PITAGORISMO Y FRACTALIDAD
por
Plausia Urgulanila

Se non é vero, é bene trovato

El ensayo de divulgación que aquí comienza consiste en la exposición pormenorizada de la crónica de una investigación etruscológico-pitagórica que reporta la presencia de objetos fractales en el Mundo Antiguo. Esta noticia ha sorprendido a la comunidad matemática por cuanto se creía que tales objetos eran de adquisición relativamente reciente y que de ellos nada habían sabido los hombres de otras épocas.

Grecia desempeña un papel prominente en la Historia Antigua del Mundo Occidental, entre otras cosas, porque se atribuye a ella la invención de un espacio harto *sui generis*, novísimo, más revolucionario aún que los espacios de Hilbert, Riemman o Lobachevski: el *ágora*.

Muy distinto al nido y a la madriguera que, lo mismo que la cabaña, son espacios naturales para cobijo y reproducción, el ágora es sitio en dónde celebrar el ayuntamiento civil y discutir la cosa pública.

A diferencia de la aldea, habitada por hombres y mujeres, el ágora se puebla de *ciudadanos*. Implica, por consiguiente, un dintorno que es *la ciudad*, donde no gobierna la necesidad de la naturaleza ni la voluntad enigmática de los dioses, sino la *libertad ciudadana*, pretendiendo ser espacio de *convivencia democrática*.

Aun cuando la vida de Grecia se vio ensombrecida por la presencia de Roma que logró imponérsele y arrastrarla en su propia caída, el mundo heleno no ha dejado de ejercer un gran influjo en el pensamiento occidental. Su poderoso magnetismo fue nutriendo la sensibilidad acunada en los pueblos que crecieron sobre las ruinas de Roma, enardeciendo sus almas con la fe en la razón humana. Tonificados por esta fe, estos pueblos se aventuraron en la experiencia racionalista que ha sido la *Modernidad*. Durante este periodo, sólo dos culturas figuraban con notoriedad en el campo visual abierto ante las observaciones retrospectivas de los humanistas: Grecia y Roma.

Pero una intensa investigación arqueológica, llevada a cabo desde 1930, ha puesto en evidencia la importancia de una nación que, mucho antes que Roma, había logrado hacer cuajar sobre el suelo itálico una civilización tan avanzada entonces, que nada tenía que envidiar a la griega. Sus habitantes fueron llamados *tirrenos* por los griegos, y por los romanos: *etruscos*.

Hoy se sabe que si también los romanos aparecen en la Historia Antigua alojados en urbes, ello se debe a que adoptaron y conservaron las instituciones políticas etruscas. En efecto, la *urbe* como fruto de nueva especie política ya había brotado en la Península Itálica mucho antes de que Roma se constituyera como nación; tanto es así, que la propia ciudad de Roma, en la época de constitución del núcleo urbano inicial, durante el siglo VI a.C., estaba en poder de los etruscos.

La *Etruria* vivió su etapa de máximo esplendor hacia el siglo VII a.C. (dos siglos antes del apogeo pleno de la cultura griega), lo cual la coloca como la más antigua civilización urbana de Occidente.

Cuando en una revisión de la Historia Antigua pasamos del terreno político al terreno científico, Roma, como por ensalmo, se desvanece.

Por ejemplo, si nos ocurre pensar en un registro de los hallazgos matemáticos que heredamos de la Edad Antigua, de sobra sabemos que, aparte de los numerosos fragmentos venidos de la Mesopotamia, India y Egipto, el capítulo más extenso en este registro constará de la matemática recibida de Grecia.

El aporte de Roma sería solamente su inoperante sistema de numeración (sus "números romanos") si no fuera que éste se deriva del sistema de numeración ático (y debido a ello, más justo sería hablar de *números grecorromanos*), lo cual reduce su aporte no más que al escueto conjunto de letras que sirven como numerales.

Ante este hecho, resulta acertado quien ha sugerido ver como simbólica la escena del asesinato de Arquímedes (razonando sobre un trazo geométrico dibujado en la arena) a manos de un soldado romano: La cerrazón imaginativa, representada por el soldado, se encargó de asesinar en Arquímedes a la mayor fantasía de la Antigüedad. Esto simboliza el cambio de actitud que Roma impuso al Mundo Antiguo, imposición que, a la postre, tuvo que pagar con creces, porque los problemas técnicos que le acarreó su expansión imperialista exigieron, para ser resueltos, del fantaseo y la imaginación que tenía muertos.

En este mismo rubro, por cuanto a la Etruria respecta...

Está fuera de toda duda que existieron textos teológicos, científicos, literarios e históricos en lengua etrusca, ya que son abundantes, al respecto, las citas y alusiones de autores clásicos.

Parecía cosa cierta que de ellos no se había conservado ninguno, hasta que en agosto de 2006 el etruscólogo Massimo Pallotino reportó el hallazgo de un rollo de lino de ochentainueve metros de largo, procedente de la antigua ciudad etrusca de Clevsi (la Chiusi de la actualidad, en la región Toscana).

Se trata de un documento bilingüe, redactado en etrusco y en cartaginés, en el que aparecen veintiún dibujos geométricos y treintaicuatro columnas manuscritas de cincuentaicinco líneas cada una, conteniendo algo más de cincomil cien palabras.

De acuerdo con datos que exhibe al calce, el documento debió ser elaborado en la ciudad de Alalia (costa Este de Córcega) en fecha correspondiente al año 463 a.C. por quien lo rubrica: Euboulos de Mesenia.

Por las fuentes históricas se identifica a su autor con un pitagórico mesenio que se alistó en la escuadra náutica de los griegos de Massalia cuando éstos con los griegos de Focea intentaron una maniobra envolvente para fundar una colonia en Alalia, siendo Córcega por entonces poseción de los etruscos.

Helánico de Lesbos refiere la derrota que sufrió la escuadra griega en aguas del Mar Tirreno (hacia el 505 a.C.) al haber sido acometida por las flotas tirrenas y cartaginesas.

Euboulos se contó entre los foceos que cayeron presos, pero fue separado de ellos por un capitán tirreno, también pitagórico, Nausithous de Vole, cuando éste se percató de que aquel prisionero, según el tatuaje que llevaba en una palma de las manos, era su cofrade.

El resto de los cautivos, de acuerdo con lo que nos dice Helánico, fueron llevados a la Etruria y ejecutados en Vole.

Después de un primer escrutinio del texto, Massimo Pallottino pensó que se trataba de un manual de geometría pitagórica, pues grandes extensiones de lo escrito hacen referencia, directa o alusiva, a los diagramas dibujados. Solamente la nomenclatura empleada en las explicaciones deja entrever que en esas partes existe plena correspondencia entre lo escrito en cartaginés y el escrito etrusco.

Sin embargo, desde la primera revisión Pallottino detectó pasajes en los que existen diferencias entre lo dicho en un idioma con lo dicho en el otro. Esto implica un serio inconveniente en el desciframiento del documento, porque la etrusca no solamente es (como la latina) una lengua muerta, sino además desaparecida.

Ningún pueblo de hoy habla latín, pero si alguien lo desea puede aprenderlo a hablar y a escribir correctamente. Cosa similar no ocurre, ni remotamente, con la lengua etrusca.

Esto mismo explica que el hallazgo de Pallottino haya despertado entusiasmo entre los lingüistas investigadores de este habla, porque jamás se había contado con un texto en etrusco tan extenso como éste, que además viniese aparejado a otro que le sirve de diccionario e intérprete.

Desde luego que entonces cabía reservarse y no abrigar demasiadas esperanzas en cuanto a los adelantos que en éste o en otro terreno pudiese aportar este *Lino Apenino de Clevsi*, como se lo llama hoy, (considerando, por ejemplo, que el griego era la lengua materna de Euboulos, lo cual permite suponer errores gramaticales en su escrito etrusco, por bien que haya aprendido el idioma durante su larga estadía en Alalia). Por supuesto que lo que no cabía era desestimar en modo alguno su hallazgo.[1]

Una inspección más minuciosa del documento (apoyada por los lingüistas Alfredo Trombetti y Bartolomeo di Nogara) llevó a descartar enteramente el supuesto de que se trataba de un manual de geometría, advirtiendo que el *Lino Apenino de Clevsi* es en realidad una larga carta que forma parte de un epistolario que sostuvieron tres matemáticos, muy avezados en su materia: Euboulos y los dos destinatarios de la carta, uno de los cuales se supone habrá sido cartaginés y el otro etrusco.

Más todavía; aunque la epístola no trae los nombres de sus destinatarios, di Nogara y Trombetti han detectado tres pasajes dirigidos a su interlocutor cartaginés en donde Euboulos bromea con él, refiriéndose al compañero etrusco mediante el uso de sobrenombres: ≪su majestad, el soberano de Kerkyra≫; ≪el favorecido de Periboea≫; ≪hijo del que regula el movimiento de las olas≫.

En este punto, Pallottino señala que, desde luego, aquel *que regula el movimiento de las olas* es Poseidón, y nos recuerda que, de acuerdo con la mitología, este dios tuvo con Periboea un hijo que gobernó la isla de Kerkyra; su nombre fue... ¡Nausithous!

La conjetura del etruscólogo es que (además del cartaginés, cuyo nombre acaso se encuentra igualmente cifrado en el escrito etrusco) quizá haya sido precisamente aquel capitán tirreno que le salvó la vida, con quien Euboulos desarrolló la interesante investigación testimoniada en su epístola.

Lo anteriormente referido se halla en el artículo *"Pentagrammaton: simbolo di reconoscimento nella Fratellanza Pitagorica"* que Pallottino, di Nogara y Trombetti escribieron para el cuarto número correspondiente a 2008 de la revista *rassenna*, publicación trimestral de Centro di Studio per l'Archeologia Etrusco-Italica.

En ese artículo también se da a conocer cuál fue el objetivo que persiguieron con su investigación aquellos tres integrantes de la Orden Pitagórica, así como las causas que motivaron su investigación.

Comentan los articulistas que conforme iban deshilando un renglón tras otro de la epístola, iba siendo cada vez más claro que Euboulos y sus cofrades se encontraban enfrascados en una discusión de tintes teóricos concernientes al mejor modo de transformar geométricamente el emblema de la Orden, a fin de obtener un signo de reconocimiento ≪que pudiera portarlo cualquier miembro de la cofradía con la confianza de que con ello no ponía en riesgo su vida≫.[2]

El emblema a que se hace referencia es, desde luego, el famoso *pentagrama místico de la Orden de Pitágoras*, famoso por su figura (no por su nombre) que es la omnipresente estrella regular de cinco puntas o pentágono estrellado regular. El mismo que llevaba tatuado en una palma de sus manos Euboulos y que, lejos de haberlo hecho peligrar, le sirvió para salvar su vida.

Por el tiempo en que ocurrió la batalla naval en la que Euboulos cayó prisionero, el pentagrama era una contraseña secreta que empleaba la Orden. Pero hacia los años en que tiene curso la investigación de que trata la epístola, el número de adeptos que llevan consigo la insignia es tan alto que el pueblo mismo ya reconoce a la estrella como santo y seña de los pitagóricos.

Por otra parte, la Historia registra cómo la cofradía había conseguido poseer de manera rotunda el poder político en la mayor parte de la Magna Grecia, enfrentando a opositores que no sejaban en intentos por recuperar el mando de las ciudades. Tras el deceso de Pitágoras ocurrido a principios del siglo V a.C., la hegemonía política de la Orden se sostuvo en un clima social que se enrarecía cada vez más a medida que promediaba el siglo. Y justamente fue esta tensión política la que puso en alerta a estos tres elementos de la Hermandad, persuadiéndolos de la importancia de poder contar, otra vez, con un signo secreto de reconocimiento.

[1] Durante el congreso de etruscólogos celebrado en Arezzo en febrero de 2007, Massimo Pallottino expuso resultados acerca del estudio que realiza del *Lino Apenino de Clevsi*. Al finalizar su ponencia fueron entrevistados algunos de los asistentes, entre ellos el estadunidense Donald Strong, reconocido estudioso de lo etrusco, quien opinó que ≪la consabida existencia de una literatura etrusca haría altamente estimable el dar con un texto lírico o dramático en esa lengua, pero el hallazgo de unos apuntes de matemáticas que un griego elaboró en etrusco y en púnico, no tiene importancia ni siquiera para los historiadores de las matemáticas, y es (o debería ser) completamente soslayable. No se entiende cómo en un evento tan serio como es este congreso, haya tenido cabida esta intervención≫. *Noticiario del Progreso*, febrero 13 de 2007, pág. 54.

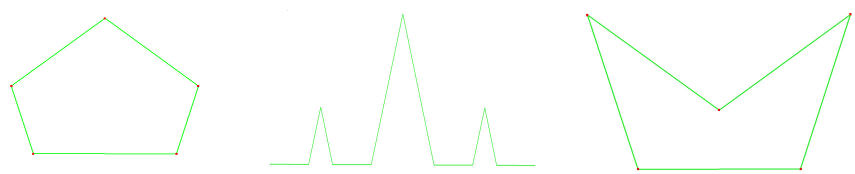
[2] Pallottino, M., et al.; *"Pentagrammaton: segno di riconoscimento della Fratellanza Pitagorica"*; *rassenna*, año xiii, nº52, Centro di Studio per l'Archeologia Etrusco-Italica.

No estaban equivocados, porque aquella situación de precaria estabilidad sólo se pudo sostener una docena de años más, luego de lo cual se desató la catástrofe: el pitagorismo fue francamente embestido, padeciendo linchamiento y una encarnizada persecusión con la que se buscó a toda costa su erradicación y total exterminio.

Pero ni siquiera las batallas más cruentas (acaecidas en Crotona y en Metaponto) pudieron sofocar el incendio ideológico que representó en toda la Hélade (y más tarde en Roma, donde también fue perseguida) la doctrina de Pitágoras. La diáspora resultante de estas masacres avivó su propagación, coadyuvando de manera decisiva al advenimiento del pitagorismo sirio y alejandrino.

En cuanto al contenido específico de la investigación geométrica que, de acuerdo con la carta, ocupara a los tres pitagóricos, Pallottino y sus colaboradores han seguido indicios que apuntan muy claramente a que, desde cartas anteriores a ésta, se habían venido analizando tres figuras geométricas relativamente sencillas, más bien relacionadas con el pentágono regular que con su estrellamiento, aunque supuestamente fueron derivadas de éste, sin que en la carta se diga cómo.

≪Está muy claro —comentan los articulistas— que de estas figuras se estuvieron tratando otras epístolas, y que dos figuras (la poligonal y el pentágono cóncavo) fueron propuestas por Nausithous, y la tercera por el matemático cartaginés≫.[3]



pentágono enano   poligonal   pentágono cóncavo

Se entiende que en estas figuras tenían puesto su interés con el fin de saber si alguna de ellas, en virtud de sus propiedades, *merecía* ser empleada por la Orden como signo de reconocimiento.

Al finalizar su artículo los investigadores declaran que rehacer muchos de los razonamientos geométricos a los que solamente alude Euboulos, lo sienten fuera de su competencia, y que tienen pensado solicitar la ayuda de un geómetra para continuar con el estudio del documento.

En junio de 2009 se celebró en Fiesole la reunión anual de etruscólogos, y Massimo Pallottino pidió de nueva cuenta un espacio para exponer los últimos resultados a que había llegado en su estudio. La ayuda solicitada se la brindó Eraldo Giuli de la Universidad de L'Aquila, quien no es geómetra, pero sí topólogo y algebrista.

Siguiendo el esquema con el que Euboulos presentó a sus cofrades sus reflexiones geométricas, Pallottino expuso por separado un resumen de las conclusiones referentes a las tres figuras que aparecen en la epístola.

A continuación se comentan algunos párrafos (extraidos y libremente traducidos) de la memoria de su conferencia .

≪En cuanto al *pentágono enano* propuesto por el matemático cartaginés, el profesor Giuli hace saber que es una figura equiangular y que, por lo tanto, las medidas de sus ángulos interiores son exactamente las mismas que las del pentágono regular. Los dos lados menores están reducidos en Proporción Áurea con relación al lado del pentágono regular; hay que recordar que esta proporción era uno de los tesoros que con más celo guardaba en su seno la Hermandad Pitagórica.[4]

≫A este pentágono se llega a través de un procedimiento geométrico relativamente sencillo de seguir, porque consiste en repetir unos cuantos trazos que van induciendo figuras semejantes en las que esos trazos vuelven a repetirse.≫

Aunque Pallottino no entró en detalles, un trabajo posterior de Eraldo Giuli (del que se hablará más adelante) nos permite saber a qué trazos se refiere concretamente el etruscólogo.

Para empezar, se debe tener dibujado un triángulo isósceles cuya base sea el lado de un pentágono regular y cuyos lados iguales sean dos diagonales del mismo pentágono. Sea ABC un triángulo así, siendo A el vértice del ángulo más agudo.

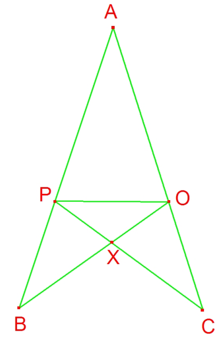
Centrando un compás en B y abriéndolo a longitud BC, ubicamos un punto O sobre el lado AC. Hacemos lo mismo sobre el lado AB, conservando el compás con la misma abertura pero centrándolo en C; llámese P a este segundo punto. Unamos mediante segmentos: B con O, C con P y O con P.

La primera parte de este procedimiento concluye suprimiendo el área del triángulo OPX (donde X es el punto de intersección de los segmentos BO y CP) así como el lado BC (que se lleva consigo al área que acota con los segmentos BX y CX).

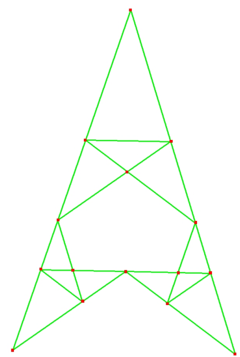
[3] Pallottino, M., et. al., op. cit. Desde que ofrecieron el argumento que hace plausible que *Nausithous* sea uno de los interlocutores de Euboulos, los autores advirtieron que aunque es una conjetura suya, en adelante llamarían al etrusco con este nombre.

[4] A la espera de detallar posteriormente esta cuestión, acéptese de momento que la *Proporción Áurea* es el número que resulta al dividir la longitud de un lado de un pentágono regular entre la longitud de una de las diagonales del mismo pentágono. Tal número es

$$\varphi = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$



La segunda parte del procedimiento consiste en repetir la operación de la primera parte, en los tres triángulos que han quedado dentro del primero. Haciéndolo así llegamos a una figura

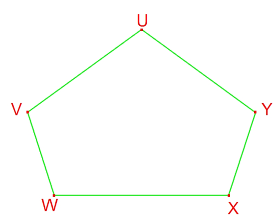


que exhibe (en hueco) al *pentágono enano*.

Por otra parte, es bién sabido que en un pentágono regular, sus lados y sus diagonales están en Proporción Áurea; denotando a ésta mediante φ tenemos que para el triángulo isósceles ABC del que hemos partido

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \varphi$$

Si $UVWXY$ es un pentágono enano



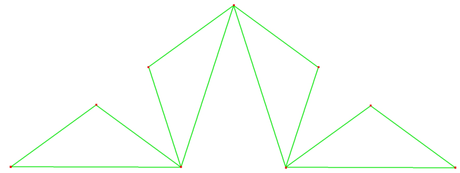
no es difícil verificar el comentario de Pallottino referente a los lados, mismo que en símbolos, para esta figura, queda expresado por $\overline{VW} = \varphi\overline{UV}$.

≪Con relación al trazo poligonal que puso en consideración el matemático tirreno (trazo al que Euboulos llama *signo alfaético* y al que designa una y otra vez que hace referencia a él escribiendo $\alpha A\alpha$) es de observar que en sus quiebres más agudos se forma el ángulo interno de una punta del estrellamiento del pentágono regular. Aunque sus elementos no están en Proporción Áurea, sí la involucran, y su dibujo se obtiene a través de un procedimiento repetitivo fácilmente realizable con una regla y un compás.≫

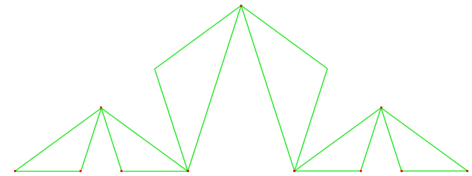
Para poner a funcionar este procedimiento se parte de un triángulo isósceles cuya base es una diagonal de un pantágono regular y cuyos lados iguales son dos lados iguales del mismo pantágono. Sea ABC un triángulo así, siendo A el vértice del ángulo obtuso.

Con abertura AB y centro en B, se gira el compás desde A hacia la base, para ubicar en ella un punto O. Con centro en C e igual abertura, se abate A sobre la base localizando así el punto P. O y P se unen con A mediante segmentos, y la primera parte del procedimiento concluye omitiendo de la figura el segmento OP.

Al cabo de esta operación quedan dibujados dos triángulos que son semejantes al original. Sobre ellos hay que repetir la operación anterior para que tenga lugar la segunda parte del procedimiento, luego de lo cual se obtiene la siguiente figura



Está claro que sobre cada uno de los cuatro triángulos que han resultado se puede aplicar la operación descrita, pero bastará aplicarla sobre los dos que tienen sus bases sobre la base del original para que aparezca el *signo alfaético*



y no queda más que separarlo del resto de la figura para tenerlo íntegramente dibujado.

Como dice Pallottino, la razón que va de su segmento menor al mayor no es φ, pero es φ^2, lo cual se comprueba fácilmente tomando en cuenta que para el triángulo ABC del que ahora hemos partido se tiene que

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \varphi$$

≪A diferencia de estas dos figuras, relacionadas entre sí por implicar sendos procesos geométricos susceptibles de poderse repetir una y otra vez, el *pentágono cóncavo regular* fue puesto en consideración por una propiedad diferente.

≫Se sabe que Pitágoras y sus discípulos se interesaron en las figuras de un plano que pudiesen servir como piezas de un rompecabezas *infinito* que al ser armado llena la superficie (ilimitada) de ese plano. Tales rompecabezas reciben en la actualidad el nombre de *teselaciones*. Los matemáticos llaman *monohédrica* a una teselación cuando sus infinitas piezas repiten (en tamaño y forma) una misma figura. Para representarnos una teselación monohédrica basta pensar en un muro de ladrillos y extenderlo indefinidamente con nuestra imaginación.

≫Existen evidencias de que los seguidores de Pitágoras y él mismo, buscaron teselaciones que tuvieran relación con el pentágono regular y con la Proporción Áurea.

≫Cuando Euboulos comienza a hablarle al cartaginés del pentágono cóncavo regular, le dice:

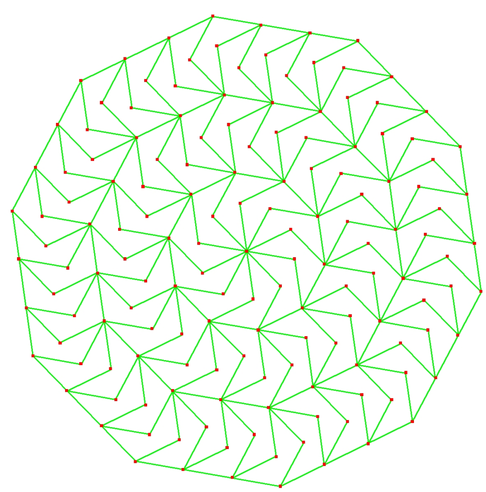
—Hallándome aún en vuestro dédalo de veredas insólitamente tetrafurcantes, he conocido por dentro el panal en que la miel es un tibio oro pastoso, lugar de solás para el soberano de Kerkyra—.

≫La imagen del interior de un panal remite a una teselación, como la que logran elaborar las abejas de una colmena. A continuación sigue diciendo Euboulos:

—Guiado por el Maestro he podido multiplicar su figura como se multiplican las otras— e inicia la descripción de un proceso geométrico que comienza sometiendo al pentágono cóncavo regular a una operación que una vez realizada puede seguirse aplicando indefinidamente.

≫El pentágono cóncavo regular es, por lo tanto, la forma que tienen las celdas del panal "en que la miel es un tibio oro pastoso".

≫De acuerdo con la información proporcionada por el profesor Giuli, este hecho es un resultado consignado en la actual Teoría de las Teselaciones, sin que se tuvieran noticias de que lo conocían los antiguos pitagóricos.



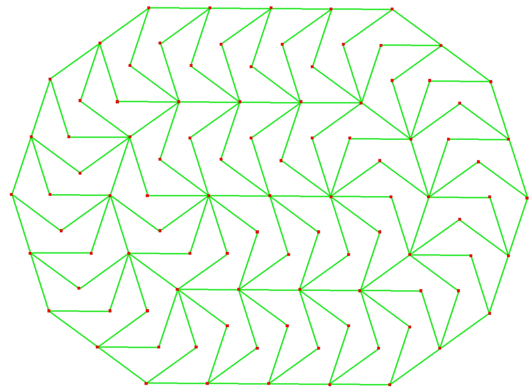
≫En cuanto al proceso geométrico descrito por Euboulos, tanto en este caso como en los de las otras figuras, su repetición aproxima cada vez más un objeto geométrico como aquél al que el mesenio llama "dédalo de insólitas tetrafurcaciones", para el caso del pentágono enano.

≫Dentro de las varias divisiones que tiene hoy la Geometría, aquélla en que quedan mejor clasificados estos objetos es la llamada Geometría Fractal.

≫En la epístola, los desarrollos teóricos relativos a estos objetos vienen acompañados por los pasajes de una discusión motivada, según parece, por una inquietud manifestada anteriormente por Nausithous acerca de si la exposición de estos objetos a la luz de la razón no será "la inoculación del gérmen del caos en el Orden Armónico del Universo"

≫El profesor Giuli encuentra que es particularmente curioso que a la par de su estudio de estos objetos, los tres pitagóricos se vieran ocupados en reflexiones relacionadas con los conceptos de *orden* y *caos*, máxime cuando en la actualidad objetos como los suyos aparecen íntimamente vinculados con la Teoría del Caos.≫[5]

[5] Pallottino, M., *"Tre Pitagorici nell'Etruria del V secolo "*, Il Mulino, Regione Lazio Ass. Cultura, giugno 2009.



Motivado por esta investigación, Eraldo Giuli ha escrito un artículo de divulgación en el que analiza algunas de las propiedades que poseen los fractales descubiertos por aquellos pitagóricos, e intercala pasajes del *Lino Apenino de Clevsi* que dejan en claro que varias de estas propiedades fueron netamente ponderadas por ellos.[6]

La parte que sigue se puede considerar como una versión comprimida del contenido de ese artículo.

Comencemos leyendo la nota preliminar que insertó Giuli al empezar su discurso:

≪Antes que nada querría advertir a quien amablemente leyere esto, que estoy muy muy lejos de poder ser considerado un docto en Pitagorismo; mi afición al tema no ha sido tanta, que me haya llevado más allá de la literatura de divulgación que hay de él. Si no fuera que mi profesión matemática es muy afín a esta afición, mi conocimiento del Pitagorismo no pasaría del que pueda hallarse en las bibliotecas públicas no especializadas, lo cual (para no pecar de falsa molestia) no quiere decir que si así fuera sería pobre.

≫Seguro de que personas especializadas en matemática antigua mejorarían la pretendida divulgación mía de los contenidos matemáticos del *lino apenino de Clevsi*, solicité la venia de los descubridores del documento para que me permitieran involucrar en todo esto a dos excondiscípulas que tuve durante el bienio común de la carrera, en l'Aquila, amigas mías que ahora se dedican a contribuir a que al extenso territorio de la historia del pensamiento constituído por la matemática antigua no le falten exploradores profesionales. Ambas son entusiastas estudiosas del Pitagorismo y (¡claro que no me equivoqué!) sus comentarios no sólo libraron a este ensayo de la opacidad que iba a tener, sino que han hecho que irradie cierta luz propia en el conjunto de artículos que hasta ahora se han escrito sobre *"el lino"*. Con esta nota he querido anticipar mi agradecimiento a las historiadoras Serafina Cuomo y Corina Rossi, que han rehusado compartir los créditos de este trabajo que, tanto como a mí, les pertenece a las dos.[7]≫

A continuación Eraldo Giuli reseña a su manera la buena suerte con la que ha corrido el destino del viejo documento al haber venido a parar en manos de los reconocidos hermeneutas Pallotino, di Nogara y Trombetti.

Más adelante, ya entrado en materia, apunta:

≪[...]Según se deja entender en el escrito, Nausithous ha propuesto que, con relación al pentágono regular, se distinga una *transformación* de una *deformación*. El pentágono cóncavo regular es una transformación suya, porque se obtiene reflejando dos de sus lados consecutivos con respecto a la diagonal determinada por ambos, es decir, mediante una simetría axial operada directamente sobre él. En el pentágono enano, en cambio, solamente tres de los lados del pentágono regular se ven afectados en su medida original, sin que esta afectación se logre obtener directamente a partir de él con la simple ejecución de un movimiento rígido.

≫Al menos esta distinción (pues no podemos saber si había otros *indicadores*) es tomada en cuenta por Nausithous para saber "qué tanto caos traen consigo estas figuras", aceptando que entre más difícil sea el modo de proceder para dar con alguna, mayor será el caos que trae. Además se entiende que el caos que comportan, *lo traen hacia nuestro mundo* desde un orbe que en la epístola no aparece definido.

≫En este punto se ha detenido la doctora Serafina Cuomo para señalar que, dada la antigüedad del documento (y, concretamente, siendo anterior a la obra de Platón), el dato viene a ser revelador, porque disuelve una controversia en la que han estado travados historiadores y filósofos desde hace muchos años. La opinión de la mayoría se inclina a pensar que la creencia que tuvieron los griegos en la realidad de un orbe matemático puro fue derivada de la teoría platónica de las ideas. Este documento es la prueba de que han tenido razón quienes han sostenido que la metáfora que hace Platón en la *República* con el mito de la caverna, es de origen pitagórico.

≫A propósito de esto, hay que hacer notar que en la polémica que suscita la postura de Nausithous, Euboulos no le discute que las figuras tengan procedencia metafísica (cosa que, al parecer, la da por cierta) sino que porten el germen del caos.

≫Esta idea parece haber brotado en la mente del matemático etrusco a raíz de haber pensado en las cualidades de los objetos (cada vez más elaborados) surgidas tras múltiples iteraciones de los procesos geométricos anteriormente descritos. Así lo deja entender Euboulos con la siguiente frase:

"... Que el soberano de Kerkyra esté confundido por el desorden de pensamientos que se apoderó de él cuando, siguiendo cada método, fue en pos de sus líneas finales, es sólo eso: desorden y confusión. Más yo le digo que su alma bien puede, por simple recomposición de ese caos, contemplar serena sus genuinas formas últimas."

≫Aquí hay que declarar nuestra sorpresa por hallar, dos siglos antes que Arquímedes y uno antes que Eudoxo, la referencia directa a objetos resultantes de procesos que han alcanzado sus límites. A este respecto, la doctora Cuomo sugiere que debieron seguir métodos

[6] Giuli, E., *"Tre oggetti frattali venuti della Setta Pitagorica"*; gennaio 2010. (Articolo estratto da una revista di prossima publicazione per conto dell'Universitá di L'Aquila.)

[7] Para que yo les aceptara su negativa, me han propuesto que éste sea el pimer ensayo de una trilogía que ellas están ya por concluir, con lo que cada una está escribiendo.

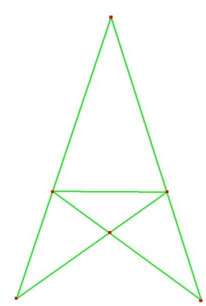
intuitivos que les permitieron saber con certeza cuáles son las tendencias cualitativas a que se aproximan las figuras sucesivas que va arrojando el proceso.

"En un principio dudé —apunta la investigadora— en cuanto a la introducción de la palabra *infinito* que usaron en su traducción los doctores di Nogara y Trombetti. La antigüedad del escrito sugería avanzar con cautela, porque son contados los pensadores presocráticos que emplean el término en su rigoroso sentido; casi siempre hay en ellos un horror a pensar el infinito. Pero he tenido que rendirme ante las evidencias contenidas en el documento. Hasta antes de su aparición, se creía que Zenón de Elea era el autor clásico más antiguo que concibió el *paso al límite* casi en el mismo sentido que entendemos hoy esta operación matemática. Pero Zenón tendría unos quince años de edad cuando esta carta se escriba, y es probable que aún no hubiese concebido sus paradójicos argumentos; por otro lado está muy claro en la carta, que Euboulos y sus cofraternos (siguiendo los métodos que hayan sido) realizaron la operación mental de poner la atención en un objeto situado al infinito (que es donde se ubican los llamados *fractales*) y efectuaron su análisis."

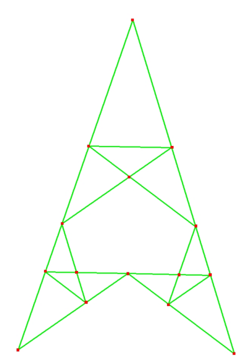
≫Ahora seguiremos por nuestra cuenta cada método con un análisis correspondiente del objeto al que conduce. No comentaremos todas las propiedades en todos los objetos, porque eso volvería muy repetitivo el discurso. Salvo que se haga la indicación explícita de que cierta propiedad es exclusiva de alguno de los tres objetos en cuestión, se dará por entendido que las propiedades que se consideren son comunes a los tres. Es un buen ejercicio para el lector interesado en las matemáticas de la Geometría Fractal, construir argumentos que comprueben que cada uno de los tres objetos posee todas las propiedades de que se habla en general.≫

Ya se había echado a andar cada método justo hasta donde aparecía la correspondiente configuración emblemática que estaban sopesando los pitagóricos; el primero fue seguido hasta que se formó la silueta del pentágono enano que se tomó de él.

Ahora hay que continuar el proceso de iteración con la idea de conocer algunos aspectos del objeto geométrico que es su límite. Para ello hay que fijar la atención en algún aspecto de las figuras que, a ojo, esté cambiando a lo largo del proceso. Pongamos por ejemplo, su *forma*.



Como se ve, al cabo del primer paso del proceso, del triángulo inicial quedan tres partes que son, por lo pronto, tres triángulos semejantes a él, dos de los cuales son iguales (congruentes) entre sí. Obsérvese la configuración que forman entre ellos; obsérvese que esta configuración es semejante a cada una de las tres partes de que consta la figura producida al cabo del segundo paso del proceso

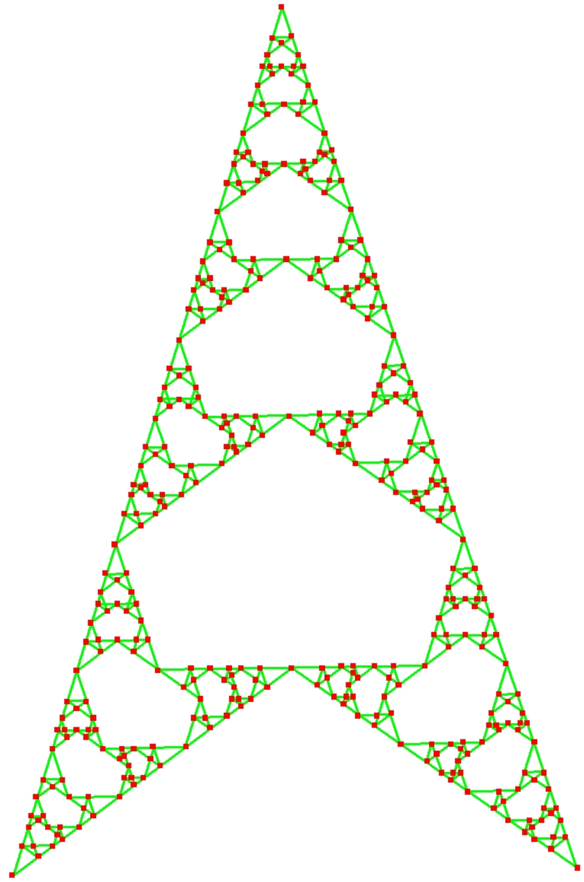


En gneral, la figura producida al cabo del n-ésimo paso constará de tres partes, mismas que serán enteramente semejantes a la configuración exhibida en el paso anterior (el $(n-1)$-ésimo), y siempre dos de las tres son congruentes entre sí.

Más aún: la configuración obtenida en cada etapa del proceso trae dentro de sí todas las formas que se han producido en las etapas previas, cada una reducida a cierta escala, hasta llegar a la forma del triángulo original.

Por lo demás, está claro que a medida que el proceso avanza, se van pareciendo más las configuraciones obtenidas en etapas consecutivas y, por lo tanto, al menos las tres partes principales de que consta cada configuración son cada vez más parecidas a la configuración misma a que pertenecen.

Aquí es importante señalar que esto nunca pasa de ser tan sólo un mero parecido, es decir, en ningún paso del proceso se obtiene una configuración que contenga una parte realmente semejante a sí misma porque, si así sucediera, querría decir que en dos etapas diferentes del proceso se obtuvo la misma configuración, lo cual, claramente, es falso.



Pero el proceso es infinito, y cuando esta tendencia de las configuraciones a parecerse a sí mismas toca su límite, la semejanza es plena; es decir, el objeto geométrico alcanzado cuando se han realizado tantas iteraciones del proceso como números naturales, contiene partes propias que son enteramente similares a él, es decir, partes que son reducciones a diversas escalas del objeto mismo.

Y no son ellas solamente tres o doce. Bien es cierto que hay tres "ramas" principales del objeto similares a él; una de ellas es una reducción suya a escala φ (φ es el Número de Oro)[8], y otras dos, congruentes y simétricas, lo son a escala φ^2 (ya se verá esto con más detalle cuando se hable del área del objeto). Pero justamente debido a su entera similaridad con él, cada una consta de tres ramas que les son totalmente similares y, por ello, éstas a su vez constan de otras tres con la misma característica, etcétera, etcétera, etcétera.

Hoy se indica esto diciendo que el objeto tiene la propiedad de la *autosimilaridad*.

<<No deja de asombrarnos el siguiente pasaje de la epístola —dice Serafina Cuomo (citada por Giuli)— porque testimonia que el pitagórico de Mesenia y sus dos cofraternos apreciaron esta propiedad en el objeto. Refiriéndose a él, escribie Euboulos al matemático cartaginés:

"[...]viendo que es verdad cuando dices que

en los adentros del dédalo está el dédalo
en los adentros del dédalo está el dédalo
en los adentros del dédalo está el dédalo

eco que no cesa."

>>En un pasaje posterior, reflexionando acerca del hecho de que los tres objetos comparten esta propiedad de ser *autosimilares*, el mesenio, citando al propio Pitágoras, escribe:

"[...]entonces, cuánta y cuán profunda ha de ser la verdad contenida en el *hyeros* que reza

Conocerás, hasta donde es justo
que deban conocerlo los hombres,
que la naturaleza de este universo
es por doquiera semejante a sí.

Éstos [los objetos] son indicios de esa profundidad."

[8] Se está llamando así al número

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

abusando del lenguaje. Porque realmente son dos los Números de Oro: éste y su recíproco, que tiene la misma expansión decimal que éste, y que se obtiene sumando 1 a éste. Para distinguirlo de éste, conviene denotarlo con Φ (mayúscula).

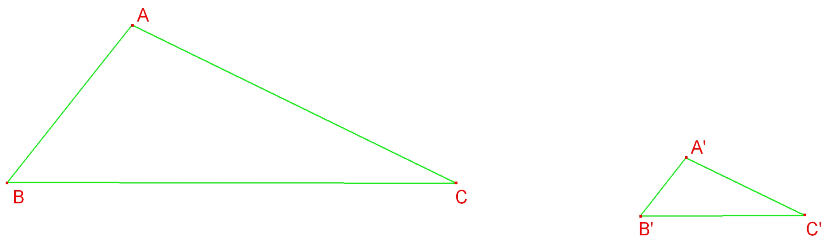
>>He aquí hasta qué punto llevaron la interpretación de esa parte de la Matemática que ellos empezaron a estudiar; se la interpreta nada menos que como indicio de una autosimilaridad de la Naturaleza. Justamente una de las más interesantes e importantes interpretaciones que hoy se hace con la misma materia. Aunque por razones probablemente muy diferentes a las nuestras, también ellos incorporaron esa matemática a una *biótica*, es decir, a un conjunto de conocimientos que, o son, o inducen evidencias de que en numerosas partes de sí misma, la Naturaleza muestra la tendencia a la autosimilaridad.>>

Otro aspecto al que el doctor Giuli le ha seguido el rastro, es el del *área* de las configuraciones que arroja la iteración del procedimiento inicial. Como se verá en seguida, el área del triángulo original disminuye conforme transcurre el proceso; pero más todavía, porque puede advertirse cuál es la tendencia en esta disminución, y asegurar que el objeto límite del que se ha venido hablando tiene un área

$$\mathcal{A} = 0$$

Para que ver cómo es esto, recuérdese cómo se relacionan las áreas de dos triángulos que son semjantes entre sí.

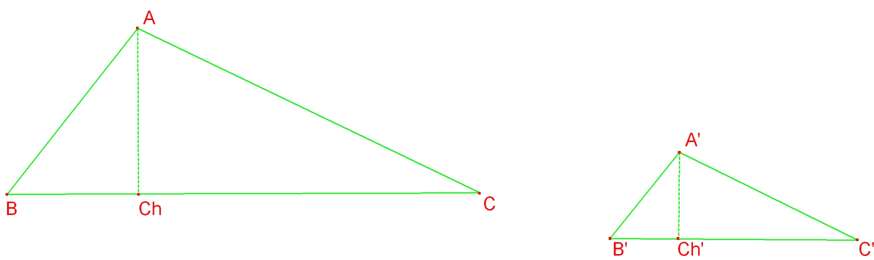
Cualquiera que sea la forma de los triángulos



si su razón de semejanza es r, de modo que se tiene

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = r \qquad \dots (a)$$

entonces, considerando sus alturas,



también se tiene

$$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = \frac{\overline{A'Ch'}}{\overline{ACh}} = \frac{\overline{Ch'C'}}{\overline{ChC}} = r \qquad \dots (b)$$

de (a) y (b) resultan:

$$\overline{B'C'} = r\overline{BC} \qquad \text{y} \qquad \overline{A'Ch'} = r\overline{ACh}$$

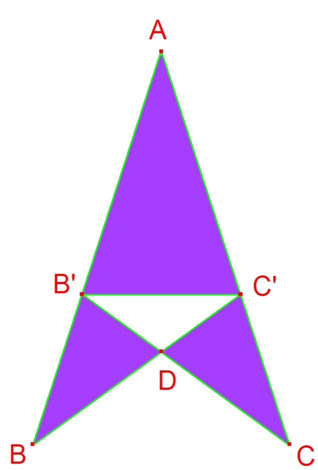
Consecuentemente, al tomar el área se tiene

$$\frac{\left(\overline{B'C'}\right)\left(\overline{A'Ch'}\right)}{2} = \frac{\left(r\overline{BC}\right)\left(r\overline{ACh}\right)}{2} = r^2\frac{\left(\overline{BC}\right)\left(\overline{ACh}\right)}{2}$$

lo cual significa que la razón entre las áreas es r^2.

Con esto en mente, hay que ver qué situación está teniendo lugar a lo largo de este proceso.

Desígnese por A_0 al área del triángulo ABC del que se parte, y por R_1 al área de la región de éste que resulta tras el primer paso del proceso.



Como se ve en la figura, el área R_1 se obtiene como la suma de las áreas de tres triángulos semejantes al original, dos de los cuales son iguales (congruentes) entre sí. Ahora véase cuál es la razón de semejanza entre el mayor de estos tres triángulos y el triángulo ABC. Para ello basta con calcular el cociente

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$$

De acuerdo con la construcción de la figura, se tiene que

$$\overline{BC} = \overline{B'C} \quad ...(i)$$

y puesto que, en lo que respecta a los ángulos, se tiene

$$\widehat{B'AC} = \widehat{B'CA}$$

entonces, el triángulo $AB'C$ es isóceles, de manera que

$$\overline{AB'} = \overline{B'C} \quad ...(ii)$$

Por otro lado se tiene la semejanza del triángulo $B'CB$ con el ABC, y de ahí la igualdad

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{BC}} \quad ...(iii)$$

Por (i) y (ii), y porque

$$\overline{AB} = \overline{AB'} + \overline{B'B}$$

se puede reescribir (iii) como

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'C} + \overline{B'B}} = \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}}$$

de lo cual resulta que

$$\overline{B'B}^2 + \overline{B'C} \cdot \overline{B'B} - \overline{B'C}^2 = 0$$

Resolviendo esta ecuación en términos de $\overline{B'B}$ se obtiene

$$\overline{B'B} = \frac{-\overline{B'C} \pm \sqrt{\overline{B'C}^2 + 4\overline{B'C}^2}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\overline{B'C}$$

Puesto que $\overline{B'B}$ representa la longitud de un segmento, hay que tomar esta raíz con signo positivo; por consiguiente se tiene que

$$\frac{\overline{B'B}}{\overline{B'C}} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad ...(iv)$$

que es la llamada *Razón Áurea* o *Número de Oro*, y que suele designarse con la letra φ; haciéndolo así, de lo anterior resulta que

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \varphi$$

Si ahora se designa por A_1 al área del triángulo $AB'C'$, se tiene, en vista de la observación anterior, que

$$A_1 = \varphi^2 A_0 \quad ...(v)$$

Por (iv), la razón de semejanza entre los triángulos $AB'C'$ y $BB'D$ también es φ. Designando por A_2 al área de éste último, se tiene

$$A_2 = \varphi^2 A_1 \quad ...(vi)$$

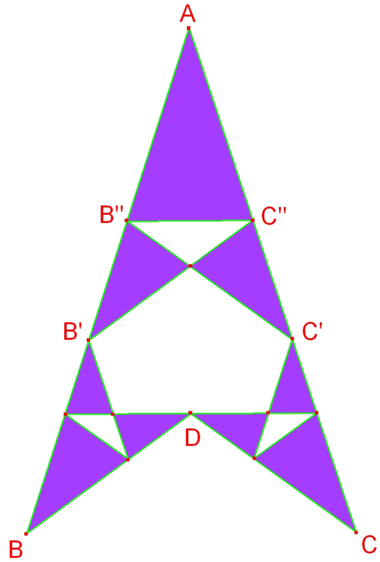
Puesto que

$$R_1 = A_1 + 2A_2$$

por (v) y (vi) se tiene que

$$R_1 = \left(\varphi^2 + 2\varphi^4\right) A_0$$

Ahora llámese R_2 al área de la región del triángulo ABC que resulta luego del segundo paso del proceso.



Como se ve en el dibujo, R_2 está conformada por las áreas de nueve triángulos semejantes al ABC: uno (el $AB''C''$) de área A_2, cuatro (medianos y congruentes) de área A_3 y cuatro (pequeños y congruentes) de área A_4, siendo

$$A_2 = \varphi^4 A_0 \ , \ A_3 = \varphi^2 A_2 \ , \ A_4 = \varphi^2 A_3$$

Consecuentemente

$$\begin{aligned} R_2 &= (A_2 + 2A_3) + 2(A_3 + 2A_4) \\ &= A_2 + 4A_3 + 4A_4 \\ &= \left(\varphi^4 + 4\varphi^6 + 4\varphi^8\right) A_0 \qquad ...(vii) \end{aligned}$$

En general, de un triángulo de área A_n, el siguiente paso del proceso arrojará tres triángulos, uno de área A_{n+1} y dos de área A_{n+2}, siendo

$$A_{n+1} = \varphi^2 A_n \qquad \text{y} \qquad A_{n+2} = \varphi^4 A_n$$

además de tener

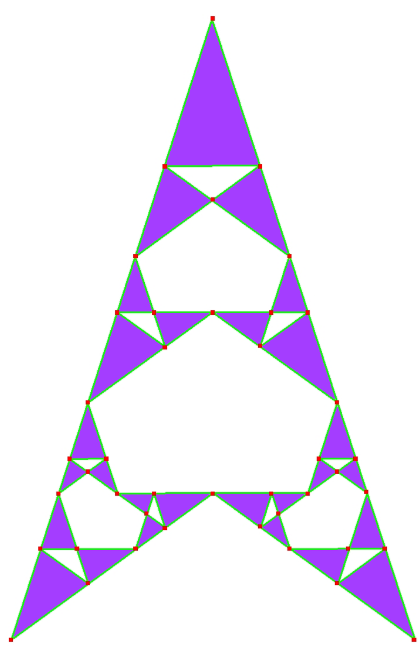
$$A_n = \varphi^{2n} A_0$$

Por consiguiente, si fue

$$R_2 = A_2 + 4A_3 + 4A_4$$

entonces el área R_3 que resulta luego de la tercera iteración del proceso será

$$\begin{aligned} R_3 &= (A_3 + 2A_4) + 4(A_4 + 2A_5) + 4(A_5 + 2A_6) \\ &= A_3 + 6A_4 + 12A_5 + 8A_6 \\ &= \left(\varphi^6 + 6\varphi^8 + 12\varphi^{10} + 8\varphi^{12}\right) A_0 \qquad ...(viii) \end{aligned}$$



Por otra parte obsérvese que los factores que afectan a A_0 en (vii) y en $(viii)$ son

$$\varphi^4 + 4\varphi^6 + 4\varphi^8 = \left(\varphi^2 + 2\varphi^4\right)^2$$

$$\varphi^6 + 6\varphi^8 + 12\varphi^{10} + 8\varphi^{12} = \left(\varphi^2 + 2\varphi^4\right)^3$$

En general, el área R_n de la región del triángulo ABC que se obtiene al cabo del n-ésimo paso del proceso viene dada por

$$R_n = \left(\varphi^2 + 2\varphi^4\right)^n A_0$$

Ayudándose con una calculadora de bolsillo se puede ver que el número

$$\varphi^2 + 2\varphi^4 < 1$$

Por otro lado, se sabe que si un número r es tal que

$$-1 < r < 1$$

entonces las potencias

$$r, r^2, r^3, \ldots$$

se aproximan a cero a medida que crece el exponente. Según se ve, el número que nos ocupa está en este caso; consecuentemente, se tiene que el área R_n tiende a cero a medida que el proceso avanza[9], lo cual es otro modo de decir que el objeto límite de este proceso tiene área cero.

Luego de haber arrivado a esta conclusión, el doctor Giuli comenta:

≪Los pitagóricos autores de esta investigación no sólo llegaron a conocer esta propiedad sino que además fue para ellos motivo de controversia y hasta de preocupación. Así lo evidencia el siguiente pasaje extraido de la carta:

"Sí, un ser se encuentra constituído al fondo de ese pozo ¡sin fin! Su singular aspecto, cieramente extraño, ha parecido morboso al soberano de Kerkyra. Mas yo le sé decir que no es ese su cariz, pero que ser mórbido y daimónico es su gracia.

Qué tiene de morboso que el asiento del pozo sea sin superficie; ¿no se consume el alfa sin cesar? Pues si así se gasta, es hasta natural mirar que en su fondo queda una huella sin área, una línea."≫

Para que uno trate de figurarse la forma que la tal línea dibuja obsérvese que, además de los tres vértices que hereda del triángulo original, también hereda otros muchos, infinitos vértices: los de todos los triángulos semejantes al original que surgieron durante el proceso.

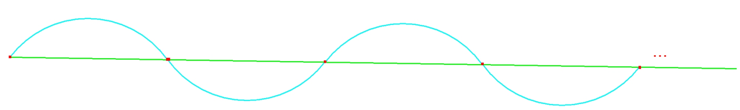
Obsérvese también que siempre que uno se ubique en alguno de estos muchos vértices durante cualquier etapa del proceso, ocurre una de dos situaciones posibles: que el vértice sea en esa etapa un punto de intersección de dos bases de triángulos como el original, ó que sea punto de intersección de dos cúspides de triángulos congruentes, semejantes al original.

Nótese que la siguiente etapa del proceso lo colocará en la segunda situación, si está en el primer caso. En cambio, la segunda situación es permanente; una vez que sucede, se mantiene así a lo largo del proceso. Esto hace pensar que domina en número la segunda situación frente a la primera. Pero la cosa no es trivial, porque es un hecho que a lo largo del proceso no deja de haber vértices del primer caso.

Otra cosa interesante a destacar de estos vértices es que siempre que uno se coloque en uno de ellos, es posible alejarse de él por uno o más lados de uno o más triángulos, y volver a él por otros lados; de hecho, siempre que en cada etapa se quiera trazar el contorno de todos los triángulos, se tendrá que pasar dos veces por cada uno de estos vértices.

Estos vértices tienden a estar por todas partes dentro de la curva que es límite del proceso; de hecho, es posible demostrar que entre cualesquiera dos puntos de esta curva, es posible encontrar por lo menos uno de estos vértices.

No es difícil imaginar una curva que se intersecta a sí misma en uno de sus puntos, o en dos, o en tres, o en n. Ni siquiera es difícil pensar en una que se autointersecta en infinitos puntos.



Pero la línea que vislumbraron estos pitagóricos tiene la propiedad de que, al colocarnos en uno cualquiera de sus puntos, en cualquier inmediación de éste, por pequeña que sea, es posible hallar un punto de autointersección de la línea. Debido a esto, se dice que esta línea *es densa en puntos de autointersección*.

Llegado a esta parte, Eraldo Giuli escribe lo siguiente: ≪Nos parece ser por esto que en un párrafo, Euboulos habla de ella como de un "dédalo cuya única senda nos lleva y nos trae de sí hacia sí"≫ Y hace notar que ≪de hecho, lo único que vemos de esta línea a lo largo del proceso que conduce a ella son puntos de autointersección.

≫Esta propiedad no la poseen los otros dos objetos de que trata la carta, y es propia de los fractales *tipo carpeta* (nombre tomado de las carpetitas tejidas que adornan consolas, repisas u otros muebles), de las llamadas *carpetas de Sierpinski* (esto, por haber sido el matemático polaco Waclack Sierpinski quien mostró "la primera" de ellas [su famoso triángulo] en 1915). Si el *lino apenino de Clevsi* se hubiese descubierto hace poco menos de un siglo, quizá hablaríamos de *carpetas cartaginesas*. Al menos llamaremos así al fractal del que hemos venido hablando.[10]≫

[9] A partir de cierta n suficientemente grande, el factor A_0 deja de ser significativo para el producto, volviéndose despreciable.

[10] La única referencia personal que se conoce del matemático que concibió este objeto es, como todo parece indicar, que era cartaginés.

Además de la autosimilaridad y de tener área cero, hay otras propiedades comunes a la carpeta cartaginesa y a los otros dos objetos. Tal es el caso de la *dimensión*.

Obsérvese que al obtener el resultado de área cero para la carpeta cartaginesa, está dada la prueba de que su dimensión no es dos. Tampoco es mayor que dos, puesto que está contenida en un plano, y en parte es por esto que hablamos de ella como de una curva, aunque el asunto no es tan simple como esto; los objetos de la geometría elemental a los que solemos llamar *curvas* suelen ser regiones unidimensionales de un plano o de un espacio. Mas he aquí que la dimensión de la carpeta cartaginesa tampoco es uno, sino un número

$$1 < d < 2$$

Aunque la dimensión no entera no caracteriza a los objetos fractales (porque los hay de dimensión entera), los tres objetos considerados por lo pitagóricos comparten esta cualidad de poseer una dimensión no entera, lo que ya es una coincidencia curiosa. A este respecto dice Giuli lo siguiente:

≪No creemos que aquellos matemáticos hayan sido conscientes de esto, aunque hay un par de hechos que parecen ser indicios de lo contrario.

≫Uno de ellos es un oscuro apartado de la epístola en donde Euboulos medita acerca de la nulidad de área de los tres objetos; dice:

Hay un estar tercero: plenitud de la superficie vacía.
Es cuando se muestra en las confluencias del espacio
no la presencia, pero su presentimiento.

Bien podría estar aludiendo al objeto en sí.

≫El otro hecho es que la dimensión de los tres objetos es la misma, lo cual pareciera ir más allá de la mera coincidencia. Su valor exacto es

$$d = \frac{\ln 4}{\sqrt{5}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}+\frac{1}{14}\right)+\cdots\right]}$$

Explicar cómo surge este número nos haría rebasar los propósitos de esta divulgación.≫

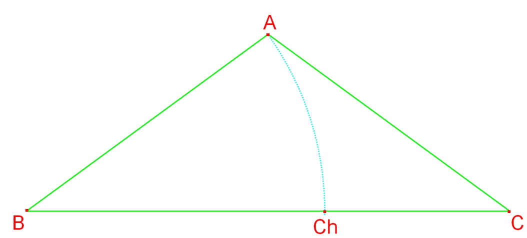
Otra propiedad común a estas curvas es que, a pesar de que las tres se despliegan en una región acotada del plano, sus longitudes, sin embargo, son infinitas. Comprobaremos esta propiedad para la que Giuli ha dado en llamar *curva de Nausithous*, aquélla de la cual se abstrae el símbolo alfaético.

Antes de empezar, inspeccionemos brevemente el triángulo del que parte.

Como ya se dijo, es el triángulo formado por dos lados consecutivos de un pentágono regular y por la diagonal que une los extremos separados de estos lados. Se lo puede definir como el triángulo isóceles cuyo ángulo distinto mide el triple de lo que mide cualquiera de los ángulos iguales.

Esta definición permite inferir que los ángulos iguales son de 36° y que el ángulo distinto mide 108°.

Sean A, B, C los vértices de un triángulo con estas medidas angulares, siendo A el vértice del ángulo de 108°. Si se apoya el compás en B y se gira a partir de A hacia el lado BC, queda ubicado un punto sobre este lado, al que llamaremos Ch



Entonces se tiene que

$$\overline{AB} = \overline{BCh}$$

lo cual implica que el triángulo $ABCh$ es isóceles; puesto que su ángulo $\widehat{ABCh}$ es de 36°, se trata de un triángulo cuyos ángulos iguales miden 72°. Consecuentemente con esto, también se tiene que

$$\widehat{ChAC} = 36° \quad \text{y} \quad \widehat{AChC} = 108°$$

Es decir, que $AChC$ es un triángulo semejante al ABC. Entonces, la razón que da el dividir cada uno de sus lados iguales entre su base, es la misma que la que se obtiene dividiendo los lados iguales del triángulo ABC entre su base; es una proporción implicada por su semejanza y expresada por la igualdad siguiente:

$$\frac{\overline{ACh}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \;\ldots\; (i)$$

Por otro lado se tiene que

$$\overline{AC} = \overline{AB} = \overline{BCh} \quad \text{y} \quad \overline{ACh} = \overline{ChC}$$

además de que

$$\overline{BC} = \overline{BCh} + \overline{ChC}$$

Esto permite el replanteamiento de (i) como

$$\frac{\overline{ACh}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC} + \overline{ACh}}$$

de lo cual resulta la ecuación

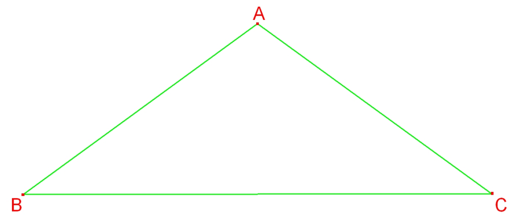
$$\overline{ACh}^2 + \overline{AC} \cdot \overline{ACh} - \overline{AC}^2 = 0$$

que al ser resuelta en términos de $\overline{ACh}$ conduce a que

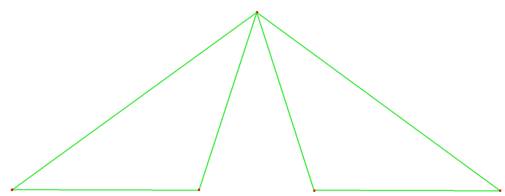
$$\frac{\overline{ACh}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

y se dice que los lados iguales y la base de este triángulo están en Proporción Áurea. Así, si la longitud de la base es ℓ, entonces la de los lados iguales es $\varphi\ell$.

Siendo tal el caso con el triángulo del cual se parte al momento de iniciar el proceso

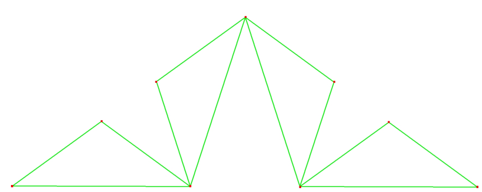


al cabo del primer paso

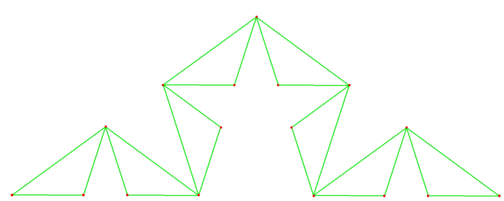


las bases de los dos triángulos congruentes, semejantes al original, que arroja la operación, miden $\varphi\ell$; puesto que la longitud de los lados iguales es por φ la de la base, resulta igual a $\varphi^2\ell$.

Esta es la medida de las bases de los cuatro triángulos congruentes, semejantes al original, que quedan después de realizado el segundo paso del proceso.



...Por φ: $\varphi^3\ell$; es la longitud de los lados iguales de cada uno de estos triángulos. Al cabo del tercer paso esta será la medida de las bases de los ocho triángulos que entonces quedan. Consecuentemente, los lados iguales de estos triángulos medirán $\varphi^4\ell$.



En general, al cabo del n-ésimo paso del proceso, $\varphi^n\ell$ es lo que miden las bases de los 2^n triángulos congruentes, semejantes al original. Sus lados iguales miden $\varphi^{n+1}\ell$, por lo que el perímetro de cada uno es

$$P = (2\varphi + 1)\,\ell\varphi^n$$

Ya se ha dicho que el objeto al que lleva el proceso tiene (como la carpeta cartaginesa) área cero, y no es difícil probar que el área total que da sumar las áreas de todos los triángulos en cada etapa del proceso, disminuye más y más a medida que éste avanza, siendo cero su límite.

Si el área efectiva de estos triángulos tiende a desaparecer, tiene sentido definir el perímetro de la figura obtenida en cada etapa como la suma de los perímetros de los triángulos que hay en esa etapa, y pensar que el límite a que tiende el perímetro de las figuras es, al cabo, la longitud del objeto límite.

Teniendo en cuenta que durante la n-ésima etapa hay 2^n triángulos de perímetro P, entonces el perímetro de la figura correspondiente a esta etapa es

$$2^n P = (2\varphi + 1)\,\ell\,(2\varphi)^n$$

Por su parte,

$$1 < 2\varphi$$

y se sabe que la sucesión de potencias de un número mayor que 1 tiene términos numéricos que son más y más grandes, a medida que crece el exponente natural n, siendo su límite *infinito*.

Esto se traduce en decir que la sucesión de perímetros consta de números, la mayoría de los cuales son mayores que un número M que en un momento se fijase, sin importar cuán grande sea M.

La consecuencia es que la curva límite tiene una longitud infinita.

Para observar otra propiedad de esta curva, nótese que los vértices de los triángulos que van surgiendo son lo único que se ve de ella, (algo como lo que ocurría en la carpeta cartaginesa). A medida que el proceso avanza, estos vértices tienden a estar más cerca unos de otros, dado el empequeñecimiento que sufren los triángulos.

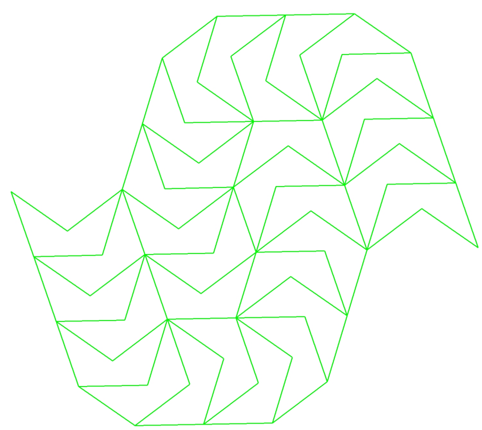
Está claro, por otra parte, que en cada uno de estos vértices sucede en todo momento un cambio de dirección, ya que uno de los lados del triángulo por ese vértice tiene una dirección y el otro lado, otra distinta. Esta ambigüedad deja indefinida la dirección en estos puntos.

A consecuencia de todo esto resulta que la curva situada, por decirlo así, "al infinito de este proceso", *es densa en puntos con dirección indefinida*, y esto quiere decir que estos puntos terminan estando por todas partes a lo largo de la curva límite.

Decir que en estos puntos la dirección de la curva queda, por ambigüedad, indefinida, es equivalente a decir que en estos puntos a la curva no se le puede definir una recta tangente.

Es decir, que a esta curva no se le puede trazar una recta tangente *en ninguno* de sus puntos, ya que, aunque no todos sus puntos fueron vértices de algún triángulo durante el proceso infinito de su construcción, sucede que aquellos que sí lo fueron han quedado distribuidos a lo largo de la curva de modo tal que siempre encontraremos alguno de estos "exvértices" en cualquier entorno (así sea pequeñísimo) de cualquier punto de la línea.

Cuando toca el turno de analizar la situación que el pentágono cóncavo desempeña dentro del documento, el profesor Giuli comienza haciendo el siguiente señalamiento: ≪Antes de entrar de lleno al caso de la tercera figura analizada en la carta, hay que recordar que Nausithous la propuso porque se trata de una tesela que involucra en su forma al Número de Oro.



Por su parte, Euboulos vislumbra un modo de inducir un proceso geométrico similar a los anteriores, que también conduce a un objeto fractal, cosa que comunica detalladamente en su epístola.

≫La intervención de Corina Rossi en esta parte del estudio ha resultado decisiva. En primer lugar, nos ha remitido a dos fuentes que atestiguan la vigencia que tuvo el pentágono cóncavo equilátero como signo secreto de reconocimiento entre los pitagóricos de las dos generaciones inmediatamente posteriores a la de Nausithous, Euboulos y del matemático cartaginés. La primera de tales fuentes es uno de los pocos pasajes que se conservan del *Tratado de los Símbolos Pitagóricos* de Andrócido (s. I a.C.). En alusión a una figura que se había perdido, el pasaje reza:

"Este es el pentágono cóncavo con el que órficamente
se identificaban los cofrades cuando se los perseguía"

La otra fuente es un testimonio recogido por Espeusipo en su *Teología Aritmética*, en el que Apolodoro de Cícico refiere haber presenciado el reconocimiento como miembro de la Orden concedido por Clearco a Crantor,

"quien no exhibió el tatuaje de una pentalfa
sino el de un pentágono cóncavo regular"

≫Consecuentemente, si bien es cierto que la puesta en circulación de esta figura como señal de membresía a la Hermandad Pitagórica no es noticia en la Historia de las Matemáticas (en vista de las referencias ya citadas), sí lo es la profunda ponderación que hubo de hacerse para elegirla, revelada en el *lino apenino de Clevsi*. Aunque el rigor de la ciencia histórica le da cabida a esto sólo como una hipótesis, parece perfectamente plausible que con las dos propiedades que se le descubrieron al pentágono cóncavo equilátero quedó reunido el kilataje suficiente que decidió su elección sobre las otras figuras.

≫Euboulos aborda el tema de la propiedad descubierta por él, escribiendo dos largos preámbulos a sus interlocutores. Por lo que se ha podido leer en el dirigido al matemático cartaginés, su intención parece haber sido la de apaciguar los resquemores que inspiraban en el ánimo de Nausithous estos insólitos objetos geométricos.

≫Esta discusión, según se ha dicho, la habían venido sosteniendo de tiempo atrás, y en esta parte vuelve a citar pasajes de otras cartas que dan hilo a su discurso. No abundaré en ello, porque sería estropear el artículo que a este respecto está preparando Corina Rossi; lo que sí me permitiré será anunciar ese artículo anticipando del mismo un fragmento.

≫Resulta que en esta parte de la epístola, Euboulos realiza una honda meditación acerca de los conceptos de orden y caos que acusa el propósito, muy sutil de parte del mesenio, de dejar de pensarlos como contrarios.

≫Todos los pasajes que transcribe de cartas anteriores transmiten una pertinaz inquietud que en Nausithous había venido acentuándose de más a más, hasta rayar con la angustia e inclusive con el delirio. No es exageración; algunos de estos pasajes son verdaderas lamentaciones del etrusco por visiones que padece y que

> *"han entrado ya en los dominios del sueño, y por eso vivo insomne y afiebrado. Porque en el caos todo es opresión y nada se perfila. Arrebato de mi fuero hasta pensamientos sin valor, codiciando por capricho y afán de saqueo; invasión de la nada antes de que mi alma suelte su último asidero"*

≫Euboulos comenta al matemático cartaginés que en otra carta había conminado a Nausithous a cumplir con lo estipulado en el noveno verso del *hyeros*, que dice:

> "*Sabe que todas estas cosas son así; luego, acostúmbrate a sobreponerte a ellas y a vencer el temor y el miedo"*.

Esta conminación contuvo el mal que lo atosigaba, pero resultó insuficiente, porque en la carta anterior, el etrusco ha vuelto a referirse a las alucinaciones que sufre diciendole:

> *"...conjurados todos los elementos para dar por terminada la intolerable tregua y desobedecer aquella orden que las mantenía sujetas, reestablezco el caos original con un primer torbellino de exasperada espuma, ácida, que disuelve mi obra y la asimila a las tinieblas. La ausencia de una regla, de una ley, salta a mi vista, y estoy aterrado, pues compruebo, una vez más, que trabajamos en pleno caos."*

La optimista respuesta del mesenio está escrita en púnico, para conocimiento del matmático cartaginés:

> *"Ese suplicio concluirá cuando estemos convencidos de la posibilidad de obtener una imagen ordenada del Mundo. Hay que entender que así como los hechos no son sino casos particulares de un hecho general: que la vida está puesta aquí de una manera constatable, así también cada ley no es sino un caso particular de una ley general: el fenómeno de la invariabilidad del orden. Para el descubrimiento de las leyes elementales más generales de las que resulte la imagen ordenada del Mundo, es menester desarrollar un sentido del orden que nos ayude a encontrarlo dentro del caos"*.

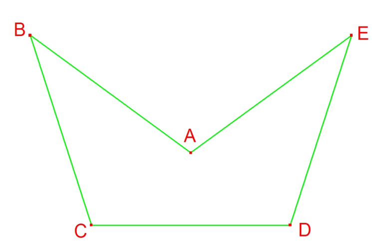
Más adelante apunta:

> "[...] *como si el orden iluminara a través del caos"*.

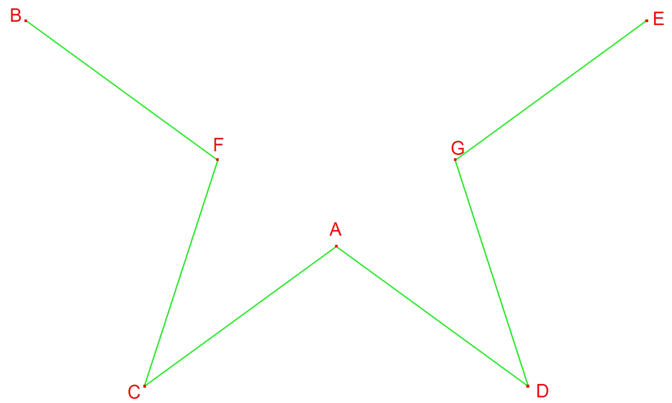
≫Concluidos los preámbulos, emprende la tarea de describirles el procedimiento ideado por él≫

Esencialmente, el proceso al que alude la cita es como sigue.

Una vez trazado el pentágono cóncavo equilátero $ABCDE$



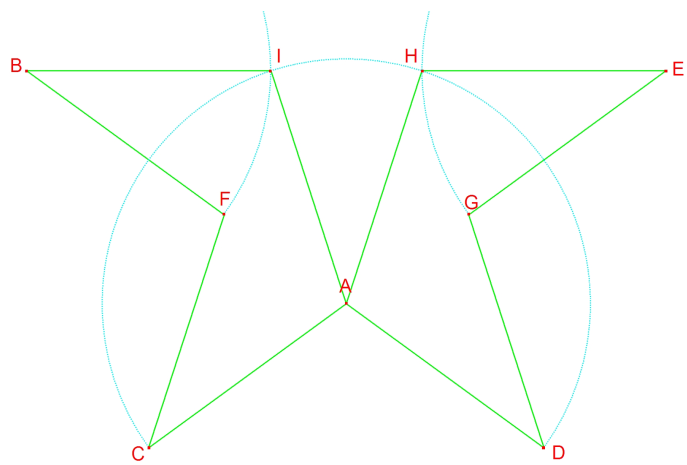
céntrese el compás en C y en D, y con radio $\overline{CA}$ (para cuando el centro es C) y $\overline{DA}$ (para cuando el centro es D), ubíquense sobre los lados BA y EA, respectivamente, los puntos F y G. Trácense los segmentos DA, DG y CA, CF, eliminando los lados BC, CD y DE del pentágono, así como los segmentos GA y AF.



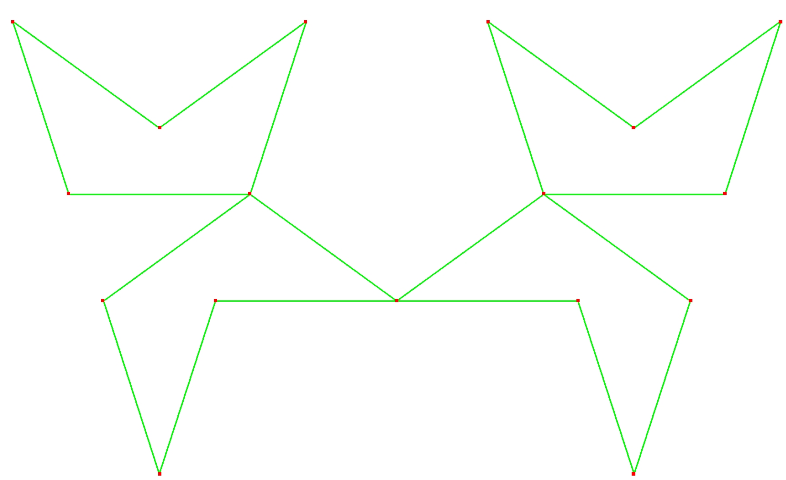
Trácense arcos auxiliares de circunferencia que tengan:

centro en E y radio $\overline{EG}$
centro en B y radio $\overline{BF}$
centro en A y radio $\overline{AC}$

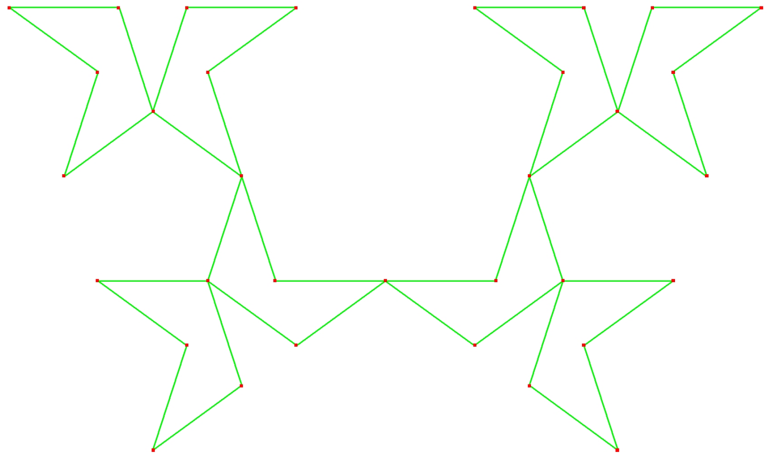
Sean H e I los puntos de intersección del primero con el tercero, y del segundo con el tercero, respectivamente. Trácense los segmentos EH, HA y BI, IA.

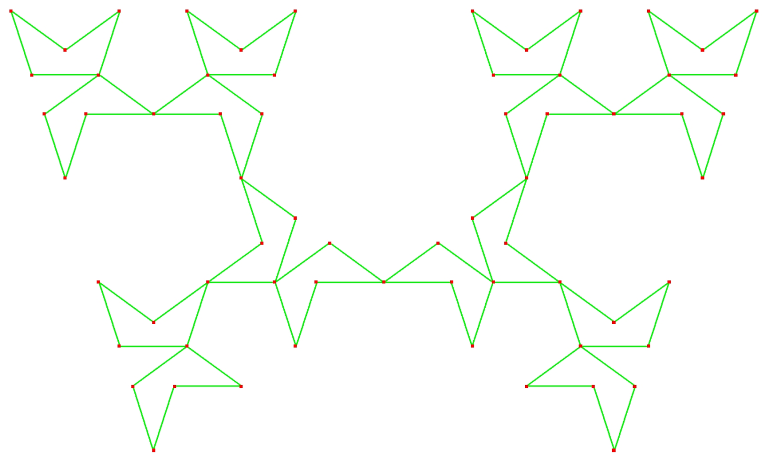


Como resultado, según se muestra en la figura, se obtienen dos pentágonos cóncavos equiláteros, sobre los cuales hay que iterar el procedimiento descrito. Esta iteración da lugar a la siguiente figura



Un par de iteraciones más:





Para cerrar su artículo, el doctor Giuli comenta que:

≪El *lino apenino de Clevsi* concluye con una digresión acerca del número cinco, que a primera vista parece una chiquillada inocente, aunque realmente dista mucho de serlo, como lo está demostrando Corina Rossi en el artículo que tiene en preparación.

≫Yo no querría decir nada con relación a esto, pero no me resisto a mencionar que los doctores di Nogara y Trombetti batallaron mucho con la traducción de una parte de esta digresión consistente en unas pocas palabras. Sucede que eran nombres de flores, todas ellas pentámeras y que todavía hoy crecen silvestres en tierras mediterráneas. A decir de ellos mismos, la traducción a que llegaron es un fiel reflejo del modo en que (al menos en púnico) lo dejó dicho el autor. Hela aquí:

> *"Los quirománticos tienen razón en sustancia, aunque no en sus interpretaciones pueriles. Y es que la mano pertenece al orden de la zarzarrosa, del nomeolvides, de la pimpinela escarlata. Porque cinco es número necesario en las armonías universales; tanto, que permite apelar a uno de los órdenes de fenómenos más sutiles capaz de traer alegría al alma: la música"*

Para dar una idea de lo lejos que está esto de no ser más que palabritas, la doctora Rossi nos explica que cinco también es el número que califica a uno de los intervalos sonoros más importantes: la *quinta* o *diapente*. Nos dice: <<Tanto el intervalo musical de quinta, que es elemento imprescindible del actual sistema tonal, como el Número de Oro, que en la estructura ternaria de algunas formas musicales aparece frecuentemente, denotan el imperecedero influjo de los pitagóricos en la música occidental.>>≫

Antes de terminar esta crónica cabe hacer mención de la conferencia de marzo de este año (2010) a que convocaron Bartolomeo di Nogara y Alfredo Trombetti para comunicar qué tanto se ha podido avanzar en la comprensión de la lengua etrusca a partir del *lino apenino de Clevsi*.

A pesar de que la traducción del texto sigue prácticamente detenida (pues el trabajo se ha concentrado en responder a cuestiones gramaticales como la del funcionamiento de reglas de conjugación de los vervos más recurrentes), los lingüistas señalan dos resultados de su investigación como aportes decisivos de este hallazgo.

En primer lugar, queda confirmado un lejano parentezco del etrusco con la lengua euzkara hablada en el País Vasco, como venían sospechando varios estudiosos de este idioma.

El segundo logro importante consiste en la confirmación (porque también se manejaba como una hipótesis) de la pertenencia del etrusco a una familia lingüística intermedia entre la indoeuropea y la caucasiana, con lo cual quedan totalmente descartadas otras opiniones y conjeturas (como la del propio di Nogara, que pensaba que era una lengua mixta con conexiones itálicas).

También comentaron que, con la excepción de pasajes que siguen pareciendo obscuros, la traducción del texto en cartaginés está prácticamente concluída y que, a juzgar por este escrito, su autor parece haber tenido un amplio dominio de esa lengua. Esto hace creer a los lingüistas, que hallarán correctamente articulada la lengua etrusca en la dicción del mesenio.

Aquélla reunión contó con la asistencia de madame Marie-Noëlle Champion Daviller, francmasona que presidió durante nueve años la Gran Logia de París. Al terminar el evento fue cuestionada por un reportero acerca de por qué había acudido a una charla en la que, en principio, sólo etruscólogos, filólogos y lingüistas ponían interés, a lo cual respondió:

–Desde su primer comunicado, los artículos y conferencias del doctor Massimo Pallotino y de sus colaboradores han venido siendo seguidas con atención por numerosos miembros de varias logias, aparte de la nuestra. No es la primera vez que asistimos aunque sí la primera en que se advierte nuestra presencia. Pero para responder más ampliamente a su pregunta, quisiera declarar que a los francmasones nos parece digno del más vivo interés encontrar activo el pensamiento pitagórico en una mente etrusca y en otra cartaginesa, y tanto más cuando este lino antiguo nos muestra que en estas mentes ese pensamiento estuvo muy lejos de quedar reducido a una expresión provinciana del pitagorismo griego. Nausithous y su cofrade cartaginés supieron sacar al pitagorismo de la norma griega y hacerle adquirir una tendencia, personalidad y genio enteramente originales.

–¿Hay algo de esta investigación que usted lo reconozca como un aporte para la masonería de nuestros días?

–Ah, sí; desde el punto de vista cultural, todo. Pero también desde aspectos tan particulares como la propia línea de investigación que persiguieron los tres pitagóricos. Desde su nacimiento, la masonería ha conservado en su haber al pentágono cóncavo como símbolo de la máscara y del disfrás. Por una tradición que se remonta a los albores del Imperio Bizantino, sabíamos que sirvió efectivamente como signo de reconocimiento durante las décadas en que la Sociedad Pitagórica fue perseguida. Pero nada sabíamos de su génesis, como tampoco que hubiese signos aledaños a él.

–Recíprocamente: ¿hay algo con lo que la masonería pueda contribuir a esta investigación?

–Seguramente con muy poco. Quizá haciendo notar que el *lino apenino* está reflejando luz sobre algunas cuestiones que habían quedado abiertas en ciertas investigaciones arqueológicas, lo cual posiblemente conduzca al total esclarecimiento de éstas. Tal es el caso, por ejemplo, de los aulos (esas flautas etruscas bitubulares de una sola boquilla) con la apertura de 36°, que fueron recogidos en los mausoleos de Larthia Sejanti y de Seianti Thanunia, dos damas etruscas que vivieron en los siglos III y II a.C., respectivamente; hasta ahora sigue sin explicarse el por qué de esa apertura angular. Tampoco se le ha encontrado explicación al extraño hallazgo de unos *guijarros de Sharón* en la *cátedra* de la Basílica pitagórica de la Puerta Mayor; ni Fornari, ni el eminente Cumont, ni siquiera Carcopino supieron descifrar el mensaje dejado en el púlpito mismo de esa logia mediante la presencia de objetos tan netamente etruscos como son *los guijarros*, al cierre consciente y sepultación sistemática que de la misma hicieron los pitagóricos del siglo I d.C.

–¿Reflexiones adicionales que quiera hacer a este noticiario?

–Solamente dos. La primera es con relación a la noción de *caos* discutida en el *lino apenino*. El matemático que intervino en esta investigación ha creído ver, en la posición que el griego Euboulos mantuvo en esa discusión, una suerte de apertura de mente, original e insólita, porque cuadra con los hallazgos de la Matemática Contemporánea. Al comienzo de su interesante artículo de divulgación nos ha advertido ser neófito en pitagorismo; ello le dispensa el ignorar que desde las fuentes órficas de esa corriente, el caos es concebido como *vacío que ocupa un hueco*. Se sabe que estas fuentes provienen del Antiguo Egipto. De acuerdo con la Mitología Egipcia, *el líquido caos primigenio* (anterior a la creación del Mundo) contuvo diluída una sutil esencia ordenadora: *la Ogdóada*; de ella manó *la luz* que, según el Génesis, *se hizo*. A mi parecer, esta posición de Euboulos no nace de él (como me parece que insinúa el doctor Giuli) sino que con ella defiende este conocimiento órfico cosmogónico afín al pitagorismo. Más interesante me resulta la fobia al caos manifestada por el etrusco Nausithous. Se había creído que sólo tardíamente (hasta Ovidio) la palabra *caos* había adquirido el sentido de “confusión informe” o de “completo desorden” con que la entendemos hoy; pero he aquí un importante antecedente que acaso haya heredado Roma. Mi segunda reflexión es con relación a lo mucho que se ha comentado acerca de lo ágilmente que se ha desenvuelto el desarrollo de esta investigación, sobre todo porque se teme que lo apasionadamente que han acometido su trabajo los doctores Pallotino, di Nogara y Trombetti repercuta negativamente en la salud de alguno de ellos, dado lo avanzadas que son las edades de los tres. A todas luces están felices por esta obra y, a juicio de los tres, solamente esta felicidad basta y sobra para compensar su esfuerzo. Habría que hacer notar que hacia la fecha en que parece haberse escrito el *lino apenino*, tanto Euboulos como Nausithous eran ya gente anciana, y es de suponer que el pitagórico de Cartago era un coetáneo de la misma generación. ...Con frecuencia encuentro que coincidencias de este tipo lo son sólo en apariencia.