Capítulo 1

Categorías asociadas a clases de funciones

La meta de este capítulo es encontrar la relación que guardan entre sí los conceptos de correflexión y de fibración. Para ello se ha hallado conveniente considerar ciertas clases de funciones, llamadas 1-clases, y asociarles ciertas subcategorías de $\mathfrak{Top}$ que resultarán ser bicorreflexivas. En particular la clase de las E-fibraciones suprayectivas resultará ser 1-clase y al considerar la subcategoría asociada correspondiente se tendrá así la relación buscada. La maquinaria necesaria para lograr el propósito de este capítulo consta de los conceptos de: producto fibrado, 0-clase, 1-clase y la descripción de la subcategoría asociada a una 0-clase; así como también se requiere el concepto de E-fibración.

1.1. Producto fibrado en $\mathfrak{Top}$

Además de los productos cartesianos y topológicos para familias cualesquiera de conjuntos y de espacios topológicos, se conoce otro extraño producto que ha sido llamado *coproducto* y que se vió en el capítulo primero.

Aún más raro es el llamado *producto fibrado* que en $\mathfrak{Top}$ se define a través de la siguiente propiedad:

Definición 1.1 *Sea*

$$f_j : A_j \to A,\ j \in \{0,1\}$$

una pareja de funciones continuas. Se dice una pareja de funciones continuas

$$g_j : W \to A_j,\ j \in \{0,1\}$$

tiene la propiedad universal del producto fibrado con respecto a la pareja $(f_j)_{\{0,1\}}$ *si, conmutando el diagrama:*

diagrama

se tiene que para cualesquiera dos funciones continuas

$$\alpha_j : X \to A_j,\ j \in \{0,1\}$$

tales que

$$f_0\alpha_0 = f_1\alpha_1$$

existe una única función continua

$$f : X \to W$$

que haga conmutar los triángulos indicados en el diagrama:

diagrama

En tal caso se hablará del diagrama $(*)$ *como de un* ***cuadrado cartesiano*** *(en* $\mathfrak{Top}$*) y de la pareja* $(g_j : W \to A_j)_{j\in\{0,1\}}$ *como de un* ***producto fibrado de la pareja*** $(f_j)_{j\in\{0,1\}}$ *(en* $\mathfrak{Top}$*).*

Observación 1.1 *Si $(g_j)_{j\in\{0,1\}}$ es un producto fibrado de una pareja $(f_j)_{j\in\{0,1\}}$ de funciones continuas, entonces la pareja*

$$(g_j : W \to A_j)_{j\in\{0,1\}}$$

es una monofuente.[1]

Demostración 1 *En efecto, si $h, k : X \to W$ son funciones continuas tales que $g_j h = g_j k$, para toda $j \in \{0,1\}$, entonces haciendo $\alpha_j = g_j h$, para toda $j \in \{0,1\}$, se tiene por la propiedad universal del producto fibrado que existe una única función continua $f : X \to W$ tal que $g_j f = \alpha_j$, para toda $j \in \{0,1\}$, es decir, tal que conmuta el diagrama*

diagrama

En consecuencia, $h = k$ ya que ambas funciones satisfacen lo que esta función f que es única.♦

Descripción del producto fibrado en $\mathfrak{Top}$.

Proposición 1.1 *En $\mathfrak{Top}$ cualesquiera dos funciones de codominio común tienen un producto fibrado.*

Demostración 2 *En efecto, si $(f_j : A_j \to A)_{j\in\{0,1\}}$ es una pareja de funciones continuas y se restringen las proyecciones $(p_j)_{j\in\{0,1\}}$ del producto topológico*

$$\prod_{j\in 2} A_j = A_0 \times A_1$$

al conjunto

$$W = \left\{ (a_0, a_1) \in \prod_{j\in 2} A_j : f_0(a_0) = f_1(a_1) \right\}^{2}$$

entonces conmuta el diagrama

diagrama

y si $\alpha_j : X \to A_j$, $j \in \{0,1\}$ son dos funciones continuas tales que $f_0\alpha_0 = f_1\alpha_1$, por la propiedad universal del producto topológico se tiene que existe una única función continua

$$\overline{f} : X \to \prod_{j\in 2} A_j$$

tal que para toda $j \in \{0,1\}$ conmuta el triángulo

diagrama

Sea $x \in X$; entonces $\overline{f}(x)$ es un elemento del producto $\prod_{j\in 2} A_j$ cuyas componentes son $p_0\overline{f}(x)$ y $p_1\overline{f}(x)$. Se puede escribir

$$\overline{f}(x) = \left(p_0\overline{f}(x), p_1\overline{f}(x)\right)$$

Obsérvese, ahora, que este par ordenado es tal que

$$f_0\left(p_0\overline{f}(x)\right) = f_0\alpha_0(x) = f_1\alpha_1(x) = f_1\left(p_1\overline{f}(x)\right)$$

Por lo tanto

$$\left(p_0\overline{f}(x), p_1\overline{f}(x)\right) \in W$$

para toda $x \in X$, es decir,

$$\overline{f}(X) \subseteq W$$

Por lo tanto, se puede definir

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & W \\ & x & \mapsto & \overline{f}(x) \end{array}$$

[1] Véase definición **??**.

[2] Si $W = \varnothing$ la proposicin tambin es cierta porque el cuadrado conmutativo en $\mathfrak{Top}$

$$[1‘1‘1‘1; 300‘300]\square[W‘A_0‘A_1‘A; \emptyset‘\emptyset‘f_0‘f_1]$$

resulta ser cartesiano.

y asegurar que f es una función continua tal que

$$\left(p_j|_W\right) f = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$ y es la única con esta propiedad, ya que si

$$g : X \to W$$

es tal que

$$\left(p_j|_W\right) g = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$, entonces

$$\begin{array}{rccc} \overline{g}: & X & \to & \prod_{j\in 2} A_j \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

es tal que

$$p_j\overline{g} = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$. Y por lo tanto

$$\overline{g} = \overline{f} \ . \ \blacklozenge$$

Por abuso del lenguaje, se dice que W **es el producto fibrado de la pareja** $(f_j)_{\{0,1\}}$.

Observación 1.2 *El producto fibrado también puede ser definido en $\mathfrak{Set}$ mediante una propiedad universal y también se puede probar (en forma exactamente análoga a la anterior) que todo par de funciones de codominio común tiene un producto fibrado en $\mathfrak{Set}$.*

Observación 1.3 *Cuando en general (en $\mathfrak{Set}$, en $\mathfrak{Top}$, etcétera)*

$$(g_j : W \to A_j)_{j\in\{0,1\}}$$

es un producto fibrado de la pareja

$$(f_j : A_j \to A)_{j\in\{0,1\}}$$

entonces se suele hablar del diagrama

diagrama

como de un ***cuadrado cartesiano*** *(en $\mathfrak{Set}$, en $\mathfrak{Top}$, etcétera).*

Observación 1.4 *Quizá el conjunto*

$$W = \left\{ (a_0, a_1) \in \prod_{j\in 2} A_j : f_0(a_0) = f_1(a_1) \right\}$$

empleado en la demostración anterior, explica el nombre de producto fibrado de la pareja $(f_j)_{\{0,1\}}$*; obsérvese que W es el producto de las fibras de las funciones f_0 y f_1. Esto sugiere que el abuso de lenguaje mencionado arriba consiste en llamar producto fibrado a lo que realmente es el* producto de fibras de la pareja $(f_j)_{\{0,1\}}$.

Hasta aquí se ha hablado (en $\mathfrak{Top}$) de un producto fibrado para todo par de funciones continuas $(f_j)_{\{0,1\}}$ de codominio común. Enseguida se verá que *un producto fibrado de $(f_j)_{\{0,1\}}$ es esencialmente único.*

Proposición 1.2 *El producto fibrado W de $(f_j : A_j \to A)_{j\in\{0,1\}}$ es único salvo homeomorfismos.*

Demostración 3 *Se sabe que si*

$$W = \left\{ (a_0, a_1) \in \prod_{j\in J} A_j : f_0(a_0) = f_1(a_1) \right\}$$

entonces el diagrama

diagrama

es un cuadrado cartesiano. Si $W' \in \mathfrak{Top}$ *y* $g_j : W' \to A_j$ *también dan lugar a un cuadrado cartesiano:*

diagrama

entonces, aplicando en cada caso la propiedad universal del producto fibrado, se tiene que existen dos únicas funciones continuas

$$h' : W' \to W \ \ y \ \ h : W \to W'$$

tales que para toda $j \in \{0,1\}$

$$g_j h = p_j|_W \ \ y \ \ p_j|_W \, h' = g_j$$

En consecuencia se tiene que $h'h$ *es una función continua tal que para toda* $j \in \{0,1\}$

$$\left(p_j|_W\right)(h'h) = \left[\left(p_j|_W\right)h'\right]h = g_j h = p_j|_W$$

De acuerdo con la propiedad universal del producto fibrado existe una única función continua de W *en* W *tal que*

diagrama

Puesto que 1_W *y* $h'h$ *son funciones con esta propiedad, sólo queda reconocer que*

$$h'h = 1_W$$

Análogamente,

$$hh' = 1_{W'}$$

Por lo tanto

$$W \overset{h}{\cong} W'$$

Recíprocamente, supóngase que

diagrama

es una cuadrado cartesiano y que $W' \overset{h}{\cong} W$*. Se probará que*

diagrama

también es cartesiano. Sean

$$\alpha_j : X \to A_j, \ j \in \{0,1\}$$

dos funciones continuas tales que

$$f_0 \alpha_0 = f_1 \alpha_1$$

Por la propiedad universal del producto fibrado se tiene que existe una única función continua

$$f : X \to W$$

tal que

$$g_j f = \alpha_j$$

para toda $j \in \{0,1\}$*. Considérese la composición*

$$X \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h^{-1}} W'$$

Entonces $h^{-1}f$ *es continua y para toda* $j \in \{0,1\}$ *se tiene*

$$(g_j h)\left(h^{-1} f\right) = g_j \left(h h^{-1}\right) f = g_j f = \alpha_j$$

De manera que se tiene el diagrama

diagrama

Y si $g : X \to W'$ *es una función continua tal que para toda* $j \in \{0,1\}$

$$(g_j h)\, g = \alpha_j$$

entonces $hg : X \to W$ *es una función continua tal que para toda* $j \in \{0,1\}$

$$g_j (hg) = \alpha_j$$

Por la unicidad de f*, es*

$$f = hg$$

de donde

$$g = h^{-1} f$$

Por lo tanto, $h^{-1}f$ *es la única función con esta propiedad, como se quería probar.*♦

1.2. Definición de *0-clase* y de *1-clase*

Definición 1.2 *Una **0-clase** es cualquier clase de funciones continuas y suprayectivas.*

Como ejemplos de *0-clases* se pueden mencionar: a la clase de todas las retracciones, la de los cocientes, la de los homeomorfismos, la clase de todas las funciones continuas y suprayectivas, a la que por cierto, se le llamará la **0-clase máxima** y se denotará por $M_{máx}$.

Cuando M sea una 0-clase y $f \in M$, se hablará de f como de una M**-flecha**.

Definición 1.3 *Una 0-clase M se llama **1-clase** si para todo cuadrado cartesiano (producto fibrado) en $\mathfrak{Top}$,*

diagrama

el hecho de tener f en M implica que g también pertenece a M.

Ejemplos de 1-clases.

Ejemplo 1.1 *$M_{máx}$ es una 1-clase.*

Demostración 4 *En efecto, si se tiene un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

en el que f es suprayectiva, entonces, sea $x_2 \in X_2$ un punto arbitrario y aplíquesele f'; entonces $f'(x_2) \in Y$, y puesto que f es suprayectiva, existe $x_1 \in X_1$ tal que $f(x_1) = f'(x_2)$. Ahora, considérese un espacio singular $\{w\}$ y defínanse las funciones:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & \{w\} & \rightarrow & X_1 \\ & w & \mapsto & x_1 \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{rccc} \beta: & \{w\} & \rightarrow & X_2 \\ & w & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Entonces α y β son funciones continuas tales que

$$f\alpha = f'\beta$$

Como el cuadrado es cartesiano, existe una única función continua

$$h : \{w\} \longrightarrow X$$

*tal que $g'h = \alpha$ y $gh = \beta$. En consecuencia, el punto $h(w)$ es preimagen de x_2 bajo g. Esto demuestra que g es suprayectiva. Por lo tanto, además de ser $M_{máx}$ la más grande 0-clase, también es la más grande 1-clase y se llama **1-clase máxima**.*

Ejemplo 1.2 *Como un segundo ejemplo de 1-clase se tiene a la clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz*[3].

Observación 1.5 *Es obvio que la unión de 0-clases es una 0-clase.*

Lema 1.1 *La intersección de 1-clases también es una 1-clase.*

Demostración 5 *Sea $(M_j)_J$ una familia arbitraria de 1-clases y sea $M = \bigcap_{j \in J} M_j$; es claro que M es una 0-clase. Considérese cualquier cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

tal que $f \in M$. Entonces, $f \in M_j$ para toda $j \in J$; puesto que para toda $j \in J$, M_j es 1-clase, tenemos que $g \in M_j$, para toda $j \in J$, por lo que $g \in M$. Por lo tanto M es una 1-clase.♦

Ya se vió que toda *0-clase* está contenida en la más grande *1-clase*, $M_{máx}$, así como también se ha probado que la intersección de *1-clases* es *1-clase*. Esto permite la referencia a *la 1-clase mínima $\widetilde{M}$ que contiene a una 0-clase M arbitraria.*

[3] Véanse en el apéndice sobre fibraciones de Hurewicz la definición ?? y la proposición 4.

1.3. *1-clase* generada por una *0-clase* M

Definición 1.4 *$\widetilde{M}$ denotará a la intersección de todas las* 1*-clases que contienen a una* 0*-clase arbitraria M; se hablará de $\widetilde{M}$ como de* ***la 1-clase generada por la 0-clase*** *M.*

Enseguida se probará un lema que describe de manera precisa a los miembros de $\widetilde{M}$.

Lema 1.2 *Los elementos de $\widetilde{M}$ son precisamente aquellas funciones continuas $\widetilde{f} : \widetilde{X} \to \widetilde{Y}$ para las cuales existen cuadrados cartesianos en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

en los que f es un elemento de M.

Demostración 6 *Sea M' la clase de funciones continuas y suprayectivas f' para las que existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

tal que $f \in M$; entonces basta probar tres cosas:
(i) $M \subseteq M'$
(ii) M' es 1-clase
(iii) Si M'' es 1-clase y $M \subseteq M''$ entonces $M' \subseteq M''$.
Prueba de (i). *Sea $f \in M$; entonces f es continua y suprayectiva, y es cartesiano el cuadrado*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1} & X \\ f\downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow[1]{} & X \end{array}$$

Prueba de (ii). *Considérese un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

tal que $f' \in M'$. Se requiere probar que $g' \in M'$, para lo cual a su vez hay que probar que existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

diagrama

tal que $g \in M$. Como $f' \in M'$, existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$

diagrama

tal que $f \in M$. Juntando este último cuadrado con el antepenúltimo, se tiene el diagrama conmutativo

diagrama

Se probará lo que se quiere demostrando que el cuadrado

diagrama

es cartesiano. Sean

$$\alpha : W \to X \quad y \quad \beta : W \to W'$$

funciones continuas tales que

$$f\alpha = k(k'\beta)$$

que equivale al diagrama conmutativo

diagrama

Haciendo $\beta' = k'\beta$, podemos ver el diagrama anterior como:

diagrama

Puesto que el cuadrado es cartesiano, existe una única función continua $\gamma' : W \to X'$ tal que $h\gamma' = \alpha$ y $f'\gamma' = \beta'$. En particular, $f'\gamma' = k'\beta$, por lo que se tiene el diagrama conmutativo

diagrama

y, por ser cartesiano, existe una única $\gamma : W \to V'$ tal que $h'\gamma = \gamma'$ y $g'\gamma = \beta$; diagramaticalmente:

diagrama

Por lo tanto $h(h'\gamma) = h\gamma' = \alpha$, es decir,

diagrama

Esto prueba que M' es 1-clase.
Prueba de (iii). *Sea M'' una 1-clase tal que $M \subseteq M''$ y sea f' un elemento de M'; entonces existe un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

en el que $f \in M$; entonces $f \in M''$ que es 1-clase y, por lo tanto también $f' \in M''$. Por lo tanto $M' \subseteq M''$. Esto prueba que M' es la 1-clase generada por M.♦

1.4. Subcategoría asociada a una *0-clase*

Se dijo que por subcategoría de $\mathfrak{Top}$ se está pensando en cualquier familia de espacios topólógicos que sea cerrada bajo homeomorfismos; haber adoptado esta concepción ha permitido desarrollar este trabajo hasta esta parte. Ahora se hace necesario comentar que concebir así la idea de subcategoría de $\mathfrak{Top}$ no cuadra con el concepto que suele hallarse en la literatura con este nombre. Para comprender a plenitud el concepto de subcategoría de $\mathfrak{Top}$ sería necesario entender qué significa ser *subcategoría* de una categoría, lo cual requiere, obviamente, conocer el concepto formal de una *categoría*. Sin embargo para comprender las ideas y los razonamientos que siguen puede prescindirse totalmente de esta definición; basta decir que una *categoría* es una colección de *objetos* y *morfismos* sujetos a satisfacer tres propiedades axiomáticas que son las que definen una categoría. $\mathfrak{Top}$ es una categoría porque la colección de objetos (los espacios topológicos) y de morfismos (las funciones continuas) que la forman satisfacen los tres axiomas de la definición de categoría. Una *subcategoría* $\underline{A}$ de cierta categoría $\underline{K}$ es, primero que otra cosa, una categoría; para ser *subcategoría*, esta categoría debe satisfacer dos condiciones:
(i) Todo $\underline{A}$-objeto es un $\underline{K}$-objeto; es decir, al denotar por $|\underline{A}|$ a la clase de los objetos miembros de $\underline{A}$, y por $|\underline{K}|$ a la de los de $\underline{K}$, debe tenerse

$$|\underline{A}| \subseteq |\underline{K}|$$

(ii) Todo $\underline{A}$-morfismo debe ser un $\underline{K}$-morfismo; es decir, al denotar mediante $\underline{A}\,(A_1, A_2)$ al conjunto de $\underline{A}$-morfismos de dominio $A_1 \in |\underline{A}|$ y de codominio $A_2 \in |\underline{A}|$, y por $\underline{K}\,(A_1, A_2)$ al correspondiente conjunto de $\underline{K}$-morfismos, debe tenerse

$$\underline{A}\,(A_1, A_2) \subseteq \underline{K}\,(A_1, A_2)$$

cualesquiera que sean los $\underline{A}$-objetos A_1 y A_2.

Desde este punto de vista, una subcategoría $\underline{A}$ de $\mathfrak{Top}$ es una categoría cuyos objetos son espacios topológicos y cuyos morfismos son funciones continuas. *Como se ve, no aparece aquí la condición de que $\underline{A}$ tenga que ser cerrada bajo homeomorfismos; en realidad ésta es una propiedad que al satisfacerla una subcategoría de $\mathfrak{Top}$, da a decir de ella que es una* **subcategoría repleta**. También se ve que no hizo falta saber nada de esto para haber comprendido todo lo anterior; sin embargo; sí es importante para entender lo que sigue. También hay que saber que la condición de membresía de una función continua f para considerarla un $\underline{A}$-morfismo de cierta subcategoría $\underline{A}$ de $\mathfrak{Top}$, puede ajustarse a cierta propiedad adicional (por ejemplo, el ser una aplicación cociente); se entiende que al haber tal propiedad en la definición de los morfismos de $\underline{A}$, no toda función continua entre los espacios miembros de $\underline{A}$ es necesariamente un morfismo de $\underline{A}$, sino solamente aquellas que satisfacen tal propiedad. *Cuando tal propiedad característica se reduce a ser la simple continuidad de los morfismos, es decir, cuando toda función continua entre $\underline{A}$-espacios es un morfismo de $\underline{A}$, se dice que $\underline{A}$ es una* **subcategoría plena de $\mathfrak{Top}$**.

En lo que respecta a *0-clases*, se puede probar que siendo M una 0-clase arbitraria, entonces la clase $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ que consta de:
(i) todos aquellos espacios topológicos A que al figurar como codominios de elementos de M, tales elementos resultan cocientes; y
(ii) todas las posibles funciones continuas entre tales espacios,
es una subcategoría de $\mathfrak{Top}$.

Según se lee en (ii), $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ es una subcategoría plena por definición; en vista de ello, para describirla en cualquier caso específico (a partir de alguna *0-clase* particular), bastará contar con una caracterización de sus espacios miembros, porque entonces los $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$-morfismos son todas las funciones continuas entre los espacios caracterizados. Por lo tanto, en términos generales

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M}) = \{A \in \mathfrak{Top} : (f : X \to A) \in M \ \Rightarrow f \text{ es cociente}\}$$

donde X es cualquier espacio topológico.[4] En adelante se hablará de $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ como de **la subcategoría asociada a la *0-clase* M**.

Observación 1.6 *Siguiendo este método no siempre queda asociada a toda 0-clase M una subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración 7 *Un ejemplo que lo prueba es el siguiente. Sean $c : X \to A$ una aplicación cociente y sea B un espacio topológico homeomorfo a A; sea $f : Y \to B$ continua y suprayectiva pero no un cociente y defínase la 0-clase M como $M = \{c, f\}$; entonces*

$$A \in \underline{\mathbf{A}}(M) \qquad y \qquad B \notin \underline{\mathbf{A}}(M)$$

♦

Proposición 1.3 *Si M es una 1-clase, entonces $\underline{\mathbf{A}}(M)$ es una subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración 8 *Sean, $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$ y $B \in \mathfrak{Top}$ tal que $A \overset{h}{\cong} B$; si $g : Y \to B$ es una M-flecha, se tiene que g y h son funciones continuas de codominio común por lo que puede considerarse su producto fibrado[5] $(\overline{h}, \overline{g})$ de la pareja (h, g); entonces el diagrama conmutativo en $\mathfrak{Top}$*

diagrama

es un cuadrado cartesiano. Como M es una 1-clase y $g \in M$ entonces $\overline{g} \in M$, y al tener $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$, $\overline{g}$ debe ser necesariamente un cociente. Por lo tanto si $f : B \to Z$ es una función tal que la composición fg es continua, entonces también

$$fg\overline{h} = fh\overline{g}$$

es continua, como $h\overline{g}$ es un cociente, (pues es composición de cocientes), resulta que f es continua. Por lo tanto g es un cociente. Por lo tanto $B \in \underline{\mathbf{A}}(M)$. Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M)$ es subcategoría repleta de $\mathfrak{Top}$.♦

Ejemplos de subcategorías asociadas a *0-clases*.

Ejemplo 1.3 *Si M es la clase de todos los homeomorfismos, entonces dado cualquier $A \in \mathfrak{Top}$ y dado cualquier homeomorfismo $f : X \to A$ se tiene que f es un cociente. Por lo tanto $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 1.4 *Si M es la clase de todas las retracciones, entonces M es una 0-clase y para cualquier $A \in \mathfrak{Top}$, cualquier retracción $r : X \to A$ es un cocientes. Es decir, $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.*

Ejemplo 1.5 *Sea $\underline{A}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y sea M la clase de todas las $\underline{A}$-correflexiones; entonces $\underline{\mathbf{A}}(M) = \underline{A}$.*

Demostración 9 *En efecto, M es una 0-clase pues según se vió en el teorema **??**, teniendo $\underline{A}$ elementos no vacíos, todas las $\underline{A}$-correflexiones son biyecciones continuas. Además $\underline{A} \subseteq \underline{\mathbf{A}}(M)$ ya que si $A \in \underline{A}$, entonces el homeomorfismo 1_A es una $\underline{A}$-correflexión, y si $c : X \to A$ es otra $\underline{A}$-correflexión de A (obviamente $c \in M$ y tiene codominio A) existe un homeomorfismo $h : A \to X$ tal que $ch = 1_A$; es decir, c también es un homeomorfismo y, por consiguiente, es un cociente. Esto prueba que $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$. Recíprocamente, si $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$, entonces toda $\underline{A}$-correflexión de A, $c : X \to A$, es un cociente. Como $X \in \underline{A}$ y $\underline{A}$ es cerrada bajo la formación de cocientes, se tiene que $A \in \underline{A}$. Esto aunado a lo anterior prueba que $\underline{\mathbf{A}}(M) = \underline{A}$.*♦

Ejemplo 1.6 *Si $M = \emptyset$ entonces para toda $A \in \mathfrak{Top}$ es verdadera la implicación:*

$$(f : X \to A) \in M \Rightarrow f \text{ es cociente}$$

Por lo que M es una 0-clase tal que $\underline{\mathbf{A}}(M) = \mathfrak{Top}$.

Observación 1.7 *Obsérvese que si M y M' son 0-clases tales que $M \subseteq M'$ entonces $\underline{\mathbf{A}}(M') \subseteq \underline{\mathbf{A}}(M)$.*

[4] Nótese que

$$\{B \in \mathfrak{Top} : \forall f \in M, cod(f) \neq B\}$$

siempre es una subclase de $\underline{A}(M)$.

[5] Véase la proposición 1.1

En efecto, si $A \in \underline{\mathbf{A}}(M')$ y $f : X \to A$ es un elemento de M, entonces $f \in M'$ y, consecuentemente, f es un cociente. Por lo tanto $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$.♦

Nótese que $\underline{\mathbf{A}}(M)$ nunca es ni vacía ni aquella cuyo único miembro es el vacío, porque si M es cualquier *0-clase* entonces $M \subseteq M_{máx}$ y por la observación anterior $\underline{\mathbf{A}}\left(M_{máx}\right) \subseteq \underline{\mathbf{A}}(M)$, pero $\underline{\mathbf{A}}\left(M_{máx}\right) \neq \emptyset$. (De hecho $\mathbb{D} \subseteq \underline{\mathbf{A}}\left(M_{máx}\right)$)

La observación 1.7 permite afirmar que al ser $\left(M_j\right)_J$ una familia de *0-clases*, entonces, como

$$M_j \subseteq \bigcup_{j \in J} M_j, \forall j \in J,$$

se tiene que

$$\underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right) \subseteq \underline{\mathbf{A}}\left(M_j\right), \text{ para toda } j \in J.$$

y por consiguiente

$$\underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right) \subseteq \bigcap_{j \in J} \underline{\mathbf{A}}\left(M_j\right)$$

Recíprocamente, si

$$A \in \bigcap_{j \in J} \underline{\mathbf{A}}\left(M_j\right)$$

y $f : X \to A$ es un elemento de $\bigcup_{j \in J} M_j$, entonces existe $j_0 \in J$ tal que $f \in M_{j_0}$; y como para toda $j \in J$ $A \in \underline{\mathbf{A}}\left(M_j\right)$, en particular se tiene que

$$A \in \underline{\mathbf{A}}\left(M_{j_0}\right)$$

por lo que f es un cociente. En consecuencia, $A \in \underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right)$. Ha quedado probada una afirmación que sólo resta enunciar:

Lema 1.3

$$\underline{\mathbf{A}}\left(\bigcup_{j \in J} M_j\right) = \bigcap_{j \in J} \underline{\mathbf{A}}\left(M_j\right) \quad ♦$$

La propiedad de ser *1-clase* tiene una relación muy estrecha con la correflexividad; para saber cuál es el tipo de relación que guardan, primero se verán los dos resultados siguientes.

Lema 1.4 *Si $\left(B_j\right)_J$ es una partición de un conjunto Y y $f : X \to Y$ es una función suprayectiva, entonces siendo $A_j = f^{-1}(B_j)$, $j \in J$, se tendrá que $\left(A_j\right)_J$ es una partición de X.*

Demostración 10 *Se tiene que*

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(B_j) = f^{-1}\left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = f^{-1}(Y) = X$$

Debido a la suprayectividad de f tenemos que para cualquier $j \in J$ y cualquier $b \in B_j$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = b$. Por lo tanto, $A_j \neq \varnothing$, para toda $j \in J$. Finalmente, si para $j, k \in J$ con $j \neq k$ se tiene que $x \in A_j \cap A_k$, entonces $x \in \left[f^{-1}(B_j) \cap f^{-1}(B_k)\right] = f^{-1}(B_j \cap B_k)$. Por lo tanto $f(x) \in B_j \cap B_k \underset{\bullet}{\nabla}$. Esto prueba que $\left(A_j\right)_J$ es una partición de X.♦

Proposición 1.4 *Si $\left(A_j\right)_J$ es una familia ajena de espacios topológicos no vacíos y*

$$f : (X, \tau) \to \coprod_{j \in J} A_j$$

es una función continua y suprayectiva, entonces, siendo $X_j = f^{-1}(A_j)$ y $\tau_j = \tau|_{X_j}$, se tiene que $(X, \tau) = \coprod_{j \in J} (X_j, \tau_j)$.

Demostración 11 *Por el lema anterior se tiene que $(X_j)_J$ es una partición de X; por lo tanto el sumidero (cartesiano) de inclusiones $(\iota_j : X_j \to X)_J$ es un coproducto cartesiano de la familia $(X_j)_J$. Por otro lado, debido a la continuidad de f y al hecho de que A_j es abierto en $\coprod_{j\in J} A_j$, para toda $j \in J$, resulta que $X_j \in \tau$, $\forall j \in J$; finalmente puesto que $\tau_j = \tau|_{X_j}$, $\forall j \in J$, están dadas las condiciones que permiten aplicar el resultado establecido en la proposición **??** y asegurar que: τ es la topología final para X correspondiente a $(\tau_j)_J$ y a $(\iota_j)_J$, y por lo tanto el sumidero*

$$(\iota_j : (X_j, \tau_j) \to (X, \tau))_J$$

es un coproducto topológico, es decir, $(X, \tau) = \coprod_{j\in J} (X_j, \tau_j)$.♦

Ahora sí, ya se puede ver qué relación guardan las *1-clases* con la subcategorías correflexivas.

1.5. *1-clases* y Correflexividad

Teorema 1.1 *Si M es una 1-clase, entonces $\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{M})$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.*

Demostración 12 *Se probarán las siguientes afirmaciones:*
(i) $\underline{\mathbf{A}}(M)$ está cerrada bajo la formación de coproductos;
(ii) $\underline{\mathbf{A}}(M)$ está cerrada bajo la formación de cocientes.
(i) Sea $(A_j)_J$ una familia arbitraria de $\underline{\mathbf{A}}(M)$-espacios no vacíos y supóngase que

$$f : X \to \coprod_{j\in J} A_j$$

es una M-flecha. Para cada $j \in J$ sea

$$X_j = f^{-1}(A_j) \qquad 6$$

Debido a la proposición anterior se tiene que

$$X = \coprod_{j\in J} X_j$$

y si para cada $j \in J$, hacemos $f_j = f|_{X_j}^{A_j}$ y además $\iota_j : X_j \hookrightarrow X$ y $\eta_j : A_j \hookrightarrow \coprod_{j\in J} A_j$ son las respectivas inclusiones entonces para toda $j \in J$ el diagrama conmutativo

diagrama

es un cuadrado cartesiano en $\mathfrak{Top}$, ya que si $\alpha_j : W \to X$ y $\beta_j : W \to A_j$, son funciones continuas tales que

$$f\alpha_j = \eta_j \beta_j$$

o diagramaticalmente

diagrama

entonces se tiene que $f\alpha_j(W) \subseteq A_j$ porque $\eta_j\beta_j(W) \subseteq A_j$; en consecuencia

$$\alpha_j(W) \subseteq f^{-1}(A_j) = X_j$$

por lo que es posible considerar la restricción $\alpha_j|^{X_j}$ y hacer γ_j igual a tal restricción[7], lo cual da lugar al diagrama conmutativo:

diagrama

Y si $\delta_j : W \to X_j$ fuera otra función continua que también hiciera conmutar al diagrama, se tendría en particular para toda $w \in W$ que

$$\delta_j(w) = \iota_j\delta_j(w) = \alpha_j(w) \ ,$$

o sea que coincidiría con $\alpha_j|^{X_j}$. Por lo tanto el cuadrado es cartesiano. Como $f \in M$ y M es una 1-clase resulta que $(f_j : X_j \to A_j) \in M$, para toda $j \in J$. Y a consecuencia de que los A_j son $\underline{\mathbf{A}}(M)$-espacios no vacíos, todas las

[7]Recuérdese que si $f : A \to B$ es cualquier función y $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ y $f(A') \subseteq B'$, entonces se puede definir la restricción $f|_{A'}^{B'}$ como $f|_{A'}^{B'}(a) = f(a)$, $\forall a \in A'$.

f_j son cocientes; esto implica que f también es un cociente (lema 2.3). En efecto, si se supone que $g : \coprod_{j\in J} A_j \to Z$ es una función tal que gf es continua, entonces para toda $j \in J$ se tiene la continuidad de $gf\iota_j = g\eta_j f_j$, de lo cual se sigue que también $g\eta_j$ es continua para toda $j \in J$ (pues f_j es cociente); y puesto que es final el sumidero $(\eta_j)_J$, resulta la continuidad de g, que es a lo que se quería llegar. Por lo tanto, $\coprod A_j \in \underline{\mathbf{A}}(M)$ y queda probado que $\underline{\mathbf{A}}(M)$ está cerrada bajo la formación de coproductos.
(ii) Sean $A \in \underline{\mathbf{A}}(M)$ y $p : A \to X$ un cociente arbitrario. Se quiere probar que X también está en $\underline{\mathbf{A}}(M)$. Supóngase que $f : Y \to X$ es una M-flecha. Considérese el producto fibrado $(\overline{p}, \overline{f})$ de p y f, es decir supóngase que el diagrama

diagrama

es un cuadrado cartesiano. Como M es una 1-clase y $f \in M$, entonces también $\overline{f} \in M$ y por consiguiente es un cociente. En consecuencia, si $g : X \to Z$ es una función tal que la composición gf es continua también resulta continua la composición $gf\overline{p} = gp\overline{f}$. Pero $p\overline{f}$ es un cociente; luego, g es continua y por lo tanto, f también es un cociente. Por lo tanto, $X \in \underline{\mathbf{A}}(M)$. Esto demuestra que $\underline{\mathbf{A}}(M)$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$.♦

También es válido el recíproco del teorema anterior, es decir: toda subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ es de la forma $\underline{\mathbf{A}}(M)$, donde M es una *1-clase*. En el ejemplo 1.5 anterior se mostró que si $\underline{A}$ es una subcategoría bicorreflexiva de $\mathfrak{Top}$ y M es la *0-clase* de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}(M)$. Pues bien, esto lleva a la siguiente:

Proposición 1.5 *Si $\underline{A}$ es bicorreflexiva en $\mathfrak{Top}$ y $\widetilde{M}$ es la 1-clase generada por la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}(\widetilde{M})$.*

Demostración 13 *Sea M la clase de las $\underline{A}$-correflexiones y sea $\widetilde{M}$ la 1-clase generada por M. Puesto que $M \subseteq \widetilde{M}$, se tiene por la observación 1.7, que $\underline{A}(\widetilde{M}) \subseteq \underline{A}(M) = \underline{A}$. Ahora sea $A \in \underline{A}$ y sea $f : X \to A$ un elemento de $\widetilde{M}$. Más arriba, en el lema 1.2, quedaron descritos los elementos de la 1-clase generada por una 0-clase arbitraria; de ahí que para f exista un cuadrado cartesiano*

diagrama

donde f' es una $\underline{A}$-correflexión de A' es decir, $f' \in M$. Puesto que $A \in \underline{A}$, existe una única $g : A \to X'$ continua y tal que $f'g = v$. Entonces conmuta el diagrama

diagrama

Puesto que el cuadrado es cartesiano, existe una única $h : A \to X$ continua tal que $uh = g$ y $fh = 1_A$, entonces h es sección de f y por lo tanto f es una cociente. Esto prueba que $\underline{A} \subseteq \underline{A}(\widetilde{M})$, con lo que la proposición queda demostrada.♦

Como corolario del teorema anterior se tiene el siguiente resultado.

Corolario 1.1 *Para una 1-clase M arbitraria, si $\underline{A} = \underline{A}(M)$ y si M' es la clase de las $\underline{A}$-correflexiones, entonces $\underline{A} = \underline{A}(M' \cup M)$.*

Demostración 14 *En efecto, por el lema 1.3*

$$\underline{A}(M' \cup M) = \underline{A}(M') \cap \underline{A}(M) = \underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A} \ .♦$$

En la sección que sigue, se verá que hay un tipo muy especial de *1-clases* que surge a raíz de los siguientes conceptos.

1.6. *1-clases* de E-fibraciones suprayectivas

Definición de E-fibración.

Definición 1.5 *Se dice que una función continua*

$$f : X \to Y$$

***tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a un espacio topológico* Z** *si dado un diagrama conmutativo de funciones continuas:*

diagrama

en el que para toda $z \in Z$ $h_0(z) = (z, 0)$, existe una función continua

$$\widetilde{H} : Z \times I \to X$$

que hace conmutar los triángulos que determina en el diagrama

diagrama

En este caso se dice que $\widetilde{H}$ es un levantamiento de H que empieza con g. Además, si E es una clase no vacía de espacios topológicos, f ***se llama una E-fibración*** *si f tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a todo espacio miembro de la clase E, es decir, si dados cualesquiera $Z \in E$, una función continua $g : Z \to X$ y una homotopía*

$$H : Z \times I \to Y$$

que empieza con fg, existe una elevación $\widetilde{H} : Z \times I \to X$ que empieza en g, es decir tal que $f\widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(z, 0) = g(z), \forall z \in Z$.

La clase de las E-fibraciones suprayectivas es *1-clase.*

Proposición 1.6 *Sea E cualquier clase no vacía de espacios topológicos y sea M_E la clase de las E-fibraciones suprayectivas. Entonces M_E es una 1-clase.*

Demostración 15 *La prueba de que M_E es 0-clase resulta obvia, pues sus elementos son funciones continuas y suprayectivas. Se quiere probar que M_E es 1-clase, es decir, hay que ver que si el cuadrado conmutativo*

diagrama

es cartesiano, entonces $f \in M_E$ implica que $f' \in M_E$ (esto es, que f' es una E-fibración suprayectiva). Primero se verá que f' es E-fibración; para ello tómese un $X \in E$ arbitrario, y supóngase que conmuta el siguiente diagrama

diagrama

Al suponer que estos dos cuadrados son conmutativos, también conmuta el diagrama

diagrama

Como por hipótesis f es E-fibración, existe $\widetilde{H} : X \times I \to Y$ continua tal que conmuta el diagrama:

diagrama

En particular se tiene del triángulo inferior que

$$f\widetilde{H} = hH$$

ó equivalentemente, es conmutativo el diagrama

diagrama

y como el cuadrado es cartesiano, existe una única función continua

$$\widetilde{\widetilde{H}} : X \times I \to Z$$

que hace conmutar a los triángulos que determina en el diagrama

diagrama

Ahora obsérvese que las funciones continuas

$$\widetilde{\widetilde{H}}h_0 : X \to Z \quad y \quad g : X \to Z$$

son tales que

$$f'\widetilde{\widetilde{H}}h_0 = Hh_0 = f'g \quad y \quad h'\widetilde{\widetilde{H}}h_0 = \widetilde{H}h_0 = h'g$$

Esto implica que

$$\widetilde{\widetilde{H}}h_0 = g$$

ya que, de acuerdo con la observación 1.1, la pareja (f', h') *es una monofuente. Por lo tanto* H *puede levantarse a una homotopía* $\tilde{\tilde{H}}$ *que empieza en* g*, es decir, tal que*

$$f'\tilde{\tilde{H}} = H \quad y \quad \tilde{\tilde{H}}h_0 = g$$

o sea que se tiene el diagrama

diagrama

Por lo tanto f' *tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a todo espacio topológico* $X \in E$*. Por lo tanto* f' *es una* E*-fibración. Sólo falta ver que* f' *es suprayectiva, pero la demostración es completamente análoga a la prueba del ejemplo 1.1.* ♦

Definición 1.6 La función f' anterior se llama ***E-fibración inducida por f a través de h.***

Como consecuencia de la proposición anterior y del teorema 1.1 se tiene que la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ asociada a cualquier clase M_E de E-fibraciones suprayectivas es bicorreflexiva; para no cargar la notación se escribirá $\underline{A}_E$ en lugar de $\underline{A}(M_E)$ al denotarla.

Se ha cumplido pues con el propósito de este capítulo. Como casos particulares de $\underline{A}_E$ están los siguientes:

Subcategorías correflexivas que resultan de subcategorías asociadas a clases de E-fibraciones suprayectivas.

(1) Cuando E es la clase de todos los espacios topológicos, las E-fibraciones reciben el nombre de **fibraciones de Hurewicz**; debido a esto, la **subcategoría asociada a la clase de las fibraciones suprayectivas de Hurewicz** se denotará como $\underline{A}_{\mathcal{H}}$; sus elementos son aquellos espacios B que siempre que figuran como codominios de fibraciones suprayectivas de Hurewicz es que tales fibraciones son cocientes.

(2) $\underline{A}_{\mathcal{S}}$, donde $\mathcal{S}$ es la clase de los espacios homeomorfos a los cubos $I^n, n \in \mathbb{N}$. En este caso las $\mathcal{S}$-fibraciones se llaman **fibraciones de Serre**, por lo que $\underline{A}_{\mathcal{S}}$ (**la subcategoría de $\mathfrak{Top}$ asociada a las $\mathcal{S}$-fibraciones suprayectivas**) es la categoría de los espacios B que siempre que figuran como codominios de fibraciones suprayectivas de Serre es que tales fibraciones resultan cocientes.

(3) Recuérdese que un espacio X es contráctil si la función 1_X es homotópica a una constante.[8] Se denotará por $\mathcal{C}'$ a la clase de los espacios contráctiles; las $\mathcal{C}'$-*fibraciones* no reciben ningún nombre específico. También será objeto de este estudio **la subcategoría correflexiva $\underline{A}_{\mathcal{C}'}$ asociada a la clase de las $\mathcal{C}'$-fibraciones suprayectivas**.

Lo que sigue es un analísis de estas categorías y de algúnas relaciones que hay entre ellas.

[8]Los matemáticos de habla castellana que comenzaron a verter a esta lengua el tema de la homotopía cometieron el error de traducir bárbaramente *contractible* como *contríble* (palabra inexistente en español hasta entonces). Una lamentable consecuencia es que el matemático hispanoparlante contemporáneo se halle ante la disyuntiva de tener que recurrir este barbarismo que, por torpeza e ignorancia, entronizaron sus colegas antecesores, o bien, rectificar la dicción empleando la palabra *contáctil* (existente desde antaño en nuestro léxico), a despecho de que parezca que se presenta un concepto nuevo. En este trabajo se ha preferido optar por esta última vía.