Introducción

Este texto trata sobre algunos de los distintos conceptos de integración que existen para funciones de varias variables, tema que constituye el núcleo central del curso de Cálculo Diferencial e Integral IV que se imparte en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

Dado que el curso de Cálculo Diferencial e Integral IV es un curso de matemáticas que forma parte del tronco común de materias de cuatro de las cinco licenciaturas que se ofrecen en la Facultad, el objetivo principal de este texto es el de exponer los conceptos y resultados matemáticos relacionados con el tema de la integral de funciones de varias variables.

En general, casi todos los conceptos que aquí se exponen se tratan de motivar a partir de problemas específicos, la mayoría de ellos tomados de la física o de la geometría. De esta forma, las definiciones de rotacional o de divergencia, se obtienen como resultado del intento de medir "la rotación producida" por un campo de fuerzas o "la expansión (o contracción)" de un fluído. Una vez hecho lo anterior, se camina hacia la obtención de los resultados que reflejen las estructuras matemáticas subyacentes a estos conceptos.

Es importante mencionar que, aun cuando el objetivo es mantener un nivel de rigor y formalismo matemático adecuado a lo largo de todo el texto, hay conceptos y resultados que se discuten en términos puramente "intuitivos" en virtud del espacio y tiempo que habría que dedicarles a su formalización. En este sentido, su definición rigurosa y la prueba de algunos teoremas no se incluyen en este texto y sólo se mencionan con la intención de que el estudiante los conozca y tenga una visión más global del tema en cuestión.

Este texto está dirigido a aquellos estudiantes que ya han pasado por los primeros tres cursos de Cálculo de la Facultad, lo que significa que se parte del supuesto de que conocen y manejan el Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable y el Cálculo diferencial de funciones de varias variables, además de los cursos básicos de Geometría Analítica, Algebra Superior y un primer curso de Algebra Lineal.

El texto está organizado en cinco capítulos y a continuación se da una somera y rápida descripción del contenido de cada uno de ellos.

En el primero se aborda el tema de la integral de Riemann para funciones de varias variables y valores reales. Se hace la construcción formal de este concepto y después se usa para introducir el de medida de Jordan de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Una vez hecho lo anterior, se extiende el concepto de integral de Riemann justo a los conjuntos Jordan-medibles.

El segundo capítulo se dedica al desarrollo de las herramientas que permiten el cálculo de integrales. Los resultados más importantes de este capítulo son el teorema de Fubini y el teorema de Cambio de Variable, y es justo en el caso de este último teorema, la primera vez que no se incluye la prueba de un resultado. A cambio de ella, se hace un análisis detallado de cómo se aplica este teorema y su relación con los diferentes sistemas coordenados que suelen usarse con más frecuencia, tanto en $\mathbb{R}^2$ (polares) como en $\mathbb{R}^3$ (cilíndricas y esféricas). El capítulo concluye con una sección en la que se muestra cómo usar toda esta herramienta para obtener la masa de un objeto, y cómo definir y calcular su centro de masa.

En el tercer capítulo se aborda el estudio de lo que tradicionalmente se concoce como Cálculo Vectorial. Comienza con el tema de la Integral de Línea, iniciando con una revisión del concepto de curva y algunos temas relacionados con éstas, como el de longitud de curva. A continuación, se define la integral de línea de una función de valores reales (o campos escalares) a partir del problema del cálculo de la masa total de un alambre no homogéneo, y además de sus propiedades estrictamente matemáticas, se ve cómo este tipo de integrales también se pueden usar para el cálculo de áreas. En la siguiente sección, se introduce la integral de línea de una función de valores vectoriales (o campos vectoriares) a partir del concepto de trabajo. Con base en este mismo concepto y el problema de saber si éste depende de la curva (o trayectoria) que se siga, se aborda la cuestión de los campos conservativos (o campos gradiente, su equivalente en términos matemáticos). Para abordar este problema, en la siguiente sección se desarrolla el concepto de rotacional y divergencia en el plano y se deduce uno de los tres teoremas más importantes del Cálculo Vectorial, el teorema de Green. En la siguiente sección se extiende el concepto de rotacional para campos en el espacio y se concluye el capítulo con una sección en la que se dan un par de teoremas que responden al problema de los campos conservativos.

En el capítulo cuatro se aborda el tema de la Integral de Superficie, y se organiza de forma similar al capítulo de la integral de línea. Comienza con la definición de lo que se entenderá por una superficie y se analizan algunas de sus principales características. A continuación, se define la integral de superficie de una función de valores reales (o campos escalares) a partir del problema del cálculo de la masa total de una lámina no homogénea, y se dan algunas de las propiedades básicas de este concepto. En la siguiente sección, se introduce la integral de superficie de una función de valores vectoriales (o campos vectoriares) a partir del problema de encontrar una forma de medir qué tanto se expande un fluido a través de una superficie. Dado que desde el capítulo tres ya se cuenta con el concepto de rotacional en el espacio, y una vez que ya se definió la integral de superficie de campos vectoriales, se tienen todos los elementos necesarios para abordar otro de los teoremas más importantes del Cálculo Vectorial: el teorema de Stokes. Con base en este teorema, se plantea el problema de determinar cuándo un campo vectorial es un campo solenoide, es decir, cuándo un campo vectorial coincide con ser el rotacional de otro campo. Con el fin de resolverlo, en la siguiente sección se introduce el concepto de divergencia de un campo vectorial y se presenta el tercer teorema más importante del Cáculo Vectorial: el teorema de Gauss. Una vez hecho lo anterior, en la última sección de este capítulo se regresa al problema de los campos solenoides, y se dan un par de teoremas que lo resuelven.

Finalmente, en el quinto capítulo se desarrolla de una manera más descriptiva y menos formal, el tema de las formas diferenciables. El objetivo principal de este capítulo es mostrar cómo el concepto de forma diferenciable unifica los conceptos y resultados que se desarrollaron en los capítulos anteriores. Comienza con la descripción y definición de las $p-$formas básicas para después dar paso a la de $p-$forma y lo que significa la derivada de esta clase de objetos, dando lugar al concepto de forma diferenciable. Una vez hecho lo anterior, se muestra que el rotacional y la divergencia se pueden ver como un caso particular de derivación de ciertas $p-$formas y se ve que el problema de los campos conservativos y los campos solenoides, son un caso particular de un problema más general: el problema de las diferenciales exactas. Con el fin de abordar este problema, en las siguientes secciones se introduce el concepto de $p-$variedad parametrizada (como una generalización de los de curva y superficie) y se define la integral de una $p-$forma sobre una $p-$variedad parametrizada, mostrando que las integrales de línea y de superficie de campos vectoriales, se pueden ver como un caso particular de este tipo de integral. Una vez que se cuenta con todo este material, se tiene todo lo necesario para formular el que bien podría ser calificado como el teorema más importante de todo este texto, y que aquí se prefiere bautizar con el nombre de: “el Gran Teorema Fundamental del Cálculo” (y que en la literatura tradicional se le conoce con el nombre de teorema de Stokes).

Después de mostrar que los teoremas de Green, Stokes y Gauss son casos particulares de este gran teorema, en la última sección se formulan un par de resultados que dan respuesta al problema de las diferenciales exactas. Es importante mencionar que en este capítulo no se incluyó una lista de problemas, en virtud de que su objetivo sólo es el de proporcionar un panorama general de la estructura matemática que subyace a todos estos temas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido escrito después de haber impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM, en varias ocasiones y a lo largo de varios años, el curso de Cálculo Diferencial e Integral IV. Por esta razón, las primeras personas a las que quiero agradecer su "colaboración", son todos aquellos estudiantes que me permitieron hablarles de estos temas y aprehenderlos junto con ellos.

Para los que no tenemos mucha habilidad para escribir, nos resultan muy importantes aquellos que confían en que sí podemos hacerlo y nos impulsan (o nos "obligan") a intentarlo. Para este libro, a quienes tengo que agradecer que hayan jugado ese importante papel son: Ana Irene (Ramírez) y Héctor (Méndez Lango).

Una vez que se ha logrado escribir los primeros borradores de un libro como este, el que algunas personas se tomen el (a veces ingrato) trabajo de leerlos, es algo que uno realmente aprecia mucho. En este aspecto, todavía tengo una deuda de agradecimiento con el profesor "Marmol" (Quico Marmolejo), quien leyó y cuestionó constructivamente una buena parte del material contenido en esta obra. No conforme con lo anterior, además tuvo la generosidad de darse a la tarea de realizar un buen número de las figuras que ilustran este texto (y que seguramente el lector podrá identificar fácilmente porque son las que están mejor hechas). Además del profesor "Marmol", también tuve la suerte de que Ceci (Neve) y Erik (Schwarz), un par de ex-alumnos, se dieran a la tarea de leer minuciosamente la totalidad (o parte) de este trabajo, haciéndome una buena cantidad de importantes sugerencias, y marcándome un buen número de errores tipográficos. Para ellos, mi más sincero agradecimiento. Muchas otras personas me han hecho observaciones o me han ayudado con la siempre difícil tarea de darle un buen "formato" a este libro (¡ingrato LaTeX!); sería muy largo mencionarlas a todas, pero no por ello quiero dejar de expresarles mi agradecimiento por su valiosa ayuda.