Introducción

El tema principal del presente texto es el referente al concepto de derivada para funciones de varias variables, tema que constituye el núcleo central del curso de Cálculo Diferencial e Integral III que se imparte en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México.

En este trabajo partimos del supuesto de que el conjunto de conceptos y herramientas de Cálculo Diferencial e Integral que son del dominio del lector es aquel al que coloquialmente se le conoce como *Cálculo de una variable*. Como el lector seguramente también sabe, este nombre coloquial se debe a que los problemas y situaciones que dan origen a este conjunto de conocimientos son aquellos en los que *una* cantidad (o "variable") se puede poner en términos de *otra* cantidad, en donde cada una de estas "cantidades" tiene la particularidad de poderse "medir", "describir" o "representar" con un sólo número real. Esto mismo, dicho de una manera un poco más técnica, significa que el objeto matemático sobre el cual se construyen estos conceptos es el de *función de una variable real con valores reales*, o simplemente, *función de los reales en los reales*.

Una vez dicho lo anterior, es un poco más sencillo establecer cuál es el objetivo fundamental de este texto: desarrollar el concepto de derivada para el tipo de funciones en las que *una* cantidad (o variable) se puede poner en términos de *otra* cantidad, con la particularidad de que alguna de estas cantidades (¡o ambas!) no se puede medir, o representar con un sólo número real. Este tipo de funciones son conocidas en general como funciones de varias variables, y el conjunto de conceptos y resultados que desarrollaremos alrededor de éstas es parte de lo que coloquialmente se conoce como *Cálculo de varias variables*.

Siguiendo este orden de ideas, los conceptos y resultados que se desarrollan en este texto se motivan principalmente a partir de los correspondientes conceptos y resultados para el caso de funciones de los reales en los reales. En virtud de esta característica, a lo largo de todo el texto se intenta usar un nivel adecuado de rigor y formalismo matemático. Por lo anterior, en este trabajo se parte del supuesto de que el lector conoce los temas básicos de Cálculo de una variable, de Geometría Analítica (plana y del espacio) y de Álgebra Superior. Por otra parte, dado que el primer curso de Cálculo de varias variables se suele tomar paralelamente con el primer curso de Álgebra Lineal, en este trabajo se intenta hacer uso de algunos conceptos de esta última materia una vez que el lector ya los haya estudiado.

Este trabajo está organizado en cinco capítulos; a continuación se da una somera y rápida descripción del contenido de cada uno de ellos.

De la misma forma que para realizar un estudio más profundo del Cálculo de una variable es necesario empezar por estudiar con mayor detenimiento al conjunto de los números reales, en el caso del Cálculo de varias variables es necesario hacer el mismo tipo de estudio del conjunto $\mathbb{R}^n$. Iniciamos el primer capítulo con una serie de ejemplos con los cuales se pretende mostrar que este conjunto resulta ser el más adecuado para representar a las variables ("independientes" y "dependientes") de las funciones para las cuales se definirán la mayoría de los conceptos de este texto. Inmediatamente después nos damos a la tarea de explorar las diferentes estructuras matemáticas que este conjunto posee: su estructura algebraica, su estructura geométrica y su estructura topológica. Concluimos este capítulo con un rápido repaso sobre los diferentes sistemas coordenados que se pueden establecer en el plano o en el espacio.

Una vez que en el capítulo 1 se estableció que las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ serán el principal objeto matemático con el cual podremos describir la mayoría de los problemas que dan lugar al estudio del Cálculo de varias variables, en el capítulo 2 comenzamos por hacer un rápido estudio de sus aspectos algebraicos y geométricos. Posteriormente nos damos a la tarea de introducir los conceptos de límite y continuidad de este tipo de funciones, para lo cual previamente desarrollamos la herramienta de las sucesiones en $\mathbb{R}^n$. A continuación damos paso a los muy importantes teoremas "fuertes" de continuidad y concluimos este capítulo estudiando el concepto de continuidad uniforme.

El concepto de derivada para las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es el tema central de este trabajo, y a este concepto dedicamos los restantes tres capítulos. En el capítulo 3 empezamos estudiando a las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ y su particular importancia en la descripción de "objetos geométricos", y en la descripción del movimiento de un objeto en un plano o en el espacio. Basados en estas características, que entre otras ventajas permiten establecer cierta similitud con el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, introducimos la derivada para este tipo de funciones y estudiamos su uso e interpretación justo en estos dos contextos: el geométrico y el cinemático.

La derivada para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ es tal vez el primer concepto de este texto cuya definición resultará realmente novedosa para el lector. Esta característica se ve reflejada sobre todo en la necesidad de revisar previamente algunos conceptos importantes del Álgebra Lineal (bases ortonormales y funciones lineales) para poder dar dicha definición. Por esta razón, el capítulo 4 inicia con una revisión del concepto de base ortonormal, para después introducir la derivada direccional, que aún guarda una estrecha relación con la derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Después de una breve revisión de la derivada de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ en términos de funciones lineales, se introduce el concepto de derivada (global) de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y se prueban algunos resultados básicos.

Aun cuando la mayoría de los conceptos que se definen en el capítulo 4 se tratan de introducir de manera independiente de los sistemas coordenados más comunes, en este capítulo se incluye una sección en la que se deduce la forma específica que toman conceptos tales como el de gradiente, cuando las funciones con las que se está trabajando se expresan en sistemas coordenados diferentes a los euclideanos (en los casos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).

Como sucede en el caso de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, muchas de las aplicaciones prácticas del concepto de derivada de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ están orientadas a la determinación de los valores máximos y mínimos de este tipo de funciones. Por esta razón (y algunas otras), se introducen los conceptos de derivada direccional (y parcial) de orden superior y los polinomios de Taylor, los cuales son herramientas importantes para abordar estos problemas. Concluimos este capítulo con un análisis general del problema de máximos y mínimos, lo que nos conduce a un breve estudio de las formas cuadráticas (a fin de contar con una herramienta que nos permita clasificar los puntos críticos de una función), y a la formulación del Teorema de los multiplicadores de Lagrange, una de la herramientas más importantes que hay para la determinación de máximos y mínimos de funciones restringidas a ciertos conjuntos.

El capítulo 5, con el cual concluye este trabajo, aborda el tema de la derivada de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, cuya definición generaliza a las definiciones dadas en los capítulos 3 (para el caso $n = 1$) y 4 (para el caso $m = 1$). Una vez introducido este concepto, se prueban algunos resultados básicos relacionados con él, los cuales serán usados en la prueba de los teoremas más importantes de este capítulo: la Regla de la Cadena (en su versión más general), el Teorema de la Función Implícita (a partir del cual se prueba el Teorema de los multuplicadores de Lagrange) y el Teorema de la Función Inversa (a partir del cual se prueba el Teorema de la Función Implícita). Para la prueba de este último será necesario desarrollar una serie de resultados adicionales.

Al final de cada uno de estos capítulos se incluye una lista de problemas con los cuales se pretende que el lector refuerce, ponga a prueba y, en algunos casos, amplíe los conceptos estudiados.

Agradecimientos

Como suele suceder, detrás de la elaboración de una obra como la presente, no solo está el trabajo del autor, sino de muchas personas más. Sin duda una de las tareas más arduas y difíciles en el proceso de publicación de un texto tan amplio como el presente, es la lectura y revisión de sus primeras versiones. Por esta razón, agradezco profundamente a mi estimada colega Natalia Jonard, quien, estoy seguro, leyó y revisó las primeras versiones de este trabajo en más de una ocasión. Como es de suponerse, sus cuidadosas y rigurosas sugerencias y observaciones enriquecieron enormemente el contenido de este libro. Por la misma razón, también agradezco a otra querida colega, Emily Sánchez, y a un muy estimado exalumno, Carlos Armando Velázquez Fregoso, sus múltiples correcciones y observaciones las cuales también fueron muy importantes para el mejoramiento de este texto. Muchas personas más, colegas, alumnos y exalumnos, me hicieron muchas observaciones más. La lista es larga, y para no cometer penosas omisiones, les agradezco a todas ellas, de forma general y anónima. También agradezco a Ceci Neve su cuidadosa y refinada revisión de estilo, gracias a la cual este texto ahora se puede leer y entender mucho mejor. Por último, agradezco a Rafael Reyes el siempre tortuoso y largo trabajo de poner este texto en el formato de *Las Prensas de Ciencias*.