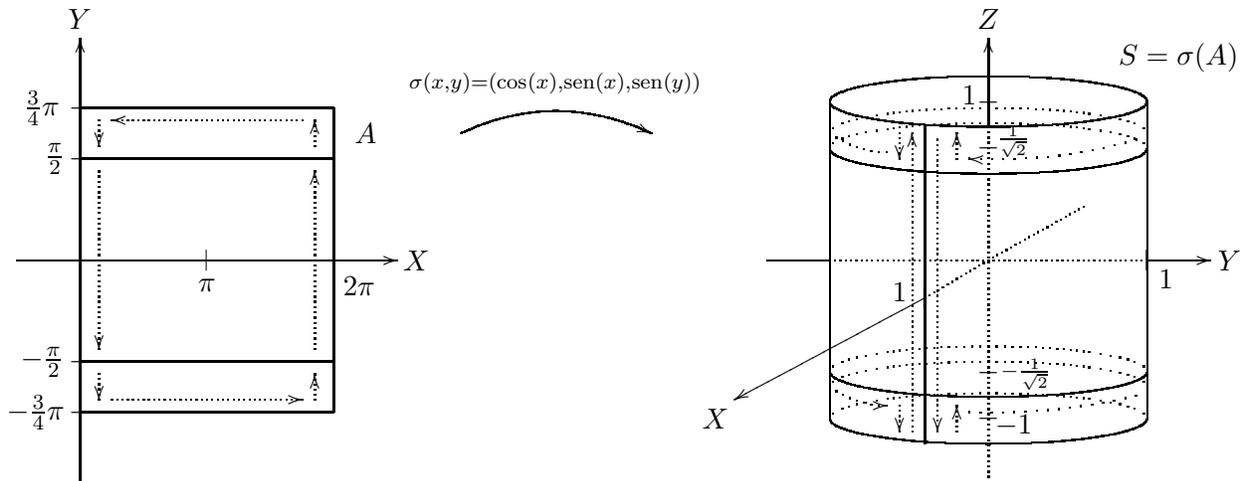


Figura 4.5: La superficie S parametrizada por la función σ es el cilindro circular recto cuyo borde “geométrico” está formado por dos circunferencias de radio 1: una con centro en el punto $(0, 0, -1)$ y contenida en el plano $z = -1$, y otra contenida en el plano $z = 1$ con centro en el punto $(0, 0, 1)$. Por otra parte, el conjunto $\partial_\sigma S$ está formado por otras dos circunferencias de radio 1, una con centro en el punto $(0, 0, -1/\sqrt{2})$ y contenida en el plano $z = -1/\sqrt{2}$, y otra contenida en el plano $z = 1/\sqrt{2}$ con centro en el punto $(0, 0, 1/\sqrt{2})$, además del segmento de recta que une a los puntos $(1, 0, -1)$ y $(1, 0, 1)$

Sea $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [-3\pi/4, 3\pi/4] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \sin(y))$. Es fácil ver que la superficie S parametrizada por esta función es el cilindro circular recto cuyo borde “geométrico” está formado por dos circunferencias de radio 1: una con centro en el punto $(0, 0, -1)$ y contenida en el plano $z = -1$, y otra contenida en el plano $z = 1$ con centro en el punto $(0, 0, 1)$. Sin embargo, en este caso el conjunto $\partial_\sigma S$ estará formado por otras dos circunferencias de radio 1, una con centro en el punto $(0, 0, -1/\sqrt{2})$ y contenida en el plano $z = -1/\sqrt{2}$, y otra contenida en el plano $z = 1/\sqrt{2}$ con centro en el punto $(0, 0, 1/\sqrt{2})$, además del segmento de recta que une a los puntos $(1, 0, -1)$ y $(1, 0, 1)$ (ver figura 4.5). Seguramente no escapa al lector el hecho de que en este caso el conjunto $\partial_\sigma S$ está formado por estas curvas debido a que la parametrización σ , además de “unir” (o “pegar”) a los segmentos verticales que forman parte del borde de A , “recorre” dos veces algunas partes del cilindro S , “terminando” en las dos circunferencias que se encuentran contenidas

en los planos $z = 1/\sqrt{2}$ y $z = -1/\sqrt{2}$, y que este doble “recorrido” es la razón principal por la cual el conjunto $\partial_\sigma S$ no coincide con el borde “geométrico” de S .

Cuando la función σ es inyectiva en el interior de su dominio (en cuyo caso diremos que σ es una *parametrización simple* de S) se tienen más posibilidades de que $\partial_\sigma S$ coincida con el borde “geométrico” de S . Considérese ahora la superficie S parametrizada por la misma función $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \sin(y))$ pero con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. En este caso se tiene que S es el mismo cilindro circular recto del ejemplo anterior, de tal forma que el borde “geométrico” de S también es el mismo. Por otra parte, ahora el conjunto $\partial_\sigma S$ está formado, además de las dos circunferencias que forman el borde “geométrico” de S , por el segmento de recta que une a los puntos $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, -1)$. Si se observa con cuidado, se notará que este segmento es la imagen bajo σ del segmento que une a los puntos $(0, -\pi/2)$ y $(0, \pi/2)$, y del segmento que une a los puntos $(2\pi, -\pi/2)$ y $(2\pi, \pi/2)$, que no son más que la parte del borde de A que la función σ “pega” para formar el cilindro S (ver figura 4.5).

Un caso más extremo que el anterior es el que nos proporciona la función $\sigma(x, y) = (\cos(x) \sin(y), \sin(x) \sin(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Como vimos anteriormente, en este caso la superficie S es la esfera de radio 1 con centro en el origen la cual, geoméricamente hablando, ¡no tiene borde! Sin embargo, el conjunto $\partial_\sigma S$ es no vacío y coincide con la semicircunferencia de radio 1 contenida en el semiplano “derecho” del plano coordenado XZ (ver figura 4.6).

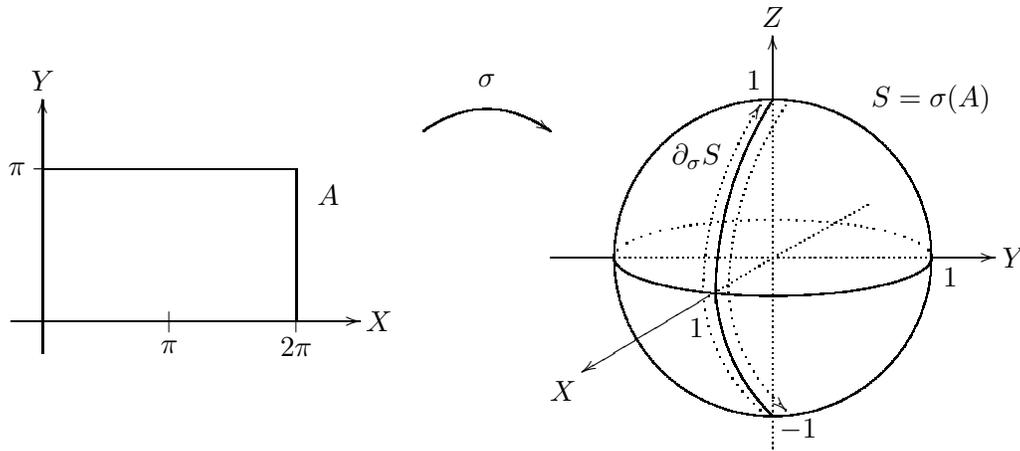


Figura 4.6: Si parametrizamos a la esfera unitaria con la función $\sigma(x, y) = (\cos(x) \sin(y), \sin(x) \sin(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, el “borde” $\partial_\sigma S$ inducido por esta parametrización es la semicircunferencia de radio 1 contenida en el semiplano “derecho” del plano coordenado XZ

En estos dos últimos ejemplos se tiene que el conjunto $\partial_\sigma S$ no sólo contiene a los puntos que forman el borde “geométrico” de S , sino que también contiene (o incluso es igual) a los puntos que forman parte de lo que podríamos llamar la “costura” de S (producida por la parametrización σ). Obsérvese que, si γ es una parametrización del borde de A (en cualquiera de los dos ejemplos) que lo recorre una vez (sin importar con que orientación), entonces

$$\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma \tag{4.5}$$

será una parametrización de la curva $\partial_\sigma S$, parametrización que tiene la particularidad de que la curva que forma “la costura” de S , es recorrida dos veces por $\tilde{\gamma}$ sólo que, una vez en un sentido, y la otra ¡en el sentido contrario! (ver las figuras 4.5 y 4.6). Esto significa que, si usamos

la parametrización dada por 4.5 para integrar un campo F sobre la curva $\partial_\sigma S$, entonces esta integración a final de cuentas se reducirá a integrar sobre el borde “geométrico” de S (las dos circunferencias en el caso del cilindro), o dicha integral valdrá cero (en el caso de la esfera).

Aun cuando nuestro objetivo inicial era caracterizar a aquellos puntos de una superficie S que forman lo que hemos venido llamando el borde “geométrico” de S , el conjunto $\partial_\sigma S$ (definido en 4.4 y que de aquí en adelante llamaremos “el borde (o costura) de S inducido(a) por σ ”) nos será suficiente para formular los teoremas que veremos más adelante, razón por la cual abandonamos este objetivo y damos por concluido el análisis de estos puntos.

En varios de los ejemplos anteriores, la parametrización $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ de la curva $\partial_\sigma S$ siempre recorre dos (o más) veces a la parte de esta curva que forma lo que hemos llamado la “costura” de S (en caso de que exista dicha “costura”). Es importante mencionar que este doble recorrido no siempre lo hace en sentidos contrarios. A continuación daremos un ejemplo de una superficie S y una parametrización σ de ésta, que ilustra este hecho y que además nos da la pauta para introducir el concepto de superficie orientada.

La superficie que parametrizaremos a continuación es la muy conocida cinta de Möbius¹. Sea

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= ((2 + y \cos(x/2)) \cos(x), (2 + y \cos(x/2)) \sin(x), y \sin(x/2)) \\ &= 2(\cos(x), \sin(x), 0) + y(\cos(x/2) \cos(x), \cos(x/2) \sin(x), \sin(x/2)) \end{aligned} \quad (4.6)$$

con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Obsérvese que si tomamos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ una parametrización del borde de A que lo recorra en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, y tomamos $\gamma_2(y) = (2\pi, y)$ y $\gamma_4(y) = (0, -y)$ con $y \in [-1, 1]$, como las parametrizaciones correspondientes a los segmentos verticales del borde de A , entonces $\sigma(\gamma_2(y)) = \sigma(2\pi, y) = (2 - y, 0, 0)$ y $\sigma(\gamma_4(y)) = \sigma(0, -y) = (2 - y, 0, 0)$ recorren el segmento que une a los puntos $(1, 0, 0)$ y $(3, 0, 0)$, ambas empezando en el primero y terminando en el segundo (ver figura 4.7). Lo anterior muestra que dicho segmento es donde la parametrización σ “pega” los bordes verticales de A y que además la parametrización $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ de la curva $\partial_\sigma S$ lo recorre dos veces ¡en la misma dirección! Este último hecho es un reflejo de una característica muy importante de la banda de Möbius: es una superficie no orientada.

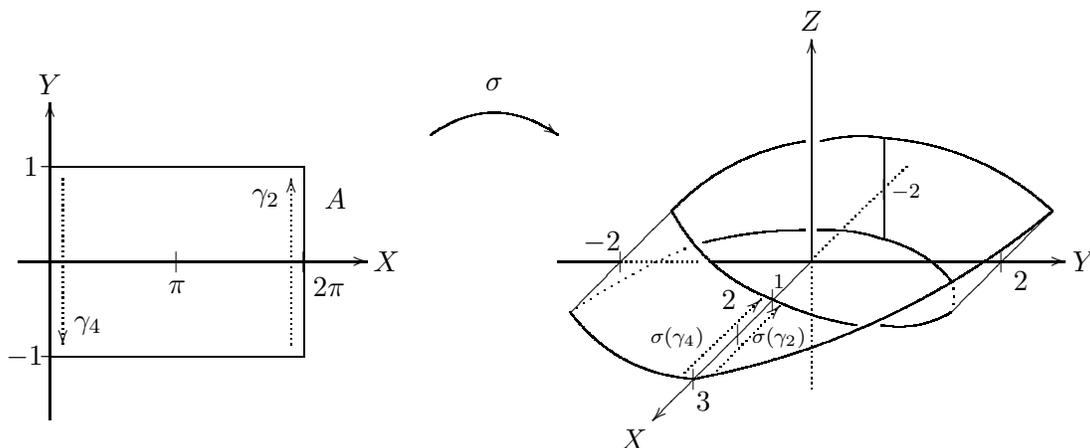


Figura 4.7: Una banda de Möbius parametrizada por la función $\sigma(x, y) = ((2 + y \cos(x/2)) \cos(x), (2 + y \cos(x/2)) \sin(x), y \sin(x/2))$

¹Esta superficie fue construida en 1858 de manera independiente por los matemáticos alemanes August Ferdinand Möbius (1790-1868) y Johann Benedict Listing (1808-1882).

El concepto de superficie orientada se puede describir en términos coloquiales de la siguiente manera: decimos que una superficie S es orientada si S tiene dos “lados” o dos “caras” perfectamente diferenciadas. Otra forma de decir esto mismo es la siguiente: existe una forma de “pintar” a toda la superficie S con dos colores distintos de tal manera que el único camino para “pasar” de un color a otro es a través del borde (geométrico) de S , o “perforándola”. Ejemplos de superficies orientadas son un cilindro o una esfera, en las cuales es muy fácil identificar sus dos “caras” (y que comúnmente llamamos “cara interior” y “cara exterior”). Este no es el caso de la cinta de Möbius² y de otra también muy famosa superficie, que además tiene la particularidad de ser una superficie “cerrada” (lo que significa que su borde “geométrico” es vacío, como en la esfera) y que se le conoce como la botella de Klein³ (ver figura 4.8).

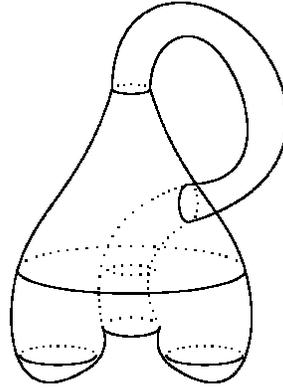


Figura 4.8: Una botella de Klein

La definición formal de superficie orientada es la siguiente:

Definición 4.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie. Decimos que S es orientada si existe $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que F es continua en S , $F(\hat{x})$ es un vector normal a S en \hat{x} y $\|F(\hat{x})\| = 1$, para toda $\hat{x} \in S$.

Dado que cualquier superficie S que estamos considerando cuenta con una parametrización σ de clase C^1 a partir de la cual, de acuerdo con 4.3, podemos asignar vectores normales a S en cada uno de sus puntos, es claro que cada parametrización puede inducir una orientación sobre S ; sin embargo, esta asignación de vectores normales no necesariamente cumple con todas las condiciones de la definición anterior, como sucede en el caso de la parametrización que dimos (¡o cualquier otra!) de la banda de Möbius (ver problema 3).

Un concepto que no hemos mencionado hasta ahora y que está relacionado con lo anterior, es el concepto de reparametrización de una superficie. Obsérvese que, si $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^1 tal que $\alpha(B) = A \subset \mathbb{R}^2$ y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S , entonces $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de S . Queda como un problema para el lector (el número 4) probar que los vectores normales inducidos por esta nueva parametrización $\tilde{\sigma}$ satisfacen que

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) = J\alpha(u, v) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right) \quad (4.7)$$

²Seguramente el lector alguna vez a construido una cinta de Möbius y ha intentado colorearla con las características descritas arriba (y si no la ha hecho ¡inténtelo!)

³Conocida con este nombre en honor de su creador, el matemático alemán Christian Felix Klein (1849-1925)

para toda $(u, v) \in B$.

Con la identidad anterior tenemos todo lo necesario para introducir el concepto de *reparametrización* de una superficie.

Definición 4.3 Dada $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie S y $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^1 , inyectiva en B y con $J\alpha \neq 0$ (salvo en un conjunto de medida de Jordan cero, para ambas condiciones) tal que $\alpha(B) = A$, decimos que la función $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una reparametrización de S . Si $J\alpha(u, v) \geq 0$ para toda $(u, v) \in B$ decimos que $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la misma “orientación” que σ y si $J\alpha(u, v) \leq 0$ para toda $(u, v) \in B$ entonces decimos que $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la “orientación” contraria a σ .

Como se recordará del capítulo 3, dada una parametrización γ de una curva Γ , se construye la parametrización $-\gamma$ que no es más que una reparametrización de Γ que la recorre justo en la dirección contraria que γ ; esta particularidad se reflejaba en el hecho de que los vectores tangentes a Γ inducidos por $-\gamma$ apuntan en la dirección contraria a los inducidos por γ . Esto mismo se puede hacer para las superficies y lo más interesante es que hay más de una forma de hacerlo. Por ejemplo, si $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie S , observe que la función $\tilde{\sigma} : \tilde{A} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, -v) \in A\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(u, -v)$ es una reparametrización de S (¿cuál sería la función $\alpha : \tilde{A} \rightarrow A$ en este caso?) que tiene la particularidad de que el vector normal inducido por $\tilde{\sigma}$ en cada punto de S , apunta en la dirección contraria al asignado por σ (ver figura 4.9).

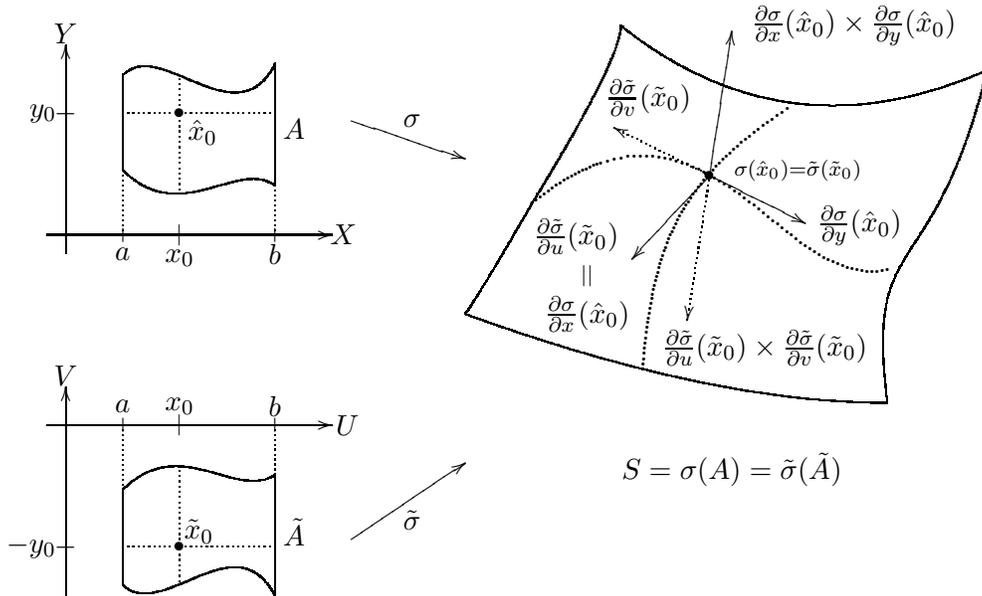


Figura 4.9: El vector normal inducido por la parametrización $\sigma(x, y)$ en cada punto de S , apunta en la dirección contraria al asignado por la parametrización $\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(u, -v)$

Terminamos el estudio del concepto de superficie, definiendo lo que significará para nosotros que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ sea una superficie por pedazos. Como es de esperarse, un conjunto S será una superficie por pedazos si se puede expresar como la unión finita de superficies. A diferencia de lo que hicimos para las curvas, en este caso no nos preocuparemos por “construir” una parametrización de todo S ; nos bastará con tener una parametrización de cada “pedazo” de S . Todo esto lo resumimos en la siguiente

Definición 4.4 Decimos que $S \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie por pedazos si existen $S_1, \dots, S_k \subset \mathbb{R}^n$ superficies tales que $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$. Si σ_i es una parametrización de S_i para $i = 1, \dots, k$, escribimos $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$ y decimos que σ es una parametrización⁴ de S .

Ejemplos de superficies por pedazos son un cubo (o parte de un cubo) y en general cualquier poliedro (o parte de un poliedro), o un cilindro con “tapas”, que además tiene la particularidad de ser una superficie cerrada (como sería el caso de un cubo o un poliedro completo). La forma en que se parametrice cada “pedazo” de una superficie S por pedazos es muy importante dado que por medio de cada una de esas parametrizaciones es que obtenemos vectores normales a S . En el siguiente ejemplo ilustramos lo anterior.

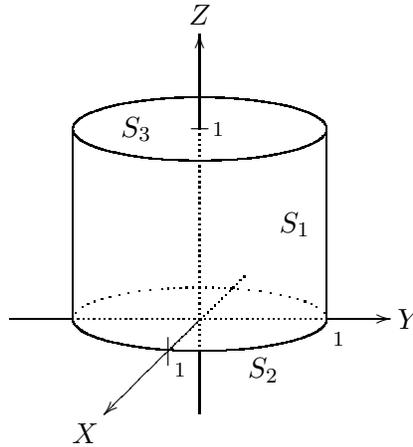


Figura 4.10: Un cilindro con “tapas” es ejemplo de una superficie por pedazos

Ejemplo 4.5 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie cerrada formada por el cilindro circular recto (cuyo eje es el eje Z) que está contenido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$, y los dos círculos que están contenidos en cada uno de estos dos planos y que forman las “tapas” de S . Calcular una parametrización de esta superficie.

Solución. Expresaremos a la superficie como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ en donde S_1 es el cilindro y S_2 y S_3 son las “tapas” (ver figura 4.10). Hacemos $\sigma_1 : A = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma_1(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y)$; $\sigma_2 : A = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma_2(x, y) = (y \cos(x), y \sin(x), 0)$ y $\sigma_3 : A = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma_3(x, y) = (y \cos(x), -y \sin(x), 1)$. De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x, y) &= (-\sin(x), \cos(x), 0) \times (0, 0, 1) \\ &= (\cos(x), \sin(x), 0) \end{aligned}$$

que son vectores normales a S que “apuntan” hacia afuera de S .

Análogamente

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x, y) = (-y \sin(x), y \cos(x), 0) \times (\cos(x), \sin(x), 0)$$

⁴Esta notación no significa que una “parametrización” de una superficie por pedazos sea una suma de parametrizaciones de cada uno de los “pedazos” de S .

$$= (0, 0, -y)$$

que son vectores normales a la tapa inferior de S que “apuntan” hacia afuera de S . Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x, y) &= (-y \operatorname{sen}(x), -y \operatorname{cos}(x), 0) \times (\operatorname{cos}(x), -\operatorname{sen}(x), 0) \\ &= (0, 0, y) \end{aligned}$$

que son vectores normales a la tapa superior de S que “apuntan” hacia afuera de S . Por tanto, la “parametrización” $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ de la superficie por pedazos S asigna vectores normales que “apuntan” hacia afuera de S .

4.1.1 Área de una superficie

Para concluir esta sección, abordaremos el problema de deducir lo que llamaremos el *área de una superficie* S parametrizada por una función $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cual, dada la naturaleza del problema, supondremos que es simple. Procederemos de la siguiente manera: primero, “aproximamos” al conjunto A por medio de una familia finita de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k (contenidos en A); después, “subdividimos” a la superficie S en un número finito de “pedazos” a través de la imagen de estos rectángulos bajo la función σ (ver figura 4.11). Lo primero que hay que notar es que eso a lo que queremos llamar el área de S (*área*(S)) se le puede aproximar por la suma de las áreas de cada uno de estos pedazos de superficie (o parches) $\sigma(R_i)$, es decir

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i=1}^k \text{área}(\sigma(R_i))$$

y que esta aproximación será mejor en la medida de que los rectángulos R_1, \dots, R_k sean más pequeños.

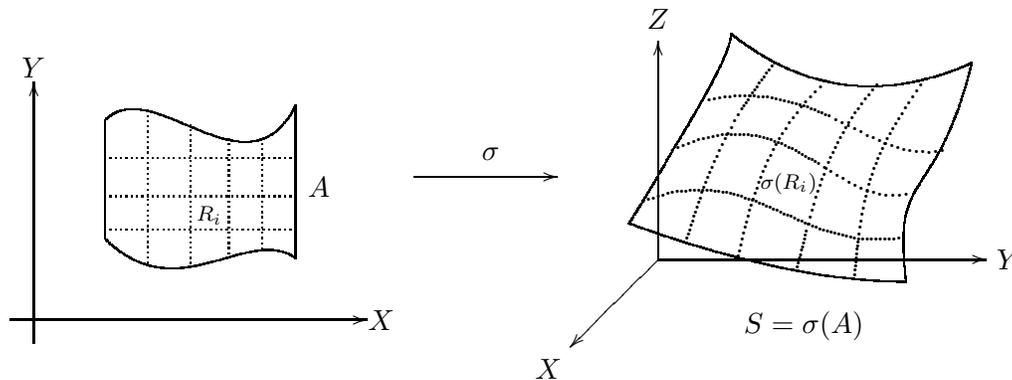


Figura 4.11: El área de una superficie S se puede aproximar por medio de la suma de las áreas de cada uno de los pedazos de superficie (o parches) $\sigma(R_i)$ y esta aproximación será mejor en la medida de que los rectángulos R_1, \dots, R_k sean más pequeños

En virtud de lo anterior, nuestro problema ahora es calcular o aproximar lo mejor que se pueda el área de cada pedazo de superficie $\sigma(R_i)$. Si $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ es un rectángulo muy pequeño es de esperarse que el pedazo de superficie $\sigma(R_i)$ se parezca mucho al paralelogramo P_i

generado por los vectores $\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$ (ver figura 4.12) de tal forma que, de acuerdo con lo que sabemos de la Geometría Analítica, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{área}(\sigma(R_i)) &\approx \text{área}(P_i) \\ &= \|(\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})) \times (\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}))\| \end{aligned}$$

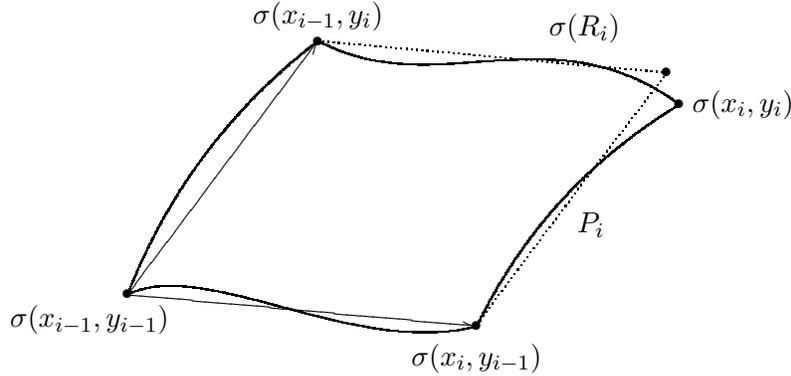


Figura 4.12: El área del pedazo de superficie $\sigma(R_i) \subset \mathbb{R}^3$ se parece mucho al área del paralelogramo $P_i \subset \mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$

Por otra parte, por el Teorema del Valor Medio aplicado a cada una de las funciones coordenadas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de σ , sabemos que

$$\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\xi_{1,i}, y_{i-1}), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\xi_{2,i}, y_{i-1}), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\xi_{3,i}, y_{i-1}) \right)$$

y

$$\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}) = (y_i - y_{i-1}) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x_{i-1}, \eta_{1,i}), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x_{i-1}, \eta_{2,i}), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x_{i-1}, \eta_{3,i}) \right)$$

en donde $\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i} \in (x_{i-1}, x_i)$ y $\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i} \in (y_{i-1}, y_i)$.

Por tanto, dado que las funciones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son de clase C^1 , si los intervalos (x_{i-1}, x_i) y (y_{i-1}, y_i) son muy pequeños, se tendrá que

$$\begin{aligned} \text{área}(\sigma(R_i)) &\approx \text{área}(P_i) & (4.8) \\ &= \|(\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})) \times (\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}))\| \\ &\approx \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \\ &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot \text{área}(R_i) \\ &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

para cualquier $\hat{\xi}_i \in R_i$.

Considerando todas estas aproximaciones, tenemos entonces que

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i=1}^k \text{área}(\sigma(R_i))$$

$$\begin{aligned} &\approx \sum_{i=1}^k \text{área}(P_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

y como seguramente el lector sabrá reconocer, esta última suma es una suma de Riemann de la integral

$$\int_A \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\|$$

de donde se intuye que la forma más adecuada de definir lo que es el área de una superficie S parametrizada por una función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la siguiente.

Definición 4.6 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por la función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si σ es una parametrización simple, definimos el área de S (que denotamos por $\text{área}(S)$) de la siguiente forma:

$$\text{área}(S) = \int_A \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \quad (4.9)$$

Vale la pena resaltar la analogía que existe entre la integral de la identidad anterior y la correspondiente integral que se obtuvo en el capítulo 3 (3.2) para calcular la longitud de una curva Γ parametrizada por una función γ .

Lo siguiente que haremos será mostrar con un ejemplo que la integral de 4.9 en efecto nos permite calcular eso que nuestra intuición nos dice que debe ser el área de una superficie S . Lo mostraremos con una superficie para la cual podamos “calcular su área” por “otro método”.

Ejemplo 4.7 Sea S el cilindro circular recto parametrizado por la función $\sigma(x, y) = (\cos(x), \text{sen}(x), y)$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Calcular el área de S .

Solución. Lo primero que hay que observar es que, si hacemos un “corte” vertical en el cilindro, y “aplanamos” la superficie (que en este caso sí se puede), entonces obtenemos un rectángulo cuya base mide 2π (el perímetro de la circunferencia que “genera” al cilindro) y altura 1 (ver figura 4.13). De esta forma, el área de S es 2π que es el valor que debemos obtener al calcular la integral de 4.9. Para calcular dicha integral, primero nótese que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = (-\text{sen}(x), \cos(x), 0) \quad y \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1)$$

de tal forma que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = (\cos(x), \text{sen}(x), 0)$$

para toda $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ (lo que significa que los vectores normales a S inducidos por la partición σ apuntan hacia “afuera” del cilindro). Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{área}(S) &= \int_A \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} 1 \end{aligned}$$

$$= \text{área}(A)$$

$$= 2\pi$$

que es lo que esperábamos.

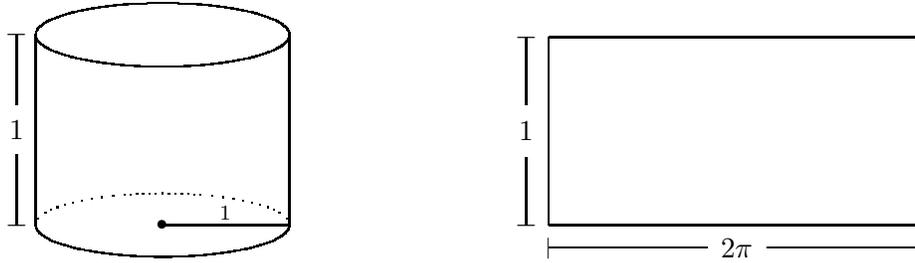


Figura 4.13: Si a la superficie de un cilindro circular recto (sin tapas) de altura 1 y base de radio 1 le hacemos un “corte” vertical y después la “aplanamos”, entonces obtenemos un rectángulo de base 2π (el perímetro de la circunferencia de radio 1) y altura 1 cuya área es 2π

4.2 Integrando funciones escalares

Ya en el capítulo tres mencionábamos el problema de calcular la masa total de una lámina no homogénea que tuviera la forma de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. En esta sección empezaremos por resolver este problema y su solución nos conducirá a la definición de lo que significa integrar una función de valores reales sobre una superficie S .

Supongamos que $\rho : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (continua) que en cada punto de S nos asigna su densidad de masa, y que S está parametrizada por la función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, inyectiva en el interior de su dominio (es decir, una parametrización simple). Procediendo como en el problema del cálculo del área de S , “aproximamos” al conjunto A por medio de una familia de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k contenidos en A , los cuales a su vez usamos para “aproximarnos” a la superficie S por medio de la imagen de estos rectángulos bajo la función σ . De esta forma, tenemos que

$$\text{masa}(S) \approx \sum_{i=1}^k \rho(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$$

donde $\hat{\xi}_i \in R_i$ para $i = 1, \dots, k$.

Ahora, si usamos la misma aproximación para el $\text{área}(\sigma(R_i))$ obtenida en 4.8, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{masa}(S) &\approx \sum_{i=1}^k \rho(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \text{área}(\sigma(R_i)) \\ &\approx \sum_{i=1}^k \rho(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

y esta última suma es fácilmente reconocible como una suma de Riemann de la integral

$$\int_A \rho(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\|$$

de tal forma que, como hemos hecho ya varias veces a lo largo de este texto, podemos deducir que

$$masa(S) = \int_A \rho(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \quad (4.10)$$

Obsérvese que de la identidad anterior se tiene que, si la función de densidad es constante ($\rho \equiv c$), es decir, que nuestra lámina es homogénea, entonces $masa(S) = c \cdot \text{área}(S)$ como tiene que suceder.

Con base en la identidad 4.10, definimos en general lo que significará la integral de una función f de valores reales definida sobre una superficie S que está parametrizada por una función σ , y que de aquí en adelante conoceremos como la *integral de superficie* de f sobre S , de la siguiente manera:

Definición 4.8 Sean, S una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos la integral de f sobre S según la parametrización σ , que denotamos por $\int_S f \|d\sigma\|$, como

$$\int_S f \|d\sigma\| = \int_A f(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \quad (4.11)$$

Como es de suponerse, esta definición se comporta bien con la aritmética básica de las funciones escalares, como lo establecemos en la siguiente proposición cuya prueba, sin lugar a dudas, queda en manos del lector.

Proposición 4.9 Si S es una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f, g : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_S (\alpha f + \beta g) \|d\sigma\| = \alpha \int_S f \|d\sigma\| + \beta \int_S g \|d\sigma\|$$

Otra cuestión importante con relación a la definición 4.8 es la de saber qué tanto depende el concepto de integral ahí definido, de la parametrización σ de la superficie S . Como en el caso de la integral de línea de funciones escalares, basta que dos parametrizaciones “recorran” a la superficie S esencialmente el mismo “número” de veces, para que el valor de la integral sea el mismo. Así, de acuerdo con la definición 4.3, basta que dos parametrizaciones de una superficie S la “recorran” con la misma dirección o con la dirección contraria, para que el valor de la integral 4.11 sea el mismo. Lo anterior queda expresado en la siguiente

Proposición 4.10 Sean, S una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $\tilde{\sigma} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización que “recorre” a S con la misma dirección o con la dirección contraria que σ entonces

$$\int_S f \|d\sigma\| = \int_S f \|d\tilde{\sigma}\|$$

Dem. De acuerdo con la definición 4.3, dado que $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la misma dirección o con la dirección contraria que σ , entonces existe $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $\det(D\alpha(u, v)) \geq 0$ para toda $(u, v) \in B$ ó $\det(D\alpha(u, v)) \leq 0$ para toda $(u, v) \in B$.

En cualquiera de estos dos casos, por el Teorema de Cambio de Variable sabemos que

$$\begin{aligned} \int_S f \|d\sigma\| &= \int_A f(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \\ &= \int_B f(\sigma(\alpha(u, v))) \cdot \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right\| \cdot |\det(D\alpha(u, v))| \\ &= \int_B f((\sigma \circ \alpha)(u, v)) \cdot \left\| \det(D\alpha(u, v)) \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right) \right\| \end{aligned}$$

de tal forma que por la identidad 4.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_S f \|d\sigma\| &= \int_B f(\tilde{\sigma}(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) \right\| \\ &= \int_S f \|d\tilde{\sigma}\| \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Concluimos esta breve sección extendiendo el concepto de integral de superficie de funciones escalares, a superficies por pedazos.

Definición 4.11 Sean, $S = S_1 \cup \dots \cup S_k \subset \mathbb{R}^3$ una superficie por pedazos con $\sigma_i : A_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S_i para $i = 1, \dots, k$, y $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Definimos la integral de f sobre S , que denotamos por $\int_S f \|d\sigma\|$, como

$$\int_S f \|d\sigma\| = \int_{S_1} f \|d\sigma_1\| + \dots + \int_{S_k} f \|d\sigma_k\|$$

donde $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$.

Es una tarea fácil (tarea que se deja al lector) mostrar que la proposición 4.9 se puede extender a superficies por pedazos.

4.3 Integrando funciones vectoriales

Vamos a motivar el concepto de integral de superficie de una función de valores vectoriales por medio del problema equivalente (en el espacio) al que usamos en el capítulo tres para motivar el concepto de divergencia (en el plano). Esto es, vamos a suponer que $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función que representa el campo de velocidades de un fluido y nuestro objetivo es encontrar una forma de “medir” qué tanto se “expande” este fluido a través de una superficie $S \subset U$.

Como hicimos antes, empezaremos por el caso más sencillo en el que F es constante, es decir, supondremos que $F(\hat{x}) \equiv \hat{F}$ para toda $\hat{x} \in U$. También empezaremos por suponer que S es una superficie plana, es decir, que existe $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano tal que $S \subset P$. De esta forma, y recurriendo a los mismos argumentos que usamos en el capítulo tres, si $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario que es normal al plano P (y por tanto a S), entonces el número $\hat{F} \cdot \hat{n}$ es una medida de qué tanto “cruza” el campo F a el plano P , en donde, como antes, su signo nos indica la dirección en la que lo hace

(si es positivo, “cruza” a P en la dirección en la que apunta \hat{n} , y si es negativo, en la dirección contraria). Por tanto, el número

$$(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{área}(S)$$

que es el volumen de un cilindro cuya base tiene la forma de la superficie S y altura $\hat{F} \cdot \hat{n}$, será una medida de qué tanto se “expande” el fluido representado por F a través de S (ver figura 4.14).

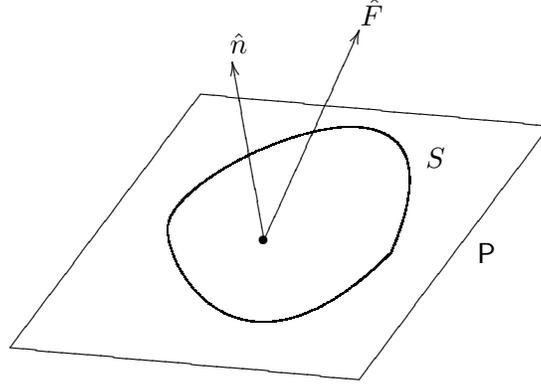


Figura 4.14: Si S es una superficie plana, es decir, contenida en un plano $P \subset \mathbb{R}^3$, y \hat{n} es un vector unitario que es normal a P (y por tanto a S), el número $\hat{F} \cdot \hat{n}$ es una medida de qué tanto “cruza” el vector \hat{F} a el plano P de modo que $(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{área}(S)$ será una medida de qué tanto se “expande” el fluido (cuya velocidad está representada por \hat{F}) a través de S

Para resolver el mismo problema en el caso más general (F no necesariamente constante y S no necesariamente plana), supondremos que S está parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una parametrización simple. Como ya hicimos en dos ocasiones en este capítulo, “aproximamos” al conjunto A por medio de una familia de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k contenidos en A , los cuales a su vez usamos para “aproximarnos” a la superficie S por medio de la imagen de estos rectángulos bajo la función σ .

Ahora, si para cada $i = 1, \dots, k$ elegimos $\hat{\xi}_i \in R_i$ tal que $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \neq \hat{0}$ y hacemos

$$\hat{n}_i = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|}$$

entonces el número

$$(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$$

es una medida de qué tanto se “expande” el fluido a través del pedazo de superficie $\sigma(R_i)$ en la dirección del vector normal \hat{n}_i (ver figura 4.15) de tal forma que

$$\sum_{i=1}^k (F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$$

será una medida de qué tanto se “expande” el fluido (cuya velocidad está dada por F) a través de la superficie S en la dirección de los vectores normales $\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k$ inducidos por σ .

Si ahora recordamos que en la sección 4.1 (4.8) obtuvimos que

$$\text{área}(\sigma(R_i)) \approx \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i)$$

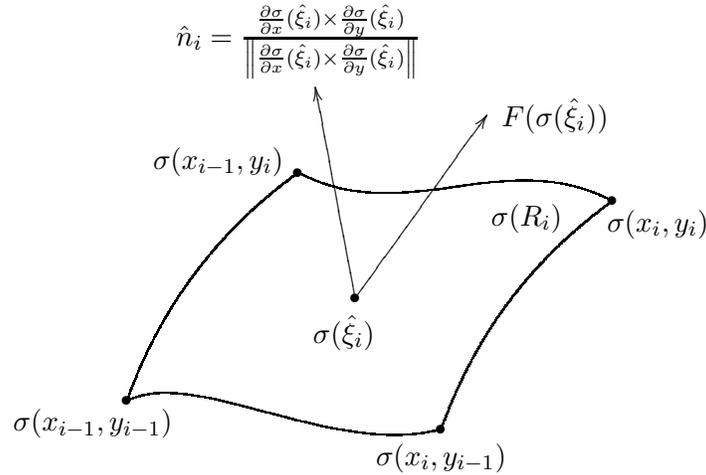


Figura 4.15: Si elegimos $\hat{\xi}_i \in R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ tal que $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \neq \hat{0}$ entonces el número $(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$ será una medida de qué tanto se “expande” el fluido (cuya velocidad está dada por el campo F) a través del pedazo de superficie $\sigma(R_i)$ en la dirección del vector normal \hat{n}_i inducido por σ

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k (F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i)) \\ & \approx \sum_{i=1}^k \left(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|} \right) \cdot \left(\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \right) \\ & = \sum_{i=1}^k \left(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right) \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

y esta última suma es fácilmente reconocible como una suma de Riemann de la integral

$$\int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$$

por lo que podemos intuir que la solución a nuestro problema está dada por esta integral.

El problema que planteamos y la solución que dedujimos son la base sobre la cual se obtiene el concepto de *integral de superficie de una función de valores vectoriales* y que dan pie a la siguiente

Definición 4.12 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Definimos la integral de F sobre S , que denotamos por $\int_S F \cdot d\sigma$, como

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$$

Si $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ es una superficie por pedazos y $\sigma_i : A_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S_i para cada $i = 1, \dots, k$, definimos

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 + \dots + \int_{S_k} F \cdot d\sigma_k$$

donde $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo se calcula una de estas integrales de superficie.

Ejemplo 4.13 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio $r > 0$ con centro en el origen, y $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Calcule $\int_S F \cdot d\sigma$ donde σ sea una parametrización que induzca vectores normales a S que apunten hacia adentro de S .

Solución. Parametrizamos a S por medio de la función

$$\sigma(x, y) = (r \cos(x) \operatorname{sen}(y), r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(y))$$

con $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= (-r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(x) \operatorname{sen}(y), 0) \times (r \cos(x) \cos(y), r \operatorname{sen}(x) \cos(y), -r \operatorname{sen}(y)) \\ &= -r \operatorname{sen}(y)(r \cos(x) \operatorname{sen}(y), r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(y)) \end{aligned}$$

los cuales son vectores normales a S que apuntan hacia adentro de S .

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \int_S F \cdot d\sigma \\ &= \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= \int_A \frac{1}{r^2} (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y)) \cdot (-r^2 \operatorname{sen}(y)(\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))) \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} -\operatorname{sen}(y) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} dx \right) \left(\int_0^\pi -\operatorname{sen}(y) dy \right) \\ &= 2\pi \left(\cos(y) \Big|_0^\pi \right) \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Con respecto a este ejemplo, vale la pena hacer las siguientes dos observaciones. La primera es que el campo F es tal que en cada punto $\hat{x} \in S$, $F(\hat{x})$ es un vector normal que apunta justo en la dirección normal y hacia afuera de S , lo que explica que el valor de la integral sea distinto de cero y negativo; y la segunda, que el valor de la integral es independiente del radio de la esfera. Ambos hechos jugarán un papel importante más adelante.

Como es de esperarse, este nuevo tipo de integral se lleva bien con la aritmética elemental de las funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , lo cual dejamos expresado en la siguiente

Proposición 4.14 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F, G : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_S (\alpha F + \beta G) \cdot d\sigma = \alpha \int_S F \cdot d\sigma + \beta \int_S G \cdot d\sigma$$

Si $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ es una superficie por pedazos y $\sigma_i : A_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S_i para cada $i = 1, \dots, k$, entonces la identidad anterior también se cumple, con $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$.

Dem. Se deja al lector ■

Como en los casos anteriores, es importante saber qué tanto depende la integral sobre una superficie S de una función de valores vectoriales F , de la parametrización σ de S que utilicemos. Dado que esta integral se puede interpretar como una medida de qué tanto se “expande” el campo F en la dirección de los vectores normales inducidos por la parametrización σ , es de esperarse que si otra parametrización $\tilde{\sigma}$ recorre a la superficie S con la misma orientación que σ , entonces las integrales son iguales para ambas parametrizaciones, mientras que si $\tilde{\sigma}$ recorre a la superficie S con la orientación contraria, entonces las integrales difieren sólo por el signo. Concluimos esta sección con una proposición que expresa justo estas propiedades.

Proposición 4.15 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Sean $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\tilde{\sigma} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S tales que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ .

1. si $\tilde{\sigma}$ recorre a S con la misma orientación que σ entonces

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_S F \cdot d\tilde{\sigma}$$

2. si $\tilde{\sigma}$ recorre a S con la orientación contraria que σ entonces

$$\int_S F \cdot d\sigma = - \int_S F \cdot d\tilde{\sigma}$$

Dem. Haremos la prueba del segundo inciso y se deja al lector la prueba del primero. Dado que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ , sabemos que existe $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha$, y como $\tilde{\sigma}$ recorre a S con la orientación contraria que σ entonces $\det(D\alpha(u, v)) \leq 0$ para toda $(u, v) \in B$. Por tanto, por el Teorema de Cambio de Variable y la identidad 4.7, tenemos que

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_B F(\sigma(\alpha(u, v))) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) |\det(D\alpha(u, v))| \\
&= - \int_B F(\tilde{\sigma}(u, v)) \cdot \left(\det(D\alpha(u, v)) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right) \\
&= - \int_B F(\tilde{\sigma}(u, v)) \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) \\
&= - \int_S F \cdot d\tilde{\sigma}
\end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Es importante que el lector note la analogía que existe entre la proposición anterior y la proposición 3.16 del tercer capítulo.

4.4 El teorema de Stokes

Cuando en el capítulo tres formulamos el Teorema de Green, dijimos que este resultado se podía interpretar como una generalización del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo. En efecto, así como este último teorema establece que la integral sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ de una derivada f' se puede calcular simplemente evaluando la función original f en los puntos a y b (que por cierto forman “el borde” del intervalo $[a, b]$), el teorema de Green establece que la integral sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ de $\text{Rot } F(\hat{x})$ (que es como una cierta “derivada” de F) se puede calcular “evaluando” la función original F sobre el “borde” de A (la integral de línea de F sobre $\Gamma = \partial A$). De hecho, en el caso del segundo teorema fundamental, éste se puede “extender” al cálculo de integrales sobre conjuntos unidimensionales (como lo es el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$) contenidos en espacios de dimensión más alta (\mathbb{R}^n), es decir, sobre curvas. Esto está expresado en la identidad

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

en donde $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de la curva $\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y en donde en lugar de integrar f' integramos $\nabla \varphi$.

Como seguramente el lector estará sospechando, ahora la pregunta es: ¿el Teorema de Green se puede “extender” al cálculo de integrales sobre conjuntos dos-dimensionales no necesariamente planos, es decir, superficies? La respuesta es que sí y eso es justo de lo que trata el Teorema de Stokes⁵.

Aun cuando la discusión anterior nos puede dar una idea de lo que afirma el Teorema de Stokes, es mejor deducirlo a partir de la interpretación física y geométrica de los conceptos que involucra, que en este caso son el de integral de superficie y el del rotacional de un campo. Como en el caso de los teoremas que hemos mencionado, el Teorema de Stokes trata de cómo calcular la integral sobre una superficie S de un cierto tipo de “derivada” de una función F de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , el rotacional

⁵Nombrado así por el físico y matemático inglés George Gabriel Stokes (1819-1903), a pesar de que la primera formulación conocida del teorema fue realizada por William Thomson (Lord Kelvin) y aparece en una correspondencia que él mantuvo con Stokes.

de F ($\mathbf{Rot}F$), es decir, trata de

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

Supongamos entonces que tenemos $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U . Como hemos hecho en ocasiones anteriores, “aproximamos” al conjunto A con un número finito de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k contenidos en A de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma &= \int_A \mathbf{Rot}F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) \\ &\approx \sum_{i=1}^k \mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|} \right) \left(\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \right) \end{aligned}$$

con $\hat{\xi}_i \in \text{int}(R_i)$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Ahora, si hacemos

$$\hat{n}_i = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|}$$

y recordamos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) &\approx \text{área}(\sigma(R_i)) \\ &\approx \text{área}(P_i) \end{aligned}$$

en donde P_i es el paralelogramo que tomamos en 4.8 y que se “parece” mucho a $\sigma(R_i)$ (figura 4.12), para cada $i = 1, \dots, k$, tenemos entonces que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \approx \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i \right) \text{área}(P_i)$$

Una vez que hemos llegado hasta aquí, es el momento de recordar la identidad 3.30 del capítulo tres y tomarnos la libertad de sustituir cuadrados con paralelogramos en dicha identidad, de tal manera que podamos afirmar que

$$\left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i \right) \text{área}(P_i) \approx \int_{\partial P_i} F \cdot d\delta_i$$

en donde δ_i es una parametrización del borde ∂P_i del paralelogramo P_i que lo recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el vector unitario \hat{n}_i .

Nótese que, como el campo F y la parametrización σ son funciones de clase C^1 , si $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ y C_i es el “cuadrilátero” (formado por la unión de dos triángulos, no necesariamente contenidos en el mismo plano) cuyos vértices son los puntos $\sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$, $\sigma(x_{i-1}, y_i)$, $\sigma(x_i, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_i)$ (ver figura 4.16), entonces C_i y P_i “se parecen mucho” de tal forma que

$$\int_{\partial P_i} F \cdot d\delta_i \approx \int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i$$

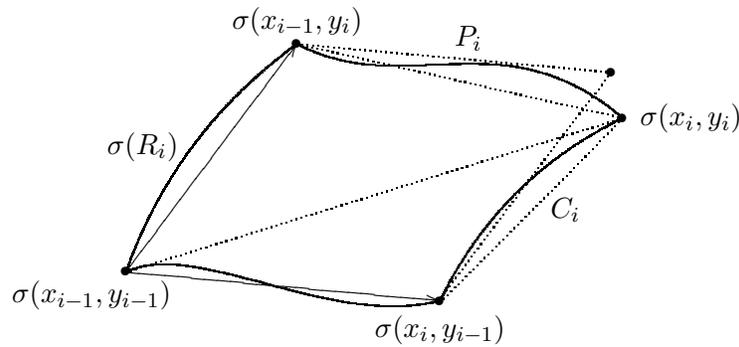


Figura 4.16: Si $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ y C_i es el “cuadrilátero” (formado por la unión de dos triángulos, no necesariamente contenidos en el mismo plano) cuyos vértices son los puntos $\sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$, $\sigma(x_{i-1}, y_i)$, $\sigma(x_i, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_i)$, entonces C_i y P_i “se parecen mucho”

en donde ahora $\tilde{\delta}_i$ es una parametrización del borde ∂C_i del cuadrilátero C_i que lo recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el vector unitario \hat{n}_i . De esta forma, tenemos que

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma \approx \sum_{i=1}^k \int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i$$

y esta aproximación será mejor en la medida de que los cuadriláteros C_i sean muy pequeños (es decir, si los rectángulos R_i son muy pequeños).

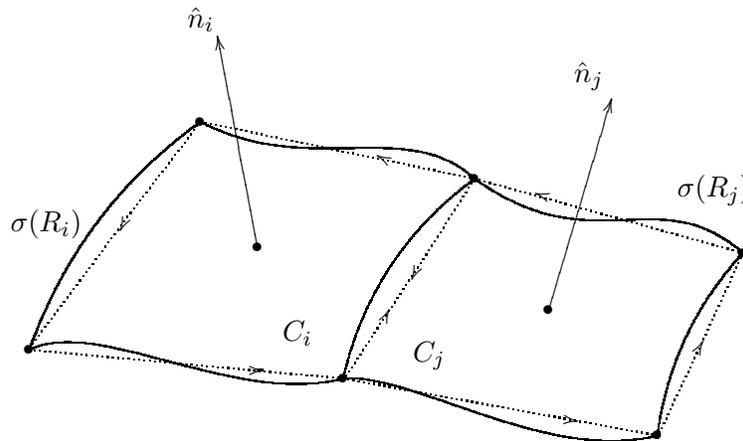


Figura 4.17: Si C_i y C_j son dos cuadriláteros adyacentes, la integral del campo F sobre el lado común a ambos cuadriláteros se cancela de tal forma que la suma de las integrales sobre el borde de cada uno de ellos, es igual a la integral de F sobre el borde de $C_i \cup C_j$, recorrido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apunta el vector \hat{n}_i o el vector \hat{n}_j

Ahora obsérvese que, dado que cada una de las integrales $\int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i$ se puede descomponer como la suma de cuatro integrales (sobre cada uno de los lados del cuadrilátero C_i), si C_i y C_j son

dos cuadriláteros adyacentes, entonces en la suma

$$\int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i + \int_{\partial C_j} F \cdot d\tilde{\delta}_j$$

se cancela justo la integral sobre el lado común a ambos cuadriláteros de tal forma que esta suma es igual a la integral de F sobre el borde de $C_i \cup C_j$, recorrido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apunta el vector \hat{n}_i o el vector \hat{n}_j (ver figura 4.17). Si este proceso de “cancelación” de integrales sobre lados adyacentes lo hacemos para todos los C_i , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i = \int_{\Gamma} F \cdot d\tilde{\delta}$$

en donde Γ es la curva poligonal formada por todos los lados de los C_i que no se cancelaron, y $\tilde{\delta}$ es una parametrización de ésta que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apuntan los vectores normales inducidos por σ (ver figura 4.18). Lo mejor de todo esto es que, nuevamente, si los cuadriláteros C_i son muy pequeños (es decir, los rectángulos R_i son muy pequeños) entonces se tiene que $\Gamma \approx \partial_{\sigma} S$ (el borde de S inducido por σ definido en 4.4) y por lo tanto

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\tilde{\delta} \approx \int_{\partial_{\sigma} S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

en donde $\tilde{\gamma}$ es la parametrización de $\partial_{\sigma} S$ dada en 4.5.

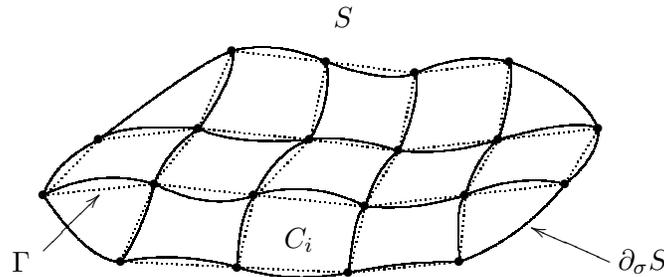


Figura 4.18: Si Γ es la curva poligonal formada por todos los lados de los cuadriláteros C_i que no se cancelan, y los C_i son muy pequeños (es decir, los rectángulos R_i son muy pequeños) entonces se tiene que $\Gamma \approx \partial_{\sigma} S$ (el borde de S inducido por σ)

Todas estas identidades y aproximaciones sugieren que

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial_{\sigma} S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

¡y esto es justo lo que asegura el Teorema de Stokes!

Con base en esta última identidad, formulamos el Teorema de Stokes de la siguiente manera:

Teorema 4.16 (de Stokes) Sean, $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 ⁽⁶⁾, $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de ∂A (el borde de A , una curva cerrada simple) que lo recorre (una vez) en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U . Entonces

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

en donde $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $\partial_\sigma S = \sigma(\partial A)$ (el borde de S inducido por σ).

Dem. Dado que esta prueba está basada en el Teorema de Green (como era de esperarse), suponemos que $A \subset \mathbb{R}^2$ es una región tipo I y tipo II.

Si hacemos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v))$$

se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma \\ &= \int_A \mathbf{Rot} F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \\ &= \int_A \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\sigma(u, v)) \right) n_1(u, v) + \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(u, v)) \right) n_2(u, v) \\ &+ \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) \right) n_3(u, v) \\ &= \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) n_2(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) n_3(u, v) \right) \\ &+ \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\sigma(u, v)) n_3(u, v) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\sigma(u, v)) n_1(u, v) \right) \\ &+ \int_A \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(u, v)) n_1(u, v) - \frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(u, v)) n_2(u, v) \right) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} &= \int_a^b (P(\tilde{\gamma}(t)), Q(\tilde{\gamma}(t)), R(\tilde{\gamma}(t))) \cdot (\tilde{\gamma}'_1(t), \tilde{\gamma}'_2(t), \tilde{\gamma}'_3(t)) dt \\ &= \int_a^b P(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_1(t) dt + \int_a^b Q(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_2(t) dt + \int_a^b R(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_3(t) dt \end{aligned}$$

en donde $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3) = (\sigma_1 \circ \gamma, \sigma_2 \circ \gamma, \sigma_3 \circ \gamma)$.

⁶Aun cuando esta hipótesis no es necesaria, se pide así para hacer un poco más sencilla la prueba

Probaremos que

$$\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v))n_2(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v))n_3(u, v) \right) = \int_a^b P(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'_1(t)dt$$

$$\int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\sigma(u, v))n_3(u, v) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\sigma(u, v))n_1(u, v) \right) = \int_a^b Q(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'_2(t)dt$$

y que

$$\int_A \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(u, v))n_1(u, v) - \frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(u, v))n_2(u, v) \right) = \int_a^b R(\tilde{\gamma}(t))\tilde{\gamma}'_3(t)dt$$

Hacemos $\tilde{F} = (\tilde{P}, \tilde{Q}) = \left((P \circ \sigma) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, (P \circ \sigma) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right)$. Como σ es de clase C^2 , se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Rot } \tilde{F}(u, v) &= \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v}(u, v) \\ &= \left((P \circ \sigma) \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v} + \frac{\partial (P \circ \sigma)}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v) - \left((P \circ \sigma) \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v \partial u} + \frac{\partial (P \circ \sigma)}{\partial v} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) (u, v) \\ &= \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) \left[\frac{\partial P}{\partial x}(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u, v) \right] \\ &\quad - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) \left[\frac{\partial P}{\partial x}(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u, v) \right] \\ &= \frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \right) (u, v) \end{aligned}$$

Por tanto, como

$$n_2(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v)$$

y

$$n_3(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v)$$

por el Teorema de Green se tiene que

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v))n_2(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v))n_3(u, v) \right) &= \int_A \frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v) \\ &\quad - \int_A \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v) \\ &= \int_A \text{Rot } \tilde{F}(u, v) \\ &= \int_{\partial A} \tilde{F} \cdot d\gamma \\ &= \int_a^b \tilde{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} (P \circ \sigma), \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} (P \circ \sigma) \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b (P \circ \sigma) (\gamma(t)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
 &= \int_a^b P((\sigma \circ \gamma)(t)) (\sigma_1 \circ \gamma)'(t) dt \\
 &= \int_a^b P(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_1(t) dt
 \end{aligned}$$

Las dos identidades restantes se prueban de manera análoga (se dejan como un problema para el lector) ■

Es importante mencionar que la versión del Teorema de Stokes que hemos dado aquí tiene dos particularidades que vale la pena destacar. La primera, es que en la identidad

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} \tag{4.12}$$

que se establece en el teorema, se usa el “borde” de la superficie S inducido por la parametrización σ ($\partial_\sigma S$) y no el “borde geométrico” de S (∂S), que es como suele hacerse la mayoría de las veces. Hacerlo de esta forma tiene la ventaja de que nos ahorramos la definición precisa del “borde geométrico” ∂S (cuestión que discutimos ampliamente en la sección 4.1) además de que la demostración más frecuente (por ser la más sencilla) es precisamente la que hicimos aquí y que es usando el “borde” $\partial_\sigma S$. En todo caso, la validez de la identidad 4.12 en términos del “borde geométrico” ∂S es un problema que tiene que ver con la parametrización σ de S que se use y que casi siempre se resuelve tomando una parametrización simple σ (para que $\partial_\sigma S$ y ∂S coincidan, o cuando menos que $\partial S \subset \partial_\sigma S$, como también lo discutimos en la sección 4.1), junto con la hipótesis de que S sea una superficie orientable.

Y justo la segunda particularidad que se quiere destacar es que en la formulación que hemos dado, no es necesario suponer que S sea una superficie orientable, lo cual tiene que ver con el hecho de que el teorema lo escribimos precisamente en términos de $\partial_\sigma S$ y no de ∂S .

A continuación damos un par de ejemplos que sirven para ilustrar estas características del Teorema de Stokes.

Ejemplo 4.17 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, 3\pi/4] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \sin(y))$, y $F(x, y, z) = (-zy, zx, 0)$ para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Muestre que

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma \neq \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

Solución. En este caso S es la parte del cilindro circular recto contenido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$, cuyo eje es el eje Z , y σ es una parametrización de S que recorre dos veces parte de éste (la parte contenida entre los planos $z = 1/\sqrt{2}$ y $z = 1$, ver figura 4.19). Por esta razón, σ asigna dos

vectores normales en cada punto de esta parte que recorre dos veces, como se observa al calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) &= (-\operatorname{sen}(x), \cos(x), 0) \times (0, 0, \cos(y)) \\ &= (\cos(x) \cos(y), \operatorname{sen}(x) \cos(y), 0) \end{aligned}$$

el cual es un vector normal a S que apunta hacia afuera si $y \in [0, \pi/2)$, y hacia adentro si $y \in (\pi/2, 3\pi/4]$.

Por tanto, como

$$\mathbf{Rot}F(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma &= \int_A \mathbf{Rot}F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= \int_A (-\cos(x), -\operatorname{sen}(x), 2\operatorname{sen}(y)) \cdot (\cos(x) \cos(y), \operatorname{sen}(x) \cos(y), 0) \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, 3\pi/4]} -\cos(y) \\ &= 2\pi \left(-\operatorname{sen}(y) \Big|_0^{3\pi/4} \right) \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

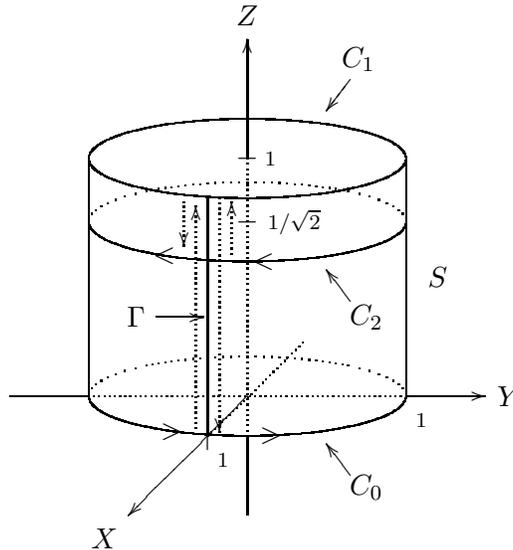


Figura 4.19: Para $S = \sigma(A)$ con $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, 3\pi/4] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(y))$, se tiene que $\partial S = C_0 \cup C_1$ y $\partial_\sigma S = C_0 \cup C_2 \cup \Gamma$

Por otra parte, $\partial S = C_0 \cup C_1$, con C_0 la circunferencia de radio 1 que está contenida en el plano $z = 0$ con centro en el origen, y C_1 la circunferencia de radio 1 que está contenida en el

plano $z = 1$ con centro en el punto $(0, 0, 1)$. Dado que $F(x, y, 0) = (0, 0, 0)$ para toda $(x, y, 0) \in C_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_{C_0 \cup C_1} F \cdot d\gamma \\
 &= \int_{C_0} F \cdot d\gamma + \int_{C_1} F \cdot d\gamma \\
 &= 0 + \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \text{sen}(t), 1) \cdot (-\text{sen}(t), \cos(t), 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} (-\text{sen}(t), \cos(t), 0) \cdot (-\text{sen}(t), \cos(t), 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} dt \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

en donde tomamos la parametrización de C_1 que la recorre en el sentido de las manecillas del reloj cuando se le mira desde los vectores normales inducidos por σ que apuntan hacia afuera de S . Con esto mostramos que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \neq \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

y esto seguirá siendo cierto aunque parametricemos a C_1 en la dirección contraria.

Observe que $\partial_\sigma S = C_0 \cup C_2 \cup \Gamma$, ahora con C_2 la circunferencia de radio 1 que está contenida en el plano $z = 1/\sqrt{2}$ con centro en el punto $(0, 0, 1/\sqrt{2})$, y Γ el segmento que une a los puntos $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 1/\sqrt{2})$ (pasando por el punto $(1, 0, 1)$). Como este último segmento es recorrido dos veces (de ida y de regreso) por la parametrización $\tilde{\gamma}$ de $\partial_\sigma S$ (dada por la identidad 4.5), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} &= \int_{C_0 \cup C_2 \cup \Gamma} F \cdot d\tilde{\gamma} \\
 &= \int_{C_0} F \cdot d\tilde{\gamma} + \int_{C_2} F \cdot d\tilde{\gamma} + \int_{\Gamma} F \cdot d\tilde{\gamma} \\
 &= 0 + \int_0^{2\pi} F(\cos(2\pi - t), \text{sen}(2\pi - t), \text{sen}(3\pi/4)) \cdot (\text{sen}(2\pi - t), -\cos(2\pi - t), 0) dt + 0 \\
 &= \int_0^{2\pi} 1/\sqrt{2} (-\text{sen}(2\pi - t), \cos(2\pi - t), 0) \cdot (\text{sen}(2\pi - t), -\cos(2\pi - t), 0) dt \\
 &= -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \\
 &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma
 \end{aligned}$$

con lo cual confirmamos lo que asegura el Teorema de Stokes.

Si en el ejemplo anterior se muestra que la no inyectividad de una parametrización σ es determinante para que la identidad $\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$ no se satisfaga, en el siguiente ejemplo mostraremos que aun cuando la parametrización sea simple, si la superficie S no es orientable, entonces dicha identidad tampoco se cumple. Como es de suponerse, S será la banda de Möbius y usaremos la parametrización que dimos en la sección 4.1.

Ejemplo 4.18 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la banda de Möbius parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$\sigma(x, y) = 2(\cos(x), \sin(x), 0) + y(\cos(x/2)\cos(x), \cos(x/2)\sin(x), \sin(x/2))$$

y

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$. Muestre que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \neq \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

Solución. Como se mencionó en el capítulo 3, es fácil ver que $\mathbf{Rot}F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$, y por lo tanto se tiene que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = 0$$

Por otra parte, si hacemos $\zeta(x) = \sigma(x, -1)$ y $\delta(x) = \sigma(x, 1)$, con $x \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (2\cos(x) - \cos(x/2)\cos(x), 2\sin(x) - \cos(x/2)\sin(x), -\sin(x/2)) \\ &= (\cos(x)[2 - \cos(x/2)], \sin(x)[2 - \cos(x/2)], -\sin(x/2)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \delta(x) &= (2\cos(x) + \cos(x/2)\cos(x), 2\sin(x) + \cos(x/2)\sin(x), \sin(x/2)) \\ &= (\cos(x)[2 + \cos(x/2)], \sin(x)[2 + \cos(x/2)], \sin(x/2)) \end{aligned}$$

de tal forma que $\zeta + \delta$ resulta ser una parametrización de ∂S que la recorre en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde un punto de la parte positiva del eje Z (ver figura 4.20).

Realizando unos fáciles cálculos (que se dejan al lector), se obtiene que $F(\zeta(x)) \cdot \zeta'(x) = 1$ y $F(\delta(x)) \cdot \delta'(x) = 1$ para toda $x \in [0, 2\pi]$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot d(\zeta + \delta) &= \int_0^{2\pi} F(\zeta(x)) \cdot \zeta'(x) dx + \int_0^{2\pi} F(\delta(x)) \cdot \delta'(x) dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} dx \end{aligned}$$

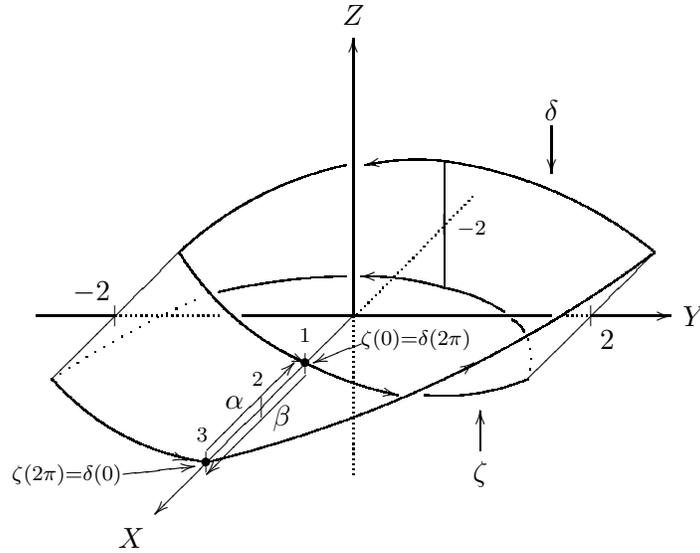


Figura 4.20: Una banda de Möbius parametrizada por la función $\sigma(x, y) = ((2 + y \cos(x/2)) \cos(x), (2 + y \cos(x/2)) \sin(x), y \sin(x/2))$

$$= 4\pi \\ \neq \int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma$$

Ahora, si hacemos $\alpha(y) = \sigma(2\pi, y) = (2 - y, 0, 0)$ y $\beta(y) = \sigma(0, y) = (2 + y, 0, 0)$, con $y \in [-1, 1]$, entonces $\tilde{\gamma} = \zeta + \alpha + (-\delta) + (-\beta)$ es una parametrización de $\partial_\sigma S$ (como la que se toma en el Teorema de Stokes) de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} &= \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d(\zeta + \alpha + (-\delta) + (-\beta)) \\ &= \int_0^{2\pi} F(\zeta(x)) \cdot \zeta'(x) dx + \int_{-1}^1 F(\alpha(y)) \cdot \alpha'(y) dy - \int_0^{2\pi} F(\delta(x)) \cdot \delta'(x) dx - \int_{-1}^1 F(\beta(y)) \cdot \beta'(y) dy \\ &= 2\pi + \int_{-1}^1 \left(0, \frac{1}{2-y}, 0\right) \cdot (-1, 0, 0) dy - 2\pi - \int_{-1}^1 \left(0, \frac{1}{2+y}, 0\right) \cdot (1, 0, 0) dy \\ &= 2\pi + \int_{-1}^1 0 dy - 2\pi - \int_{-1}^1 0 dy \\ &= 0 \\ &= \int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma \end{aligned}$$

con lo que nuevamente comprobamos la conclusión de dicho teorema.

Finalmente, en el siguiente ejemplo tomaremos una superficie orientable S y σ una parametrización simple de S , y verificaremos que en ese caso sí se cumple que $\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$, en

donde γ es una parametrización que recorre a ∂S en el sentido de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apuntan los vectores normales a S inducidos por σ .

Ejemplo 4.19 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la semiesfera de radio 1 parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))$, y $F(x, y, z) = (y, -x, xy)$ para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Muestre que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

en donde γ es una parametrización que recorre a ∂S en el sentido de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apuntan los vectores normales a S inducidos por σ .

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) &= (-\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(x) \operatorname{sen}(y), 0) \times (\cos(x) \cos(y), \operatorname{sen}(x) \cos(y), -\operatorname{sen}(y)) \\ &= -\operatorname{sen}(y)(\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y)) \end{aligned}$$

por lo que los vectores normales a S inducidos por σ apuntan hacia adentro de la semiesfera. Por otra parte

$$\mathbf{Rot}F(x, y, z) = (x, -y, -2)$$

Así,

$$\begin{aligned} &\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= \int_A \mathbf{Rot}F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= \int_A (\cos(x) \operatorname{sen}(y), -\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), -2) \cdot (-\operatorname{sen}(y)(\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))) \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} -\operatorname{sen}(y) \left[(\cos(x) \operatorname{sen}(y))^2 - (\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y))^2 - 2 \cos(y) \right] \\ &= - \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} \operatorname{sen}^3(y) \cos(2x) + \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} 2 \operatorname{sen}(y) \cos(y) \\ &= - \left(\int_0^{2\pi} \cos(2x) dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(y) dy \right) + 2\pi \int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen}(y) \cos(y) dy \\ &= -0 + 2\pi \left(\operatorname{sen}^2(y) \Big|_0^{\pi/2} \right) \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Ahora, dado que ∂S es la circunferencia unitaria contenida en el plano $z = 0$ con centro en el origen, y dado que los vectores normales a S inducidos por σ apuntan hacia adentro de la semiesfera, definimos $\gamma(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 0)$ de modo que

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(t), -\operatorname{cos}(t), -2) \cdot (-\operatorname{sen}(t), -\operatorname{cos}(t), 0) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} dt \\
 &= 2\pi \\
 &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma
 \end{aligned}$$

que es lo que deseábamos mostrar.

En el capítulo tres formulamos una versión más general del Teorema de Green la cual consistía en considerar campos definidos sobre regiones cuyo borde estaba formado por más de una curva (teorema 3.32). Para el caso del Teorema de Stokes, la situación equivalente consistirá en considerar una superficie S parametrizada por una función σ definida sobre una región $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que el borde (o frontera) de A (∂A) esté formada por más de una curva. En este caso es muy probable que la curva ∂S también esté formada por más de una curva, aunque esto ya podía suceder aun cuando la ∂A estuviera formada de una sólo curva (como en el caso en que S es un cilindro).

Así, la generalización del Teorema de Stokes queda formulada de la siguiente manera y su prueba, por las mismas razones que en el caso de la generalización del Teorema de Green, tampoco la daremos.

Teorema 4.20 (de Stokes (versión general)) Sean, $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U . Si $\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$, con $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ curvas cerradas simples y Γ_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto), entonces

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\tilde{\Gamma}_0} F \cdot d\tilde{\gamma}_0 + \int_{\tilde{\Gamma}_1} F \cdot d\tilde{\gamma}_1 + \dots + \int_{\tilde{\Gamma}_k} F \cdot d\tilde{\gamma}_k$$

en donde $\tilde{\Gamma}_i = \sigma(\Gamma_i)$, $\tilde{\gamma}_i = \sigma \circ \gamma_i$ y γ_i una parametrización de Γ_i que la recorre una vez, en el sentido de las manecillas del reloj para $i = 1, \dots, k$ y γ_0 en el contrario (ver figura 4.21).

Como sucede en el caso del Teorema de Green, en la mayoría de los problemas en los que se puede aplicar la versión anterior del Teorema de Stokes, también se pueden resolver adaptándolos a una aplicación de la versión más sencilla.

Entre las consecuencias importantes del Teorema de Stokes está la de poder generalizar la identidad 3.30 del capítulo tres, en la que se establece que

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)}$$

en donde R_r representa un cuadrado centrado en el punto \hat{x}_0 contenido en un plano P , \hat{n} es un vector unitario normal al mismo plano P , y $\Gamma_r = \partial R_r$.

Como anunciamos en ese mismo capítulo, la identidad anterior se generaliza de la siguiente manera.

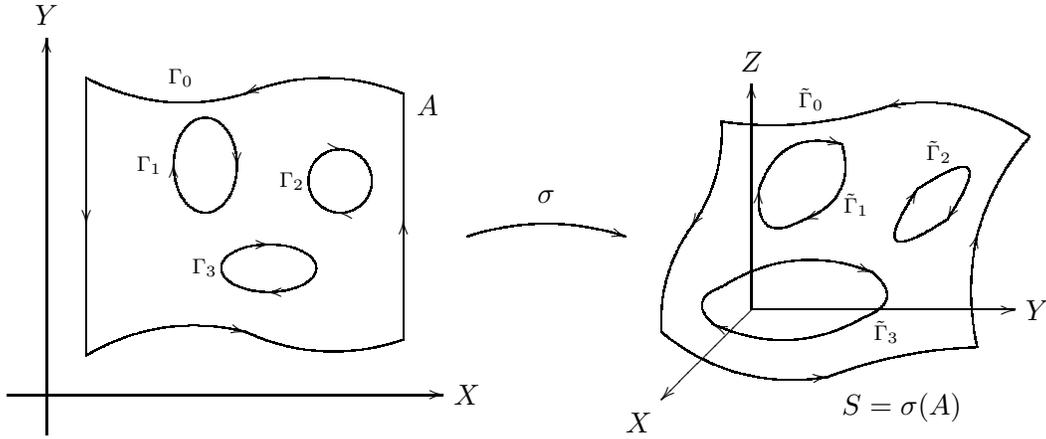


Figura 4.21: Ejemplo de superficie $S = \sigma(A)$ sobre la que se aplica la versión general del Teorema de Stokes

Proposición 4.21 Sean, $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 tal que $\sigma(A) \subset U$, y $(u_0, v_0) \in \text{int}(A)$ tal que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \hat{0}$$

Sea también $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de subconjuntos conexos de A tal que:

1. $(u_0, v_0) \in \text{int}(A_\varepsilon)$
2. $\Gamma_\varepsilon = \partial A_\varepsilon$ es una curva cerrada simple, y
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(A_\varepsilon) = 0$

Si S_ε es la superficie parametrizada por $\sigma|_{A_\varepsilon}$ (para cada $0 < \varepsilon < c$) entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} = \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n}$$

en donde: $\tilde{\gamma}_\varepsilon = \sigma \circ \gamma_\varepsilon$ y γ_ε es una parametrización de la curva Γ_ε que la recorre una vez y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (para cada $0 < \varepsilon < c$); $\hat{x}_0 = \sigma(u_0, v_0)$ y

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|}$$

Dem. Por el teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon &= \int_{S_\varepsilon} \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= \int_{A_\varepsilon} \mathbf{Rot}F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

y por el Teorema del Valor Promedio

$$\begin{aligned}
 \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} &= \frac{\int_{A_\varepsilon} \mathbf{Rot}F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v)}{\int_{A_\varepsilon} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} \\
 &= \frac{\left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_\varepsilon)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\hat{\xi}_\varepsilon) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \text{área}(A_\varepsilon)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\hat{\eta}_\varepsilon) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\hat{\eta}_\varepsilon) \right\| \text{área}(A_\varepsilon)} \\
 &= \frac{\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_\varepsilon)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\hat{\xi}_\varepsilon) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\hat{\xi}_\varepsilon)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\hat{\eta}_\varepsilon) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\hat{\eta}_\varepsilon) \right\|}
 \end{aligned}$$

en donde $\hat{\xi}_\varepsilon, \hat{\eta}_\varepsilon \in A_\varepsilon$ para cada $0 < \varepsilon < c$.

Por otra parte, como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(A_\varepsilon) = 0$, se tiene que $\hat{\xi}_\varepsilon, \hat{\eta}_\varepsilon \rightarrow (u_0, v_0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y como F y σ son de clase C^1 , entonces

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_\varepsilon)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\hat{\xi}_\varepsilon) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\hat{\xi}_\varepsilon)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(\hat{\eta}_\varepsilon) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(\hat{\eta}_\varepsilon) \right\|} \\
 &= \frac{\mathbf{Rot}F(\sigma(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \\
 &= \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \left(\frac{\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \right) \\
 &= \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n}
 \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

4.4.1 Campos vectoriales y sistemas coordenados no cartesianos

Una aplicación importante de la proposición 4.21 es la que nos permite obtener una expresión para el rotacional de un campo vectorial F cuando éste está dado en términos de coordenadas distintas a las cartesianas. En la sección cinco del capítulo tres ya discutimos lo que significa que un campo $F = (F_r, F_\theta)$ esté dado en términos de las coordenadas polares (r, θ) y lo que representa la pareja (F_r, F_θ) . En breves palabras, esto significa que F_r y F_θ son funciones (de valores reales) de las variables r y θ , y si $\hat{x} \neq \hat{0}$ es un punto del plano que tiene coordenadas polares (r, θ) , entonces $(F_r(r, \theta), F_\theta(r, \theta))$ representan las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en el sistema cartesiano ubicado en el punto \hat{x} , $\hat{e}_r(\hat{x}) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$ y $\hat{e}_\theta(\hat{x}) = (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$ (ver figura 3.37 del capítulo 3).

De forma análoga, decir que un campo vectorial $F = (F_r, F_\theta, F_z)$ (definido en alguna región del espacio) está dado en términos de coordenadas cilíndricas, significará que F_r, F_θ y F_z son funciones (de valores reales) de las variables r, θ y z , y si \hat{x} es un punto del espacio que tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , entonces $(F_r(r, \theta, z), F_\theta(r, \theta, z), F_z(r, \theta, z))$ representará las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en un cierto sistema cartesiano ubicado en el punto \hat{x} . En este caso, este sistema cartesiano es el formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x}) = (\cos(\theta), \text{sen}(\theta), 0)$, $\hat{e}_\theta(\hat{x}) = (-\text{sen}(\theta), \cos(\theta), 0)$ y $\hat{e}_z(\hat{x}) = (0, 0, 1)$, en donde estos vectores están expresados en términos de sus coordenadas en el sistema cartesiano XYZ asociado al sistema cilíndrico $r\theta z$ (ver figura 4.22). Lo anterior significa que, para cada \hat{x} en el dominio del campo F , se tiene que

$$F(\hat{x}) = F_r(\hat{x})\hat{e}_r(\hat{x}) + F_\theta(\hat{x})\hat{e}_\theta(\hat{x}) + F_z(\hat{x})\hat{e}_z(\hat{x})$$

Observe que los vectores $\hat{e}_r(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_z(\hat{x})$ sólo están bien definidos si \hat{x} es un punto que no pertenece al eje Z , en virtud de lo cual sólo se considerarán campos definidos en regiones $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$.

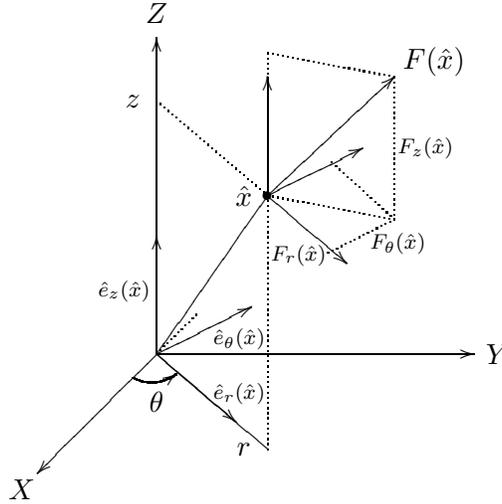


Figura 4.22: Si \hat{x} es un punto del dominio de un campo $F = (F_r, F_\theta, F_z)$, y tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , entonces la terna $(F_r(r, \theta, z), F_\theta(r, \theta, z), F_z(r, \theta, z))$ representa a las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en el sistema cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_z(\hat{x})$

Análogamente, decir que un campo vectorial $F = (F_\rho, F_\theta, F_\varphi)$ está dado en términos de coordenadas esféricas, significará que F_ρ, F_θ y F_φ son funciones (de valores reales) de las variables ρ, θ y φ , y si \hat{x} es un punto del espacio que tiene coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , entonces la terna $(F_\rho(\rho, \theta, \varphi), F_\theta(\rho, \theta, \varphi), F_\varphi(\rho, \theta, \varphi))$ representará las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en un cierto sistema cartesiano ubicado en el punto \hat{x} . En este caso, este sistema cartesiano es el formado por los vectores

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho(\hat{x}) &= (\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \\ \hat{e}_\theta(\hat{x}) &= (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0) \\ \hat{e}_\varphi(\hat{x}) &= (\cos(\theta) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))\end{aligned}$$

en donde estos vectores están expresados en términos de sus coordenadas en el sistema cartesiano XYZ asociado al sistema esférico $\rho\theta\varphi$ (ver figura 4.23). Es decir,

$$F(\hat{x}) = F_\rho(\hat{x})\hat{e}_\rho(\hat{x}) + F_\theta(\hat{x})\hat{e}_\theta(\hat{x}) + F_\varphi(\hat{x})\hat{e}_\varphi(\hat{x}) \quad (4.13)$$

Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, estos vectores también sólo están bien definidos si \hat{x} es un punto que no pertenece al eje Z , en virtud de lo cual en este caso también sólo se considerarán campos definidos en regiones $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$.

A diferencia del caso cartesiano en el que el valor $F(\hat{x})$ del campo siempre está expresado en términos de los vectores canónicos (tanto en el plano como en el espacio), cuando el campo F está dado en términos de otras coordenadas, el valor $F(\hat{x})$ se expresa en un sistema cartesiano que va cambiando con el punto \hat{x} (lo que explica la notación que empleamos).

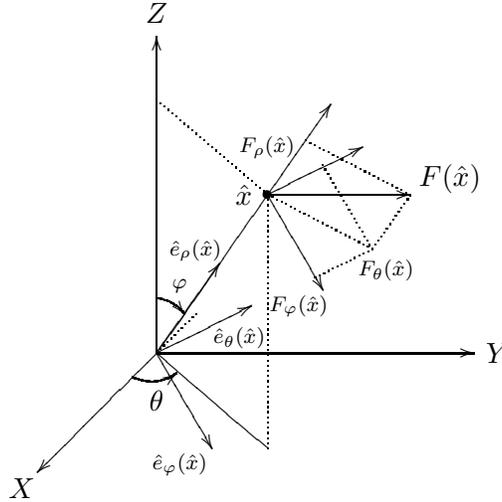


Figura 4.23: Si \hat{x} es un punto del dominio de un campo $F = (F_\rho, F_\theta, F_\varphi)$, y tiene coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , entonces la terna $(F_\rho(\rho, \theta, \varphi), F_\theta(\rho, \theta, \varphi), F_\varphi(\rho, \theta, \varphi))$ representa a las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en el sistema cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_\rho(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_\varphi(\hat{x})$

4.4.2 El rotacional en coordenadas esféricas

Para ilustrar un uso de la proposición 4.21, mostraremos cómo encontrar una expresión para el rotacional de un campo vectorial $F = (F_\rho, F_\theta, F_\varphi) : U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{eje\ Z\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 que está dado en términos de coordenadas esféricas. Ya que el $\mathbf{Rot}F(\hat{x})$ en este caso es un vector, para conocer a dicho vector basta con saber sus coordenadas en algún sistema cartesiano, y justo el sistema coordenado formado por los vectores $\hat{e}_\rho(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_\varphi(\hat{x})$ resulta ser el más indicado. De esta forma, nuestro objetivo es calcular $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\rho(\hat{x})$, $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\varphi(\hat{x})$.

Sean, $\hat{x}_0 \in U$ un punto con coordenadas esféricas $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$. Calcularemos $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\rho(\hat{x}_0)$. Definimos $\sigma : (-\infty, \infty) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$\sigma(\theta, \varphi) = \rho_0(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \quad (4.14)$$

Observe que $\sigma(\theta_0, \varphi_0) = \hat{x}_0$ y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) &= \rho_0^2(-\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), 0) \times (\cos(\theta) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi)) \\ &= -\rho_0^2 \operatorname{sen}(\varphi)(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \\ &= -\rho_0^2 \operatorname{sen}(\varphi) \hat{e}_\rho(\sigma(\theta, \varphi)) \end{aligned}$$

de tal forma que, como $0 < \varphi_0 < \pi$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta_0, \varphi_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta_0, \varphi_0)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta_0, \varphi_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta_0, \varphi_0) \right\|} &= -\hat{e}_\rho(\sigma(\theta_0, \varphi_0)) \\ &= -\hat{e}_\rho(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $A_\varepsilon = [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \times [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^2$. Nótese que existe $c > 0$ tal que $S_\varepsilon = \sigma(A_\varepsilon) \subset U$ para toda $0 < \varepsilon < c$, y que la familia $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ satisface todas las condiciones de la proposición 4.21 (ver figura 4.24).

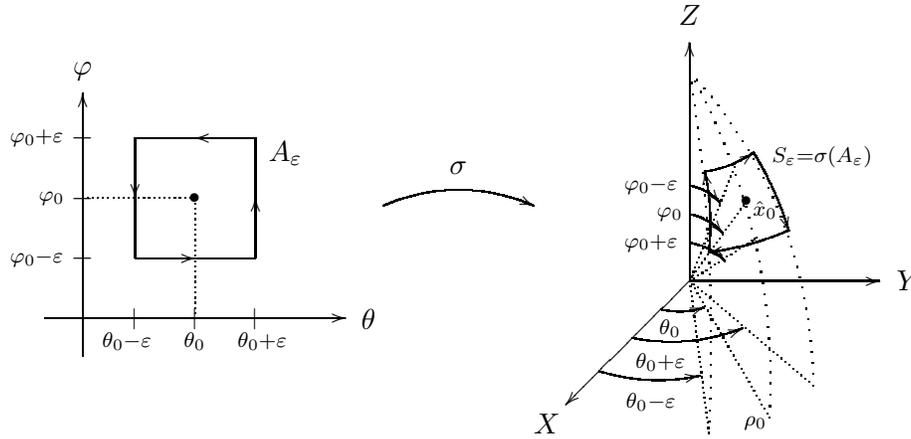


Figura 4.24: La familia $\{A_\varepsilon = \sigma(A_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon < c}$ con $\sigma(\theta, \varphi) = \rho_0(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi))$ y $(\theta, \varphi) \in A_\varepsilon = [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \times [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$, satisface todas las condiciones de la proposición 4.21

Por lo tanto, sabemos que

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot (-\hat{e}_\rho(\hat{x}_0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)}$$

Si recordamos que $\partial_\sigma S_\varepsilon = \sigma(\partial A_\varepsilon)$ y que $\tilde{\gamma}_\varepsilon = \sigma \circ \gamma_\varepsilon$, donde γ_ε es una parametrización del ∂A_ε que lo recorre una vez y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon &= \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon)) \cdot (\rho_0(-\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon), \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon), 0)) d\theta \\ &+ \int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) \cdot (\rho_0(\cos(\theta_0 + \varepsilon) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))) d\varphi \\ &- \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)) \cdot (\rho_0(-\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon), \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon), 0)) d\theta \\ &- \int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)) \cdot (\rho_0(\cos(\theta_0 - \varepsilon) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta_0 - \varepsilon) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))) d\varphi \\ &= \rho_0 \left[\int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon)) \cdot (\operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) \hat{e}_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon))) d\theta \right. \\ &+ \int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) \cdot \hat{e}_\varphi(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) d\varphi \\ &\left. - \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)) \cdot (\operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) \hat{e}_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon))) d\theta \right] \end{aligned}$$

$$\left. - \int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)) \cdot \hat{e}_\varphi(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)) d\varphi \right]$$

Si ahora usamos la identidad 4.13 y escribimos a los puntos $\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)$, $\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon)$, $\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)$ y $\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)$ en términos de sus coordenadas esféricas, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon &= \rho_0 \left[- \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} (\text{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) F_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)) - \text{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) F_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon))) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} (F_\varphi(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) - F_\varphi(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi))) d\varphi \right] \\ &= \rho_0 \left[- \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} (\text{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta, \varphi_0 + \varepsilon) - \text{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta, \varphi_0 - \varepsilon)) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} (F_\varphi(\rho_0, \theta_0 + \varepsilon, \varphi) - F_\varphi(\rho_0, \theta_0 - \varepsilon, \varphi)) d\varphi \right] \end{aligned}$$

Ahora (y como en otras ocasiones), por el Teorema del Valor Promedio y el Teorema del Valor Medio, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon &= \rho_0 [-(2\varepsilon) (\text{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon) - \text{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi_0 - \varepsilon)) \\ &\quad (2\varepsilon) (F_\varphi(\rho_0, \theta_0 + \varepsilon, \varphi_\varepsilon) - F_\varphi(\rho_0, \theta_0 - \varepsilon, \varphi_\varepsilon))] \\ &= \rho_0 (2\varepsilon)^2 \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta'_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \frac{\partial (\text{sen}(\varphi) F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) \right) \end{aligned}$$

en donde $\theta_\varepsilon, \theta'_\varepsilon \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$ y $\varphi_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$.

Por otra parte, sabemos que

$$\begin{aligned} \text{área}(S_\varepsilon) &= \int_{A_\varepsilon} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\| \\ &= \int_{A_\varepsilon} \left\| \rho_0^2 \text{sen}(\varphi) \hat{e}_\rho(\sigma(\theta, \varphi)) \right\| \\ &= \rho_0^2 \left(\int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} d\theta \right) \left(\int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} \text{sen}(\varphi) d\varphi \right) \\ &= \rho_0^2 (2\varepsilon) \left(-\cos(\varphi) \Big|_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} \right) \\ &= \rho_0^2 (2\varepsilon) (\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi_0 + \varepsilon)) \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\rho(\hat{x}_0) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho_0 (2\varepsilon)^2 \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta'_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \frac{\partial(\text{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) \right)}{\rho_0^2 (2\varepsilon) (\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi_0 + \varepsilon))} \\
 &= \frac{1}{\rho_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{(\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi_0 + \varepsilon))} \left(\frac{\partial(\text{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta'_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \right) \\
 &= \frac{1}{\rho_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{(\text{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) + \text{sen}(\varphi_0 + \varepsilon))} \left(\frac{\partial(\text{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) \right) \\
 &= \frac{1}{\rho_0 \text{sen}(\varphi_0)} \left(\frac{\partial(\text{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \right)
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x}_0)$ y $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\varphi(\hat{x}_0)$ se sigue un procedimiento totalmente análogo. De hecho, una mirada cuidadosa a la función definida en 4.14 nos permitirá descubrir la estrecha relación que hay entre esta función σ y la función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas, dada por

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \text{sen}(\varphi), \rho \text{sen}(\theta) \text{sen}(\varphi), \rho \cos(\varphi))$$

Es decir, nótese que

$$\sigma(\theta, \varphi) = g(\rho_0, \theta, \varphi)$$

Esta última identidad debe de dar una idea de las funciones σ (y las correspondientes familias de superficies $\{S_\varepsilon\}$) que habrá que usar para mostrar que

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x}_0) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \right)$$

y

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\varphi(\hat{x}_0) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{\text{sen}(\varphi_0)} \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \right)$$

tarea que por supuesto, queda como un problema para el lector.

4.5 Campos solenoides (primera parte)

Como es bien sabido, toda identidad tiene dos formas de leerse: de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. En este sentido, la identidad que se prueba en el Teorema de Stokes no es la excepción. Una manera de leer esta identidad es que la integral de línea de un campo F sobre el borde de una superficie S se puede “cambiar” por la integral de superficie sobre S del rotacional de F , es decir

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

Leerla de esta manera es muy conveniente, sobre todo cuando se está interesado en el problema de determinar si F es un campo conservativo. Como se recordará, en el capítulo tres abordamos este problema y mencionamos que el resultado más general que se puede obtener a este respecto es aquel que asegura que, si un campo F tiene rotacional cero en una región simplemente conexa U entonces F es un campo gradiente en U . Como también mencionamos (de manera informal), una región simplemente conexa es aquella en la que toda curva cerrada $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” (sin “salirse” de U) a un punto. Si este es el caso, justo al “contraer” dicha curva a un punto,

“generamos” una superficie $S \subset U$ con la propiedad de que $\partial S = \Gamma$ (ver figura 4.25). De esta forma, se tendrá que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que la integral de línea de F sobre cualquier curva cerrada $\Gamma \subset U$ vale cero, lo cual es equivalente a que F sea un campo gradiente en U . Salvo por unos cuantos “detalles”, en términos generales esta argumentación sería una buena “demostración” de ese importante resultado y en la que la identidad probada en el Teorema de Stokes (leída de esa forma) juega un papel muy relevante.

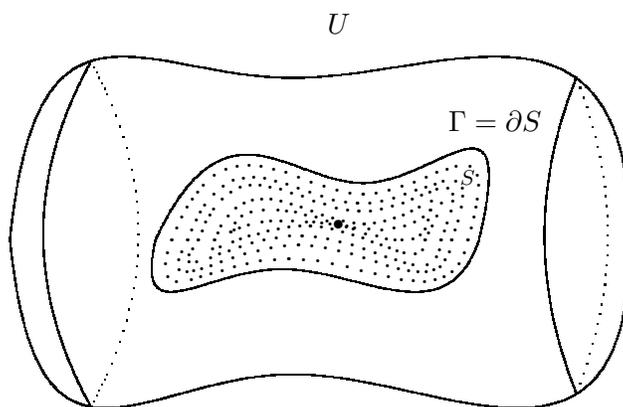


Figura 4.25: Una región $U \subset \mathbb{R}^3$ no tiene “hoyos” si cualquier curva cerrada simple $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” a un punto de U sin “salirnos” de U . En este proceso se “genera” una superficie $S \subset U$ con la propiedad de que $\partial S = \Gamma$

La otra forma de leer la misma identidad nos diría que la integral del rotacional de un campo F ($\mathbf{Rot}F$) sobre una superficie S , se puede “reducir” a calcular la integral de línea del campo sobre el borde de S (lectura que por cierto, nos hace recordar al Teorema Fundamental del Cálculo). Es decir,

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

Esta forma de leer la misma identidad nos conduce a plantearnos el siguiente problema: si para cualquier campo $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se pudiera encontrar un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$G(\hat{x}) = \mathbf{Rot}F(\hat{x}) \tag{4.15}$$

para toda $\hat{x} \in U$, entonces para cualquier superficie $S \subset U$ se tendría que

$$\int_S G \cdot d\sigma = \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

$$= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

lo que significaría que cualquier integral de superficie de un campo G se podría reducir a una integral de línea de un campo F que cumpliera la identidad 4.15.

Como es de suponerse, aquí la pregunta importante es si es verdad que para cualquier campo $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se puede encontrar un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga la condición 4.15. Lo más interesante de todo este problema es que a estas alturas ya contamos con un ejemplo (y los resultados necesarios) para mostrar que esto no siempre es cierto.

Ejemplo 4.22 *Considerese el campo $G : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido como*

$$G(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Muestre que no existe $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $G(\hat{x}) = \mathbf{Rot}F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$.

Solución. En el ejemplo 4.13 probamos que si S es la esfera de radio $r > 0$ con centro en el origen (de modo que $S \subset U$) parametrizada por la función $\sigma(x, y) = (r \cos(x) \sen(y), r \sen(x) \sen(y), r \cos(y))$ con $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, entonces

$$\int_S G \cdot d\sigma = -4\pi$$

Por otra parte, si existiera un campo $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpliera la condición 4.15, por el primer inciso del problema 24 se tendría que

$$\begin{aligned} \int_S G \cdot d\sigma &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual contradice la identidad anterior y por lo tanto podemos concluir que no existe este campo F (definido en U !).

A un campo que cumple la condición 4.15 se le conoce con el nombre de *campo solenoide*⁷, lo cual establecemos en la siguiente

Definición 4.23 *Sea $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua en la región U . Decimos que G es un campo solenoide en U si existe $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U tal que*

$$G(\hat{x}) = \mathbf{Rot}F(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$.

⁷De acuerdo con la Wikipedia: un “solenoide es un alambre aislado enrollado en forma de hélice (bobina) o n número de espiras con un paso acorde a las necesidades, por el que circula una corriente eléctrica. Cuando esto sucede, se genera un campo magnético dentro del solenoide. El solenoide con un núcleo apropiado se convierte en un imán (en realidad electroimán). Este tipo de bobinas o solenoides es utilizado para accionar un tipo de válvula, llamada válvula solenoide, que responde a pulsos eléctricos respecto de su apertura y cierre. Eventualmente controlable por programa, su aplicación más recurrente en la actualidad, tiene relación con sistemas de regulación hidráulica y neumática.”

Encontrar condiciones necesarias y suficientes que nos garanticen cuándo un campo es solenoide será un problema que abordaremos de manera análogo a como lo hicimos para los campos conservativos. Así como el concepto de rotacional y el Teorema de Green jugaron un papel muy importante para encontrar condiciones necesarias y suficientes que nos garantizaran cuándo un campo era conservativo, para el caso de los campos solenoide desarrollaremos el concepto de divergencia (para campos en el espacio) y probaremos un teorema muy importante relacionado con este concepto: el Teorema de Gauss⁸.

4.6 Divergencia y teorema de Gauss

Como se recordará, en la sección tres de este capítulo introdujimos el concepto de integral de superficie de un campo vectorial en el espacio, por medio del problema equivalente (en el espacio) al que usamos en el capítulo tres para motivar el concepto de divergencia (en el plano). En este caso, se supuso que $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representaba el campo de velocidades de un fluido y nuestro objetivo fue encontrar una forma de “medir” qué tanto se “expande” este fluido a través de una superficie $S \subset U$. De esta forma, la integral de superficie $\int_S F \cdot d\sigma$ se puede interpretar como una medida (dada en términos de un volumen) de qué tanto se “expande” este fluido a través de una superficie S en la dirección en que apuntan los vectores normales a S inducidos por la parametrización σ .

Ahora, si en particular tomamos E_r igual a la esfera (sólida) de radio $r > 0$ con centro en un punto $\hat{x}_0 \in U$, $S_r = Fr(E_r)$ y σ_r una parametrización que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de S_r , entonces la integral $\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r$ se puede interpretar como una medida de qué tanto se “expande” nuestro fluido alrededor del punto \hat{x}_0 y además el signo de dicha integral tiene la siguiente interpretación: si es positivo, significa que la “expansión hacia afuera” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia adentro”, mientras que si es negativo, significa que la “expansión hacia adentro” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia afuera” (ver figura 4.26).

Una vez hecho lo anterior, tenemos entonces que la integral $\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r$ es una medida de la “expansión” (dada en términos de un volumen) producida por el campo de velocidades F a través de la esfera E_r , de tal forma que el cociente

$$\frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(E_r)} = \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{(4/3)\pi r^3}$$

se puede interpretar como la “expansión” promedio producida por F a través de la esfera de radio r con centro en \hat{x}_0 . Como seguramente se sospecha, si el cociente de arriba tiene límite cuando $r \rightarrow 0$, a este valor límite lo llamaremos la “expansión” producida por F en el punto \hat{x}_0 .

A estas alturas el lector seguramente ya intuye (o se imagina) que en la discusión anterior es irrelevante el hecho de que S_r sea una esfera y que ésta se puede cambiar por cualquier otro tipo

⁸Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777-23 de febrero de 1855), fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Conocido como “el príncipe de las matemáticas” y “el matemático más grande desde la antigüedad”, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos cuyo trabajo ha tenido más relevancia en la historia.

Gauss fue un niño prodigio de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad siendo apenas un infante, e hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente. Completó su magnum opus, *Disquisitiones Arithmeticae* a los veintiún años (1798), aunque no sería publicado hasta 1801. Un trabajo que fue fundamental para que la teoría de los números se consolidara y ha moldeado esta área hasta los días presentes. (fuente: Wikipedia)

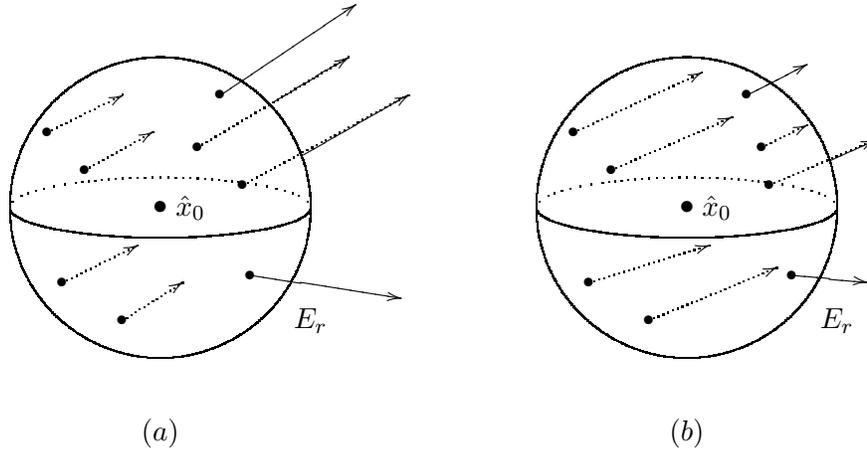


Figura 4.26: La integral de un campo F sobre la esfera $S_r = Fr(E_r)$ ($\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r$) se puede interpretar como una medida de qué tanto se “expande” nuestro fluido alrededor del punto \hat{x}_0 y además el signo de dicha integral tiene la siguiente interpretación: si es positivo, significa que la “expansión hacia afuera” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia adentro” (figura (a)), mientras que si es negativo, significa que la “expansión hacia adentro” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia afuera” (figura (b))

de superficie “cerrada”, centrada en el punto $\hat{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que tenga la particularidad de “colapsarse” en este punto cuando $r \rightarrow 0$. De hecho, lo siguiente que vamos a demostrar es que si en particular $S_r = Fr(R_r)$, en donde

$$R_r = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset U$$

y cada “cara” de S_r la parametrizamos de tal forma que los vectores normales inducidos apunten hacia “afuera” de R_r , entonces el

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)}$$

existe si $F = (P, Q, R)$ es de clase C^1 en U , y además

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0)$$

Proposición 4.24 Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , y $c > 0$ tal que

$$R_r = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset U$$

para toda $0 < r < c$. Si $S_r = Fr(R_r)$ y σ_r es una parametrización simple de S_r tal que los vectores normales inducidos en cada una de las “caras” apuntan hacia “afuera” de R_r , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0)$$

Dem. Sean $\sigma_1(u, v) = \hat{x}_0 + (u, v, r)$, $\sigma_2(u, v) = \hat{x}_0 + (u, v, -r)$, $\sigma_3(u, v) = \hat{x}_0 + (u, r, v)$, $\sigma_4(u, v) = \hat{x}_0 + (u, -r, v)$, $\sigma_5(u, v) = \hat{x}_0 + (r, u, v)$ y $\sigma_6(u, v) = \hat{x}_0 + (-r, u, v)$, con $(u, v) \in A_r = [-r, r] \times [-r, r]$.

Entonces $\sigma_r = \sigma_1 + (-\sigma_2) + \sigma_3 + (-\sigma_4) + \sigma_5 + (-\sigma_6)$ cumple con las condiciones requeridas y por lo tanto

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} F \cdot d\sigma_r &= \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 - \int_{S_2} F \cdot d\sigma_2 + \int_{S_3} F \cdot d\sigma_3 - \int_{S_4} F \cdot d\sigma_4 + \int_{S_5} F \cdot d\sigma_5 - \int_{S_6} F \cdot d\sigma_6 \\
 &= \int_{A_r} F(\sigma_1(u, v)) \cdot (0, 0, 1) - \int_{A_r} F(\sigma_2(u, v)) \cdot (0, 0, 1) + \int_{A_r} F(\sigma_3(u, v)) \cdot (0, 1, 0) \\
 &\quad - \int_{A_r} F(\sigma_4(u, v)) \cdot (0, 1, 0) + \int_{A_r} F(\sigma_5(u, v)) \cdot (1, 0, 0) - \int_{A_r} F(\sigma_6(u, v)) \cdot (1, 0, 0) \\
 &= \int_{A_r} (R(x_0 + u, y_0 + v, z_0 + r) - R(x_0 + u, y_0 + v, z_0 - r)) \\
 &\quad + \int_{A_r} (Q(x_0 + u, y_0 + r, z_0 + v) - Q(x_0 + u, y_0 - r, z_0 + v)) \\
 &\quad + \int_{A_r} (P(x_0 + r, y_0 + u, z_0 + v) - P(x_0 - r, y_0 + u, z_0 + v))
 \end{aligned}$$

de tal forma que, como en múltiples ocasiones hemos argumentado, por el Teorema de Valor Promedio y el Teorema del Valor Medio, se tiene que existen

$$\xi_{1,r}, \eta_{1,r}, \zeta_{1,r}, \xi_{2,r}, \eta_{2,r}, \zeta_{2,r}, \xi_{3,r}, \eta_{3,r}, \zeta_{3,r} \in [-r, r]$$

tales que

$$\begin{aligned}
 \int_{S_r} F \cdot d\sigma_r &= (P(x_0 + r, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r}) - P(x_0 - r, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r})) \text{área}(A_r) \\
 &\quad + (Q(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + r, z_0 + \eta_{2,r}) - Q(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 - r, z_0 + \eta_{2,r})) \text{área}(A_r) \\
 &\quad + (R(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + r) - R(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 - r)) \text{área}(A_r) \\
 &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \zeta_{1,r}, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r})(2r) \text{área}(A_r) \\
 &\quad + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + \zeta_{2,r}, z_0 + \eta_{2,r})(2r) \text{área}(A_r) \\
 &\quad + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + \zeta_{3,r})(2r) \text{área}(A_r)
 \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \zeta_{1,r}, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + \zeta_{2,r}, z_0 + \eta_{2,r}) \\
 &\quad + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + \zeta_{3,r})
 \end{aligned}$$

Ahora, como F es de clase C^1 y $\xi_{1,r}, \eta_{1,r}, \zeta_{1,r}, \xi_{2,r}, \eta_{2,r}, \zeta_{2,r}, \xi_{3,r}, \eta_{3,r}, \zeta_{3,r}$ tienden a cero cuando $r \rightarrow 0$, tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \zeta_{1,r}, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + \zeta_{2,r}, z_0 + \eta_{2,r}) \right]$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + \zeta_{3,r}) \Big] \\ & = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Como el lector seguramente intuirá, el resultado anterior sirve como base para definir el concepto de *divergencia* de un campo $F = (P, Q, R)$ de la siguiente manera.

Definición 4.25 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x})$, $\frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x})$ y $\frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x})$ existen para cada $\hat{x} \in U$. Definimos la *divergencia* de F en $\hat{x} \in U$, que denotamos por $\operatorname{div} F(\hat{x})$, como

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x})$$

A continuación, calcularemos este número para un campo específico, el cual nos será de gran utilidad más adelante.

Ejemplo 4.26 Sea $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido como

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Calcule $\operatorname{div} F(\hat{x})$ para cualquier $\hat{x} \in U$.

Solución. Dado que

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

y

$$\frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &+ \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

para toda $(x, y, z) \in U$.

Un tipo de campos para los cuales resulta de particular interés el cálculo de su divergencia, son los campos conservativos o campos gradiente. Si $F = \nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z)$, con $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F &= \operatorname{div}(\nabla\varphi) \\ &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\end{aligned}$$

A esta expresión se le conoce con el nombre de el *laplaciano*⁹ de φ y se le denota como $\nabla^2\varphi$, es decir

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Cuando $\nabla^2\varphi(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$ decimos que φ es *armónica* en U .

Este campo escalar asociado al campo escalar φ es de gran relevancia y algunos resultados importantes con respecto a éste se obtienen en los problemas 26,27 y 28 de este capítulo.

Por supuesto que el concepto de divergencia también se lleva bien con las operaciones aritméticas elementales entre campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 (y de hecho, también para los de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2), lo cual dejamos expresado en la siguiente proposición y cuya prueba, como es de suponer, se deja al lector.

Proposición 4.27 Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ ó $n = 3$) tales que $\operatorname{div} F(\hat{x})$ y $\operatorname{div} G(\hat{x})$ existen para toda $\hat{x} \in U$.

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\operatorname{div}(\alpha F + \beta G)(\hat{x}) = \alpha \operatorname{div} F(\hat{x}) + \beta \operatorname{div} G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$
2. si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 entonces $\operatorname{div}(fF)(\hat{x}) = f(\hat{x}) \operatorname{div} F(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x}) \cdot F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$

Asociado al concepto de divergencia para campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 existe un importante teorema, cuya formulación deduciremos a partir de la identidad probada en la proposición 4.24.

Si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 , entonces la divergencia de F en cada punto \hat{x} de U define una función de valores reales (que denotamos como $\operatorname{div} F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$) la cual será continua en U y por lo tanto integrable sobre cualquier conjunto $\Omega \subset U$ que sea Jordan-medible. Supongamos que $\Omega \subset U$ es uno de estos conjuntos con la propiedad adicional de que $S = \operatorname{Fr}(\Omega)$ es una superficie por pedazos. Si $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo tal que $\Omega \subset R$ y lo subdividimos (por medio de una partición \mathcal{P} muy fina) en subrectángulos muy pequeños, sabemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{div} F &\approx \sum_{i=1}^k \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot \operatorname{volumen}(R_i)\end{aligned}$$

en donde $\hat{\xi}_i \in R_i$ y R_i (con $i = 1, \dots, k$) son aquellos subrectángulos tales que $R_i \subset \Omega \cup S$.

⁹Este nombre es en reconocimiento de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), físico y matemático francés, quien estudió soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las que aparecía dicha expresión.

Como podemos suponer que tanto R como los R_i son cubos, y que $\hat{\xi}_i$ es el centro de cada R_i , por la proposición 4.24, sabemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot \operatorname{volumen}(R_i) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_i) \right) \operatorname{volumen}(R_i) \\ &\approx \int_{S_i} F \cdot d\sigma_i \end{aligned}$$

en donde $S_i = Fr(R_i)$ y σ_i es una parametrización simple de S_i que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de R_i (para cada $i = 1, \dots, k$), y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F &\approx \sum_{i=1}^k \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot \operatorname{volumen}(R_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^k \int_{S_i} F \cdot d\sigma_i \end{aligned}$$

Ahora obsérvese que, dado que cada una de las integrales $\int_{S_i} F \cdot d\sigma_i$ se puede descomponer como la suma de seis integrales (sobre cada uno de las “caras” del cubo R_i), si R_i y R_j son dos cubos adyacentes, entonces en la suma

$$\int_{S_i} F \cdot d\sigma_i + \int_{S_j} F \cdot d\sigma_j$$

se cancelan justo las integrales sobre la “cara” común a ambos cubos (ya que en dichas integrales se usan vectores normales “opuestos” (ver figura 4.27 (a))) de tal forma que esta suma es igual a la integral de F sobre la frontera del rectángulo $R_i \cup R_j$ (tomando vectores normales que apuntan hacia “afuera” de $R_i \cup R_j$) (ver figura 4.27 (b)).

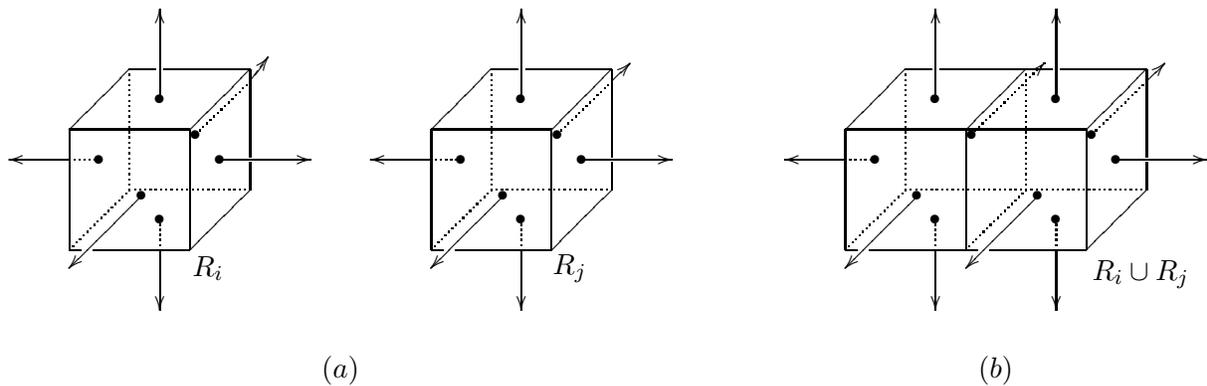


Figura 4.27: Si los cubos R_i y R_j son adyacentes, al sumar las integrales de un campo F sobre la frontera de cada uno de ellos, las correspondientes integrales sobre la “cara” común a ambos cubos se cancelan (ya que en dichas integrales se usan vectores normales “opuestos” (figura (a))), de tal forma que la suma es igual a la integral de F sobre la frontera del rectángulo $R_i \cup R_j$ (figura (b))

Si este proceso de “cancelación” de integrales sobre “caras” adyacentes lo hacemos para todos los R_i , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{S_i} F \cdot d\sigma_i = \int_{\tilde{S}} F \cdot d\tilde{\sigma}$$

en donde $\tilde{S} = Fr(\cup_{i=1}^k R_i)$ es una superficie “poliédrica” de “caras” paralelas a los planos coordenados (ver figura 4.28 (a)) y $\tilde{\sigma}$ es una parametrización simple de ésta que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de $\cup_{i=1}^k R_i$. Lo mejor de todo esto es que, si los cubos R_i son muy pequeños (es decir, la partición \mathcal{P} es muy fina) entonces $\tilde{S} \approx S = Fr(\Omega)$ (ver figura 4.28 (b)) y por lo tanto se debe tener que

$$\int_{\tilde{S}} F \cdot d\tilde{\sigma} \approx \int_S F \cdot d\sigma$$

en donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

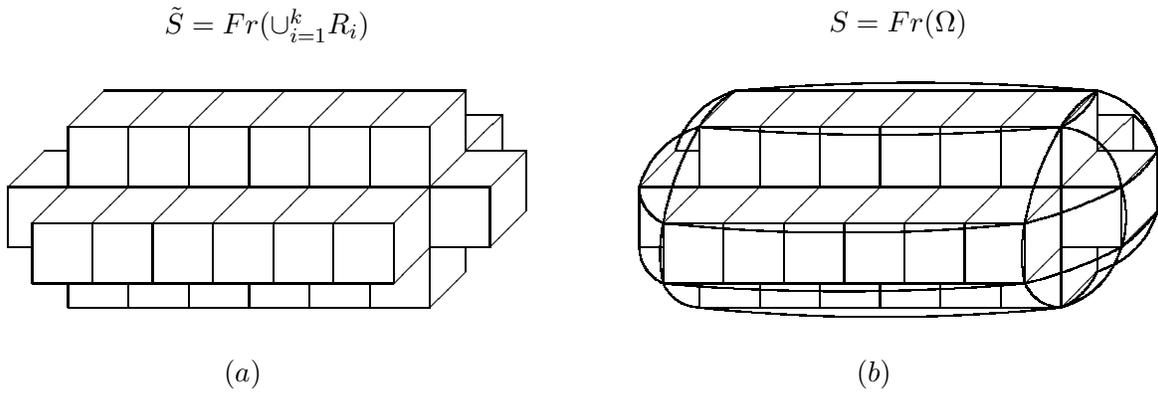


Figura 4.28: $\tilde{S} = Fr(\cup_{i=1}^k R_i)$ es una superficie “poliédrica” de “caras” paralelas a los planos coordenados (figura (a)) y si los cubos R_i son muy pequeños entonces $\tilde{S} \approx S = Fr(\Omega)$ (figura (b))

Todas estas identidades y aproximaciones sugieren que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \int_{S=Fr(\Omega)} F \cdot d\sigma$$

¡y esto es justo lo que asegura el Teorema de Gauss!

Formularemos el Teorema de Gauss en los mismos términos en que acabamos de deducirlo, aun cuando la prueba sólo la haremos para cierto tipo de regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Teorema 4.28 (de Gauss) Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $S = Fr(\Omega) = \partial\Omega$ es una superficie por pedazos y $\Omega \cup S \subset U$. Entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma$$

donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

Dem. Haremos la prueba para aquellas regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que sean tipo I, tipo II y tipo III, simultáneamente. Dado que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

calcularemos cada una de estas integrales por separado.

Como estamos suponiendo que Ω se puede expresar como una región tipo III, sabemos que existe $A \subset \mathbb{R}^2$ (Jordan-medible) y $\alpha, \beta : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en A , tales que

$$\Omega = \{(t, u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in A, \alpha(u, v) \leq t \leq \beta(u, v)\}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} &= \int_A \left(\int_{\alpha(u,v)}^{\beta(u,v)} \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \\ &= \int_A (P(\beta(u, v), u, v) - P(\alpha(u, v), u, v)) \end{aligned}$$

Por otra parte, obsérvese que cuando Ω se describe de esta forma, se tiene que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ en donde S_1 y S_3 son las gráficas (sobre A) de las funciones α y β , respectivamente, y S_2 es una superficie “cilíndrica” (que sigue al borde de A) perpendicular al plano YZ (ver figura 4.29).

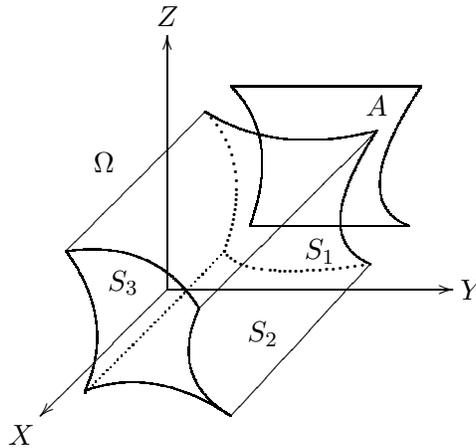


Figura 4.29: Cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se describe como una región tipo III, se tiene que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, en donde S_1 y S_3 son las gráficas (sobre A) de dos funciones α y β , respectivamente, y S_2 es una superficie “cilíndrica” (que sigue al borde de A) perpendicular al plano YZ

De esta manera se tiene que, si $\sigma_1(u, v) = (\alpha(u, v), u, v)$, $\sigma_3(u, v) = (\beta(u, v), u, v)$ con $(u, v) \in A$, entonces σ_1 y σ_3 son parametrizaciones simples de S_1 y S_3 , respectivamente, tales que los vectores

normales que inducen están dados por

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) &= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v), 1, 0 \right) \times \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v), 0, 1 \right) \\ &= \left(1, -\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v) \right)\end{aligned}$$

que apuntan hacia “adentro” de Ω , y

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u, v) &= \left(\frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v), 1, 0 \right) \times \left(\frac{\partial \beta}{\partial v}(u, v), 0, 1 \right) \\ &= \left(1, -\frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial \beta}{\partial v}(u, v) \right)\end{aligned}$$

que apuntan hacia “afuera” de Ω .

Ahora, si σ_2 es una parametrización simple de S_2 , dado que esta superficie es perpendicular al plano YZ , se debe tener que los vectores normales inducidos por esta parametrización (o cualquier otra) están contenidos en dicho plano, es decir, son de la forma

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u, v) = (0, \cdot, \cdot)$$

Tomando estas parametrizaciones, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}& \int_{S=\partial\Omega} (P, 0, 0) \cdot d\sigma \\ &= - \int_{S_1} (P, 0, 0) \cdot d\sigma_1 + \int_{S_2} (P, 0, 0) \cdot d\sigma_2 + \int_{S_3} (P, 0, 0) \cdot d\sigma_3 \\ &= - \int_A (P(\sigma_1(u, v)), 0, 0) \cdot \left(1, -\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v) \right) + \int_A (P(\sigma_2(u, v)), 0, 0) \cdot (0, \cdot, \cdot) \\ &+ \int_A (P(\sigma_3(u, v)), 0, 0) \cdot \left(1, -\frac{\partial \beta}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial \beta}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \int_A (P(\sigma_3(u, v)) - P(\sigma_1(u, v))) \\ &= \int_A (P(\beta(u, v), u, v) - P(\alpha(u, v), u, v)) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\end{aligned}$$

Si ahora usamos que Ω también es una región tipo II, por un procedimiento análogo podemos probar que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} = \int_{S=\partial\Omega} (0, Q, 0) \cdot d\sigma$$

y si usamos que Ω también es una región tipo I, probamos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} = \int_{S=\partial\Omega} (0, 0, R) \cdot d\sigma$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \\
 &= \int_{S=\partial\Omega} (P, 0, 0) \cdot d\sigma + \int_{S=\partial\Omega} (0, Q, 0) \cdot d\sigma + \int_{S=\partial\Omega} (0, 0, R) \cdot d\sigma \\
 &= \int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

No podemos dejar de mencionar que, así como los teoremas de Green y Stokes nos hacen recordar el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el Teorema de Gauss también tiene esta peculiaridad. En efecto, si recordamos la motivación que nos condujo a la definición de la divergencia de un campo F , dicho concepto se puede interpretar como una cierta “derivada”, de tal forma que integrar esta “derivada” sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ¡se reduce a “evaluar” (de cierta forma) la función original F sobre el borde (o frontera) $S = \partial\Omega$ de la región!

Dado que el Teorema de Gauss relaciona una integral de superficie de una función de valores vectoriales con una integral de Riemann de una función de valores reales, ambas definidas en algún subconjunto del espacio, este teorema se suele usar para sustituir el cálculo de alguna de estas integrales en términos de la otra. El siguiente ejemplo muestra cómo usar el teorema de Gauss para calcular integrales de superficie.

Ejemplo 4.29 Sea $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

Muestre que

$$\int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma = 0$$

en donde $\Omega \subset U$ es cualquier conjunto Jordan-medible tal que su frontera (o borde $\partial\Omega = S$) es una superficie por pedazos.

Solución. Nótese que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} F(x, y, z) &= \frac{(-2x)(-y)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(-2y)x}{(x^2 + y^2)^2} + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

para toda $(x, y, z) \in U$. Como $\Omega \subset U$ satisface la hipótesis del teorema de Gauss, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma &= \int_{\Omega} \operatorname{div} F \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

El Teorema de Gauss se puede extender a regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera esté formada por varias superficies (incluyendo superficies por pedazos), como sería el caso de una región acotada entre dos esferas concéntricas. Para deducir el tipo de identidad que se obtiene en este caso, podemos recurrir al mismo procedimiento que seguimos antes: si a la región Ω la “metemos” dentro de un cubo $R \subset \mathbb{R}^3$ y a éste lo subdividimos (o lo particionamos) en cubos muy pequeños, haciendo las mismas aproximaciones, sustituciones y cancelaciones que en el caso anterior, llegaremos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \int_{S_0} F \cdot d\sigma_0 + \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 + \cdots + \int_{S_k} F \cdot d\sigma_k \end{aligned}$$

en donde S_0, S_1, \dots, S_k son las superficies tales que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$, con S_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto) y $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ parametrizaciones simples de éstas, respectivamente, que inducen vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω (ver figura 4.30).

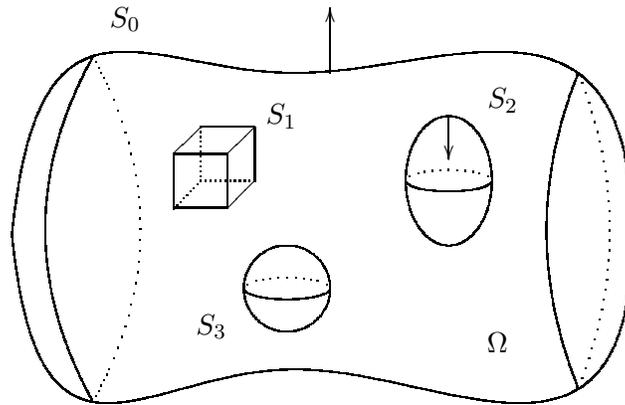


Figura 4.30: El Teorema de Gauss se puede extender a regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera esté formada por varias superficies (suaves por pedazos). En esta figura, $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con S_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto) y $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 parametrizaciones simples de éstas, respectivamente, que inducen vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω

Aun cuando formularemos esta versión más general del teorema de Gauss, no estamos en condiciones de dar una prueba “rigurosa” de ella. Sería necesario precisar algunos conceptos, como el de que S_0 es la superficie “más exterior” (o que “rodea” al resto), lo cual, nuevamente, escapa a los objetivos de este texto.

Teorema 4.30 (de Gauss (versión general)) Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$, con S_0, S_1, \dots, S_k superficies (por pedazos) y S_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto). Entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\partial\Omega} F \cdot d\sigma \\
 &= \int_{S_0} F \cdot d\sigma_0 + \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 + \cdots + \int_{S_k} F \cdot d\sigma_k
 \end{aligned}$$

donde $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ son parametrizaciones simples de S_0, S_1, \dots, S_k , que inducen vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

De hecho, y de forma análoga a como sucede en el caso de las correspondientes generalizaciones de los teoremas de Green y Stokes, en la mayoría de los problemas en los que se puede aplicar la versión anterior del teorema de Gauss, también se pueden resolver adaptándolos a una aplicación de la versión más sencilla. El siguiente ejemplo, además de ilustrar lo anterior, también muestra en qué tipo de situaciones suele ser útil este teorema.

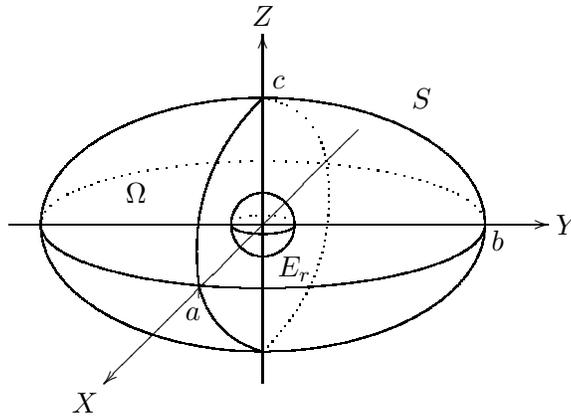


Figura 4.31: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es la región definida en el ejemplo 4.31 entonces $Fr(\Omega) = S \cup E_r$

Ejemplo 4.31 Calcule la integral $\int_S F \cdot d\sigma$ donde

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

S es el elipsoide determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $0 < a, b, c$, y σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” del elipsoide.

Solución. Tomamos $r > 0$ tal que $r < \min\{a, b, c\}$. Por tanto el conjunto (Jordan-medible)

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \text{ y } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

está contenido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, que es el dominio del campo F , y además $Fr(\Omega) = S \cup E_r$, donde E_r es la esfera de radio r con centro en el origen (ver figura 4.31). De esta forma, por la versión

general del teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_S F \cdot d\sigma + \int_{E_r} F \cdot d\tilde{\sigma} = \int_{\Omega} \operatorname{div} F = 0$$

en donde $\tilde{\sigma}$ es una parametrización simple de E_r que induce vectores normales que apuntan hacia “adentro” de la esfera. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot d\sigma &= - \int_{E_r} F \cdot d\tilde{\sigma} \\ &= -(-4\pi) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

(considerando el cálculo realizado en el ejemplo 4.13).

Otra consecuencia importante del teorema de Gauss es que en el caso de un campo F de clase C^1 , la divergencia de un campo F en un punto \hat{x} ($\operatorname{div} F(\hat{x})$) se puede ver como un límite, y no sólo haciendo uso de la expansión o contracción producida sobre esferas o cubos centrados en \hat{x} (como se hizo en la proposición 4.24) sino para regiones más generales. En la siguiente proposición establecemos este hecho.

Proposición 4.32 Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , $\hat{x} \in U$ y $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de conjuntos contenidos en U , Jordan-medibles, cerrados y acotados, y tales que: $S_\varepsilon = \operatorname{Fr}(\Omega_\varepsilon) = \partial\Omega_\varepsilon$ es una superficie (por pedazos), $\hat{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$ y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$. Entonces

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} F \cdot d\sigma_\varepsilon}{\operatorname{volumen}(\Omega_\varepsilon)}$$

donde σ_ε es una parametrización simple de S_ε que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω_ε .

Dem. De acuerdo con el Teorema de Gauss, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} F \cdot d\sigma_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot m(\Omega_\varepsilon) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot \operatorname{volumen}(\Omega_\varepsilon) \end{aligned}$$

para alguna $\hat{\xi}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ (Teorema del Valor Promedio). Como $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$ son continuas y $\hat{\xi}_\varepsilon \rightarrow \hat{x}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, ya que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$ y $\hat{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} F \cdot d\sigma_\varepsilon}{\operatorname{volumen}(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}) \end{aligned}$$

$$= \operatorname{div} F(\hat{x})$$

que es lo que se deseaba demostrar. ■

Una de las ventajas de poder usar una gama amplia de regiones para ver a la divergencia de un campo F (en un punto \hat{x}) como un límite, es que podemos deducir cómo se calcula este valor en el caso en que el campo F esté expresado en otros sistemas coordenados. Dado que esto ya lo hemos hecho en varias ocasiones en este texto, ahora esta tarea queda como un problema para el lector.

El teorema de Gauss también es una herramienta muy útil para obtener una interpretación alternativa del concepto de rotacional para campos en \mathbb{R}^3 . Para mostrar esto, empecemos planteando la siguiente situación: supongamos que la superficie E_r es la esfera de radio $r > 0$ con centro en un punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, que \hat{x} es un punto de E_r y que $\hat{n}_{\hat{x}}$ es el vector unitario normal a E_r en el punto \hat{x} , que apunta hacia “afuera” de E_r . La primera pregunta que nos haremos es la siguiente: si suponemos que la esfera está “sujeta” al punto \hat{x}_0 (por medio de un alfiler ¡puesto desde una cuarta dimensión!) de tal forma que al golpearla por una fuerza \hat{F} en el punto \hat{x} , no se desplaza pero si “rota”, ¿cómo (¿y con qué?) medimos este movimiento de rotación?

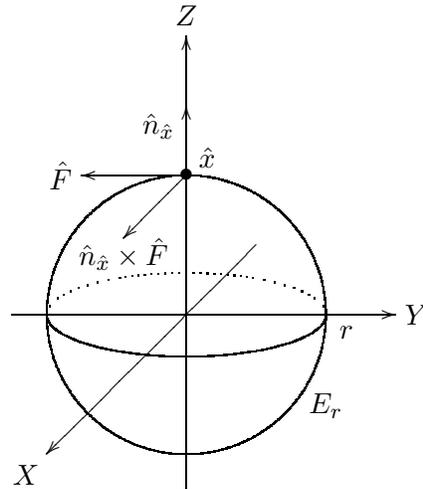


Figura 4.32: Si \hat{x} es el punto de la esfera E_r de coordenadas $(0, 0, r)$ y $\hat{F} = (0, a, 0)$, es de esperarse que el eje de rotación del movimiento producido por esta fuerza sobre E_r sea el eje X , lo cual concuerda con el hecho de que $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F} = (0, 0, 1) \times (0, a, 0) = (-a, 0, 0)$. Obsérvese además que si miramos al punto \hat{x} desde la dirección en la que apunta el vector $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$, se verá que éste (o la esfera E_r) gira en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj

Para saber cómo rota una esfera es necesario conocer su “eje de rotación” por lo que lo más probable es que este tipo de movimiento se deba medir por medio de un vector. En la situación que acabamos de plantear, parece razonable suponer que este eje de rotación está determinado por el vector

$$\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$$

Por ejemplo (suponiendo que \hat{x}_0 es el origen) si \hat{x} es el punto de E_r de coordenadas $(0, 0, r)$ y $\hat{F} = (0, a, 0)$ (ver figura 4.32), es de esperarse que el eje de rotación del movimiento producido por esta fuerza sobre E_r sea el eje X , lo cual concuerda con el hecho de que

$$\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F} = (0, 0, 1) \times (0, a, 0) = (-a, 0, 0)$$

Obsérvese además que si miramos al punto \hat{x} desde la dirección en la que apunta el vector $(-a, 0, 0)$, se verá que éste gira en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Es decir, el vector $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$ además de indicarnos cuál es el eje de rotación del movimiento producido sobre la esfera, nos indicará desde dónde hay que observar al punto \hat{x} (o a la esfera E_r) para ver que éste (o ésta) se mueva en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

Como es de esperarse, la magnitud del vector $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$ será una medida de la magnitud de la fuerza ejercida sobre la esfera E_r en el punto \hat{x} , de tal forma que este punto \hat{x} girará a razón de

$$\frac{\|\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}\|}{2\pi r} = \left\| \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}) \right\|$$

revoluciones (por unidad de tiempo) lo que también se puede tomar como una medida de la rotación producida sobre la esfera E_r .

En resumen, el vector

$$\frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F})$$

contiene toda la información necesaria para conocer el movimiento de rotación producido por la fuerza \hat{F} sobre la esfera E_r . Vale la pena hacer notar que si $\hat{n}_{\hat{x}} = (n_{\hat{x},1}, n_{\hat{x},2}, n_{\hat{x},3})$ y $\hat{F} = (F_1, F_2, F_3)$ entonces

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F} &= (n_{\hat{x},2}F_3 - n_{\hat{x},3}F_2, n_{\hat{x},3}F_1 - n_{\hat{x},1}F_3, n_{\hat{x},1}F_2 - n_{\hat{x},2}F_1) \\ &= ((0, F_3, -F_2) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (-F_3, 0, F_1) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (F_2, -F_1, 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si ahora tomamos un número finito de puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en E_r y suponemos que en cada uno de ellos actúa una fuerza $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$, respectivamente, el lector coincidirá en que el eje de la rotación producida sobre la esfera E_r por todas estas fuerzas estará dado por el vector

$$\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k$$

y que la magnitud del movimiento de rotación producido por dichas fuerzas estará dado por

$$\frac{\|\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k\|}{2\pi r} = \left\| \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k) \right\|$$

Hay muchas formas sencillas de tomar puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en E_r , y fuerzas $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$ que “experimentalmente” confirmarían esta afirmación (ver figura 4.33).

Nuevamente es importante destacar que, si $\hat{n}_{\hat{x}_i} = (n_{\hat{x}_i,1}, n_{\hat{x}_i,2}, n_{\hat{x}_i,3})$ y $\hat{F}_i = (F_{i,1}, F_{i,2}, F_{i,3})$ (para $i = 1, \dots, k$) entonces

$$\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k = \left(\sum_{i=1}^k (0, F_{i,3}, -F_{i,2}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}_i}, \sum_{i=1}^k (-F_{i,3}, 0, F_{i,1}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}_i}, \sum_{i=1}^k (F_{i,2}, -F_{i,1}, 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}_i} \right)$$

Ahora el siguiente paso es suponer que tenemos todo un campo de fuerzas que actúa en cada punto de la esfera E_r y el problema que tenemos que resolver es el de calcular la rotación que éste produce en la esfera. Supongamos que el campo de fuerzas esta representado por una función continua $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y que D_r , la esfera (sólida) de radio $r > 0$ con centro en \hat{x}_0 , está contenida en U .

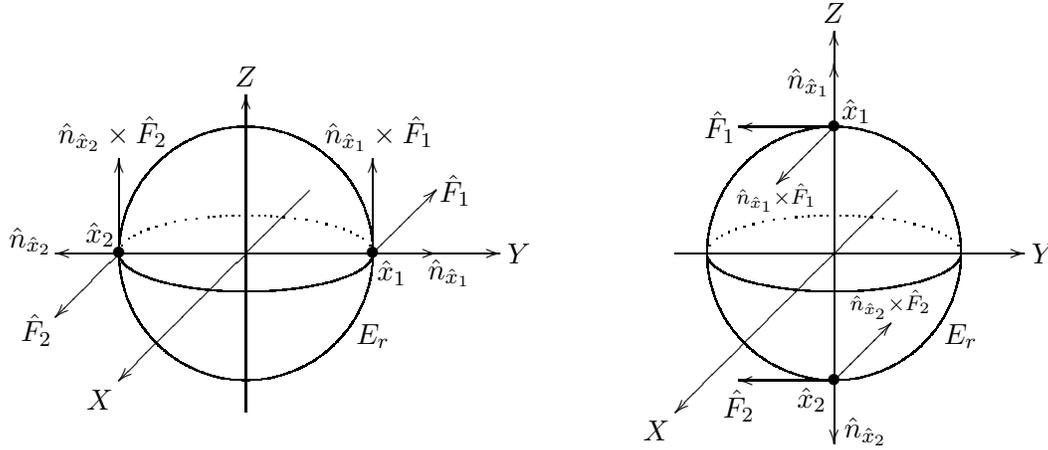


Figura 4.33: Formas sencillas de tomar puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en E_r y fuerzas $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$ que “confirman” que el vector $\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k$ contiene toda la información necesaria para “medir” el movimiento de rotación producido por dichas fuerzas sobre la esfera E_r .

Con base en este campo F , podemos definir otro campo vectorial sobre la esfera E_r de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G(\hat{x}) &= \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times F(\hat{x})) \\ &= \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times (P(\hat{x}), Q(\hat{x}), R(\hat{x}))) \\ &= \frac{1}{2\pi r} ((0, R(\hat{x}), -Q(\hat{x})) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (-R(\hat{x}), 0, P(\hat{x})) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (Q(\hat{x}), -P(\hat{x}), 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}) \end{aligned}$$

para cada $\hat{x} \in E_r$. Nótese que este campo se puede interpretar como el campo que, para cada $\hat{x} \in E_r$, nos dice cuál es el eje de la rotación producida por la fuerza $F(\hat{x})$ sobre la esfera E_r , y su norma $\|G(\hat{x})\|$ nos indica la magnitud de esta rotación.

Si ahora hacemos uso de la fórmula que nos permite calcular el valor promedio (sobre la esfera E_r) de cada una de las funciones coordenadas de este campo G (y que el lector deducirá en el problema 15), podemos asegurar que el vector

$$\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{1}{\text{área}(E_r)} \left(\int_{E_r} (0, R(\hat{x}), -Q(\hat{x})) \cdot d\sigma, \int_{E_r} (-R(\hat{x}), 0, P(\hat{x})) \cdot d\sigma, \int_{E_r} (Q(\hat{x}), -P(\hat{x}), 0) \cdot d\sigma \right)$$

contiene la información necesaria (eje de rotación e intensidad) para conocer la rotación (promedio) producida por el campo F sobre la esfera E_r .

Por el teorema de Gauss tenemos que este vector se puede escribir como

$$\frac{1}{\text{área}(E_r)(2\pi r)} \left(\int_{D_r} \text{div}(0, R(\hat{x}), -Q(\hat{x})), \int_{D_r} \text{div}(-R(\hat{x}), 0, P(\hat{x})), \int_{D_r} \text{div}(Q(\hat{x}), -P(\hat{x}), 0) \right)$$

y por el Teorema de Valor Promedio, como

$$\frac{\text{volumen}(D_r)}{\text{área}(E_r)(2\pi r)} \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{\xi}_r) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{\xi}_r), -\frac{\partial R}{\partial x}(\hat{\eta}_r) + \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{\eta}_r), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\zeta}_r) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\zeta}_r) \right)$$

en donde $\hat{\xi}_r, \hat{\eta}_r, \hat{\zeta}_r \in D_r$.

Si, finalmente, tomamos el límite de estos vectores cuando $r \rightarrow 0$, en cuyo caso se tiene que $\hat{\xi}_r, \hat{\eta}_r, \hat{\zeta}_r \rightarrow \hat{x}_0$, entonces el vector

$$\frac{1}{6\pi} \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), -\frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) = \frac{1}{6\pi} \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$$

se puede interpretar como el vector que nos indica cuál es la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 .

La conclusión más importante de toda esta discusión es que el $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$ es un vector que también se puede interpretar como el eje de la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 . Es decir, si en el punto \hat{x}_0 colocamos una esfera de radio muy pequeño, como resultado de la acción del campo F esta esfera rotará teniendo como eje de rotación al vector $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$, y esta rotación será en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apunta éste.

4.7 Campos solenoides (segunda parte)

Una vez que hemos llegado hasta aquí, recordemos que el concepto de divergencia lo introdujimos con la idea de contar con una herramienta que nos permitiera saber cuándo un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo solenoide. Un primer resultado importante con respecto a este concepto y los campos solenoides se puede deducir a partir del *Teorema de las Derivadas Parciales Cruzadas*. En efecto, usando este teorema se puede probar que, si F es un campo solenoide (de clase C^1) en una región U , entonces se debe tener que $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$. Nótese que este resultado nos proporciona una consecuencia (o condición) necesaria del hecho de que un campo sea solenoide.

Proposición 4.33 Si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 es un campo solenoide en U entonces $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$.

Dem. Se deja al lector. ■

Sin duda la pregunta que inmediatamente tiene uno que hacerse es si el recíproco de esta proposición también es cierto, es decir, ¿si $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$ entonces F es un campo solenoide en U ? Como seguramente el lector ya se imagina, la respuesta es negativa. En el ejemplo 4.22, apoyándonos en el problema 24, mostramos que el campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

no es un campo solenoide en la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, y en el ejemplo 4.26 mostramos que este mismo campo es tal que $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$.

¿Cuál es el problema? De la misma forma en que el recíproco de la proposición 3.46 del capítulo tres (es decir, que todo campo de rotacional cero en una región U es un campo gradiente en dicha región) no es cierto por razones que tienen que ver con la geometría de la región U , eso mismo sucede ahora con el recíproco de la proposición 4.33.

Así como los campos que sirven de contraejemplo al recíproco de la proposición 3.46 del capítulo tres están definidos en regiones U que tienen la característica geométrica de que no toda curva cerrada $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” (sin salirse de U) a un punto de U , obsérvese ahora que en la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ (que es el dominio del campo F que nos sirvió de contraejemplo al

recíproco de la proposición 4.33) podemos encontrar cierto tipo de superficies “cerradas” $S \subset U$ que tampoco se pueden “contraer” (sin salirse de U) a un punto de U , como por ejemplo, cualquier esfera con centro en el origen (ver figura 4.34).

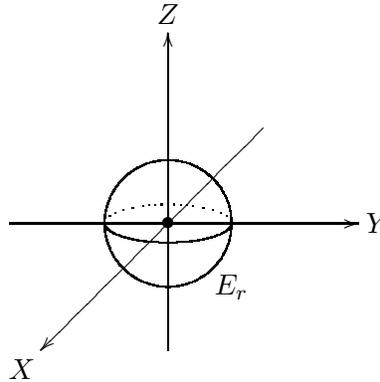


Figura 4.34: Si tomamos la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ entonces la esfera E_r es un ejemplo de una superficie contenida en U que no se puede “contraer” (sin salirse de U) a un punto de U

Formalizar de manera más rigurosa lo que significa que una superficie “cerrada” $S \subset \mathbb{R}^3$ se pueda “contraer” a un punto, es algo que escapa a los objetivos de este texto. Simplemente mencionaremos que a las regiones $U \subset \mathbb{R}^3$ que tuvieran la propiedad de que cierto tipo de superficies “cerradas” (específicamente las esferas o las “parecidas” a éstas) $S \subset U$ se pudieran contraer a un punto de U , sin salirse de U (y que geoméricamente significaría que U no tiene algo que bien podríamos bautizar como “hoyos” de dimensión dos), se les deberían de llamar regiones *doblemente* (o *dos-dimENSIONALMENTE*) *conexas* y que el teorema más general que se podría formular con relación a los campos solenoides y este tipo de regiones, diría lo siguiente:

Teorema 4.34 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , con U una región dos-dimENSIONALMENTE conexa. Si $\text{div } F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$ entonces F es un campo solenoide en U .

Aunque no contamos con todo lo necesario para probar este teorema, no hay porque desanimarse. Afortunadamente existen las regiones estrelladas (cuya definición dimos en el capítulo 3) y para las cuales se puede probar un teorema completamente análogo al anterior.

Teorema 4.35 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , con U una región estrellada. Si $\text{div } F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$ entonces F es un campo solenoide en U .

Dem. Para esta prueba, supondremos que U es estrellada con respecto al origen. El caso general queda como un problema para el lector. Bajo este supuesto se tiene que, si $\hat{x} \in U$, entonces $t\hat{x} \in U$ para toda $t \in [0, 1]$.

En virtud de lo anterior, definimos $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

$$G(x, y, z) = \int_0^1 (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt$$

para cada $(x, y, z) = \hat{x} \in U$, (en donde la integral de la función de valores vectoriales $F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})$ es igual al vector formado por la integral de cada una de las funciones coordenadas de $F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})$).

Dado que F es de clase C^1 en U , por el teorema 2.7 tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{Rot}G(\hat{x}) &= \mathbf{Rot} \left(\int_0^1 (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt \right) \\ &= \int_0^1 \mathbf{Rot} (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt\end{aligned}$$

Ahora, por el problema 34 de este capítulo, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbf{Rot} (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) &= 2tF(t\hat{x}) + t^2 \frac{d(F(t\hat{x}))}{dt} \\ &= \frac{d(t^2F(t\hat{x}))}{dt}\end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}\mathbf{Rot}G(\hat{x}) &= \int_0^1 \mathbf{Rot} (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt \\ &= \int_0^1 \left(2tF(t\hat{x}) + t^2 \frac{d(F(t\hat{x}))}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d(t^2F(t\hat{x}))}{dt} \right) dt \\ &= t^2F(t\hat{x}) \Big|_0^1 \\ &= F(\hat{x})\end{aligned}$$

lo que demuestra que F es un campo solenoide en U . ■

Concluimos esta sección (¡y este capítulo!) con un ejemplo en el cual se da una aplicación de este teorema. Ahí mostraremos explícitamente que, si bien el campo del ejemplo 4.22 no es solenoide en su dominio ($\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$), lo debe de ser en la (sub)región estrellada de éste, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\}$, como lo afirma el teorema.

Ejemplo 4.36 *Muestre que el campo*

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

es solenoide en la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\}$.

Solución. Sea $G : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$G(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right), \frac{x}{x^2+y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \right), 0 \right) & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) \left(1 + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

de tal forma que, por ejemplo, se tiene que

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}}$$

de donde se deduce que, si $0 < z_0$, entonces

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,z_0)} \frac{x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = 0$$

(¿por qué?).

Con base en lo anterior se prueba que G es continua en U y por procedimientos análogos se puede probar que es de clase C^1 (en U). Además, es fácil ver que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$, que es lo que se quería mostrar.

4.8 Problemas

- Calcule una parametrización para cada una de las siguientes superficies:
 - el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
 - el paraboloide elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - z$
 - el hiperboloide de una rama $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
 - el hiperboloide de dos ramas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (*parametrice cada rama*)
 - el hiperboloide parabólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$
- En cada uno de los siguientes incisos, describa cuál es la superficie parametrizada por la función σ , encuentre una ecuación cartesiana que la determine y calcule el vector normal $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$.
 - $\sigma(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$ con $(u, v) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$
 - $\sigma(u, v) = (a \cos(v), a \sin(v), u)$ con $(u, v) \in (-\infty, \infty) \times [0, 2\pi]$
 - $\sigma(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$ con $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$
 - $\sigma(u, v) = (a(u + v), b(u - v), uv)$ con $(u, v) \in (-\infty, \infty) \times (-\infty, \infty)$
 - $\sigma(u, v) = (\cos(u)(2 - \cos(v)), \sin(u)(2 - \cos(v)), \sin(v))$, con $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.
- Dé un argumento de por qué la banda de Möbius no es una superficie orientada. ¿Por qué los vectores normales inducidos por la parametrización dada en 4.6 no hacen de la banda de Möbius una superficie orientada? Justifique su respuesta.
- Pruebe la identidad 4.7.

5. Sean, $\tilde{\sigma} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\tilde{\sigma}(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y)$ y $\sigma : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y^2)$. Muestre, que σ y $\tilde{\sigma}$ parametrizan a la misma superficie S (¿cuál?), y que existe $\alpha : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi] \times [0, 1]$ de clase C^1 tal que $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \alpha$. ¿ $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la misma “orientación” que σ ? ¿con la orientación contraria? Justifique su respuesta.
6. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 . Si $\gamma([a, b])$ está contenida en el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, encuentre una parametrización de la superficie que se obtiene al girar a la curva γ con respecto al eje y . Encuentre una fórmula para el área de esta superficie.
7. Encuentre una parametrización del toro generado por una circunferencia de radio a con centro en el punto $(0, b, 0)$ cuando éste se gira alrededor del eje Z , en donde $0 < a < b$. Calcule el área de dicho toro.
8. Supóngase que una superficie S es la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , y que también es la superficie de nivel cero de una cierta función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial z}(u, v, f(u, v)) \neq 0$ para toda $(u, v) \in A$. Encuentre una fórmula para el área de S ($A(S)$) que sólo involucre a f y otra que sólo involucre a F .
9. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametriza a una curva suave contenida en A , entonces $\tau = \sigma \circ \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva suave contenida en S . Pruebe que, $\tau'(t)$ es un vector ortogonal al vector normal a S en $\tau(t)$ y que $\tau(t) + \tau'(t)$ pertenece al plano tangente a S en $\tau(t)$.
10. Sea S la gráfica de la función de clase C^1 , $z = g(x, y)$ sobre el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

(a) pruebe que el área de S está dada por la fórmula

$$\int_A \sec(\alpha) dx dy$$

donde α es el ángulo entre el vector $(0, 0, 1)$ y el vector unitario \hat{n} normal a S (en cada punto de S) cuya tercera componente siempre es positiva.

(b) pruebe que, si S está contenida en un plano P , entonces

$$\text{área}(S) = \sec(\alpha) \cdot \text{área}(A)$$

donde α es el ángulo formado por el vector unitario \hat{n} (normal a P y cuya tercera componente es positiva) y el vector $(0, 0, 1)$.

11. Usando la fórmula para calcular el área de superficies contenidas en un plano del ejercicio anterior, calcule el área de las siguientes superficies:
- (a) el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$
- (b) la porción del plano $x + y + z = a$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
- (c) la porción del plano $y = 2z$ que queda dentro de la superficie $x^2 + y^2 - 2ay = z^2$
12. Calcule el área de la superficie S , donde:
- (a) S es la esfera de radio $r > 0$ con centro en $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$

- (b) S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$, con $a > 0$
- (c) S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que queda dentro del cilindro $z^2 + y^2 = a^2$
- (d) S es la superficie de la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está arriba del plano xy y debajo del plano $2z = y + 1$
- (e) S es la superficie parametrizada por la función $\sigma(u, v) = (u, v, uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
13. Dadas las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y $x^2 + y^2 = a(z + a)$, con $a > 0$
- (a) calcule el área de la parte de la esfera que queda dentro del paraboloido
- (b) calcule el área de la parte del paraboloido que queda dentro de la esfera
14. El ángulo sólido determinado por un cono sólido \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 , con vértice en el origen, se define como el área de la intersección de \mathcal{C} con la superficie de la esfera unitaria
- (a) calcule el ángulo sólido determinado por el cono $x^2 + y^2 \leq 2z^2$, $0 \leq z$
- (b) muestre que una reducción adecuada de la definición anterior, conduce a la definición usual de ángulo entre dos semirectas que parten del origen (en \mathbb{R}^2)
15. Sean, $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $S \subset U$ una superficie y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización simple de S . Deduzca una fórmula para calcular el promedio de los valores de f sobre S . Justifique su respuesta.
16. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio r con centro en el origen y $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\hat{x}_0 \notin S$. Si definimos $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(\hat{x}) = 1/\|\hat{x} - \hat{x}_0\|$, calcule $\int_S f \|d\sigma\|$
17. Calcule la masa total de una lámina cuya forma corresponde a la de una superficie S , y con una función de densidad ρ , donde:
- (a) S es el paraboloido $x^2 + y^2 = z$, $0 \leq z \leq 1$, y $\rho(x, y, z) = 1 + z$
- (b) S es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$, y $\rho(x, y, z) = |x| + |y|$
18. Deduzca cuáles son las coordenadas del centro de masa de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que tiene una función de densidad $\rho(x, y, z)$.
19. Calcule qué tanto se “expande” un fluido a través y hacia afuera de la superficie S , si el fluido tiene un campo de velocidades dado por la función F , donde:
- (a) S es la esfera de radio r con centro en el origen y $F(x, y, z) = (-y, x, -z)$
- (b) S es la porción del parabolide $x^2 + y^2 = z$, $0 \leq z \leq 4$ y $F(x, y, z) = (x, y, 0)$
20. Pruebe que, si F es un campo vectorial (continuo) sobre una superficie S , parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A cerrado y acotado, entonces

$$\left| \int_S F \cdot d\sigma \right| \leq M \cdot A(S)$$

donde $M = \max \{\|F(\hat{x})\| \mid \hat{x} \in S\}$ y $A(S)$ es el área de S .

21. Sea $S \subset U$ una superficie y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S . Si $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 tal que $F(\hat{x})$ es perpendicular a la tangente del “borde” de S inducido por σ ($\partial_\sigma S$) en \hat{x} , para todo $\hat{x} \in \partial_\sigma S$. Pruebe que $\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = 0$.
22. Muestre que el Teorema de Green se puede obtener como un caso particular del Teorema de Stokes.
23. Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $S \subset U$, σ , y $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ son como en las hipótesis del teorema de Stokes, pruebe que:

(a)

$$\int_S (f \mathbf{Rot} F) \cdot dS = \int_{\partial_\sigma S} (f F) \cdot d\tilde{\gamma} - \int_S (\nabla f \times F) \cdot dS$$

(b)

$$\int_S (F \times \mathbf{Rot} G) \cdot dS = \int_{\partial_\sigma S} (F \times G) \cdot dS - \int_S (\mathbf{Rot} F \times G) \cdot dS$$

(Fórmulas de *integración por partes* usando el rotacional. *Sugerencia:* para el inciso (a) use la identidad del inciso 2 de la proposición 3.43, y para el inciso (b) la indentidad del problema 36 del capítulo 3).

24. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 . Pruebe que $\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = 0$ en donde:
- (a) $S \subset U$ es una esfera (cuyo centro no necesariamente debe estar en U) y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización simple de S .
- (b) $S = \partial R = Fr(U) \subset U$, con $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$ un rectángulo no degenerado, y en donde las parametrizaciones simples de las “caras” de S inducen vectores normales que apuntan (todos) hacia “afuera” de R ó que apuntan (todos) hacia “dentro” de R .
- (c) $S \subset U$ es un sector de un cilindro recto (cuyo eje es paralelo a uno de los ejes coordenados) incluyendo las “tapas” de sus extremos, y en donde las parametrizaciones de las “caras” de S (que las recorren una vez) inducen vectores normales que apuntan (todos) hacia “afuera” de S ó que apuntan (todos) hacia “dentro” de S .

25. Sea S el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y sea $D(x, y, z)$ la distancia del origen al plano tangente a S en (x, y, z) .

(a) muestre que, si

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)$$

entonces $F \cdot \hat{n} = D^{-1}$, donde \hat{n} es el vector normal unitario exterior a S en (x, y, z)

(b) pruebe que

$$\int_S D^{-1} \|d\sigma\| = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)$$

26. Sean $u, v : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $S = \partial\Omega = Fr(\Omega) \subset U$ es una superficie. Pruebe las siguientes identidades:

(a)

$$\int_S (v\nabla u) \cdot d\sigma = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + v\nabla^2 u) dx dy dz$$

(b)

$$\int_S (v\nabla u - u\nabla v) \cdot d\sigma = \int_{\Omega} (v\nabla^2 u - u\nabla^2 v) dx dy dz$$

(c) ¿Cuáles son las identidades que debieran cumplirse en el caso de que $\partial\Omega = S \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$ sea una superficie por pedazos?

27. Sean u, Ω y S como en el problema anterior, y suponga además que: u es una función armónica en Ω (es decir, $\nabla^2 u(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \Omega$), y que $int(\Omega)$ es conexo. Pruebe que:

(a)

$$\int_S \nabla u \cdot d\sigma = 0$$

(b)

$$\int_S (u\nabla u) \cdot d\sigma = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy dz$$

(c) si $u(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in S$ entonces $u(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in int(\Omega)$.

(d) si \tilde{u} es armónica en Ω tal que $\tilde{u}(\hat{x}) = u(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in S$ entonces $\tilde{u}(\hat{x}) = u(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in int(\Omega)$.

28. Sean u, Ω y S como en el problema anterior. Dado $\hat{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in int(\Omega)$, definimos $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{x}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$v(x, y, z) = \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}}$$

Pruebe que

$$u(\hat{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S (v\nabla u - u\nabla v) \cdot d\sigma$$

29. Sean $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $\Omega \subset U$ es un conjunto Jordan-medible tal que $S = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una superficie por pedazos y $\Omega \cup S \subset U$, pruebe que

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} F = \int_{S=\partial\Omega} (fF) \cdot d\sigma - \int_{\Omega} \nabla f \cdot F$$

en donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω . (Fórmula de *integración por partes* usando la divergencia. *Sugerencia*: use la identidad del inciso 2 de la proposición 4.27).

30. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $\Omega = \{\hat{x} \in U \mid f(\hat{x}) \neq 0\}$ es un conjunto Jordan-medible tal que $S = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una superficie por pedazos y $\Omega \cup S \subset U$, pruebe que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

(sugerencia: aplique el problema 29, usando un campo F “adecuado” en cada caso).

31. Pruebe la proposición 4.33.
32. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región Jordan-medible cuya frontera (o “borde”) es una superficie S por pedazos. Deduzca una fórmula para calcular el volumen de Ω por medio de una integral sobre la superficie S de un cierto campo F .
33. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región Jordan-medible tal que $\hat{0} \in int(\Omega)$ y cuya frontera (o “borde”) es una superficie S suave por pedazos. Si

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

pruebe que

$$\int_S F \cdot d\sigma = 4\pi$$

donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

34. Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , una región estrellada con respecto a $\hat{0} \in U$. Pruebe que, si $\text{div } F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$, entonces

$$\mathbf{Rot}(F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) = 2tF(t\hat{x}) + t^2 \frac{d(F(t\hat{x}))}{dt}$$

para cada $\hat{x} \in U$ y cada $t \in [0, 1]$.

35. Pruebe el caso general del teorema 4.35 (sugerencia: use el problema 38 del capítulo tres).
36. Determine si el campo F definido en el ejemplo 4.29 es un campo solenoide en su dominio. Pruebe su respuesta (la función $\ln(x^2 + y^2)$ puede ser útil).
37. Tomando el conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$, y los campos F y G del ejemplo 4.36, compruebe que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$.
38. Sea $F = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , tal que $\text{div } F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$. Definimos $G = (G_1, G_2, G_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del siguiente modo:

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z Q(x, y, t) dt - \int_0^y R(x, t, 0) dt$$

$$G_2(x, y, z) = - \int_0^z P(x, y, t) dt$$

$$G_3(x, y, z) = 0$$

para toda $\hat{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Pruebe que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$, y que esta G es única, salvo por campos conservativos. Es decir, si $\tilde{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $\mathbf{Rot}\tilde{G}(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ entonces $G - \tilde{G}$ es un campo conservativo en \mathbb{R}^3 .

39. Sea $F = (P, Q, R) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , tal que $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \Omega$. Muestre que, para cada $\hat{x}_0 \in \Omega$ existen $r > 0$ y $G : B_r(\hat{x}_0) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in B_r(\hat{x}_0)$. Calcule explícitamente G (*sugerencia*: imite la construcción del ejercicio anterior).
40. Sean, $F = (F_1, F_2, F_3), G = (G_1, G_2, G_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , $\hat{x}_0 \in U$ y E_r la esfera de radio $r > 0$ con centro en \hat{x}_0 .

(a) Si $\hat{n}_{\hat{x}}$ es un vector normal a E_r en el punto $\hat{x} \in E_r$, pruebe que

$$(F \times G) \cdot \hat{n}_{\hat{x}} = (0, G_1F_3, -G_1F_2) \cdot \hat{n}_{\hat{x}} + (-G_2F_3, 0, G_2F_1) \cdot \hat{n}_{\hat{x}} + (G_3F_2, -G_3F_1, 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}$$

(*sugerencia*: use la identidad $\hat{a} \cdot (\hat{b} \times \hat{c}) = \hat{c} \cdot (\hat{a} \times \hat{b})$ y la identidad 4.16).

(b) Use la proposición 4.32 y el teorema de la divergencia para probar que

$$\operatorname{div}(F \times G)(\hat{x}) = G(\hat{x}) \cdot \mathbf{Rot}F(\hat{x}) - F(\hat{x}) \cdot \mathbf{Rot}G(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$.

(c) Pruebe que, si F y G son campos conservativos en U y $V \subset U$ es una región estrellada, entonces $F \times G$ es un campo solenoide en V .

41. Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , una región estrellada, tales que $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = \mathbf{Rot}G(\hat{x})$ y $\operatorname{div} F(\hat{x}) = \operatorname{div} G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$. Si $\Omega \subset U$ es tal que $S = Fr(\Omega) \subset U$ es una superficie suave por pedazos y $F(\hat{x}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}} = G(\hat{x}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}$ para toda $\hat{x} \in S$, en donde $\hat{n}_{\hat{x}}$ representa un campo continuo de vectores unitarios normales a la superficie S , pruebe que $F(\hat{x}) = G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in \Omega$.
42. Deduzca una expresión para la divergencia de un campo $F = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$ que está dado en términos de coordenadas esféricas (*sugerencia*: use la proposición 4.32).

Capítulo 5

Formas: el concepto que unifica

Cuando en los capítulos tres y cuatro insistimos en definir a el rotacional y a la divergencia (tanto en el plano como en el espacio) a través de un límite, fue con la idea de que éstos se entendieran como un cierto tipo de derivada. Esta manera de ver a estos conceptos, junto con la introducción de las integrales de línea y de superficie, es lo que a su vez nos permitió interpretar a los teoremas de Green, Stokes y Gauss como una especie de generalización del Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

En este capítulo vamos a mostrar que, en efecto, el rotacional y la divergencia (¡y el gradiente!) se pueden ver como un caso particular de una especie de derivada, que llamaremos la *diferencial*, de un cierto tipo de función que se conoce con el nombre de *p-forma*. Así mismo, mostraremos que las integrales de línea y de superficie también son un caso particular de la integral definida para estos mismos objetos, y lo que es mejor de todo, veremos que los teoremas de Green, Stokes y Gauss son un caso particular de un único teorema que involucra a todos estos conceptos.

En este capítulo definiremos y describiremos de la manera más concisa posible (¡y sólo eso!), todo lo necesario para entender qué es una forma y los conceptos asociados de derivación e integración de estos objetos. Para concluir, formularemos el teorema que generaliza a los multicitados teoremas de los capítulos 3 y 4, mostrando simplemente por qué éstos últimos son un caso particular de aquel.

Finalmente, es importante mencionar que, aun cuando el concepto de forma se puede trabajar en un contexto mas amplio, aquí nos limitaremos al ámbito del espacio \mathbb{R}^n .

5.1 Formas básicas

Lo primero que hay que decir es que definiremos a las formas básicas a través del concepto de función, y que los distintos tipos de formas básicas con los que trabajaremos se distinguirán por el dominio sobre el cual estarán definidas dichas funciones. Para cada $p \in \mathbb{N}$ se tendrá un número finito de formas básicas en \mathbb{R}^n ; por ejemplo, para $p = 1$ definiremos (en \mathbb{R}^n) n distintas formas básicas (que denotaremos por dx_1, \dots, dx_n y a las que por razones obvias llamaremos *1-formas básicas*), como las funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} definidas como:

$$dx_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \tag{5.1}$$

para cada $(a_1, \dots, a_n) = \hat{a} \in \mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$) y que geoméricamente se puede(n) identificar como la(s) “proyección(es)” del punto \hat{a} sobre el i -ésimo eje coordenado (ver figura 5.1).

Para $p = 2$ definiremos (en \mathbb{R}^n) n^2 formas básicas (que denotaremos por $dx_i \wedge dx_j$ (con $i, j = 1, \dots, n$) y a las que por razones también obvias llamaremos *2-formas básicas*), como las funciones

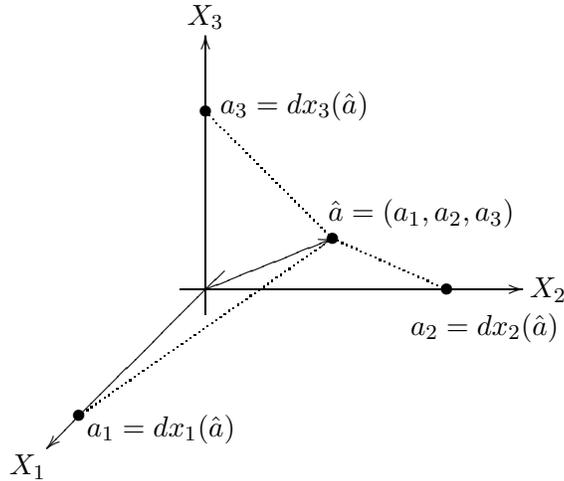


Figura 5.1: El valor de la 1–forma básica dx_i sobre el vector \hat{a} es igual a la i –ésima coordenada de éste o, geoméricamente, es la proyección de \hat{a} sobre el eje X_i

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} definidas como:

$$(dx_i \wedge dx_j)((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

para cada $((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (con $i, j = 1, \dots, n$) y que geoméricamente se puede(n) identificar como la(s) función(es) que asignan (+ o –) el área del paralelogramo que se forma al “proyectar” en el plano $X_i X_j$ a los vectores (a_1, \dots, a_n) y (b_1, \dots, b_n) (ver figura 5.2).

Con base en estos dos ejemplos ya se pueden vislumbrar algunas cuestiones importantes relacionadas con las formas básicas en \mathbb{R}^n . Por ejemplo, nótese que en la definición de las 2–formas básicas dada en 5.2 se pueden usar las 1–formas básicas de la siguiente manera: si $\hat{a} = (a_1, \dots, a_n)$ y $\hat{b} = (b_1, \dots, b_n)$ entonces

$$\begin{aligned} (dx_i \wedge dx_j)((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) &= (dx_i \wedge dx_j)(\hat{a}, \hat{b}) \\ &= \det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} dx_i(\hat{a}) & dx_i(\hat{b}) \\ dx_j(\hat{a}) & dx_j(\hat{b}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

También vale la pena destacar, con base en la identidad 5.2 (o en algunas propiedades elementales de los determinantes), que la 2–forma básica $dx_i \wedge dx_i$ resulta ser la función constante cero, es decir

$$dx_i \wedge dx_i \equiv 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$, y que

$$dx_i \wedge dx_j = -(dx_j \wedge dx_i)$$

para cada $i, j = 1, \dots, n$.

En general, dado $p \in \mathbb{N}$, las p –formas básicas en \mathbb{R}^n se definen de la siguiente manera:

Definición 5.1 Sea $p \in \mathbb{N}$. Dado $(l_1, \dots, l_p) \in \{1, \dots, n\} \times \dots \times \{1, \dots, n\} = \{1, \dots, n\}^p$, definimos la p –forma básica en \mathbb{R}^n asociada a este vector de índices, y que denotamos por $dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$,

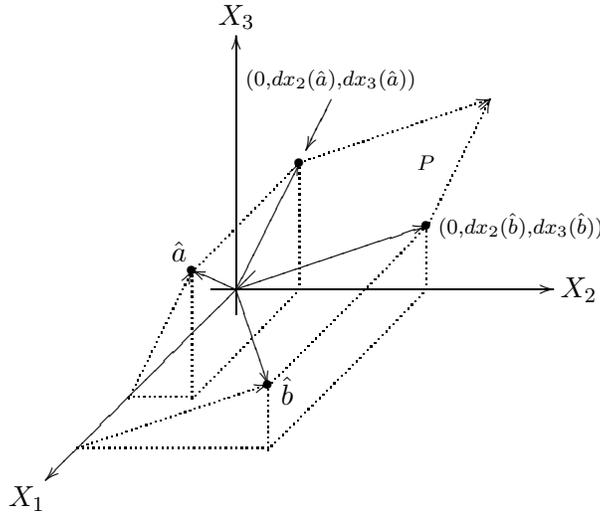


Figura 5.2: Geométricamente, la 2–forma básica $dx_i \wedge dx_j$ se puede interpretar como la función que asigna (+ o –) el área del paralelogramo que se forma al “proyectar” en el plano $X_i X_j$ a los vectores (a_1, \dots, a_n) y (b_1, \dots, b_n) . En la figura (en \mathbb{R}^3) se tiene que $(dx_2 \wedge dx_3)(\hat{a}, \hat{b}) = -\text{área}(P)$

como la función

$$dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ veces}} = (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$(dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p})(\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p) = \det(dx_{l_i}(\hat{a}_j))$$

donde $i, j = 1, \dots, p$.

Como ya mencionamos en el caso de las 2–formas básicas, y por razones que resultan evidentes, en general las propiedades de los determinantes son fundamentales para deducir las propiedades de las p –formas básicas. Por ejemplo, del hecho de que el determinante de una matriz vale cero si ésta contiene dos columnas (o dos renglones) que son iguales, se deducen las siguientes propiedades de las p –formas básicas.

Proposición 5.2 Sean $p \in \mathbb{N}$ y $(l_1, \dots, l_p) \in \{1, \dots, n\}^p$.

1. si $l_i = l_j$ para alguna i y una j entonces $dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p} \equiv 0$
2. si $p > n$ entonces $dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p} \equiv 0$

Del segundo inciso de esta proposición concluimos que las únicas p –formas básicas (en \mathbb{R}^n) que vale la pena considerar son aquellas en las que $p \in \{1, \dots, n\}$. En cuanto al primer inciso, este nos permite concluir que si $p \in \{1, \dots, n\}$, entonces el número de p –formas básicas no triviales (de las n^p que definimos) está dado por $\binom{n}{p}$ (el número de subconjuntos del conjunto $\{1, \dots, n\}$ con exactamente p elementos).

Por otra parte, usando la propiedad de los determinantes que establece que el determinante de una matriz cambia de signo si se intercambian dos columnas (o dos renglones) adyacentes, obtenemos que todas las p –formas básicas que comparten el mismo conjunto de índices son iguales

o difieren en el signo. Por ejemplo, de todas las 3–formas que se pueden construir con los índices 1, 2 y 3 (en cualquier \mathbb{R}^n), se tiene que

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= -(dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3) \\ &= dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &= -(dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1) \\ &= dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -(dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2) \end{aligned}$$

De estas propiedades podemos concluir que un conjunto (máximo) de p –formas básicas que sean no triviales e independientes entre sí, se puede obtener considerando aquellas que se escriben como

$$dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \tag{5.3}$$

en donde $1 \leq l_1 < \cdots < l_p \leq n$. Por ejemplo, en \mathbb{R}^3 un conjunto (máximo) de 2–formas básicas que son no triviales e independientes entre sí está dado por

$$\{dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2\}$$

Para el caso de las 1–formas básicas (y en cualquier \mathbb{R}^n), dado que todas las que definimos son no triviales e independientes entre sí, el único conjunto (máximo) de 1–formas básicas que tiene estas características está dado por

$$\{dx_1, dx_2, \dots, dx_n\}$$

Como las p –formas básicas son funciones de valores reales, éstas se pueden multiplicar y sumar por números reales de la manera que todos conocemos. Con base en estas operaciones consideraremos combinaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $(l_1^{(i)}, \dots, l_p^{(i)}) \in \{1, \dots, n\}^p$ (para $i = 1, \dots, k$) y seguiremos llamándolas p –formas básicas.

Observe que estas operaciones entre p –formas básicas hacen que el conjunto de todas ellas tengan una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los números reales (de dimensión $\binom{n}{p}$). Denotaremos por $\Omega^{(p)}$ al espacio de todas las posibles combinaciones de p –formas básicas en \mathbb{R}^n y en particular denotaremos por $0^{(p)}$ al cero de este espacio, y que corresponde a la función constante cero definida en $(\mathbb{R}^n)^p$. De esta forma, por ejemplo, el conjunto $\Omega^{(1)}$ de todas las combinaciones de 1–formas básicas en \mathbb{R}^n estará dado por

$$\Omega^{(1)} = \{\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \cdots + \alpha_n dx_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

y el de todas las 2–formas básicas en \mathbb{R}^3 estará dado por

$$\Omega^{(2)} = \{\alpha_{2,3}(dx_2 \wedge dx_3) + \alpha_{3,1}(dx_3 \wedge dx_1) + \alpha_{1,2}(dx_1 \wedge dx_2) \mid \alpha_{1,2}, \alpha_{3,1}, \alpha_{2,3} \in \mathbb{R}\}$$

Finalmente, terminamos esta sección definiendo las 0–formas básicas en \mathbb{R}^n . La 0–forma básica más elemental es sólo una, que denotaremos por $1^{(0)}$, y está dada por la función constante

uno definida en el conjunto $\{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ ⁽¹⁾. Si a esta función la multiplicamos por diferentes escalares (reales) $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ y las sumamos, obtenemos la función constante $(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)1^{(0)}$ definida en el conjunto $\{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^n$. Como se podrá observar, al conjunto $\Omega^{(0)}$ de todas las 0-formas básicas (en cualquier \mathbb{R}^n) se le puede identificar simplemente con el conjunto de los números reales (\mathbb{R}).

5.2 Formas diferenciables

Una vez que hemos descrito a las p -formas básicas en \mathbb{R}^n , introduciremos el concepto de forma y el de forma diferenciable. Así como a una p -forma básica $dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$ la podemos multiplicar por un número real α (y después sumarla con otras similares), ahora podemos tomar una región $U \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y para cada $\hat{x} \in U$, considerar la p -forma básica $f(\hat{x})dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$. Esta es la idea que está detrás del concepto de p -forma, el cual precisamos en la siguiente

Definición 5.3 Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$ una p -forma básica (en \mathbb{R}^n). Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la p -forma asociada a la p -forma básica $dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$ y a la función f , que denotamos por $f dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$, es la función

$$f dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega^{(p)}$$

definida como

$$(f dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p})(\hat{x}) = f(\hat{x}) dx_{l_1} \wedge \dots \wedge dx_{l_p}$$

En general, dadas las p -formas básicas

$$dx_{l_1^{(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{l_p^{(1)}}, \dots, dx_{l_1^{(k)}} \wedge \dots \wedge dx_{l_p^{(k)}} \in \Omega^{(p)}$$

y las funciones $f_1, \dots, f_k : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \binom{n}{p}$, diremos que la suma

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \dots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \dots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \dots \wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

es una p -forma definida en $U \subset \mathbb{R}^n$.

A continuación, damos algunos ejemplos que ilustran esta definición.

Ejemplo 5.4 Sean

1. la 1-forma definida en $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

en donde (como queda implícito)

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad y \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Esta misma 1-forma, en términos de las variables x y y , se escribe como

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{-x}{x^2 + y^2} dy$$

¹La elección de este dominio (que tratándose de funciones constantes, no es tan importante) obedece a la idea de que, si para el resto de las p -formas básicas su dominio es $(\mathbb{R}^n)^p$, para las 0-formas debiera de ser el conjunto $(\mathbb{R}^n)^0$ el cual podemos identificar con el conjunto $\{\hat{0}\}$.

2. la 2-forma definida en $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$\frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_1 \wedge dx_2$$

en donde (como nuevamente queda claro)

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}, \quad f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

y

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}}$$

Esta misma 2-forma, en términos de las variables x, y y z , se escribe como

$$\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \wedge dx + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy$$

Como es de esperarse, la diferenciabilidad de la p -forma $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ dependerá de la diferenciabilidad de la función f , y lo que sí resultará novedoso es la manera en cómo definiremos a la diferencial de la p -forma $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$. Para ello, empezaremos por definir lo que significa la diferencial de una 0-forma $f1^{(0)}$, de la siguiente manera:

Definición 5.5 Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en U . Definimos la diferencial de la 0-forma $f1^{(0)}$, que denotamos por $d(f1^{(0)})$, como la 1-forma (definida en $U \subset \mathbb{R}^n$) dada por

$$d(f1^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

es decir

$$d(f1^{(0)})(\hat{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x}) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{x}) dx_n$$

para cada $\hat{x} \in U$.

Una vez hecho lo anterior, definimos en general lo que significa que una p -forma sea diferenciable (y que por razones obvias llamaremos p -forma diferenciable) de la siguiente manera:

Definición 5.6 Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 en U , $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ una p -forma básica. Definimos a la diferencial de la p -forma $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$, que denotamos por $d(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p})$, como a la $(p+1)$ -forma (definida en $U \subset \mathbb{R}^n$) dada por

$$\begin{aligned} d(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}) &= d(f1^{(0)}) \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \end{aligned}$$

En general, dadas las p -formas básicas

$$dx_{i_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(1)}}, \dots, dx_{i_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(k)}} \in \Omega^{(p)}$$

y las funciones $f_1, \dots, f_k : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \binom{n}{p}$, definimos la diferencial de la p -forma

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{i_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{i_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(k)}}$$

como

$$d(\omega^{(p)}) = d(f_1 dx_{i_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(1)}}) + \cdots + d(f_k dx_{i_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(k)}})$$

Sin duda un buen número de ejemplos ayudará a entender mejor este concepto.

Ejemplo 5.7 Calcule la diferencial:

1. de la 1-forma en \mathbb{R}^2 dada por

$$\omega^{(1)} = Pdx + Qdy$$

Solución. De la definición de diferencial, se tiene que

$$\begin{aligned} d(\omega^{(1)}) &= d(Pdx + Qdy) \\ &= d(P1^{(0)}) \wedge dx + d(Q1^{(0)}) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= 0 - \frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - 0 \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= (\text{Rot } F) dx \wedge dy \end{aligned}$$

en donde $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

2. de la 1-forma en \mathbb{R}^3 dada por

$$\omega^{(1)} = Pdx + Qdy + Rdz$$

Solución. Como en el inciso anterior

$$\begin{aligned} d(\omega^{(1)}) &= d(Pdx + Qdy + Rdz) \\ &= d(P1^{(0)}) \wedge dx + d(Q1^{(0)}) \wedge dy + d(R1^{(0)}) \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge dy \\ &\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge dz \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dz \\ &= \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz \\
 & = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy
 \end{aligned}$$

3. en general, de la 1-forma en \mathbb{R}^n dada por

$$\omega^{(1)} = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$$

Solución. Una vez más, sabemos que

$$\begin{aligned}
 d\omega^{(1)} & = d(f_1 1^{(0)}) \wedge dx_1 + d(f_2 1^{(0)}) \wedge dx_2 + \cdots + d(f_n 1^{(0)}) \wedge dx_n \\
 & = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_1 + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_n \\
 & = \left(- \sum_{j=2}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_j \right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \sum_{j=3}^n \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_2 \wedge dx_j \right) \\
 & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \sum_{j=4}^n \frac{\partial f_3}{\partial x_j} dx_3 \wedge dx_j \right) + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_n \right) \\
 & = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \right) dx_1 \wedge dx_3 + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge dx_n \\
 & + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \right) dx_2 \wedge dx_4 + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right) dx_2 \wedge dx_n \\
 & \vdots \\
 & + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \right) dx_{n-1} \wedge dx_n \\
 & = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j
 \end{aligned}$$

4. de la 2-forma en \mathbb{R}^3 dada por

$$\omega^{(2)} = P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

Solución. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
 d(\omega^{(2)}) & = d(P 1^{(0)}) \wedge (dy \wedge dz) + d(Q 1^{(0)}) \wedge (dz \wedge dx) + d(R 1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy) \\
 & = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) \wedge (dy \wedge dz) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) \wedge (dz \wedge dx) \\
 & + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) \wedge (dx \wedge dy) \\
 & = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
 & = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz
 \end{aligned}$$

$$= (\operatorname{div} F) dx \wedge dy \wedge dz$$

en donde $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

5. la 2-forma en \mathbb{R}^4 dada por

$$\omega^{(2)} = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dw + Rdw \wedge dx + Wdx \wedge dy$$

Solución. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} d(\omega^{(2)}) &= d(P1^{(0)}) \wedge (dy \wedge dz) + d(Q1^{(0)}) \wedge (dz \wedge dw) + d(R1^{(0)}) \wedge (dw \wedge dx) + d(W1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial P}{\partial w} dw \right) \wedge (dy \wedge dz) \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \frac{\partial Q}{\partial w} dw \right) \wedge (dz \wedge dw) \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial R}{\partial w} dw \right) \wedge (dw \wedge dx) \\ &+ \left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz + \frac{\partial W}{\partial w} dw \right) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial P}{\partial w} dw \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dz \wedge dw + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dw \\ &+ \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dw \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dw \wedge dx + \frac{\partial W}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial W}{\partial w} dw \wedge dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dy \wedge dz \wedge dw + \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial w} \right) dx \wedge dy \wedge dw \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dz \wedge dw \end{aligned}$$

6. de la 3-forma en \mathbb{R}^4 dada por

$$\omega^{(3)} = Pdx \wedge dy \wedge dz + Qdy \wedge dz \wedge dw + Rdx \wedge dy \wedge dw + Wdx \wedge dz \wedge dw$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} d(\omega^{(3)}) &= d(P1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz) + d(Q1^{(0)}) \wedge (dy \wedge dz \wedge dw) + d(R1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy \wedge dw) \\ &+ d(W1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dz \wedge dw) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz + \frac{\partial P}{\partial w} dw \right) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz) \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz + \frac{\partial Q}{\partial w} dw \right) \wedge (dy \wedge dz \wedge dw) \\ &+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz + \frac{\partial R}{\partial w} dw \right) \wedge (dx \wedge dy \wedge dw) \\ &+ \left(\frac{\partial W}{\partial x} dx + \frac{\partial W}{\partial y} dy + \frac{\partial W}{\partial z} dz + \frac{\partial W}{\partial w} dw \right) \wedge (dx \wedge dz \wedge dw) \\ &= \frac{\partial P}{\partial w} dw \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \wedge dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\partial W}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz \wedge dw \\
 & = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw
 \end{aligned}$$

Como seguramente el lector habrá observado, algunos de estos ejemplos ilustran la estrecha relación que existe entre el concepto de diferencial de una p -forma, y algunos de los conceptos que definimos en los capítulos tres y cuatro (relación que, por cierto, viene a justificar por qué afirmábamos que los conceptos de rotacional y divergencia se podían ver “como una derivada”).

Además de lo anterior, también vale la pena observar lo siguiente. Si en los incisos 1 y 2 del ejemplo anterior se supusiera que existen $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\psi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 (en U) tales que

$$(P, Q) = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)$$

y

$$(P, Q, R) = \nabla\psi = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z} \right)$$

en cuyo caso se tendría que

$$Pdx + Qdy = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy = d(\varphi 1^{(0)})$$

y

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz = d(\psi 1^{(0)})$$

entonces

$$\begin{aligned}
 d\left(d(\varphi 1^{(0)})\right) &= d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy\right) \\
 &= d(Pdx + Qdy) \\
 &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) dx \wedge dy \\
 &= (0) dx \wedge dy \\
 &= 0^{(2)}
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 d\left(d(\psi 1^{(0)})\right) &= d\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz\right) \\
 &= d(Pdx + Qdy + Rdz) \\
 &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\
 &= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) dx \wedge dy \\
 &= 0^{(2)}
 \end{aligned}$$

lo cual coincide con el hecho de que $\text{Rot}(\nabla\varphi) = 0$ y $\mathbf{Rot}(\nabla\psi) = (0, 0, 0)$ (en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3 , respectivamente), como se probó en el capítulo tres.

Algo análogo sucede si combinamos los incisos 2 y 4. Observe que, si

$$\omega^{(1)} = Pdx + Qdy + Rdz$$

entonces

$$\begin{aligned} d\left(d\left(\omega^{(1)}\right)\right) &= d\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy\right) \\ &= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \left(\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y}\right)\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= 0^{(3)} \end{aligned}$$

lo que también coincide con el hecho de que $\text{div}(\mathbf{Rot}(P, Q, R)) = 0$, como se probó en el capítulo cuatro.

Lo más interesante de esta propiedad (que dos diferenciales consecutivas de una p -forma nos lleva a la $(p+2)$ -forma constante cero), es que ésta se sigue verificando aun cuando estas diferenciales no estén relacionadas con conceptos que hayamos visto previamente. Tal es el caso del inciso 3 del mismo ejemplo. Observe que, si existe $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 (en U) tal que

$$f_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

para cada $i = 1, \dots, n$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(d\left(\varphi 1^{(0)}\right)\right) &= d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n\right) \\ &= d(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\ &= 0^{(2)} \end{aligned}$$

Y observamos la misma propiedad si combinamos los incisos 5 y 6. En efecto, si tomamos la 2-forma en \mathbb{R}^4

$$\omega^{(2)} = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dw + Rdw \wedge dx + Wdx \wedge dy$$

entonces

$$\begin{aligned} d\left(d\left(\omega^{(2)}\right)\right) &= d\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dy \wedge dz \wedge dw\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial w} \right) dx \wedge dy \wedge dw + \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dz \wedge dw \\
 & = \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial w} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
 & = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial w} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 P}{\partial w \partial x} - \frac{\partial^2 W}{\partial w \partial z} + \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial w} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 Q}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw \\
 & = 0^{(4)}
 \end{aligned}$$

Sin duda a estas alturas el lector ya debe estar convencido de que estos ejemplos no son más que un caso particular de un resultado bastante más general, y por supuesto que está en lo correcto. Este resultado generaliza las identidades $\text{Rot}(\nabla\varphi) = 0$, $\mathbf{Rot}(\nabla\psi) = (0, 0, 0)$ y $\text{div}(\mathbf{Rot}(P, Q, R)) = 0$ como mencionamos anteriormente, y su prueba es un poco más elaborada que la de éstas. Dada la importancia de este resultado, es que le otorgamos el grado de

Teorema 5.8 Sean

$$dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}}, \dots, dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}} \in \Omega^{(p)}$$

p -formas básicas, y $f_1, \dots, f_k : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^2 en U , $1 \leq k \leq \binom{n}{p}$. Si

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

entonces

$$d\left(d\left(\omega^{(p)}\right)\right) = 0^{(p+2)}$$

Dem. Dado que, de acuerdo con la definición 5.6, se tiene que

$$d\left(d\left(\sum_{i=1}^k f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}}\right)\right) = \sum_{i=1}^k d\left(d\left(f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}}\right)\right)$$

bastará probar que, si $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \in \Omega^{(p)}$ y $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 en U , entonces

$$d\left(d\left(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right)\right) = 0^{(p+2)}$$

Por esta misma definición sabemos que

$$\begin{aligned}
 d\left(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right) & = \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 & = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 d\left(d\left(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right)\right) & = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right) \\
 & = d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right) + \cdots + d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} dx_i \right) \wedge dx_1 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &+ \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} dx_i \right) \wedge dx_2 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &+ \cdots + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \right) \wedge dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &= - \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} dx_1 \wedge dx_i \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &- \sum_{i=3}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} dx_2 \wedge dx_i \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &+ \cdots + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} dx_i \wedge dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\
 &= 0^{(p+2)}
 \end{aligned}$$

■

5.3 Diferenciales exactas (primera parte)

Como siempre sucede con los teoremas importantes, ahora es inevitable hacerse la siguiente pregunta: si una p -forma diferenciable

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ es tal que $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$ ¿existe una $(p-1)$ -forma

$$\tau^{(p-1)} = \tilde{f}_1 dx_{n_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{n_{p-1}^{(1)}} + \cdots + \tilde{f}_m dx_{n_1^{(m)}} \wedge \cdots \wedge dx_{n_{p-1}^{(m)}}$$

definida y diferenciable en $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$\omega^{(p)} = d(\tau^{(p-1)})?$$

Lo más interesante de esta cuestión es que esta es una pregunta que ya nos planteamos (¡y que ya resolvimos!) para algunos casos particulares.

En efecto, como se recordará, en el capítulo tres nos planteamos el problema de determinar cuándo un campo era conservativo (o gradiente) y como solución probamos el teorema 3.51 el cual nos aseguraba que, si

$$F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

era una función de clase C^1 en U , una región estrellada, tal que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ($i \neq j$) entonces F era un campo gradiente en U , lo que significaba que existía $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = F_i(\hat{x})$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Como el lector habrá notado, este resultado resuelve la pregunta que nos hicimos al inicio de esta sección para el caso de las 1-formas diferenciables puesto que, si la 1-forma

$$\omega^{(1)} = f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n$$

es tal que

$$\begin{aligned} 0^{(2)} &= d\left(\omega^{(1)}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

(de acuerdo con el inciso 3 del ejemplo 5.7), esto significa que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$, de tal forma que, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$$

entonces la 0-forma

$$\tau^{(0)} = \varphi 1^{(0)}$$

satisface que

$$\begin{aligned} d\left(\tau^{(0)}\right) &= d\left(\varphi 1^{(0)}\right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \\ &= f_1 dx_1 + \dots + f_n dx_n \\ &= \omega^{(1)} \end{aligned}$$

Como seguramente el lector ya se imagina, el otro caso particular que ya resolvimos es el de las 2-formas diferenciables en \mathbb{R}^3 , y que está relacionado con el problema de determinar cuándo un campo F (en \mathbb{R}^3) es un campo solenoide.

Como también se recordará, el teorema 4.35 del capítulo cuatro nos aseguraba que, si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ era una función de clase C^1 en U , con U una región estrellada tal que

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$$

para toda $\hat{x} \in U$, entonces F era un campo solenoide en U , lo que significaba que existía $G = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{Rot}G = \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{R}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} \right) = (P, Q, R) = F$$

Obsérvese que, apoyados en este teorema, tenemos que, si

$$\omega^{(2)} = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

es una 2-forma diferenciable definida sobre una región estrellada $U \subset \mathbb{R}^3$ (¡que es así como se pueden escribir todas las 2-formas en \mathbb{R}^3 !) tal que $d(\omega^{(2)}) = 0^{(3)}$, entonces

$$\begin{aligned} 0^{(3)} &= d(\omega^{(2)}) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \operatorname{div}(f_1, f_2, f_3) dx \wedge dy \wedge dz \end{aligned}$$

lo que significa que $\operatorname{div}(f_1, f_2, f_3) = 0$, de modo que, por el teorema antes mencionado, sabemos que existe $G = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathbf{Rot}G = \left(\frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} \right) = (f_1, f_2, f_3)$$

Por tanto, si tomamos la 1-forma $\tau^{(1)} = \tilde{f}_1 dx + \tilde{f}_2 dy + \tilde{f}_3 dz$, ésta tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned} d(\tau^{(1)}) &= d(\tilde{f}_1 dx + \tilde{f}_2 dy + \tilde{f}_3 dz) \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\ &= f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy \\ &= \omega^{(2)} \end{aligned}$$

Cuando para una p -forma

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{i_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{i_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p^{(k)}}$$

definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$, existe una $(p-1)$ -forma definida en $U \subset \mathbb{R}^n$

$$\tau^{(p-1)} = \tilde{f}_1 dx_{n_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{n_{p-1}^{(1)}} + \cdots + \tilde{f}_m dx_{n_1^{(m)}} \wedge \cdots \wedge dx_{n_{p-1}^{(m)}}$$

tal que $\omega^{(p)} = d(\tau^{(p-1)})$, decimos que $\omega^{(p)}$ es una *diferencial exacta* en la región $U \subset \mathbb{R}^n$ y la pregunta que nos hicimos al inicio de esta sección se puede reformular de la siguiente manera: ¿si $\omega^{(p)}$ es una p -forma definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ es tal que $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$ entonces $\omega^{(p)}$ es una diferencial exacta en U ?

De acuerdo con lo que acabamos de ver, ahora podemos responder que este no siempre es el caso (al menos para las 1-formas en \mathbb{R}^n o para las 2-formas en \mathbb{R}^3) y que en gran medida la respuesta a

esta pregunta depende de la “geometría” de la región $U \subset \mathbb{R}^n$ sobre la cual esta definida la p -forma $\omega^{(p)}$.

Como sucedió en el capítulo tres (para el caso de los campos conservativos) y en el capítulo cuatro (para el caso de los campos solenoides), para responder esta pregunta (en el caso general) será indispensable definir nuevos conceptos (y teoremas relacionados con éstos) a fin de contar con las herramientas necesarias.

Si en los capítulos tres y cuatro hubo necesidad de introducir los conceptos de curva e integral de línea, y los de superficie e integral de superficie (respectivamente), ahora será necesario introducir los conceptos de p -variedad parametrizada en \mathbb{R}^n y el de integral de una p -forma sobre una p -variedad, así como algunos teoremas relacionados con estos conceptos. Esto es justo lo que haremos en las siguientes secciones.

5.4 p -variedades parametrizadas

Así como una curva o una superficie no es más que la imagen bajo una función σ (de clase C^1) de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, o de una región $A \subset \mathbb{R}^2$ (tipo I o tipo II), respectivamente, un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ será una p -variedad parametrizada (con $p \in \{1, \dots, n\}$), si M se puede ver como la imagen bajo una función σ (de clase C^1) de alguna región $A \subset \mathbb{R}^p$, en donde A será el tipo de región en \mathbb{R}^p que generaliza a las regiones tipo I y tipo II de \mathbb{R}^2 (y tipo III, de \mathbb{R}^3).

Empezaremos por definir de manera más precisa a este tipo de regiones, y lo haremos de forma inductiva a partir de las regiones tipo I y tipo II que ya conocemos en \mathbb{R}^2 , de la siguiente manera:

Definición 5.9 Decimos que $B \subset \mathbb{R}^2$ es una región básica (en \mathbb{R}^2), si es una región tipo I o tipo II, como se definieron en el capítulo dos. En general, diremos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es una región básica en \mathbb{R}^n (con $n \geq 3$) si existe $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, una región básica en \mathbb{R}^{n-1} , y existen $\alpha, \beta : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ (de clase C^1) tales que

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in B, \alpha(\hat{x}) \leq x_i \leq \beta(\hat{x})\}$$

para alguna $i \in \{1, \dots, n\}$.

Dado que las únicas regiones básicas que podemos dibujar se encuentran en \mathbb{R}^2 o en \mathbb{R}^3 , y en el capítulo dos ya dimos algunos ejemplos de ellas, continuamos con la definición del concepto de p -variedad parametrizada. Simplemente observe que los rectángulos de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

son ejemplos de regiones básicas en \mathbb{R}^n (con respecto a cualquier $i \in \{1, \dots, n\}$) y que el número de regiones básicas diferentes que se pueden construir en \mathbb{R}^n es $n!$.

La descripción que hicimos de una p -variedad parametrizada en \mathbb{R}^n al inicio de esta sección es muy precisa, por lo que simplemente la formalizamos en la siguiente

Definición 5.10 Decimos que un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una p -variedad parametrizada, con $p \in \{1, \dots, n\}$, si existe $\sigma : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 (lo que significa que σ es de clase C^1 en un abierto (en \mathbb{R}^p) que contiene a A) tal que $M = \sigma(A)$, donde A es una región básica (o A es un intervalo de la forma $[a, b]$ si $p = 1$). En este caso diremos que σ es una parametrización de M . Si σ es inyectiva en el interior de A ($\text{int}(A)$) diremos que σ es una parametrización simple de M . Finalmente, al conjunto $\sigma(\text{Fr}(A))$ lo llamaremos el borde de M inducido por la parametrización σ , y lo denotaremos por $\partial_\sigma M$, es decir, $\partial_\sigma M = \sigma(\text{Fr}(A))$.

Nuevamente, algunos ejemplos serán muy útiles para ilustrar este concepto.

Ejemplo 5.11 *Considere:*

1. $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región básica A , y $M = \{(\hat{x}, f(\hat{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{x} \in A\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. En este caso M es una n -variedad en \mathbb{R}^{n+1} y una parametrización de M está dada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definida como

$$\sigma(\hat{x}) = (\hat{x}, f(\hat{x}))$$

Como se podrá observar, en este caso M es la gráfica de f .

2. $M = \sigma(A) \subset \mathbb{R}^4$, en donde $A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3$ y

$$\sigma(\theta, \varphi, \psi) = (r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi), r \cos(\psi))$$

con $r > 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \|\sigma(\theta, \varphi, \psi)\|^2 &= \|(r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi), r \cos(\psi))\|^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

por lo que a esta 3-variedad M bien se le puede bautizar como la 3-esfera (en \mathbb{R}^4) de radio $r > 0$ con centro en el origen.

3. $M = \sigma(A) \subset \mathbb{R}^4$, en donde $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ y

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \varphi) &= ((\cos(\varphi) + 2) \cos(\theta) + \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\theta/2), (\cos(\varphi) + 2) \operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta/2), \\ &\operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta/2), \operatorname{sen}(\theta/2)) \end{aligned}$$

Observe que en este caso M es una 2-variedad (o una superficie) en \mathbb{R}^4 que tiene las siguientes características geométricas. La primera de ellas es que la imagen bajo σ de las líneas verticales de A , es decir, la imagen de los puntos de la forma $\sigma(\theta_0, \varphi)$, con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo, es tal que

$$\begin{aligned} &\|\sigma(\theta_0, \varphi) - (2 \cos(\theta_0), 2 \operatorname{sen}(\theta_0), 0, \operatorname{sen}(\theta_0/2))\|^2 \\ &= (\cos(\varphi) \cos(\theta_0) + \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 + (\cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta_0) - \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 \\ &+ (\operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta_0/2))^2 \\ &= (\cos(\varphi) \cos(\theta_0))^2 + (\operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 + (\cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta_0))^2 \\ &+ (\operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta_0) \operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 + \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos^2(\theta_0/2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo que significa que la imagen del conjunto $\{\theta_0\} \times [0, 2\pi]$ es una circunferencia de radio 1 con centro en el punto

$$(2 \cos(\theta_0), 2 \operatorname{sen}(\theta_0), 0, \operatorname{sen}(\theta_0/2))$$

Esto quiere decir que la función σ “pega” las líneas horizontales $[0, 2\pi] \times \{0\}$ y $[0, 2\pi] \times \{2\pi\}$ (que forman parte de la $\operatorname{Fr}(A)$) con lo que forma un “cilindro” (en \mathbb{R}^4). Si ahora observamos

que en particular las dos líneas verticales $\{0\} \times [0, 2\pi]$ y $\{2\pi\} \times [0, 2\pi]$ (que forman el resto de la $Fr(A)$) son tales que

$$\sigma(0, \varphi) = (\cos(\varphi) + 2, \cos(\varphi) + 2, \text{sen}(\varphi), 0)$$

y

$$\sigma(2\pi, \varphi) = (\cos(\varphi) + 2, \cos(\varphi) + 2, -\text{sen}(\varphi), 0)$$

concluimos que su imagen bajo σ es la misma circunferencia, sólo que recorridas en direcciones opuestas (si ambas líneas verticales se recorren de abajo hacia arriba). Por esta razón, si la línea $\{0\} \times [0, 2\pi]$ es recorrida de arriba hacia abajo (que es como queda recorrida cuando la $Fr(A)$ se recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj), concluimos que σ “pega” a las circunferencias que forman los extremos del “cilindro” inicial, pero de tal forma que éstas queden recorridas en la misma dirección (a diferencia de lo que sucede cuando “pegamos” los extremos de un cilindro para formar un toro (o una dona). Para lograr esta forma de “pegado” en \mathbb{R}^3 es necesario “cruzar” la “pared” del cilindro, y al hacerlo obtenemos la ya conocida botella de Kline (figura 4.8). La parametrización σ de este ejemplo hace lo mismo (por lo que la 2-variedad M de este inciso es la botella de Kline) pero sin necesidad de “cruzar” la “pared” del cilindro. De hecho, σ es una parametrización simple de la botella de Kline, la que, por supuesto, sólo es posible obtener en \mathbb{R}^4 (o en \mathbb{R}^n , con $n \geq 4$).

La definición de p -variedad se puede generalizar al de p -variedad por pedazos, justo de la misma forma en que lo hicimos para el caso de las superficies. Dado que nuestra intención no es extendernos en este concepto, simplemente lo formalizamos en la siguiente definición.

Definición 5.12 Decimos que un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una p -variedad parametrizada por pedazos, si existen $M_1, \dots, M_k \subset \mathbb{R}^n$ p -variedades parametrizadas tales que

$$M = M_1 \cup \dots \cup M_k$$

Si $\sigma_i : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de M_i (para $i = 1, \dots, k$), escribimos $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$ y decimos que σ es “una parametrización” de M .

Sólo una observación es necesario hacer con respecto a este concepto. Si se revisa con cuidado la definición 5.9 se podrá notar que, si $A \subset \mathbb{R}^p$ (con $p \geq 2$) es una región básica, entonces la frontera de A ($Fr(A)$ ó ∂A) es una $(p-1)$ -variedad parametrizada por pedazos (en \mathbb{R}^p). En efecto, nótese que en este caso la $Fr(A)$ está formada por la gráfica de dos funciones definidas sobre una región básica $B \subset \mathbb{R}^{p-1}$, y algunos otros “pedazos cilíndricos” (que se “levantan” sobre la $Fr(B)$) (ver figura 5.3 que ilustra el caso $p = 3$). De hecho, esta característica de la frontera de una región básica A nos permitiría definir lo que significaría que una parametrización de esta $(p-1)$ -variedad “indujera” vectores normales que apuntan hacia “afuera” de A , justo a través de los vectores normales a las gráficas de las funciones que la determinan. Hacer esto con más formalidad nos llevaría algunas páginas más, razón por la cual sólo nos quedamos con esta idea intuitiva.

Una consecuencia de lo anterior es que, si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una p -variedad parametrizada por σ (sobre A), el conjunto $\partial_\sigma M = \sigma(Fr(A))$ también será una $(p-1)$ -variedad parametrizada por pedazos (en \mathbb{R}^n).

De las p -variedades parametrizadas habría muchas cosas interesantes que decir, pero por ahora con estas ideas elementales nos es suficiente para lograr nuestro objetivo. Con este fin, lo que sigue es definir la integral de una p -forma $\omega^{(p)}$ sobre una p -variedad parametrizada M , cuestión que abordaremos en la siguiente sección.

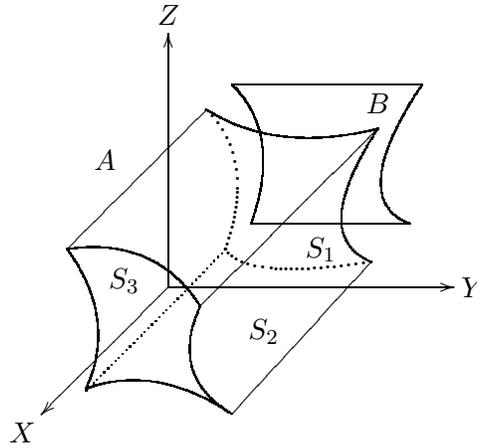


Figura 5.3: Si $A \subset \mathbb{R}^3$ es una región básica, la $Fr(A) = \partial A = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ está formada por la gráfica de dos funciones definidas sobre una región básica $B \subset \mathbb{R}^2$ (en la figura las superficies S_1 y S_3), y algunos “pedazos cilíndricos” que se “levantan” sobre la $Fr(B)$ (en la figura la superficie S_2)

5.5 Integrando formas

Como se recordará, en el capítulo tres definimos la integral de un campo $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sobre una curva $\Gamma \subset U$ parametrizada por una función $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ (que denotamos por $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ y bautizamos con el nombre de integral de línea), como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma'_n(t)) dt \end{aligned}$$

Lo interesante de esta definición, y de acuerdo con los conceptos que hemos definido en este capítulo, es que el integrando que aparece en la segunda identidad de arriba se puede obtener como el resultado de evaluar una cierta 1-forma.

En efecto, considere la 1-forma definida en $U \subset \mathbb{R}^n$ dada por $\omega^{(1)} = F_1 dx_1 + \dots + F_n dx_n$. Dado que $\omega^{(1)}$ es una función definida en U y que toma valores en el conjunto de las 1-formas básicas $\Omega^{(1)}$ (definidas en \mathbb{R}^n), observe que para cada $t \in [a, b]$ se tiene que

$$\omega^{(1)}(\gamma(t)) = F_1(\gamma(t))dx_1 + \dots + F_n(\gamma(t))dx_n$$

la que a su vez es una 1-forma básica que se aplica en vectores de \mathbb{R}^n y para la cual, en particular aplicada a $\gamma'(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\omega^{(1)}(\gamma(t))) (\gamma'(t)) &= (F_1(\gamma(t))dx_1 + \dots + F_n(\gamma(t))dx_n) (\gamma'(t)) \\ &= F_1(\gamma(t))dx_1 (\gamma'(t)) + \dots + F_n(\gamma(t))dx_n (\gamma'(t)) \\ &= F_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + F_n(\gamma(t))\gamma'_n(t) \end{aligned}$$

De hecho, con base en esta última identidad es que definimos el concepto de integral de una 1-forma $F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n$ sobre la 1-variedad Γ parametrizada por la función $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, la cual denotamos por

$$\int_{\Gamma} (F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n) d\gamma$$

como

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n) d\gamma &= \int_a^b ((F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n)(\gamma(t))) (\gamma'(t)) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t)) dx_1 (\gamma'(t)) + \cdots + F_n(\gamma(t)) dx_n (\gamma'(t))) dt \\ &= \int_a^b (F_1(\gamma(t)) \gamma'_1(t) + \cdots + F_n(\gamma(t)) \gamma'_n(t)) dt \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \end{aligned}$$

o, si simplemente escribimos $\omega^{(1)} = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n$, como

$$\int_{\Gamma} \omega^{(1)} d\gamma = \int_a^b (\omega^{(1)}(\gamma(t))) (\gamma'(t)) dt$$

Para deducir la manera en que se define la integral de una 2-forma sobre una 2-variedad (o si se prefiere decir una superficie), como es de suponerse, recurriremos a la definición que dimos en el capítulo cuatro del concepto de integral de superficie de un campo vectorial definido en alguna región de \mathbb{R}^3 .

Como se recordará, si $F = (F_1, F_2, F_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es continua y $S \subset U$ es una superficie parametrizada por una función $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que A es una región tipo I o tipo II y $\sigma(A) = S$, se definió la integral de F sobre la superficie S como

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_A F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

en donde

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u, v) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u, v), \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u, v) \right)$$

Del mismo modo que sucede en el caso de la integral de línea, observe que el integrando

$$F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$$

se puede obtener a partir de una cierta 2–forma definida en $U \subset \mathbb{R}^3$.

Considere la 2–forma $\omega^{(2)}$ dada por

$$\omega^{(2)} = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

Si esta 2–forma la evaluamos en $\sigma(u, v) \in U$, para cada $(u, v) \in A$, tenemos que

$$\omega^{(2)}(\sigma(u, v)) = F_1(\sigma(u, v)) dy \wedge dz + F_2(\sigma(u, v)) dz \wedge dx + F_3(\sigma(u, v)) dx \wedge dy$$

que a su vez es una 2–forma básica, que como se recordará, se evalúa en elementos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3)^2$; si en particular a ésta 2–forma básica la evaluamos en

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) = (\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

obtenemos, de acuerdo con 5.2, que

$$\begin{aligned} & \left(\omega^{(2)}(\sigma(u, v)) \right) (\hat{a}, \hat{b}) \\ &= (F_1(\sigma(u, v)) dy \wedge dz) (\hat{a}, \hat{b}) + (F_2(\sigma(u, v)) dz \wedge dx) (\hat{a}, \hat{b}) + (F_3(\sigma(u, v)) dx \wedge dy) (\hat{a}, \hat{b}) \\ &= F_1(\sigma(u, v)) \det \begin{bmatrix} dy(\hat{a}) & dy(\hat{b}) \\ dz(\hat{a}) & dz(\hat{b}) \end{bmatrix} + F_2(\sigma(u, v)) \det \begin{bmatrix} dz(\hat{a}) & dz(\hat{b}) \\ dx(\hat{a}) & dx(\hat{b}) \end{bmatrix} \\ &+ F_3(\sigma(u, v)) \det \begin{bmatrix} dx(\hat{a}) & dx(\hat{b}) \\ dy(\hat{a}) & dy(\hat{b}) \end{bmatrix} \\ &= F_1(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right) (u, v) + F_2(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v) \\ &+ F_3(\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v) \\ &= (F_1(\sigma(u, v)), F_2(\sigma(u, v)), F_3(\sigma(u, v))) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \\ &= F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

Como en el caso de las 1–formas, todo indica que lo más razonable es entonces definir la integral de la 2–forma (en \mathbb{R}^3)

$$\omega^{(2)} = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

sobre la 2–variedad $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por σ , que denotaremos por

$$\int_S (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) d\sigma$$

o simplemente

$$\int_\sigma \omega^{(2)} d\sigma$$

como:

$$\int_S (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy) d\sigma = \int_A F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \int_S F \cdot d\sigma$$

o

$$\int_S \omega^{(2)} d\sigma = \int_A \left(\omega^{(2)}(\sigma(u, v)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right)$$

De hecho, seguramente al lector ya le resultará natural concluir que, si ahora $\omega^{(2)}$ representa una 2-forma en \mathbb{R}^n dada por

$$\omega^{(2)} = f_1 dx_{l_1} \wedge dx_{m_1} + \cdots + f_k dx_{l_k} \wedge dx_{m_k}$$

(con $l_i, m_i \in \{1, \dots, n\}$ para $i = 1, \dots, k$) y $S \subset \mathbb{R}^n$ es una 2-variedad parametrizada por una función $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, entonces la integral de $\omega^{(2)}$ sobre $S = \sigma(A)$, que denotaremos por

$$\int_S (f_1 dx_{l_1} \wedge dx_{m_1} + \cdots + f_k dx_{l_k} \wedge dx_{m_k}) d\sigma$$

o simplemente

$$\int_S \omega^{(2)} d\sigma$$

deberá estar definida como

$$\begin{aligned} \int_S (f_1 dx_{l_1} \wedge dx_{m_1} + \cdots + f_k dx_{l_k} \wedge dx_{m_k}) d\sigma &= \int_A \sum_{i=1}^k (f_i(\sigma(u, v)) dx_{l_i} \wedge dx_{m_i}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \int_A \sum_{i=1}^k f_i(\sigma(u, v)) \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{l_i}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \sigma_{l_i}}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

en donde ahora

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v), \dots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial u}(u, v) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v), \dots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial v}(u, v) \right)$$

Una vez que hemos revisado y discutido todo lo anterior, sin duda estamos en condiciones de dar una definición general del concepto de integral de una p -forma $\omega^{(p)}$ en \mathbb{R}^n sobre una p -variedad parametrizada $M \subset \mathbb{R}^n$, para $p \in \{1, \dots, n-1\}$, de la siguiente manera.

Definición 5.13 Sean, $p \in \{1, \dots, n\}$, $\omega^{(p)}$ una p -forma en \mathbb{R}^n dada por

$$\omega^{(p)} = \sum_{i=1}^k f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}}$$

donde $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua sobre la región U (para cada $i = 1, \dots, k = \binom{n}{p}$), y $M \subset \mathbb{R}^n$ una p -variedad parametrizada por la función $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Definimos la integral de $\omega^{(p)}$ sobre M , que denotamos por

$$\int_M \left(f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}} \right) d\sigma = \int_M \left(\sum_{i=1}^k f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}} \right) d\sigma$$

o simplemente

$$\int_M \omega^{(p)} d\sigma$$

como

$$\begin{aligned} \int_M \left(\sum_{i=1}^k f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}} \right) d\sigma &= \int_A \left(\sum_{i=1}^k \left(f_i(\sigma(\hat{u})) dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\hat{u}), \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_p}(\hat{u}) \right) \right) \\ &= \int_A \left(\sum_{i=1}^k f_i(\sigma(\hat{u})) \det \left(dx_{l_m^{(i)}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_j}(\hat{u}) \right) \right)_{m,j=1}^p \right) \\ &= \int_A \left(\sum_{i=1}^k f_i(\sigma(\hat{u})) \det \left(\frac{\partial \sigma_{l_m^{(i)}}}{\partial u_j}(\hat{u}) \right)_{m,j=1}^p \right) \end{aligned}$$

o

$$\int_M \omega^{(p)} d\sigma = \int_A \left(\omega^{(p)}(\sigma(\hat{u})) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\hat{u}), \dots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_p}(\hat{u}) \right)$$

en donde $\hat{u} = (u_1, \dots, u_p)$ y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_j}(\hat{u}) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_j}(\hat{u}), \dots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial u_j}(\hat{u}) \right)$$

para $j = 1, \dots, p$.

Todas las integrales de línea y de superficie de campos vectoriales que hicimos en los capítulos tres y cuatro, son ejemplos de integrales de 1-formas y 2-formas sobre 1-variedades y 2-variedades parametrizadas (respectivamente). Para ilustrar aún mejor este concepto de la integral de formas, daremos un ejemplo de cómo se integra una 3-forma sobre una 3-variedad parametrizada, ambas en \mathbb{R}^4 .

Ejemplo 5.14 Considere, la 3-forma en \mathbb{R}^4 dada por

$$\omega^{(3)} = P dx \wedge dy \wedge dz + Q dy \wedge dz \wedge dw + R dx \wedge dy \wedge dw + W dx \wedge dz \wedge dw$$

en donde

$$\begin{aligned} P(x, y, z, w) &= \frac{-w}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2} \\ Q(x, y, z, w) &= \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2} \\ R(x, y, z, w) &= \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2} \end{aligned}$$

y

$$W(x, y, z, w) = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2}$$

con $(x, y, z, w) \in U = \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$; y la 3-variedad parametrizada $M \subset \mathbb{R}^4$ dada por la función del ejemplo 5.11

$$\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

que está definida como

$$\sigma(\theta, \varphi, \psi) = (r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi), r \cos(\psi))$$

Calcule

$$\int_M \omega^{(3)} d\sigma$$

Solución. Sabemos que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi, \psi) = (-r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), 0, 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi, \psi) = (r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), -r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi), 0)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}(\theta, \varphi, \psi) = (r \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \cos(\psi) \cos(\varphi), -r \operatorname{sen}(\psi))$$

de modo que

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dz & \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \\ & = r^3 \det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\psi) \cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ & = -r^3 \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) [\operatorname{sen}(\psi) \cos^2(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\psi) \\ & \quad + \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\theta)] \\ & \quad - r^3 \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) [\operatorname{sen}(\psi) \cos^2(\varphi) \cos(\theta) \cos(\psi) \\ & \quad + \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\psi) \cos(\theta)] \\ & = -r^3 \operatorname{sen}^2(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}^2(\theta) \cos(\psi) \\ & \quad - r^3 \operatorname{sen}^2(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos^2(\theta) \cos(\psi) \\ & = -r^3 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} dy \wedge dz \wedge dw & \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \\ & = r^3 \det \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\psi) \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\ & = r^3 \operatorname{sen}^3(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} dx \wedge dy \wedge dw & \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \\ & = r^3 \det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -r^3 \operatorname{sen}(\psi) [-\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\
 &\quad - \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \cos(\theta)] \\
 &= r^3 \operatorname{sen}^3(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)
 \end{aligned}$$

y por último

$$\begin{aligned}
 &dx \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \\
 &= r^3 \det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi) \cos(\theta) & \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\psi) \cos(\varphi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\
 &= -r^3 \operatorname{sen}(\psi) r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \\
 &= -r^3 \operatorname{sen}^3(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}(\theta)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 &\int_M \omega^{(3)} d\sigma \\
 &= \int_A \left(\omega^{(3)}(\sigma(\theta, \varphi, \psi)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \\
 &= \int_A \left(P(\sigma(\theta, \varphi, \psi)) dx \wedge dy \wedge dz \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) + Q(\sigma(\theta, \varphi, \psi)) dy \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \right. \\
 &\quad \left. + R(\sigma(\theta, \varphi, \psi)) dx \wedge dy \wedge dw \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) + W(\sigma(\theta, \varphi, \psi)) dx \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}, \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}, \frac{\partial \sigma}{\partial \psi} \right) \right) \\
 &= \int_A \left(\frac{-r \cos(\psi)}{r^4} (-r^3 \operatorname{sen}^2(\psi) \cos(\psi) \operatorname{sen}(\varphi)) + \frac{r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta)}{r^4} (r^3 \operatorname{sen}^3(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \cos(\theta)) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi)}{r^4} (r^3 \operatorname{sen}^3(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)) + \frac{-r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta)}{r^4} (-r^3 \operatorname{sen}^3(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}(\theta)) \right) \\
 &= \int_A (\operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) + \operatorname{sen}^4(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) (\operatorname{sen}^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi) \operatorname{sen}^2(\theta))) \\
 &= \int_A \operatorname{sen}^2(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) (\cos^2(\psi) + \operatorname{sen}^2(\psi) \operatorname{sen}^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\psi) \cos^2(\varphi)) \\
 &= \int_A \operatorname{sen}^2(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \right) \left(\int_0^\pi \operatorname{sen}^2(\psi) d\psi \right) \\
 &= (2\pi) (-\cos(\varphi)_0^\pi) \left(\frac{\pi}{2} \right) \\
 &= 2\pi^2
 \end{aligned}$$

Un caso particular en el que la integral de una p -forma (en \mathbb{R}^n) tiene un cierto interés, es justo cuando $p = n$, es decir, la integral de una n -forma sobre una n -variedad parametrizada, ambas en \mathbb{R}^n .

Como se recordará de la sección 5.2, las n -formas definidas sobre una región $U \subset \mathbb{R}^n$, se corresponden con las funciones (de valores reales) definidas sobre U en virtud de que todas ellas se escriben como

$$f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

en donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Por otra parte, si $A \subset U$ es una región básica, entonces dicha región también se puede ver como una n -variedad parametrizada en la medida de que $A = \sigma_I(A)$, tomando a σ_I como la función identidad (de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^n), es decir

$$\sigma_I(\hat{x}) = \hat{x}$$

Nótese que en este caso se tiene que

$$\frac{\partial \sigma_I}{\partial x_i}(\hat{x}) = \hat{e}_i$$

para toda $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, en donde \hat{e}_i es el i -ésimo vector básico de \mathbb{R}^n . De esta manera, tenemos que

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial x_1}(\hat{x}), \dots, \frac{\partial \sigma_I}{\partial x_n}(\hat{x}) \right) &= \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Con base en lo anterior, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_A (f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) d\sigma_I &= \int_A f(\sigma_I(\hat{x})) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial x_1}(\hat{x}), \dots, \frac{\partial \sigma_I}{\partial x_n}(\hat{x}) \right) \\ &= \int_A f(\hat{x}) \\ &= \int_A f \end{aligned}$$

lo que significa que la integral de la n -forma $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sobre la n -variedad parametrizada $A \subset \mathbb{R}^n$ (con A una región básica parametrizada por la función identidad), coincide con la integral (de Riemann) de la función f sobre la región A .

Lo mejor de esta identidad es que (como siempre), también la podemos leer al revés; esto es, la integral (de Riemann) de la función f sobre la región básica $A \subset \mathbb{R}^n$ se puede ver como la integral de la n -forma $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sobre la n -variedad parametrizada (por la función identidad) A .

Una consecuencia importante de lo anterior, es que las identidades que se obtienen en los teoremas de Green, Stokes y Gauss, se pueden reformular ahora en términos de integrales de p -formas.

Por ejemplo, como se recordará el teorema de Green establece que, si $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y $\Omega \subset U$ es una región básica (una 2-variedad en \mathbb{R}^2) tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una curva suave por pedazos (una 1-variedad por pedazos en \mathbb{R}^2) entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Omega} \text{Rot } F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

(en donde γ es una parametrización de Γ que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj). Pues bien, si como vimos al principio de esta sección, se tiene que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy) d\gamma$$

y como acabamos de ver, también se tiene que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) d\sigma_I$$

(σ_I representa a la función identidad definida sobre la región básica Ω), entonces tenemos que la identidad de la cual nos habla el teorema de Green se puede escribir como

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega=\partial\sigma_I\Omega} (Pdx + Qdy) d\gamma = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) d\sigma_I$$

Lo mejor de todo esto es que, si ahora recordamos que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = d(Pdx + Qdy)$$

entonces el teorema de Green asegura que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega=\partial\sigma_I\Omega} (Pdx + Qdy) d\tilde{\gamma} = \int_{\Omega} d(Pdx + Qdy) d\sigma_I$$

(en donde $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma_I$, que en este caso $\tilde{\gamma} = \gamma$ dado que σ_I es la función identidad de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2) igualdad que, por cierto, justifica el porqué afirmábamos que dicho teorema era una especie de generalización del Teorema Fundamental del Cálculo.

Procediendo de manera análoga, del teorema de Stokes obtenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\sigma S} (Pdx + Qdy + Rdz) d\tilde{\gamma} \\ &= \int_{\Gamma=\partial\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} \\ &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= \int_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) d\sigma \\ &= \int_S d(Pdx + Qdy + Rdz) d\sigma \end{aligned}$$

en donde $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie (o 2-variedad) $S \subset \mathbb{R}^3$, y $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$, en donde γ es una parametrización (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) de la frontera de la región básica A ($Fr(A)$).

Si ahora σ_I representa a la función identidad de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , del teorema de Gauss concluimos que

$$\begin{aligned} \int_{S=\partial\Omega=\partial\sigma_I\Omega} (Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) d\tilde{\sigma} &= \int_{S=\partial\Omega=\partial\sigma_I\Omega} F \cdot d\tilde{\sigma} \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div} F \\ &= \int_{\Omega} d(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy) d\sigma_I \end{aligned}$$

en donde, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región básica cuyo borde $S = \partial\Omega = \partial\sigma_I\Omega$ es una superficie (o 2-variedad) por pedazos parametrizada por una función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que induce vectores normales (a S) que apuntan hacia “afuera” de S , y $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \sigma_I$ (que en este caso resulta igual a σ dado que σ_I es la función identidad).

Para completar el cuadro, el propio Segundo Teorema Fundamental del Cálculo que todos conocemos (o su equivalente expresado en la identidad 3.11 del capítulo tres) se puede formular en términos de integrales de formas. Para ello, sólo hace falta definir los conceptos de 0-variedad parametrizada y el de integral sobre este tipo de variedades, lo cual se puede hacer de la siguiente manera: diremos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es una 0-variedad parametrizada si existe $\sigma : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $M = \sigma(\{0, 1\})$ (lo que significa que una 0-variedad en \mathbb{R}^n es simplemente cualquier conjunto formado por uno o dos puntos).

Por otra parte, si $f1^{(0)}$ es una 0-forma definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ y $M \subset U$ es una 0-variedad parametrizada por $\sigma : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos la integral de $f1^{(0)}$ sobre M , que denotamos por $\int_M f1^{(0)}d\sigma$, como

$$\int_M f1^{(0)}d\sigma = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))$$

Finalmente, si $\Gamma \subset U$ es una curva (o una 1-variedad) suave parametrizada por $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, definimos el borde de Γ inducido por su parametrización γ , que denotamos por $\partial_\gamma\Gamma$, como la 0-variedad (en \mathbb{R}^n) formada por los puntos $\gamma(\operatorname{Fr}([a, b])) = \gamma(\{a, b\}) = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

Ahora, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 en U , párrafos arriba vimos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot d\gamma &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n} dx_n \right) d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} d(\varphi 1^{(0)}) d\gamma \end{aligned}$$

Por otra parte, si a la 0-variedad (en \mathbb{R}) formada por los puntos $\{a, b\}$ (que no es más que el borde de la 1-variedad (en \mathbb{R}) dada por el intervalo $[a, b]$, el que a su vez se puede ver como una región básica en \mathbb{R}) la parametrizamos por la función $\sigma : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, entonces

$$\int_{\partial_\gamma\Gamma} \varphi 1^{(0)} d\tilde{\sigma} = \nabla\varphi(\gamma(b)) - \nabla\varphi(\gamma(a))$$

en donde $\tilde{\sigma} = \gamma \circ \sigma$ es una parametrización de la 0-variedad $\partial_\gamma\Gamma = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

Por lo tanto, con base en estas dos últimas identidades, la identidad 3.11 del capítulo tres se puede escribir como

$$\int_{\partial_\gamma \Gamma} \varphi 1^{(0)} d\tilde{\sigma} = \int_{\Gamma} d(\varphi 1^{(0)}) d\gamma$$

5.6 El Gran Teorema Fundamental del Cálculo

La reformulación de los teoremas de Green, Stokes, Gauss y Fundamental del Cálculo que acabamos de hacer en la sección anterior, nos hacen pensar que éstos deben de ser casos particulares de un teorema más general, y sin duda estamos en lo correcto. Lo siguiente que haremos será formular dicho teorema el cual, además del valor que tiene por si mismo, tendrá un papel relevante en la solución del problema que planteamos en la sección anterior acerca de las diferenciales exactas. Este teorema es conocido tradicionalmente como el Teorema de Stokes (sobre formas diferenciables) pero aquí preferimos llamarlo el *Gran Teorema Fundamental del Cálculo* (nombre que, sin duda, refleja mejor su contenido). Por otra parte, y como seguramente el lector ya lo sospechará, entre los objetivos de este texto no está el de dar la prueba de este teorema.

Teorema 5.15 (Fundamental del Cálculo (Gran)) Sean, $p \in \{1, \dots, n\}$, $\omega^{(p-1)}$ una $(p-1)$ -forma diferenciable definida en la región $U \subset \mathbb{R}^n$, y $M \subset U$ una p -variedad, parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\int_M d(\omega^{(p-1)}) d\sigma = \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(p-1)} d\tilde{\sigma}$$

en donde $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \mu$ y μ es una parametrización de la $(p-1)$ -variedad (por pedazos) $Fr(A)^2$.

Este es sin duda el teorema más importante de todo este texto, aun y cuando no hayamos incluido su prueba. En él se encuentran sintetizados los conceptos y teoremas más relevantes que hemos desarrollado a lo largo de todos estos capítulos.

Para concluir esta breve sección, aplicaremos este teorema en algunos ejemplos que posteriormente nos serán útiles, cuando en la siguiente sección regresemos al problema de las diferenciales exactas.

Ejemplo 5.16 Considere:

1. la 1-variedad (o curva) $M \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por la función $\sigma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\sigma(t) = (r \cos(t), r \sen(t), 0, \dots, 0)$$

Muestre que

$$\int_M d(\omega^{(0)}) d\gamma = 0$$

para cualquier 0-forma diferenciable $\omega^{(0)}$ definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M \subset U$.

Solución. Por el Gran Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_M d(\omega^{(0)}) d\gamma = \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(0)} d\tilde{\sigma}$$

²Aquí habría que agregar que la parametrización μ “induce” vectores normales a la $Fr(A)$ que apuntan hacia “afuera” de A , de acuerdo con la idea descrita en la observación que sigue a la definición 5.12.

por lo que basta probar que

$$\int_{\partial_\sigma M} \omega^{(0)} d\tilde{\sigma} = 0$$

Ahora, si al borde (o frontera) del intervalo $[0, 2\pi]$ que está formado por el conjunto $\{0, 2\pi\}$ lo parametrizamos por la función $\mu : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mu(0) = 0$ y $\mu(1) = 2\pi$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(0)} d\tilde{\sigma} &= \omega^{(0)}(\tilde{\sigma}(1)) - \omega^{(0)}(\tilde{\sigma}(0)) \\ &= \omega^{(0)}(\sigma(\mu(1))) - \omega^{(0)}(\sigma(\mu(0))) \\ &= \omega^{(0)}(\sigma(2\pi)) - \omega^{(0)}(\sigma(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ya que $\sigma(2\pi) = \sigma(0)$.

2. la 2-variedad (o superficie) $M \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\sigma(u, v) = (r \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \cos(v), 0, \dots, 0)$$

Muestre que

$$\int_M d(\omega^{(1)}) d\sigma = 0$$

para cualquier 1-forma diferenciable $\omega^{(1)}$ definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M \subset U$.

Solución. Por el Gran Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_M d(\omega^{(1)}) d\sigma = \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma}$$

por lo que basta probar que

$$\int_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma} = 0$$

Así, si parametrizamos a la $Fr(A)$ en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma} &= \int_0^{2\pi} (\omega^{(1)}(\sigma(t, 0))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) \right) dt + \int_0^\pi (\omega^{(1)}(\sigma(2\pi, t))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(2\pi, t) \right) dt \\ &\quad - \int_0^{2\pi} (\omega^{(1)}(\sigma(t, \pi))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, \pi) \right) dt - \int_0^\pi (\omega^{(1)}(\sigma(0, t))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(0, t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left[(\omega^{(1)}(\sigma(t, 0))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) \right) - (\omega^{(1)}(\sigma(t, \pi))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, \pi) \right) \right] dt \\ &\quad + \int_0^\pi \left[(\omega^{(1)}(\sigma(2\pi, t))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(2\pi, t) \right) - (\omega^{(1)}(\sigma(0, t))) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(0, t) \right) \right] dt \end{aligned}$$

Ahora, dado que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0) = (0, 0, 0, 0, \dots, 0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, \pi)$$

para toda $t \in [0, 2\pi]$, y por otra parte

$$\sigma(2\pi, t) = \sigma(0, t) \quad y \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(2\pi, t) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(0, t)$$

para toda $t \in [0, \pi]$, concluimos que

$$\int_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma} = 0$$

3. la 3-variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\sigma(u, v, w) = (r \operatorname{sen}(w) \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(w) \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \operatorname{sen}(w) \cos(v), r \cos(w), 0, \dots, 0)$$

Muestre que

$$\int_M d(\omega^{(2)}) d\sigma = 0$$

para cualquier 2-forma diferenciable $\omega^{(2)}$ definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M \subset U$.

Solución. Nuevamente, por el Gran Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int_M d(\omega^{(2)}) d\sigma = \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma}$$

por lo que basta probar que

$$\int_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma} = 0$$

Ahora, si parametrizamos a cada una de las caras que forman parte de la $Fr(A) \subset \mathbb{R}^3$ de tal manera que cada una de estas parametrizaciones induzcan vectores normales que apunten hacia “afuera” de A , y agrupamos las correspondientes integrales sobre caras opuestas, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma} &= \int_{[0, \pi] \times [0, \pi]} \left[\left(\omega^{(2)}(\sigma(2\pi, t, s)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(2\pi, t, s), \frac{\partial \sigma}{\partial w}(2\pi, t, s) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\omega^{(2)}(\sigma(0, t, s)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial v}(0, t, s), \frac{\partial \sigma}{\partial w}(0, t, s) \right) \right] \\ &\quad + \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \left[\left(\omega^{(2)}(\sigma(t, 0, s)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0, s), \frac{\partial \sigma}{\partial w}(t, 0, s) \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\omega^{(2)}(\sigma(t, \pi, s)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, \pi, s), \frac{\partial \sigma}{\partial w}(t, \pi, s) \right) \right] \\ &\quad + \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} \left[\left(\omega^{(2)}(\sigma(t, s, 0)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, s, 0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(t, s, 0) \right) \right. \end{aligned}$$

$$- \left(\omega^{(2)}(\sigma(t, s, \pi)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, s, \pi), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(t, s, \pi) \right) \Big]$$

En la primera integral, se tiene que

$$\sigma(2\pi, t, s) = \sigma(0, t, s), \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v}(2\pi, t, s) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(0, t, s) \quad y \quad \frac{\partial \sigma}{\partial w}(2\pi, t, s) = \frac{\partial \sigma}{\partial w}(0, t, s)$$

para toda $t, s \in [0, \pi]$ de tal manera que el integrando es cero y por tanto, dicha integral es igual a cero.

En cuanto a la segunda integral, se cumple que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0, s) = (0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, \pi, s)$$

lo que es suficiente para concluir que

$$\begin{aligned} \left(\omega^{(2)}(\sigma(t, 0, s)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, 0, s), \frac{\partial \sigma}{\partial w}(t, 0, s) \right) &= 0 \\ &= \left(\omega^{(2)}(\sigma(t, \pi, s)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, \pi, s), \frac{\partial \sigma}{\partial w}(t, \pi, s) \right) \end{aligned}$$

para toda $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, y por tanto, que la segunda integral también es igual a cero. Finalmente, en la tercera integral se tiene que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, s, 0) = (0, 0, 0, 0, 0, \dots, 0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, s, \pi)$$

lo que también es suficiente para concluir que

$$\begin{aligned} \left(\omega^{(2)}(\sigma(t, s, 0)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, s, 0), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(t, s, 0) \right) &= 0 \\ &= \left(\omega^{(2)}(\sigma(t, s, \pi)) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(t, s, \pi), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(t, s, \pi) \right) \end{aligned}$$

para toda $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, y por tanto, que la tercera integral también es igual a cero. Por lo tanto

$$\int_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma} = 0$$

5.7 Diferenciales exactas (segunda parte)

Para concluir este capítulo (¡y este trabajo!), en esta sección regresaremos al problema de las diferenciales exactas que planteamos en la sección 5.3. Como se recordará, ahí nos hicimos la siguiente pregunta: si $\omega^{(p)}$ es una p -forma diferenciable (con $p \in \{1, \dots, n-1\}$) definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$, ¿existe $\tau^{(p-1)}$, una $(p-1)$ -forma diferenciable definida en U , tal que $d(\tau^{(p-1)}) = \omega^{(p)}$?

El Gran Teorema Fundamental del Cálculo y los ejemplos que dimos en la sección anterior, nos serán de gran ayuda para contestar esta pregunta. De hecho, así como está planteada, su respuesta es negativa.

En efecto, ahora podemos mostrar, por ejemplo, que en cualquier \mathbb{R}^n existe una región U y una 1-forma $\omega^{(1)}$ definida ahí, tal que $d(\omega^{(1)}) = 0^{(2)}$, y que sin embargo no puede existir una $\tau^{(0)}$ definida en U tal que $d(\tau^{(0)}) = \omega^{(1)}$.

Tómese, en cualquier \mathbb{R}^n (con $n \geq 2$), la 1-forma $\omega^{(1)}$ dada por

$$\omega^{(1)} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$. Un cálculo sencillo mostrará que $d(\omega^{(1)}) = 0^{(2)}$.

Por otra parte, si tomamos la 1-variedad (o curva) $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por la función $\gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\gamma(t) = (r \cos(t), r \operatorname{sen}(t), 0, \dots, 0)$$

se tiene que $\Gamma \subset U$ y otro cálculo sencillo mostrará que

$$\int_{\Gamma} \omega^{(1)} d\gamma = 2\pi \neq 0$$

de tal manera que, por el primer inciso del ejemplo 5.16, podemos concluir que no existe una 0-forma $\tau^{(0)}$ definida en U tal que $d(\tau^{(0)}) = \omega^{(1)}$.

¿Cuál es el problema en este ejemplo? Como seguramente el lector intuirá, el problema se encuentra en la región $U \subset \mathbb{R}^n$ más que en la 1-forma $\omega^{(1)}$ que elegimos. En particular, nótese que la curva (cerrada) $\Gamma \subset U$ no se puede “contraer” o “llevar” a un punto sin salirnos de la región U , es decir, U no es una región simplemente conexa.

Otro ejemplo que resultará bastante ilustrativo, es el siguiente. Sea, en cualquier \mathbb{R}^n (con $n \geq 3$), la 2-forma $\omega^{(2)}$ dada por

$$\omega^{(2)} = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{3/2}} dx_1 \wedge dx_2$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$. Ya sea por un cálculo directo, o con base en los ejemplos 5.7 (cuarto inciso) y 4.26 (del capítulo cuatro), sabemos que $d(\omega^{(2)}) = 0^{(3)}$.

Ahora, si tomamos la 2-variedad (o superficie) $M \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida como

$$\sigma(u, v) = (r \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \cos(v), 0, \dots, 0)$$

se tiene que $M \subset U$ y con base en el ejemplo 4.13 del capítulo cuatro (o calculándola directamente) podemos concluir que

$$\int_M \omega^{(2)} d\gamma = -4\pi \neq 0$$

de tal manera que, ahora por el segundo inciso del ejemplo 5.16, podemos concluir que no existe una 1-forma $\tau^{(1)}$ definida en U tal que $d(\tau^{(1)}) = \omega^{(2)}$.

Como en el ejemplo anterior, al parecer el problema no está en la 2-forma $\omega^{(2)}$ sino en la región U sobre la cual está definida. En particular, nótese ahora que la superficie (cerrada) $M \subset U$ no se puede “contraer” o “llevar” a un punto sin salirnos de la región U , es decir, U no es una región doblemente conexa (de acuerdo con el término que usamos en la sección 7 del capítulo cuatro).

Para terminar con esta ilustrativa serie de contraejemplos, considérese el siguiente. Sea en \mathbb{R}^4 la 3-forma $\omega^{(3)}$ dada por

$$\omega^{(3)} = Pdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + Qdx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + Rdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + Wdx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

en donde

$$P(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{-x_4}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

$$Q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

$$R(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_3}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

y

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^2}$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^n \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$.

De acuerdo con el último inciso del ejemplo 5.7, se tiene que

$$d(\omega^{(3)}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_4} + \frac{\partial R}{\partial x_3} - \frac{\partial W}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

de donde, haciendo los respectivos cálculos (¡los cuales se dejan al lector!), obtenemos que

$$d(\omega^{(3)}) = 0^{(4)}$$

Por otra parte, si ahora tomamos la 3-variedad $M \subset \mathbb{R}^4$ parametrizada por la función

$$\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

dada por

$$\sigma(u, v, w) = (r \operatorname{sen}(w) \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(w) \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \operatorname{sen}(w) \cos(v), r \cos(w))$$

se tiene que $M \subset U$ y con base en el ejemplo 5.14 tenemos que

$$\int_M \omega^{(3)} d\sigma = 2\pi^2 \neq 0$$

de tal manera que ahora, por el tercer inciso del ejemplo 5.16, podemos concluir que no existe una 2-forma $\tau^{(2)}$ definida en U tal que $d(\tau^{(2)}) = \omega^{(3)}$.

Como seguramente el lector ya intuye, por supuesto que el problema no está en la 3-forma $\omega^{(3)}$ sino en la región $U \subset \mathbb{R}^4$ sobre la cual está definida. Como seguramente también el lector ya habrá notado, ahora lo que se puede observar es que la 3-variedad $M \subset U$ (la cual es “cerrada”, dado que es una “esfera” en \mathbb{R}^4) no se puede “contraer” o “llevar” a un punto sin salirse de la región U (¿cómo llamaría el lector a las regiones $U \subset \mathbb{R}^n$ en las que este tipo de 3-variedades (“cerradas”) se puedan “contraer” o “llevar” a un punto sin salirse de U ?).

Después de esta serie de contraejemplos (y las observaciones que hemos hecho sobre ellos) se vislumbra lo que será el resultado más importante con relación a las diferenciales exactas. Antes de formularlo, describiremos de manera intuitiva algunos conceptos que serán necesarios.

El primero de ellos se refiere a las p -variedades parametrizadas que llamaremos “cerradas”. Si una p -variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ está parametrizada por una función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, diremos que M es “cerrada” si σ “pega” a los puntos de la frontera de A ($Fr(A)$), es decir, si para cada $\hat{x} \in Fr(A)$ existe $\hat{y} \in Fr(A)$, $\hat{y} \neq \hat{x}$, tal que $\sigma(\hat{x}) = \sigma(\hat{y})$. Observe que este concepto abarca a más p -variedades que las que “geométricamente” parecen ser cerradas. Por ejemplo, un simple segmento puede ser una 1-variedad cerrada (o curva cerrada) si lo recorremos de tal manera que empecemos y terminemos en el mismo punto.

Otro concepto, sin duda muy relevante, se refiere a la caracterización de ciertas regiones $U \subset \mathbb{R}^n$. Dada $p \in \{1, \dots, n-1\}$, diremos que U es una región p -conexa si las p -variedades parametrizadas “cerradas” contenidas en U que sean tipo “esferas” de dimensión p (es decir, p -variedades parametrizadas que están formadas por puntos cuya distancia a un punto fijo, es constante), se pueden “contraer” o “llevar” a un punto sin salirse de U . De esta manera, las regiones 1-conexas serán aquellas a las que en el capítulo tres llamamos simplemente conexas, y las 2-conexas serán aquellas a las que en el capítulo cuatro llamamos doblemente conexas.

Con base en estos conceptos, ahora estamos en condiciones de establecer un teorema que nos da condiciones suficientes para garantizar cuándo una forma diferenciable es una diferencial exacta.

Teorema 5.17 Sean, $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región k -conexa para toda $k \in \{1, \dots, p\}$, y $\omega^{(p)}$ una p -forma diferenciable definida sobre U . Si $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$ entonces existe $\tau^{(p-1)}$ una $(p-1)$ -forma diferenciable definida sobre U tal que $d(\tau^{(p-1)}) = \omega^{(p)}$.

Como hicimos notar en los capítulos tres y cuatro, las regiones estrelladas son regiones simplemente conexas y doblemente conexas, y no es difícil convencerse de que también son p -conexas, para cualquier $p \in \{1, \dots, n-1\}$. De este hecho, y del teorema anterior se desprende el siguiente corolario, que será el último resultado de este texto.

Corolario 5.18 (Lema de Poincaré)³ Sean, $p \in \{1, \dots, n-1\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región estrellada, y $\omega^{(p)}$ una p -forma diferenciable definida sobre U . Si $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$ entonces existe $\tau^{(p-1)}$ una $(p-1)$ -forma diferenciable definida sobre U tal que $d(\tau^{(p-1)}) = \omega^{(p)}$.

³Jules Henri Poincaré (Nancy, Francia, 29 de abril de 1854 – París, 17 de julio de 1912), generalmente conocido como Henri Poincaré, fue un prestigioso polímata: matemático, físico, científico teórico y filósofo de la ciencia, primo del presidente de Francia Raymond Poincaré. Poincaré es descrito a menudo como el último “universalista” (después de Gauss) capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. (fuente: Wikipedia).

Apéndice A

El Teorema de Lebesgue

Como se mencionó en el capítulo 1, el objetivo de este apéndice es probar el teorema de Lebesgue. Para ello, antes será necesario demostrar un par de resultados relacionados con los conjuntos de medida de Lebesgue cero. Con este fin, daremos de nuevo la definición de este tipo de conjuntos.

Definición A.1 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. A tiene medida de Lebesgue cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad numerable de rectángulos $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ en \mathbb{R}^n tales que:

1. $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) < \varepsilon$

Es importante hacer notar la similitud que tiene esta definición con la condición que se vio en el capítulo 1 y que resultó ser equivalente a que un conjunto fuera de medida de Jordan cero (teorema 1.25). De hecho, a partir de este teorema es que podemos concluir fácilmente que todo conjunto de medida de Jordan cero es, necesariamente, un conjunto de medida de Lebesgue cero (y más adelante contaremos con la herramienta suficiente para mostrar que lo recíproco es falso).

Para continuar, el primer resultado que probaremos establece una condición equivalente para que un conjunto tenga medida de Lebesgue cero, y dice lo siguiente.

Proposición A.2 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. A tiene medida de Lebesgue cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad numerable de rectángulos $\{R'_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

1. $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int}(R'_j)$, y
2. $\sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \varepsilon$

Dem. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero. Sean $\varepsilon > 0$ y $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ una colección numerable de rectángulos tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) < \varepsilon/2$. Por el problema 2 del capítulo 1, sabemos que para cada rectángulo R_j existe otro rectángulo R'_j tal que $R_j \subset \text{int}(R'_j)$ y $m(R'_j) < m(R_j) + \varepsilon/2^{j+1}$ de tal forma que la colección de rectángulos $\{R'_j\}_{j=1}^{\infty}$ satisface que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int}(R'_j)$, y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \left(m(R_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

En cuanto a la suficiencia, su prueba es inmediata. ■

Lo último que formularemos, previo a la prueba del Teorema de Lebesgue, es una serie de condiciones bajo las cuales siempre obtenemos conjuntos de medida de Lebesgue cero.

Proposición A.3

1. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero y $B \subset A$ entonces B tiene medida de Lebesgue cero
2. Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos de medida de Lebesgue cero entonces $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ tiene medida de Lebesgue cero
3. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto a lo más numerable entonces A tiene medida de Lebesgue cero

Dem. La prueba del inciso 1 es inmediata de la definición, razón por la cual empezaremos por la prueba del inciso 2. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos de medida de Lebesgue cero; sabemos entonces que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una colección numerable $\{R_j^{(k)}\}_{j=1}^{\infty}$ de rectángulos tales que $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^{(k)}$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Ahora, dado que la colección de rectángulos $\{R_j^{(k)} \mid j, k \in \mathbb{N}\}$ también es numerable¹ y que se satisface que

$$\begin{aligned}
A &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\
&\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^{(k)} \right)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j^{(k)}) \right) &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

concluimos que A es un conjunto de medida de Lebesgue cero.

En cuanto al inciso 3, sea $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$; si hacemos $A_k = \{a_k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, es claro que cada conjunto A_k tiene medida de Lebesgue cero y que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, de tal forma que por el inciso anterior A tiene medida de Lebesgue cero. ■

¹Una manera de probar esta afirmación es considerar la función $f(k, j) = (2j - 1)2^{k-1}$, la cual es una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en \mathbb{N}

Con base en el inciso 3 de esta última proposición, es que podemos dar un ejemplo de un conjunto que tiene medida de Lebesgue cero el cual ni siquiera es Jordan-medible. Un ejemplo es el siguiente conjunto:

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

Que A es un conjunto de medida de Lebesgue cero se desprende del hecho de que A es un conjunto numerable, y que A ni siquiera es Jordan-medible es una consecuencia del hecho de que $Fr(A) = [0, 1] \times [0, 1]$ y la equivalencia entre los incisos 1 y 3 del teorema 1.24.

Una vez probados estos resultados, estamos en condiciones de probar el Teorema de Lebesgue y sólo recordaremos que, si $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $D_{f,R}$ denota al conjunto de puntos de R en los que f no es continua, es decir

$$D_{f,R} = \{\hat{x} \in R \mid f \text{ no es continua en } \hat{x}\}$$

Teorema A.4 (de Lebesgue) *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. f es integrable sobre R si y sólo si $D_{f,R}$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Dem. Sean $M = \sup \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$ y $m = \inf \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$; obsérvese que, si $M = m$ entonces f es una función constante y tanto la necesidad como la suficiencia de este teorema son inmediatas. Supondremos entonces $M - m > 0$ y empezaremos por probar la suficiencia para lo cual, recurriremos al teorema 1.11.

(\Leftarrow) Sea $\varepsilon > 0$; por la proposición A.2 sabemos que existe una colección $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ de rectángulos tales que $D_{f,R} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \text{int}(R_j)$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) < \frac{\varepsilon}{2(M - m)}$$

Hacemos $C = R \setminus D_{f,R}$; como C es el conjunto de puntos de R en que f es continua, para cada $\hat{x} \in C$ existe $\delta_{\hat{x}} > 0$ con la propiedad de que si $\hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}) \cap R$ entonces

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \frac{\varepsilon}{8m(R)} \tag{A.1}$$

Consideremos ahora la familia de conjuntos

$$\mathcal{U} = \{\text{int}(R_j) \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \{B_{\delta_{\hat{x}}/2}(\hat{x}) \mid \hat{x} \in C\}$$

la cual, se prueba fácilmente, es una cubierta abierta de R ; entonces, dado que R es compacto, sabemos que existen $j_1, \dots, j_r \in \mathbb{N}$ y $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_l \in C$ tales que

$$R \subset [\text{int}(R_{j_1}) \cup \dots \cup \text{int}(R_{j_r})] \cup [B_{\delta_{\hat{x}_1}/2}(\hat{x}_1) \cup \dots \cup B_{\delta_{\hat{x}_l}/2}(\hat{x}_l)] \tag{A.2}$$

Una vez que se obtuvo este número finito de rectángulos de la colección original $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$, estamos en condiciones de dar la partición de R que se requiere en el teorema 1.11. Para empezar, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ hacemos $R'_i = R \cap R_{j_i}$; a continuación, y procediendo como en la parte final de la prueba del teorema 1.24, “extendemos” los “lados” de estos subrectángulos de R para obtener una partición P' de R (veáse nuevamente la figura 1.15 que ilustra este procedimiento en \mathbb{R}^2) y tomemos $Q \in \mathcal{P}_R$ un refinamiento de P' tal que, si Q_1, \dots, Q_s son los subrectángulos de R inducidos por Q , entonces la diagonal de cada uno de ellos es menor que $\delta/2$ (es decir, $d(Q_i) < \delta/2$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$), en donde $\delta = \min\{\delta_{\hat{x}_1}, \dots, \delta_{\hat{x}_l}\} > 0$.

Mostraremos que Q es una partición como la que estamos buscando. Para lograr esto, lo primero que se debe notar es que si algún subrectángulo Q_i es tal que $\text{int}(R'_k) \cap Q_i \neq \emptyset$ para

alguna $k \in \{1, \dots, r\}$, entonces $Q_i \subset R_{j_k}$; en efecto, basta observar que esta misma propiedad la satisfacen los subrectángulos inducidos por P' (que no escribimos para no perdernos con la notación) y recordar que todo subrectángulo inducido por Q está contenido en algún subrectángulo inducido por P' (sería útil leer nuevamente la discusión posterior a la definición 1.3).

Con base en lo anterior, definimos

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, s\} \mid Q_i \subset R_{j_k} \text{ para alguna } k \in \{1, \dots, r\}\}$$

e $I_2 = \{1, \dots, s\} \setminus I_1$; obsérvese que, si $i \in I_2$ entonces $\text{int}(R_{j_k}) \cap Q_i = \emptyset$ para toda $k \in \{1, \dots, r\}$. Por otra parte, como $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, s\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) &= \sum_{i=1}^s (M_i - m_i)m(Q_i) \\ &= \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)m(Q_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)m(Q_i) \end{aligned}$$

en donde $M_i = \sup \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in Q_i\}$ y $m_i = \inf \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in Q_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$.

Lo siguiente que haremos será mostrar que cada una de las sumas anteriores es menor que $\varepsilon/2$. Para la primera, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)m(Q_i) &\leq \sum_{i \in I_1} (M - m)m(Q_i) \\ &\leq (M - m) \sum_{k=1}^r m(R_{j_k}) \\ &< (M - m) \frac{\varepsilon}{2(M - m)} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Para la segunda, sabemos que para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ existen $\hat{x}, \hat{y} \in Q_i$ tales que

$$M_i - \frac{\varepsilon}{8m(R)} < f(\hat{x}) \quad \text{y} \quad f(\hat{y}) < m_i + \frac{\varepsilon}{8m(R)}$$

de modo que

$$M_i - m_i < f(\hat{x}) - f(\hat{y}) + \frac{\varepsilon}{4m(R)} \tag{A.3}$$

Si además $i \in I_2$, también sabemos que $\text{int}(R_{j_k}) \cap Q_i = \emptyset$ para toda $k \in \{1, \dots, r\}$, de tal forma que, por la contención dada en A.2, existe $q \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\hat{x} \in B_{\delta_{\hat{x}_q}/2}(\hat{x}_q) \cap R$, de donde por A.1, se tiene que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_q)| < \frac{\varepsilon}{8m(R)} \tag{A.4}$$

Por otra parte, como $\hat{x}, \hat{y} \in Q_i$ entonces $\|\hat{x} - \hat{y}\| \leq d(Q_i) < \delta/2 \leq \delta_{\hat{x}_q}/2$ de modo que

$$\begin{aligned} \|\hat{y} - \hat{x}_q\| &\leq \|\hat{y} - \hat{x}\| + \|\hat{x} - \hat{x}_q\| \\ &< \delta_{\hat{x}_q} \end{aligned}$$

es decir, también se tiene que $\hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}_q}}(\hat{x}_q) \cap R$ de tal forma que por la misma desigualdad, sabemos que

$$|f(\hat{y}) - f(\hat{x}_q)| < \frac{\varepsilon}{8m(R)} \tag{A.5}$$

De las desigualdades A.4 y A.5 tenemos que

$$\begin{aligned} |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| &\leq |f(\hat{x}) - f(\hat{x}_q)| + |f(\hat{x}_q) - f(\hat{y})| \\ &< \frac{\varepsilon}{4m(R)} \end{aligned}$$

y por lo tanto, de A.3 obtenemos que

$$\begin{aligned} M_i - m_i &< f(\hat{x}) - f(\hat{y}) + \frac{\varepsilon}{4m(R)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2m(R)} \end{aligned}$$

para toda $i \in I_2$.

Con base en lo anterior, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)m(Q_i) &< \frac{\varepsilon}{2m(R)} \sum_{i \in I_2} m(Q_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2m(R)} \cdot m(R) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, Q) - \underline{S}(f, Q) &= \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)m(Q_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)m(Q_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

concluyendo con esto la prueba de que f es integrable sobre R .

(\Rightarrow) Supongamos ahora que f es integrable sobre R . Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$E_k = \left\{ \hat{x} \in R \mid \text{para toda } \delta > 0 \text{ existe } \hat{y} \in B_\delta(\hat{x}) \cap R \text{ tal que } |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \geq \frac{1}{k} \right\}$$

De la definición de este conjunto, se tiene que $E_k \subset D_{f,R}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset D_{f,R}$. Recíprocamente, si $\hat{x} \in D_{f,R}$, esto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $\hat{y} \in B_\delta(\hat{x}) \cap R$ tal que $|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \varepsilon$, de tal forma que si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $\varepsilon \geq 1/k$ entonces $\hat{x} \in E_k$ de donde concluimos que $D_{f,R} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y por lo tanto que

$$D_{f,R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Por tanto, por el inciso 2 de la proposición A.3, para probar que $D_{f,R}$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero, sólo hará falta probar que para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto E_k tiene medida de Lebesgue cero.

Sean entonces $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como f es integrable sobre R , sabemos que existe $P \in \mathcal{P}_R$ tal que

$$\overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Si R_1, \dots, R_s son los subrectángulos de R inducidos por la partición P , definimos $I_1 = \{i \in \{1, \dots, s\} \mid \text{int}(R_i) \cap E_k \neq \emptyset\}$ e $I_2 = \{1, \dots, s\} \setminus I_1$. Dado que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, s\}$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i)m(R_i) &= \sum_{i=1}^s (M_i - m_i)m(R_i) \\ &= \overline{S}(f, P) - \underline{S}(f, P) \\ &< \frac{\varepsilon}{2k} \end{aligned}$$

(en donde, como siempre, $M_i = \sup \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ y $m_i = \inf \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$), y como cada una de las dos primeras sumas son números no negativos, se tiene que

$$\sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)m(R_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Ahora, si $i \in I_1$, sabemos que $\text{int}(R_i) \cap E_k \neq \emptyset$ y por lo tanto, si $\hat{x} \in \text{int}(R_i) \cap E_k$, por el hecho de que $\text{int}(R_i)$ es un abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\hat{x}) \subset R$, y por la definición de E_k , existe $\hat{y} \in B_\delta(\hat{x}) \cap R$ tal que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \geq \frac{1}{k}$$

Así, dado que $\hat{x}, \hat{y} \in R_i$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &\leq |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \\ &\leq M_i - m_i \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \sum_{i \in I_1} m(R_i) &\leq \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i)m(R_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2k} \end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{i \in I_1} m(R_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

De esta última desigualdad, concluimos que la colección de rectángulos $\{R_i \mid i \in I_1\}$ es tal que la suma de sus medidas es menor que $\varepsilon/2$, sólo que éstos no cubren necesariamente a todo el conjunto E_k ; los puntos de E_k que hace falta cubrir son aquellos que pertenecen a la frontera de algún R_i , con $i \in I_2$, es decir, nos hace falta cubrir al conjunto

$$\bigcup_{i \in I_2} (E_k \cap Fr(R_i)) \tag{A.6}$$

La buena noticia es que $E_k \cap Fr(R_i) \subset Fr(R_i)$ y que la $Fr(R_i)$ es un conjunto de medida de Jordan cero² y por lo tanto es de medida de Lebesgue cero. De esta forma, por el inciso 1 de la proposición A.3, el conjunto $E_k \cap Fr(R_i)$ también es de medida de Lebesgue cero (para cada $i \in I_2$). Así, por

²Este hecho es una consecuencia del problema 19 y la equivalencia entre los incisos 1 y 3 del teorema 1.24, ambos del capítulo 1

el inciso 2 de la misma proposición, el conjunto dado en A.6 también es de medida de Lebesgue cero.

Por todo lo anterior, sabemos entonces que existe una colección $\{R'_j\}_{j=1}^{\infty}$ de rectángulos tales que:

1. $\bigcup_{i \in I_2} (E_k \cap Fr(R_i)) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R'_j$, y
2. $\sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \frac{\varepsilon}{2}$

de modo que la colección de rectángulos $\{R_i \mid i \in I_1\} \cup \{R'_j\}_{j=1}^{\infty}$ es tal que:

1. $E_k \subset \left(\bigcup_{i \in I_1} R_i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} (E_k \cap Fr(R_i)) \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I_1} R_i \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R'_j \right)$, y
2. $\sum_{i \in I_1} m(R_i) + \sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

lo que demuestra que E_k es un conjunto de medida de Lebesgue cero, y con lo cual termina la prueba del teorema. ■

Índice de Materias

- armónica
 - función, 232
- borde
 - de una superficie, 189
- campo
 - conservativo, 125
 - de fuerzas, 116
 - escalar, 112
 - gradiente, 125
 - solenoides, 227
 - vectorial, 116
 - en coordenadas cilíndricas, 220
 - en coordenadas esféricas, 221
 - en coordenadas polares, 152
- Cavalieri
 - principio de, 43
- centro de masa, 83
 - de un alambre recto, 84
 - de una región en el espacio, 92
 - de una región en el plano, 89
- cilíndricas
 - cambio a coordenadas, 75
- conjunto
 - de discontinuidades de una función, 18
 - de sumas inferiores, 10
 - de sumas superiores, 10
 - estrellado, 175
 - Jordan-medible, 25
- conservativo
 - campo, 125
- coordenadas
 - cilíndricas, 75
 - esféricas, 79
 - polares, 71
- curva
 - suave por pedazos, 103
- diagonal de un rectángulo, 3
- diferencial
 - de una forma, 260
 - exacta, 269
- divergencia
 - de un campo en el espacio, 231
 - de un campo en el plano, 160
 - motivación del concepto de
 - en el espacio, 228
 - en el plano, 156
 - teorema de la, 232, 234
- esféricas
 - cambio a coordenadas, 79
- estrellada
 - región, 175
- formas
 - básicas, 255
 - diferenciables, 260
- Fubini
 - teorema de, 46, 48
- función
 - característica de un conjunto, 25
 - integrable, 12
- Gauss
 - teorema de, 232, 234
- gradiente
 - campo, 125
- Green
 - teorema de, 141, 142, 144
- integración por partes
 - fórmula de, 182, 250, 251
- integral
 - de una p -forma, 276
 - de una función, 12
 - inferior, 11
 - iterada, 46
 - superior, 11
 - integral de línea

- de una función de valores reales, 108, 112
- de una función de valores vectoriales, 116, 119
- integral de superficie
 - de una función de valores reales, 199, 200
 - de una función de valores vectoriales, 201, 203
- acobiano, 69
 - del cambio de coordenadas cilíndricas, 77
 - del cambio de coordenadas esféricas, 81
 - del cambio de coordenadas polares, 74
- Klein
 - botella de, 193
- laplaciano
 - de un campo escalar, 232
- Lebesgue
 - medida cero de, 34, 291
 - teorema de, 34, 291, 293
- Möbius
 - cinta de, 192
- medida
 - de Jordan, 24
 - de Lebesgue cero, 34, 291
 - de un rectángulo, 3
- normal
 - a una superficie, 187
- parametrización
 - de una curva, 103
 - simple
 - de una p -variedad, 270
 - de una superficie, 191
- partición
 - de un rectángulo, 3
 - refinamiento de una, 4
- polares
 - cambio a coordenadas, 71
- rectángulo, 3
- región, 119
 - básica, 270
 - estrellada, 175
 - simplemente conexa, 175
 - tipo de, 56, 59
- reparametrización
 - de una curva, 105
 - de una superficie, 194
- Riemann
 - sumas de, 6
- rotacional
 - de un campo en el espacio, 169
 - de un campo en el plano, 137
 - en coordenadas esféricas, 222
 - en coordenadas polares, 151
 - interpretación del, 170
 - motivación del concepto de
 - en el espacio, 162
 - en el plano, 132
- simplemente conexa
 - región, 175
- solenoides
 - campo, 227
- Stokes
 - teorema de, 206, 209
- suma
 - inferior, 7
 - superior, 8
- superficie, 185
 - área de una, 196
 - cerrada, 193
 - no orientada, 192
 - orientada, 192
 - suave en un punto, 187
- teorema
 - de Cambio de Variable, 63, 68
 - de Fubini, 46, 48
 - de Gauss (o de la divergencia), 232, 234
 - de Green, 142, 144
 - de Lebesgue, 34, 291, 293
 - de Stokes, 206, 209
 - del Valor Promedio, 23, 37
 - del Valor Promedio Generalizado, 23, 37
 - Fundamental del Cálculo (el Gran), 283
- trabajo
 - realizado por un campo de fuerzas, 118
- valor promedio de una función
 - sobre un rectángulo, 22
 - sobre una curva, 115
 - sobre una superficie, 249
- variedad parametrizada, 270
 - por pedazos, 272

volumen
debajo de la gráfica de una función, 6