Categorías Concretas Topológicas

Roberto Vázquez García
Instituto de Matemáticas, UNAM

Junio de 2012

Abstract

A partir de trabajos publicados en las dos primeras décadas de la segunda mitad del siglo XX (como las Concrete categories de A.G. Kurosh o las Catégories et Structures de Ch. Ehresmann) surgió una exposición no tradicional de la Teoría de las Categorías fincada en la idea de concreción relativa a una categoría base X, la cual viene dada por un funtor fiel $U : K \to X$, siendo K una categoría arbitraria. Entonces se habla de la pareja (K, U) como de una categoría concreta de X-objetos; cuando $X = Set$, (K, U) es una categoría concreta de conjuntos estructurados. Ejemplos de éstas son: Grd, Sgr, Mon, Grp, Rng, Fld, por mencionar algunas de las algebráicas. En la década del 70 distintos trabajos destacaron la importancia de las categorías concretas topológicas de conjuntos estructurados (cctce), (v. gr. Topological structures de H. Herrlich) dos de cuyos ejemplos son Gra y Top. Los objetivos que se alcanzan en el presente artículo conciernen tanto a las cctce propiamente fibradas (definidas en K.21), como al estudio de las subcategorías epirreflexivas de las cctce.

Sea $\underline{K}$ una categoría concreta, es decir, existe un funtor fiel

$$U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$$

Entonces, cada $\underline{K}$-objeto es una pareja (X, ξ), donde $X = U(X, \xi)$ se llama **conjunto subyacente del $\underline{K}$-objeto** (X, ξ) y ξ es **una $\underline{K}$-estructura de** X que se llama **$\underline{K}$-estructura subyacente del $\underline{K}$-objeto** (X, ξ). Para dos $\underline{K}$-objetos (X, ξ) y (Y, η) se tiene que U define una aplicación inyectiva

$$\underline{K}((X, \xi), (Y, \eta)) \to \mathfrak{Set}(X, Y)$$

Si identificamos al **conjunto de $\underline{K}$-morfismos** $\underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$ con su imagen según U, podemos decir que $\underline{K}((X, \xi), (Y, \eta))$ es un conjunto de funciones de X en Y que satisface las condiciones:

(M_1) Para cada $\underline{K}$-objeto (X, ξ) la función $1_X : (X, \xi) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo y coincide con $1_{(X,\xi)}$.

(M_2) Si

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta) \quad \text{y} \quad g : (Y, \eta) \to (Z, \zeta)$$

son $\underline{K}$-morfismos, entonces $gf : (X, \xi) \to (Z, \zeta)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

$\underline{K}$*.1 Definición.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta, X un conjunto, $(Y_i, \eta_i)_I$ una familia de $\underline{K}$-objetos donde I es una clase que no necesariamente es un conjunto, $(f_i : X \to Y_i)_I$ una familia de funciones. Una $\underline{K}$-estructura ξ de X es **inicial** respecto a $(X, (f_i)_I, (Y_i, \eta_i)_I)$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(1) Para toda $i \in I$, $f_i : (X, \xi) \to (Y_i, \eta_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

(2) Si (W, ω) es un $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ es una función tal que para toda $i \in I$ la composición $f_i g : (W, \omega) \to (Y_i, \eta_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces $g : (W, \omega) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

$\underline{K}$*.1.1 Lema.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta. Si ξ es una $\underline{K}$-estructura de X que es inicial respecto a $(X, (f_i)_I, (Y_i, \eta_i)_I)$ y ξ' es otra $\underline{K}$-estructura de X tal que

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi') \quad \text{y} \quad 1_X : (X, \xi') \to (X, \xi)$$

son $\underline{K}$-morfismos, entonces también ξ' es inicial respecto a $(X, (f_i)_I, (Y_i, \eta_i)_I)$.

Demostración. Obsérvese que

$$\left(X, \xi'\right) \xrightarrow{1_X} (X, \xi) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \eta_i) = \left(X, \xi'\right) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \eta_i)$$

de donde, para toda $i \in I$,

$$\left(X, \xi'\right) \xrightarrow{f_i} (Y_i, \eta_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo y se cumple $\underline{K}$*.1.(1)*. Si (W, ω) es un $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ es una función tales que, para toda $i \in I$, $fg : (W, \omega) \to (Y_i, \eta_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces, por $\underline{K}$*.1.(2)*, $g : (W, \omega) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo, de modo que

$$(W, \omega) \xrightarrow{g} \left(X, \xi'\right) = (W, \omega) \xrightarrow{g} (X, \xi) \xrightarrow{1_X} \left(X, \xi'\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo y se cumple $\underline{K}$*.1.(2)*. □

$\underline{K}$*.2 Definiciones.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta.

(1) Si son, Y un conjunto, $(X_i, \xi_i)_I$ una familia de $\underline{K}$-objetos, $(f_i : X_i \to Y)_I$ una familia de funciones, entonces una $\underline{K}$-estructura η de Y es **final** respecto a $((X_i, \xi_i)_I, (f_i)_I, Y)$ si se satisfacen las dos condiciones siguientes:

(a) Para toda $i \in I$, $f_i : (X_i, \xi_i) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

(b) Si (Z, ζ) es un $\underline{K}$-objeto y $g : Y \to Z$ es una función tal que para toda $i \in I$ la composición

$$gf_i : (X_i, \xi_i) \to (Z, \zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, entonces $g : (Y, \eta) \to (Z, \zeta)$ es un $\underline{K}$-morfismo.

(2) Un $\underline{K}$-morfismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es una **inmersión** si f es inyectiva y ξ es inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$.

(3) Un $\underline{K}$-morfismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un **cociente** si f es suprayectiva y η es final respecto a $((X, \xi), f, Y)$.

$\underline{K}$*.2.1 Lema.* Casi dual de $\underline{K}$*.1.1*. □

$\underline{K}$*.3 Definición.* Una categoría concreta $\underline{K}$ es **topológica** si para cualquier conjunto X, cualquier familia $(Y_i, \eta_i)_I$ de $\underline{K}$-objetos y cualquier familia de funciones $(f_i : X \to Y_i)_I$, existe una $\underline{K}$-estructura ξ en X que es inicial respecto a $(X, (f_i)_I, (Y_i, \eta_i)_I)$.

$\underline{K}$*.4 Teorema.* Cualquier categoría concreta topológica $\underline{K}$ es **cotopológica**; es decir: Si Y es un conjunto, $(X_i, \xi_i)_I$ es una familia de $\underline{K}$-objetos y $(f_i : X_i \to Y)_I$ es una familia de funciones, entonces existe una $\underline{K}$-estructura η en Y que es final respecto a $((X_i, \xi_i)_I, (f_i)_I, Y)$.

Demostración. Sea $\left(\eta_j\right)_J$ la familia de $\underline{K}$-estructuras en Y tales que, para todo $i \in I$, $f_i : (X_i, \xi_i) \to \left(Y, \eta_j\right)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Consideremos la familia de funciones $(1_Y)_J$; puesto que $\underline{K}$ es topológica, existe una $\underline{K}$-estructura η en Y que es inicial respecto a $\left(Y, (1_Y)_J, \left(Y, \eta_j\right)_J\right)$ y por $\underline{K}$*.1(1)*, para toda $j \in J$,

$$1_Y : (Y, \eta) \to \left(Y, \eta_j\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por definición de la familia $\left(\eta_j\right)_J$, para toda $i \in I$ la función $f_i : X_i \to Y$ es tal que, para toda $j \in J$, la composición

$$1_Y \circ f_i : (X_i, \xi_i) \to \left(Y, \eta_j\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, de donde, por $\underline{K}$*.1(2)*, para toda $i \in I$, $f_i : (X_i, \xi_i) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y se cumple $\underline{K}$*.2(1)(a)*. Sean, (Z, ζ) un $\underline{K}$-objeto y $g : Y \to Z$ una función, tales que para toda $i \in I$

$$gf_i : (X_i, \xi_i) \to (Z, \zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Denotemos por η_g a la $\underline{K}$-estructura en Y que es inicial respecto a $(Y, g, (Z, \zeta))$; entonces, para toda $i \in I$, la función $f_i : X_i \to Y$ es tal que

$$gf_i : (X_i, \xi_i) \to (Z, \zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}$*.1(2)*, para toda $i \in I$,

$$f_i : (X_i, \xi_i) \to \left(Y, \eta_g\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; en consecuencia, $\eta_g \in \left(\eta_j\right)_J$ y, por lo tanto,

$$1_Y : (Y, \eta) \to \left(Y, \eta_g\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Pero, por $\underline{K}$*.1(1)*,

$$g : \left(Y, \eta_g\right) \to (Z, \zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; entonces, por (M_2), también la composición

$$g = g \circ 1_Y : (Y, \eta) \to (Z, \zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, y se satisface $\underline{K}$*.2(b)*. En consecuencia, η es una $\underline{K}$-estructura final respecto a

$$\left((X_i, \xi_i)_I, (f_i)_I, Y\right). \qquad \square$$

$\underline{K}$*.5 Teorema.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$ el funtor que olvida y $D : I \to \underline{K}$ un funtor con I pequeña. Si para toda $i \in I$ es $D(i) = (X_i, \xi_i)$ y

$$(\theta_i : X \to X_i)_I \quad \text{es } \lim UD \text{ (en } \mathfrak{Set})$$

entonces

$$(\theta_i : (X, \xi) \to (X_i, \xi_i))_I = \lim D$$

donde ξ es una $\underline{K}$-estructura en X inicial respecto a $(X, (\theta_i)_I, (X_i, \xi_i)_I)$. En particular, $\underline{K}$ es completa.

Demostración. Sea $(X, \theta) = \lim UD$ en la categoría $\mathfrak{Set}$. Entonces

$$\theta : X \to UD$$

es una transformación natural del funtor constante de valor X de I en $\mathfrak{Set}$. Para cualquier transformación natural $\psi : Y \to UD$ existe una única función $f : Y \to X$ tal que $\theta f = \psi$. Sea ξ una $\underline{K}$-estructura en X inicial respecto a $(X, (\theta_i)_I, (X_i, \xi_i)_I)$. Por $\underline{K}$*.1(1)*, para toda $i \in I$,

$$\theta_i : (X, \xi) \to (X_i, \xi_i)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Si $m : i \to j$ es un I-morfismo, se tiene

$$UDm\theta_i = \theta_j$$

como funciones de X en X_j; entonces, la igualdad es válida como $\underline{K}$-morfismos (porque U es fiel); es decir,

$$\theta : (X, \xi) \to D$$

es una transformación natural. Sea

$$\psi : (Y, \eta) \to D$$

otra transformación natural; entonces $\psi : Y \to UD$ es natural porque existe una función única $f : Y \to X$ tal que $\theta f = \psi$. En particular, para toda $i \in I$, resulta

$$\theta_i f = \psi_i : (Y, \eta) \to (X_i, \xi_i)$$

un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}$*.1(2)*, $f:(Y,\eta)\to(X,\xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo y la igualdad $\theta f=\psi$ es válida en $\underline{K}$ por ser válida en $\mathfrak{Set}$ (porque U es fiel). Finalmente, sea $f':(Y,\eta)\to(X,\xi)$ otro $\underline{K}$-morfismo tal que $\theta f'=\psi$; entonces esta igualdad es válida en $\mathfrak{Set}$, por lo que $f'=f$, lo cual prueba que $(\theta_i:(X,\xi)\to(X_i,\xi_i))_I=\lim D$. □

$\underline{K}$*.6 Ejemplo.* Si $\underline{K}$ es topológica y $(X_i,\xi_i)_I$ es una familia de $\underline{K}$-objetos, entonces $(\Pi X_i,\xi)$, con proyecciones

$$p_i:(\Pi X_i,\xi)\to(X_i,\xi_i)$$

es un producto de la familia $(X_i,\xi_i)_I$, donde ξ es una $\underline{K}$-estructura en ΠX_i, inicial respecto a $(\Pi X_i,(p_i)_I,(X_i,\xi_i)_I)$, siendo $p_i:\Pi X_i\to X_i$ la i-proyección.

$\underline{K}$*.7 Teorema.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $U:\underline{K}\to\mathfrak{Set}$ el funtor que olvida y $D:I\to\underline{K}$ un funtor con I pequeña. Si para toda $i\in I$ es $D(i)=(X_i,\xi_i)$ y

$$(\theta_i:X_i\to X)_I \qquad \text{es colim}UD \text{ (en } \mathfrak{Set})$$

entonces

$$(\theta_i:(X_i,\xi_i)\to(X,\xi))_I=\text{colim}D$$

donde ξ es una $\underline{K}$-estructura en X final respecto a $((X_i,\xi_i)_I,(\theta_i)_I,X)$. En particular, $\underline{K}$ es cocompleta.

Demostración. Si

$$(\vartheta_i:(X_i,\xi_i)\to(Y,\eta))_I$$

es un $\underline{K}$-sumidero natural para D, entonces

$$(\vartheta_i:X_i\to Y)_I$$

es un $\mathfrak{Set}$-sumidero natural para UD. Por consiguiente, existe una única función $h:X\to Y$ tal que, para toda $i\in I$,

$$h\theta_i=\vartheta_i$$

Por la finalidad de ξ,

$$h:(X,\xi)\to(Y,\eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por lo tanto, $(\theta_i:(X_i,\xi_i)\to(X,\xi))_I=\text{colim}D$. □

$\underline{K}$*.8 Definición.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica. Si X es un conjunto arbitrario, sea $(\xi_i)_I$ la familia de $\underline{K}$-estructuras en X. Una **$\underline{K}$-estructura discreta** ξ_X en X es una $\underline{K}$-estructura inicial en X respecto a $(X,(1_X)_I,(X,\xi_i)_I)$. Una **$\underline{K}$-estructura indiscreta** ξ^X en X es una $\underline{K}$-estructura final en X respecto a $((X,\xi_i)_I,(1_X)_I,X)$.

$\underline{K}$*.9 Teorema.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica y X un conjunto, arbitrarios. Entonces:

(a) Una $\underline{K}$-estructura ξ en X es discreta si, y sólo si, para cualquier $\underline{K}$-objeto (Y,η) y cualquier función $f:X\to Y$,

$$f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Una $\underline{K}$-estructura discreta en X es única salvo por un $\underline{K}$-isomorfismo.

(b) Una $\underline{K}$-estructura ξ en X es indiscreta si, y sólo si, para cualquier $\underline{K}$-objeto (Y,η) y cualquier función $f:Y\to X$,

$$f:(Y,\eta)\to(X,\xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Una $\underline{K}$-estructura indiscreta en X es única salvo por un $\underline{K}$-isomorfismo.

Demostración de (a): Consideremos una $\underline{K}$-estructura discreta ξ_X en X y sean (Y,η) un $\underline{K}$-objeto y $f:X\to Y$ una función, cualesquiera. Sea ξ_f una $\underline{K}$-estructura inicial en X respecto a $(X,f,(Y,\eta))$. Por $\underline{K}$*.1(1)* es

$$f:\left(X,\xi_f\right)\to(Y,\eta)$$

un $\underline{K}$-morfismo. Puesto que $\xi_f \in (\xi_i)_I$, (la familia de $\underline{K}$-estructuras en X), por $\underline{K}$.*8* es

$$1_X : (X, \xi_X) \to \left(X, \xi_f\right)$$

un $\underline{K}$-morfismo y, por (M_2), es

$$f : (X, \xi_X) \to (Y, \eta)$$

un $\underline{K}$-morfismo.

Recíprocamente, supongamos que la $\underline{K}$-estructura ξ en X es tal que, para cualquier $\underline{K}$-objeto (Y, η) y cualquier función $f : X \to Y$,

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; entonces, ξ es inicial respecto a $(X, (1_X)_I, (X, \xi_i)_I)$ porque:

(1) Para toda $i \in I$, $1_X : (X, \xi) \to (X, \xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y se cumple $\underline{K}$.*1(1)*.

(2) Sean, (W, ω) un $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ una función, tales que para toda $i \in I$ la composición $1_X g : (W, \omega) \to (X, \xi_i)$ es un $\underline{K}$-morfismo; en particular, cuando $\xi_i = \xi$ se tiene que $g : (W, \omega) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo, y se cumple $\underline{K}$.*1(2)*.

Esto prueba la discreción de ξ. Finalmente, sean ξ y ξ' dos $\underline{K}$-estructuras discretas en X; entonces

$$1_X : (X, \xi) \to \left(X, \xi'\right) \quad \text{y} \quad 1_X : \left(X, \xi'\right) \to (X, \xi)$$

son $\underline{K}$-morfismos, y sus composiciones son

$$1_{(X,\xi)} \quad \text{y} \quad 1_{(X,\xi')}$$

respectivamente; en consecuencia, son $\underline{K}$-morfismos.

Demostración de (b): Casi dual de la de (a). □

$\underline{K}$.*10 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica y $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo, entonces:

(a) f es monomorfismo si, y sólo si, $f : X \to Y$ es inyectiva.
(b) f es epimorfismo si, y sólo si, $f : X \to Y$ es suprayectiva.
(c) f es bimorfismo si, y sólo si, $f : X \to Y$ es biyectiva.
(d) f es isomorfismo si, y sólo si, $f : X \to Y$ es inmersión y cociente.
(e) f es monomorfismo extremado si, y sólo si, $f : X \to Y$ es una inmersión.
(f) f es epimorfismo extremado si, y sólo si, $f : X \to Y$ es un cociente.
(g) f es monomorfismo regular si, y sólo si, $f : X \to Y$ es una inmersión.
(h) f es epimorfismo regular si, y sólo si, $f : X \to Y$ es un cociente.

Demostración de (a)

($\Rightarrow$) Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $fx_1 = fx_2$. Si $W \neq \varnothing$, por $\underline{K}$.*9(a)* tenemos los $\underline{K}$-morfismos

$$g_1 : (W, \xi_W) \to (X, \xi) \qquad g_2 : (W, \xi_W) \to (X, \xi)$$

tales que

$$g_1 W = x_1 \qquad g_2 W = x_2$$

Entonces

$$fg_1 : (W, \xi_W) \to (Y, \eta) \qquad fg_2 : (W, \xi_W) \to (Y, \eta)$$

son $\underline{K}$-morfismos tales que

$$fg_1 = fg_2$$

Por consiguiente $g_1 = g_2$, de donde $x_1 = x_2$ y $f : X \to Y$ es inyectiva.

($\Leftarrow$) Puesto que el funtor que olvida es fiel, refleja monomorfismos.

Demostración de (b)

($\Rightarrow$) Sean, $Z = Y/fX$, $p : Y \to Z$ la proyección canónica, $z_0 = pfX$, $g : Y \to Z$ la función constante de valor z_0. Por $\underline{K}$.*9(b)* tenemos los $\underline{K}$-morfismos

$$p : (Y, \eta) \to \left(Z, \xi^Z\right) \qquad g : (Y, \eta) \to \left(Z, \xi^Z\right)$$

Es claro que

$$pf : (X, \xi) \to \left(Z, \xi^Z\right) \qquad gf : (X, \xi) \to \left(Z, \xi^Z\right)$$

son $\underline{K}$-morfismos iguales, de donde $p = g$ y $fX = Y$.

($\Leftarrow$) Puesto que el funtor que olvida es fiel, refleja epimorfismos.

Demostración de (c) Por (a) y (b).

Demostración de (d)

($\Rightarrow$) f es inmersión porque ξ es inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$, ya que si (W, ω) es cualquier $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ es una función tal que

$$fg : (W, \omega) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, entonces

$$f^{-1}(fg) : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; pero

$$f^{-1}(fg) = g : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

Casi dualmente resulta f ser un cociente.

($\Leftarrow$) Puesto que f es inmersión y cociente, es biyectiva y podemos considerar $f^{-1} : Y \to X$. Por $\underline{K}$.*2(2)* ξ es inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$, y puesto que por (M_1)

$$ff^{-1} : (Y, \eta) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, por $\underline{K}$.*1(2)* se tiene que

$$f^{-1} : (Y, \eta) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por (M_2),

$$f^{-1}f \quad \text{y} \quad ff^{-1}$$

son $\underline{K}$-morfismos, y son respectivamente iguales a

$$1_{(X,\xi)} \quad \text{y} \quad 1_{(Y,\eta)}$$

Por consiguiente, f es un isomorfismo.

Demostración de (e) y (g)

(α) En general se tiene la implicación:

$$f \text{ es monomorfismo regular } \Rightarrow f \text{ es monomorfismo extremado}$$

(β) Veamos que:

$$f \text{ es monomorfismo extremado } \Rightarrow f \text{ es inmersión}$$

En efecto, sea ξ' una $\underline{K}$-estructura en X que sea inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$. Entonces $1_X : X \to X$ es una función tal que

$$f \circ 1_X : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; entonces, por $\underline{K}$.*1(2)*

$$1_X : (X, \xi) \to \left(X, \xi'\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo y por $\underline{K}.10$(b) es un $\underline{K}$-epimorfismo. Puesto que f es monomorfismo extremado, resulta

$$1_X : (X, \xi) \to \big(X, \xi'\big)$$

un isomorfismo, y es claro que su inverso es

$$1_X : \big(X, \xi'\big) \to (X, \xi)$$

Ahora, para cualquier $\underline{K}$-objeto (W, ω) y cualquier función $g : W \to X$ tal que

$$fg : (W, \omega) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, se debe tener, por la inicialidad de ξ', que

$$g : (W, \omega) \to \big(X, \xi'\big)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; entonces

$$g = 1_X \circ g : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, lo que prueba que ξ es inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$. En consecuencia, f es una inmersión.

(γ) Finalmente, se verá que

$$f \text{ es una inmersión } \Rightarrow f \text{ es monomorfismo regular}$$

En efecto, por la definición de $\underline{K}$-inmersión, se sabe que es válida la implicación

$$f \text{ es una } \underline{K}\text{-inmersión } \Rightarrow f \text{ es } \underline{K}\text{-monomorfismo}$$

Por (a),

$$f \text{ es } \underline{K}\text{-monomorfismo} \Rightarrow f : X \to Y \text{ es inyectiva}$$

y esto último implica que f es el igualador de $g_1, g_2 : Y \to Z$ en $\mathfrak{Set}$. Por $\underline{K}.9(b)$

$$g_1, g_2 : (Y, \eta) \to \Big(Z, \xi^Z\Big)$$

son $\underline{K}$-morfismos. En consecuencia, $g_1 f = g_2 f$ en $\underline{K}$. Sea

$$f' : \big(X', \xi'\big) \to (Y, \eta)$$

un $\underline{K}$-morfismo tal que $g_1 f' = g_2 f'$ en $\underline{K}$; entonces, $g_1 f' = g_2 f$ en $\mathfrak{Set}$, por lo que existe una función $h : X' \to X$ tal que $fh = f'$ en $\mathfrak{Set}$, pero ξ es inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$. Por lo tanto,

$$h : \big(X', \xi'\big) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo tal que $fh = f'$ en $\underline{K}$; y h es única porque f es un $\underline{K}$-monomorfismo. Por consiguiente, f es el igualador de $g_1, g_2 : Y \to Z$ en $\underline{K}$.

En consecuencia son equivalentes las tres condiciones para $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$, lo que prueba (e) y (g).

Demostración de (f) y (h). Casi dual de las de (e) y (g). $\square$

$\underline{K}$*.11 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica, entonces es una (epi, mono extremada)-categoría y una (epi extremada, mono)-categoría.

Demostración. Para probar que $\underline{K}$ es una (epi extremada, mono)-categoría, por $\underline{K}.10$ (f) y (h), basta probar que es una (epi regular, mono)-categoría, y por la proposición 33.4 de (H-S)[1], basta probar que $\underline{K}$ es (epi regular, mono)-factorizable.

[1] H. Herlich, G. Strecker; “Category Theory”, Allyn and Bacon, 1973.

Ahora, sea $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ cualquier $\underline{K}$-morfismo y

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & Y \\ & M \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

la (epi, mono)-factorización de f en $\mathfrak{Set}$. Sea μ una $\underline{K}$-estructura en M que sea final respecto a $((X,\xi),e,M)$; entonces, $e:(X,\xi)\to(M,\mu)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}$*.10*(b), y por ser μ una $\underline{K}$-estructura final, resulta ser e un $\underline{K}$-cociente; por $\underline{K}$*.10*(h), e es un epimorfismo regular. Por su parte, la función $m:M\to Y$ es tal que

$$me=f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; entonces, por $\underline{K}$*.2.1*(*b*), es $m:(M,\mu)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo que, por $\underline{K}$*.10*(a), es un monomorfismo, y $f=me$ en $\underline{K}$, lo cual prueba que $\underline{K}$ es (epi regular, mono)-factorizable. La demostración de que $\underline{K}$ es una (epi, mono extremada)-categoría es casi dual de la anterior. □

$\underline{K}$*.12 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica, entonces:
(a) Un $\underline{K}$-objeto (X,ξ) es proyectivo si, y sólo si, ξ es una estructura discreta en X.
(b) Un $\underline{K}$-objeto (X,ξ) es inyectivo si, y sólo si, $X\neq\varnothing$ y ξ es una estructura indiscreta en X.
(c) Si $X\neq\varnothing$ entonces (X,ξ_X) es un separador de $\underline{K}$.
(d) Si $\operatorname{card}X\geqslant 2$, entonces $\left(X,\xi^X\right)$ es un coseparador de $\underline{K}$.

Demostración de (a)

($\Rightarrow$) Por $\underline{K}$*.8*

$$1_X:(X,\xi_X)\to(X,\xi)$$

es un $\underline{K}$-monomorfismo; por $\underline{K}$*.10*(b), es $\underline{K}$-epimorfismo; entonces existe un $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to(X,\xi_X)$ tal que $1_X\circ f=1_{(X,\xi)}$; en consecuencia, $f=1_X$ y

$$1_X:(X,\xi_X)\to(X,\xi)$$

es un isomorfismo. Por $\underline{K}$*.1.1* ξ es inicial respecto a $(X,(1_X)_I,(X,\xi_i)_I)$, por lo que es discreta.

($\Leftarrow$) Sean, $g:(Z,\zeta)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-epimorfismo y $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ un $\underline{K}$-morfismo, arbitrarios. Por $\underline{K}$*.10*(b), $g:Z\to Y$ es suprayectiva, por lo que existe una función $h:X\to Z$ tal que $gh=f$ en $\mathfrak{Set}$. Puesto que ξ es discreta, por $\underline{K}$*.9*(b), $h:(X,\xi)\to(Z,\zeta)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Por (M_2), $gh=f$ en $\underline{K}$, lo que prueba que (X,ξ) es proyectivo.

Demostración de (b)

($\Rightarrow$) Sea (Y,η) un $\underline{K}$-objeto con $Y\neq\emptyset$. Por $\underline{K}$*.10*(a), el $\underline{K}$-morfismo

$$(\emptyset,\emptyset_X)\to(Y,\eta)$$

es un monomorfismo. Consideremos el $\underline{K}$-morfismo

$$(\emptyset,\emptyset_X)\to(X,\xi)$$

Por ser (X,ξ) inyectivo, debe existir un $\underline{K}$-morfismo $f:(Y,\eta)\to(X,\xi)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} & (\emptyset,\emptyset_X) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ (X,\xi) & & (Y,\eta) \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $X\neq\emptyset$. El resto de la demostración de la implicación es casi dual de la demostración de la primera parte de (a).

($\Leftarrow$) Casi dual de la demostración de la segunda parte de (a).

Demostración de (*c*)

Sean $g, h : (Y, \eta) \to (Z, \zeta)$ dos $\underline{K}$-morfismos distintos; entonces, $g \neq h$ en $\mathfrak{Set}$. Puesto que $X \neq \emptyset$, entonces X es un separador en $\mathfrak{Set}$, por lo que existe una función $f : X \to Y$ tal que $gf \neq hf$ en $\mathfrak{Set}$. Por $\underline{K}$.*9*(a), $f : (X, \xi_X) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-morfismo y es claro que $gf \neq hf$ en $\underline{K}$.

Demostración de (*d*)

Sean $g, h : (Z, \zeta) \to (Y, \eta)$ dos $\underline{K}$-morfismos distintos; entonces, $g \neq h$ en $\mathfrak{Set}$. Puesto que $cardX \geqslant 2$, entonces es X un coseparador en $\mathfrak{Set}$, por lo que existe una función $f : Y \to X$ tal que $fg \neq fh$ en $\mathfrak{Set}$. Por $\underline{K}$.*9*(b), $f : (Y, \eta) \to \left(X, \xi^X\right)$ es un $\underline{K}$-morfismo y es claro que $fg \neq fh$ en $\underline{K}$. $\square$

$\underline{K}$.*13 Teorema*. Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica y $U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$ es el funtor que olvida, entonces U posee un adjunto izquierdo V y un adjunto derecho W.

Demostración.

Definición de $V : \mathfrak{Set} \to \underline{K}$.

Para todo conjunto X,

$$VX = (X, \xi_X)$$

donde ξ_X es una $\underline{K}$-estructura discreta en X. Si $f : X \to Y$ es una función, por $\underline{K}$.*9*(a), es

$$f : (X, \xi_X) \to (Y, \xi_Y)$$

un $\underline{K}$-morfismo, y definimos

$$Vf = f$$

Así, si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

son funciones, entonces

$$\begin{aligned} V(gf) &= (X, \xi_X) \xrightarrow{gf} (Z, \xi_Z) \\ &= (X, \xi_X) \xrightarrow{f} (Y, \xi_Y) \xrightarrow{g} (Z, \xi_Z) \\ &= (Vg)(Vf) \end{aligned}$$

Y para cualquier conjunto X, se tiene que

$$V(1_X) = 1_{(X, \xi_X)}$$

Por lo tanto, V es un funtor.

V es adjunto izquierdo de U.

Sea

$$\alpha : \underline{K}[VX, (Y, \eta)] \to \mathfrak{Set}[X, Y]$$

la función definida para todo $\underline{K}$-morfismo $f : (X, \xi_X) \to (Y, \eta)$ por

$$\alpha f = f$$

Entonces:

α es inyectiva:

$$\alpha f = \alpha f' \Rightarrow f = f'$$

α es suprayectiva: Por $\underline{K}$.*9*(a), dada cualquier función $f : X \to Y$, se tiene el $\underline{K}$-morfismo

$$f : (X, \xi_X) \to (Y, \eta)$$

y

$$\alpha f = f$$

α es natural: Sean
$$g : (Y, \eta) \to (Z, \zeta) \qquad f : VX \to (Y, \eta) \qquad h : X' \to X$$
entonces
$$VX' \xrightarrow{Vh} VX \xrightarrow{f} (Y, \eta) = \underline{K}(Vh, 1) f$$

$$\begin{aligned} gf(Vh) &= \underline{K}(1, g)\, \underline{K}(Vh, 1) f \\ &= \underline{K}(Vh, g) f : VX' \to (Z, \zeta) \end{aligned}$$

$$\alpha(gf(Vh)) = gfh$$
$$\mathfrak{Set}(h, Ug)\, \alpha f = (Ug)(\alpha f) h = g(\alpha f) h = gfh$$
Por lo tanto,
$$\alpha(gf(Vh)) = (Ug)(\alpha f) h$$
Definición de $W : \mathfrak{Set} \to \underline{K}$.
Para todo conjunto X,
$$WX = \left(X, \xi^X\right)$$
donde ξ^X es una $\underline{K}$-estructura indiscreta en X. Si $f : X \to Y$ es una función, por $\underline{K}.9(b)$, es
$$f : \left(X, \xi^X\right) \to \left(Y, \xi^Y\right)$$
un $\underline{K}$-morfismo, y definimos
$$Wf = f$$
Así, si
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$
son funciones, entonces
$$\begin{aligned} W(gf) &= \left(X, \xi^X\right) \xrightarrow{gf} \left(Z, \xi^Z\right) \\ &= \left(X, \xi^X\right) \xrightarrow{f} \left(Y, \xi^Y\right) \xrightarrow{g} \left(Z, \xi^Z\right) \\ &= (Wg)(Wf) \end{aligned}$$
Y para cualquier conjunto X, se tiene que
$$W(1_X) = 1_{\left(X, \xi^X\right)}$$
Por lo tanto, W es un funtor.
W es adjunto derecho de U.
Sea
$$\alpha' : \mathfrak{Set}[U(X, \xi), Y] \to \underline{K}[(X, \xi), WY]$$
la regla definida para toda función $f : X \to Y$ por
$$\alpha' f = f : (X, \xi) \to \left(Y, \xi^Y\right)$$
que es un $\underline{K}$-morfismo por $\underline{K}.9(b)$. Entonces:
α' es inyectiva:
$$\alpha' f = \alpha' f' \Rightarrow f = f'$$

α' *es suprayectiva*: Dado el $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to\left(Y,\xi^Y\right)$ entonces la función $f:X\to Y$ es tal que

$$\alpha' f = f$$

α' *es natural*: Sean

$$g:Y\to Z \qquad f:X\to Y \qquad h:\left(X',\xi'\right)\to(X,\xi)$$

entonces

$$\underline{K}\,(h,Wg)\,(\alpha f)=(Wg)\,(\alpha' f)\,h=gfh$$
$$\alpha'\,(gf\,(Uh))=gf\,(Uh)=gfh$$

Por lo tanto,

$$\alpha'\,(gf\,(Uh))=(Wg)\,(\alpha' f)\,h \qquad \square$$

$\underline{K}$*.14 Teorema.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, entonces:
(a) Un $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es constante en $\underline{K}$ si, y sólo si, $f:X\to Y$ es constante en $\mathfrak{Set}$.
(b) Si fg es $\underline{K}$-constante y g es $\underline{K}$-epimorfismo, entonces f es $\underline{K}$-constante.
(c) Si para toda $j\in J$, $f_j:\left(X_j,\xi_j\right)\to(Y,\eta)$ es $\underline{K}$-constante y

$$f:\coprod\left(X_j,\xi_j\right)\to(Y,\eta)$$

es el morfismo definido por la familia $(f_j)_J$, entonces f es $\underline{K}$-constante.
(d) Un $\underline{K}$-morfismo $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es coconstante en $\underline{K}$ si, y sólo si, $X=\emptyset$.
Demostración de (a)
($\Rightarrow$) Por $\underline{K}$*.13* el funtor U posee un adjunto izquierdo; por consiguiente conserva constantes.
($\Leftarrow$) Por su fidelidad, U refleja constantes.
Demostración de (b)
Sean

$$g:(W,\omega)\to(X,\xi) \qquad \text{y} \qquad f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$$

dos $\underline{K}$-morfismos tales que fg es $\underline{K}$-constante, siendo g un $\underline{K}$-epimorfismo. Por (a), $fg:W\to Y$ es constante y, por $\underline{K}$*.10*(b), $g:W\to X$ es suprayectiva; en consecuencia, $f:X\to Y$ es constante y, por (a), $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es $\underline{K}$-constante.
Demostración de (c)
Por $\underline{K}$*.13* el funtor U posee un adjunto derecho; por consiguiente conserva coproductos. Entonces,

$$f:\coprod X_j\to Y$$

es la función definida por la familia $(f_j:X_j\to Y)_J$. Por (a), esta familia es de constantes; en consecuencia, la función f es constante y, por (a), el morfismo f es $\underline{K}$-constante.
Demostración de (d)
($\Rightarrow$) U conserva coconstantes porque posee un adjunto derecho. Consecuentemente, $f:X\to Y$ es coconstante en $\mathfrak{Set}$; por lo tanto, $X=\emptyset$.
($\Leftarrow$) Si $X=\emptyset$, entonces $f:X\to Y$ es coconstante, de donde el $\underline{K}$-morfismo f es $\underline{K}$-coconstante, ya que U refleja coconstantes por ser fiel. $\square$

$\underline{K}$*.15 Teorema.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica. Si

$$f:(W,\omega)\to(X,\xi) \qquad \text{y} \qquad g:(X,\xi)\to(Y,\eta)$$

son dos $\underline{K}$-morfismos, entonces gf es:
(a) un $\underline{K}$-cociente, si lo son f y g.
(b) una $\underline{K}$-inmersión, si lo son f y g.

Demostración de (a). Puesto que f y g son suprayectivas, lo es gf. Sean, (Z,ζ) un $\underline{K}$-objeto y $h : Y \to Z$ una función, tales que

$$h\,(gf) : (W,\omega) \to (Z,\zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces, $hg : X \to Z$ es una función tal que

$$(hg)\,f : (W,\omega) \to (Z,\zeta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por ser f un $\underline{K}$-cociente, resulta

$$hg : (X,\xi) \to (Z,\zeta)$$

un $\underline{K}$-morfismo. Por ser g un $\underline{K}$-cociente, es

$$h : (Y,\eta) \to (Z,\zeta)$$

un $\underline{K}$-morfismo. Esto prueba que ζ es final respecto a $((X,\xi), f, Z)$. Por $\underline{K}$.*2*(3), gf es un $\underline{K}$-cociente.

Demostración de (b). Casi dual de la de (a). □

$\underline{K}$*.16 Teorema.* Sea $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, entonces:

(a) Si en $\underline{K}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} (X,\xi) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & (Y,\eta) \arrow[dl, "h"] \\ & (Q,\lambda) & \end{tikzcd}$$

y f es un cociente, entonces también lo es h.

(b) Si en $\underline{K}$ conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} (X,\xi) & & (Y,\eta) \arrow[ll, "g"'] \\ & (Q,\lambda) \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

y f es una inmersión, entonces también lo es h.

Demostración de (a). h es suprayectiva porque lo es f. Sean, (R,ϱ) un $\underline{K}$-objeto y $k : Q \to R$ una función, tales que

$$kh : (Y,\eta) \to (R,\varrho)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Entonces

$$kf = khg : (X,\xi) \to (R,\varrho)$$

es un $\underline{K}$-morfismo y, por ser f un cociente, también lo es $k : (Q,\lambda) \to (R,\varrho)$. Entonces, λ es final con respecto a $((Y,\eta), h, Q)$; por $\underline{K}$.*2*(3), h es un $\underline{K}$-cociente.

Demostración de (b). Casi dual de la de (a). □

$\underline{K}$*.17 Teorema.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $P = (X_0, \xi_0)$ un $\underline{K}$-objeto, $(P,\underline{K})$ la categoría coma de P sobre $\underline{K}$ y $\pi : (P,\underline{K}) \to \underline{K}$ el funtor proyección. Entonces:

(a) π conserva constantes y es monofuntor.

(b) Todo morfismo $(P,\underline{K})$-constante es $(P,\underline{K})$-coconstante.

(c) Todo morfismo $(P,\underline{K})$-coconstante es $(P,\underline{K})$-constante si, y sólo si, $\operatorname{card} X_0 = 1$.

(d) P es $\underline{K}$-semifinal si, y sólo si, $\operatorname{card} X_0 = 1$.

(e) P es $\underline{K}$-final si, y sólo si, $\operatorname{card} X_0 = 1$ y ξ_0 es una estructura indiscreta en X_0.

Demostración de (a). Por $\underline{K}$.*7* se sabe que $\underline{K}$ tiene coproductos; en consecuencia, π posee adjunto izquierdo, de donde resulta que π conserva constantes y monomorfismos.

Demostración de (b). Sean,

$$(f,a,b) : (a,(X,\xi)) \to (b,(Y,\eta))$$

un morfismo $(P, \underline{K})$-constante y

$$(g,b,c)\,,(h,b,c):(b,(Y,\eta))\to(c,(Z,\zeta))$$

dos $(P, \underline{K})$-morfismos arbitrarios. Por (a), $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es $\underline{K}$-constante, de donde $f:X\to Y$ es una función constante y también $b=fa:X_0\to Y$. Puesto que

$$gb=c=hb$$

resulta que las funciones $g,h:Y\to Z$ coinciden e $\mathrm{im}b=\mathrm{im}f$. Por lo tanto, $gf=hf$ en $\mathfrak{Set}$ y por consiguiente, $gf=hf$ en $\underline{K}$; entonces

$$(g,b,c)\,(f,a,b)=(gf,a,c)=(hf,a,c)=(h,b,c)\,(f,a,b)$$

lo cual prueba que f es $(P, \underline{K})$-coconstante.

Demostración de (c). $(\Rightarrow)$ Por ser $(1_P,P)$ inicial en $(P,\underline{K})$ se tiene que $1_{(1_P,P)}$ es $(P,\underline{K})$-coconstante. Por (a), 1_P es constante; en consecuencia, $\mathrm{card}X_0=1$.

$(\Leftarrow)$ Sea

$$(f,a,b):(a,(X,\xi))\to(b,(Y,\eta))$$

un morfismo $(P,\underline{K})$-coconstante. A continuación se probará que

$$\mathrm{im}\,(f:X\to Y)=\mathrm{im}\,(b:X_0\to Y)$$

es un conjunto singular porque $\mathrm{card}X_0=1$. En efecto, sea $y\in\mathrm{im}\,(f:X\to Y)$ y definamos

$$Z=\mathrm{im}b\cup\{y\}$$

$$g,h:(Y,\eta)\to\left(Z,\xi^Z\right)\qquad \text{y}\qquad c:P\to\left(Z,\xi^Z\right)$$

tales que

$$gY=\mathrm{im}b\quad,\ h\,(Y-\{y\})\subseteq\mathrm{im}b\quad,\ h\,(y)=y\quad,\ cX_0=\mathrm{im}b$$

Entonces, g,h y c son $\underline{K}$-morfismos porque ξ^Z es una estructura indiscreta en Z, y se tiene

$$gb=c=hb$$

En consecuencia, (g,b,c) y (h,b,c) son dos $(P,\underline{K})$-morfismos de $(b,(Y,\eta))$ en $\left(c,\left(Z,\xi^Z\right)\right)$, de donde

$$(g,b,c)\,(f,a,b)=(h,b,c)\,(f,a,b)$$

Por consiguiente, $gf=hf$, lo cual implica que

$$hy=\mathrm{im}b$$

o sea que

$$y\in\mathrm{im}b$$

es decir

$$\mathrm{im}\,(f:X\to Y)=\mathrm{im}\,(b:X_0\to Y)$$

Por lo tanto, $f:X\to Y$ es constante y, consecuentemente, (f,a,b) es $(P,\underline{K})$-constante, porque $U\pi$ es fiel.

Demostración de (d).

$$\begin{aligned} P \text{ es } \underline{K}\text{-semifinal} &\Leftrightarrow 1_P \text{ es } \underline{K}\text{-constante}\\ &\Leftrightarrow 1_{X_0} \text{ es constante}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{card}X_0=1\end{aligned}$$

Demostración de (e). $(\Rightarrow)$ Por (d), $\mathrm{card} X_0 = 1$; entonces, $\left(X_0, \xi^{X_0}\right)$ es $\underline{K}$-final. En consecuencia,

$$1_{X_0} : \left(X_0, \xi^{X_0}\right) \to P$$

es un isomorfismo. Por $\underline{K}$*.2.1*, ξ_0 es una estructura indiscreta en X_0.

$(\Leftarrow)$ Obvio. $\square$

$\underline{K}$*.18 Teorema*. Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $P = (X_0, \xi_0)$ un $\underline{K}$-objeto, donde $\mathrm{card} X_0 = 1$ y ξ_0 es una estructura indiscreta en X_0, $(P, \underline{K})$ la categoría coma de P sobre $\underline{K}$ y $\pi : (P, \underline{K}) \to \underline{K}$ el funtor proyección. Entonces, $(1_P, P) = 0$ y para cualquier $(P, \underline{K})$-morfismo

$$(f, a, b) : (a, (X, \xi)) \to (b, (Y, \eta))$$

se tiene que

$$u : F \to (a, (X, \xi)) \quad \text{y} \quad w : (b, (Y, \eta)) \to G$$

son, respectivamente, un núcleo y un conúcleo de (f, a, b), donde

$$F = \left(a', \left(f^{-1} y_0, \xi'\right)\right) \quad , \ u = (i, a', a) \quad , \ G = (b', (Y/fX, \eta')) \quad , \ w = (p, b, b')$$

siendo

$$x_0 = a X_0 \quad , \ y_0 = b X_0$$

$$a' : X_0 \to f^{-1} y_0$$

la función tal que

$$a' X_0 = x_0$$

$$\iota : f^{-1} y_0 \hookrightarrow X$$

la inclusión, ξ' una estructura inicial en $f^{-1} y_0$ respecto a $\left(f^{-1} y_0, \iota, (X, \xi)\right)$,

$$b' : X_0 \to Y/fX$$

la función tal que

$$b' X_0 = fX$$

$$p : Y \to Y/fX$$

la aplicación canónica, y η' una estructura final en Y/fX respecto a $((Y, \eta), p, Y/fX)$.

Demostración. Por $\underline{K}$*.17*(e), P es un $\underline{K}$-objeto final, de donde $(1_P, P) = 0$. A continuación se probará que

$$u = \ker f$$

Sea

$$(g, c, a) : (c, (Z, \zeta)) \to (a, (X, \xi))$$

tal que

$$(f, a, b)\,(g, c, a) = 0$$

Si $z_0 = c X_0$, entonces $g z_0 = x_0$ y, por $\underline{K}$*.17*(a), la función fg es constante. Ya que

$$f g z_0 = f x_0 = y_0$$

resulta

$$gZ \subseteq f^{-1} y_0$$

de donde existe

$$j : Z \to f^{-1} y_0$$

tal que

$$\iota j = g$$

Puesto que ξ' una estructura inicial en $f^{-1}y_0$ respecto a $\left(f^{-1}y_0, \iota, (X,\xi)\right)$, se deduce que

$$j : (Z,\zeta) \to \left(f^{-1}y_0, \xi'\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo y $jc = a'$, por lo que

$$(j, c, a') : (c, (Z,\zeta)) \to \left(a', \left(f^{-1}y_0, \xi'\right)\right)$$

es un $(P, \underline{K})$-morfismo, y se tiene

$$u\,(j, c, a') = (g, c, a)$$

Además, por $\underline{K}$*.17(a)*, u es un $(P, \underline{K})$-monomorfismo; en consecuencia, (j, c, a') es único, lo cual prueba que

$$u = \ker f$$

La prueba de que w es el conúcleo de f es casi dual de la anterior. □

$\underline{K}$*.19 Corolario.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $P = (X_0, \xi_0)$ un $\underline{K}$-objeto, donde ξ_0 es una estructura discreta en X_0, $(P, \underline{K})$ la categoría coma de P sobre $\underline{K}$ y $\pi : (P, \underline{K}) \to \underline{K}$ el funtor proyección. Entonces, para cualquier $\underline{K}$-morfismo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ se tiene que:

a) $\left(\left(X', \xi'\right), \iota\right)$es una π-fibra de f si, y sólo si, X' es una fibra de $f : X \to Y$, $\iota : X' \hookrightarrow X$ es la inclusión y ξ' es una estructura inicial en X' respecto a $(X', \iota, (X,\xi))$.

b) $(p, (Y', \eta'))$ es una π-cofibra de f si, y sólo si, Y' es una cofibra de $f : X \to Y$, $p : Y \hookrightarrow Y'$ es la aplicación canónica y η' es una estructura final en Y' respecto a $((Y,\eta), p, Y')$.

Demostración de (a). Por $\underline{K}$*.18*

$$\left(X', \xi'\right) = \pi F = \left(f^{-1}y_0, \xi'\right)$$

de donde

$$X' = f^{-1}y_0$$

Demostración de (b). Casi dual de la anterior. □

$\underline{K}$*.19.1 Definición.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $\underline{K}_0$ la categoría punteada y $T : \underline{K}_0 \to \underline{K}$ un funtor (covariante). Diremos que T es **muy fiel** si, dados un $\underline{K}$-morfismo $f : (X,\xi) \to (Y,\eta)$ y un $\underline{K}_0$-objeto (X_0, x_0, ξ_0) tal que

$$T\,(X_0, x_0, \xi_0) = (X,\xi)$$

existe un $\underline{K}_0$-morfismo único f_0 de dominio (X_0, x_0, ξ_0) tal que $Tf_0 = f$. Se dirá que f_0 es un T-**levantamiento** de f y que (X_0, x_0, ξ_0) es un T-**levantamiento** de (X,ξ).

$\underline{K}$*.19.2 Definición.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $\underline{K}_0$ la categoría punteada, $T : \underline{K}_0 \to \underline{K}$ un funtor (covariante) y

$$f : (X,\xi) \to (Y,\eta) \quad \text{y} \quad g : (X,\xi) \to (Z,\rho)$$

dos $\underline{K}$-morfismos. Diremos que g T-**domina** a f si para cada T-levantamiento

$$g_0 : (X_0, x_0, \xi_0) \to (Z_0, z_0, \rho_0)$$

de g existe un T-levantamiento

$$f_0 : (X_0, x_0, \xi_0) \to (Y_0, y_0, \eta_0)$$

de f. En el caso dual se dirá que g T-**codomina** a f. En tanto no dé lugar a confusión diremos simplemente que g **domina** o **codomina** a f.

$\underline{K}$*.19.3 Definiciones.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $\underline{A}$ una subcategoría de $\underline{K}$ y f y k dos $\underline{K}$-morfismos. Diremos que k es **compatible con** f si existe un $\underline{K}$-morfismo g tal que $k = gf$. A la clase de $\underline{K}$-morfismos compatibles con f la denotaremos por $\mathfrak{C}_0(f)$. Diremos que $\underline{K}$ **tiene una estructura** $\mathfrak{C}$ **de compatibilidad** si se ha asociado a todo $\underline{K}$-morfismo f una clase $\mathfrak{C}(f)$ de $\underline{K}$-morfismos, con el mismo dominio de f, tal que

$$\mathfrak{C}_0(f) \subseteq \mathfrak{C}(f)$$

Un $\underline{A}$-epimorfismo f es un **$\mathfrak{C}$-cociente en** $\underline{A}$ si para todo elemento k de $\mathfrak{C}(f) \cap Mor(\underline{A})$ existe un $\underline{A}$-morfismo g (necesariamente único) tal que $k = gf$; en particular, f es un **$\mathfrak{C}$-cociente en** $\underline{K}$ si es un $\underline{K}$-epimorfismo y $\mathfrak{C}_0(f) = \mathfrak{C}(f)$.

Los conceptos duales respectivos son: k es **cocompatible con** f, $\underline{K}$ **tiene una estructura** $\mathfrak{C}$ **de cocompatibilidad**, f es una **$\mathfrak{C}$-inmersión en** $\underline{A}$.

$\underline{K}$.19.4 Definiciones. Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $\underline{K}_0$ la categoría punteada, $T : \underline{K}_0 \to \underline{K}$ un funtor (covariante). Una T-**fibra** de un $\underline{K}$-morfismo f es una pareja (TF, Tu), donde

$$u : F \to X_0$$

es núcleo de un $\underline{K}_0$-morfismo f_0 tal que $Tf_0 = f$. El concepto dual es el de T-**cofibra**. En tanto no haya lugar a equívocos, hablaremos simplemente de la **fibra** o de la **cofibra** de un morfismo.

$\underline{K}$.19.5 Definiciones. Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $\underline{K}_0$ la categoría punteada, $T : \underline{K}_0 \to \underline{K}$ un funtor (covariante) y

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta) \qquad g : (X, \xi) \to (Z, \rho) \qquad h : (W, \omega) \to (Y, \eta)$$

tres $\underline{K}$-morfismos. Diremos que g es T-**compatible** con f si g satisface cualesquiera de las dos condiciones siguientes:

(a) g es compatible con f.

(b) g domina a f y $g(Tu)$ es $\underline{K}$-constante para toda fibra (TF, Tu) de f tal que $f(Tu)$ sea $\underline{K}$-constante.

Se dirá que h es T-**cocompatible** con f si h satisface cualesquiera de las dos condiciones siguientes:

(a) g es cocompatible con f.

(b) g codomina a f y $(Tu)h$ es $\underline{K}$-constante para toda cofibra (Tu, TF) de f tal que $(Tu)f$ sea $\underline{K}$-constante.

Obsérvese que la segunda definición es casi dual de la primera.

$\underline{K}$.19.6 Definición. Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $\underline{K}_0$ la categoría punteada, $T : \underline{K}_0 \to \underline{K}$ un funtor (covariante) y $\underline{A}$ una subcategoría de $\underline{K}$. Diremos que un $\underline{K}$-morfismo $m : Q \to X$ es una T-**inmersión** en $\underline{A}$ si se satisfacen las siguientes condiciones:

(a) m es un $\underline{A}$-monomorfismo.

(b) Para todo $\underline{A}$-morfismo $f : Y \to X$ que sea T-cocompatible con m, existe un $\underline{A}$-morfismo $h : Y \to X$ tal que $mh = f$.

$\underline{K}$.20 Corolario. Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica, $P = (X_0, \xi_0)$ un $\underline{K}$-objeto, donde ξ_0 es una estructura discreta en X_0, $(P, \underline{K})$ la categoría coma de P sobre $\underline{K}$ y $\pi : (P, \underline{K}) \to \underline{K}$ el funtor proyección. Entonces, para cualquier $\underline{K}$-morfismo $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ se tiene que:

(a) f es una π-inmersión si, y sólo si, f es una inmersión según *$\underline{K}$.2(2)*.

(b) f es un π-cociente si, y sólo si, f es un cociente según *$\underline{K}$.2(3)*.

Demostración de (a). $(\Rightarrow)$ Si f es una π-inmersión, entonces f es un $\underline{K}$-monomorfismo y, por *$\underline{K}$.10*(a), f es inyectiva. Sean, (W, ω) un $\underline{K}$-objeto y $g : W \to X$ una función, tales que

$$fg : (W, \omega) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; entonces, para todo π-levantamiento

$$(jg, c, b) : (c, (W, \omega)) \to (b, (Y, \eta))$$

se tiene el π-levantamiento

$$(f, a, b) : (a, (X, \xi)) \to (b, (Y, \eta))$$

de f, donde $a : P \to (X, \xi)$ es tal que

$$aX_0 = cX_0$$

lo cual prueba que fg π-codomina (def. $\underline{K}$*.19.2*)[2] a f. Si $(p, (Y', \eta'))$ es una π-cofibra de f, se tiene que pfg es constante en $\mathfrak{Set}$ y, por $\underline{K}$*.14*(a), es $\underline{K}$-constante; luego, fg es π-cocompatible (def. $\underline{K}$*.19.5*)[3] con f y, por consiguiente, existe un $\underline{K}$-morfismo

$$g' : (W, \omega) \to (X, \xi)$$

tal que

$$fg' = fg$$

de donde

$$fg' = fg \qquad \text{en } \mathfrak{Set}\ ;$$

por lo tanto

$$g' = g \qquad \text{en } \mathfrak{Set}$$

lo cual prueba que $g : (W, \omega) \to (X, \xi)$es un $\underline{K}$-morfismo; consecuentemente, ξ es inicial con respecto a $(X, f, (Y, \eta))$ y f es una inmersión según $\underline{K}$*.2*(*2*).

($\Leftarrow$) f es inyectiva y, por $\underline{K}$*.10*(a), f es un monomorfismo. Sea

$$h : (W, \omega) \to (Y, \eta)$$

un $\underline{K}$-morfismo π-cocompatible con f. Entonces, $h\pi$-codomina a f, lo cual implica que en $\mathfrak{Set}$

$$\mathrm{im} h \subseteq \mathrm{im} f$$

En consecuencia, existe una función tal que $fg = h$. Por ser ξ inicial respecto a $(X, f, (Y, \eta))$, es $g : (W, \omega) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo y se tiene $fg = h$ en $\underline{K}$, es decir, f es una π-inmersión (def. $\underline{K}$*.19.6*)[4].

Demostración de (b). Casi dual de la de (a). $\square$

$\underline{K}$*.21 Definiciones*. Sea $\underline{K}$ una categoría concreta.

(1) La $\underline{K}$-**fibra** de un conjunto X es la clase $\underline{K}[X]$ de todas las $\underline{K}$-estructuras en X.

(2) $\underline{K}$ está **propiamente fibrada** si, y sólo si, satisface las siguientes condiciones:

(a) Para todo conjunto X, $\underline{K}[X]$ es un conjunto.

(b) Para todo conjunto unitario $\{x\}$, $\underline{K}[\{x\}]$ tiene sólo un elemento.

(c) Si $\xi, \xi' \in \underline{K}[X]$ son tales que

$$1_X : (X, \xi) \to \left(X, \xi'\right) \quad \text{y} \quad 1_X : \left(X, \xi'\right) \to (X, \xi)$$

son $\underline{K}$-morfismos, entonces $\xi = \xi'$.

$\underline{K}$*.22 Teorema*. En toda categoría concreta topológica propiamente fibrada están unívocamente determinadas por sus propiedades definidoras las estructuras siguientes:

(a) iniciales

(b) finales

(c) discretas

(d) indiscretas

Demostración de (a). Sean, X un conjunto y $\xi, \xi' \in \underline{K}[X]$ iniciales respecto a $(X, (f_i)_I, (Y_i, \eta_i)_I)$; entonces, $1_X : X \to X$ es una función tal que, para toda $i \in I$,(())

$$f_i \circ 1_X : (X, \xi) \to (Y_i, \eta_i) \quad \text{y} \quad f_i \circ 1_X : \left(X, \xi'\right) \to (Y_i, \eta_i)$$

[2] G. Salicrup y R. Vázquez; "T-cocientes", Anales del Instituto de Matemáticas U.N.A.M. 13 (1973) 53-159.
[3] G. Salicrup y R. Vázquez; "T-cocientes", Anales del Instituto de Matemáticas U.N.A.M. 13 (1973) 53-159.
[4] G. Salicrup y R. Vázquez; "T-cocientes", Anales del Instituto de Matemáticas U.N.A.M. 13 (1973) 53-159.

son $\underline{K}$-morfismos. Por $\underline{K}.1(2)$ se tiene que

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi') \quad \text{y} \quad 1_X : (X, \xi') \to (X, \xi)$$

son $\underline{K}$-morfismos. Por $\underline{K}.21(2)(c)$ resulta $\xi = \xi'$.

Demostración de (b). Casi dual de la de (a).

Demostración de (c). Por $\underline{K}.8$ y (a).

Demostración de (d). Por $\underline{K}.8$ y (b). $\square$

$\underline{K}.23$ *Teorema.* En toda categoría concreta topológica propiamente fibrada $\underline{K}$, las estructuras son **transportables**; es decir: Si (X, ξ) es un $\underline{K}$-objeto y $f : X \to Y$ es una función biyectiva, entonces existe una única $\eta \in \underline{K}[Y]$ tal que $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo.

Demostración. Sea $\eta \in \underline{K}[Y]$ final respecto a $((X, \xi), f, Y)$ y consideremos la función $f^{-1} : Y \to X$; se tiene que

$$f^{-1}f = 1_X : (X, \xi) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}.2(1)(b)$, $f^{-1} : (Y, \eta) \to (X, \xi)$ es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}.2(1)(a)$ resulta que

$$f^{-1}f = 1_{(X,\xi)} \quad \text{y} \quad ff^{-1} = 1_{(Y,\eta)}$$

Es decir, que $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ es un $\underline{K}$-isomorfismo. Finalmente, si $\eta' \in \underline{K}[Y]$ es tal que

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta')$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo, entonces

$$f^{-1} : (Y, \eta') \to (X, \xi)$$

es su inverso y se tienen los $\underline{K}$-morfismos

$$1_Y : (Y, \eta) \xrightarrow{f^{-1}} (X, \xi) \xrightarrow{f} (Y, \eta') \quad \text{y} \quad 1_Y : (Y, \eta') \xrightarrow{f^{-1}} (X, \xi) \xrightarrow{f} (Y, \eta)$$

Por $\underline{K}.21(2)(c)$ resulta $\eta' = \eta$. $\square$

$\underline{K}.24$ *Teorema.* En toda categoría concreta topológica propiamente fibrada $\underline{K}$, para todo conjunto X, $\underline{K}[X]$ está completamente reticulada por la relación

$$\xi \le \xi' \Leftrightarrow 1_X : (X, \xi) \to (X, \xi) \text{ es un } \underline{K}\text{-morfismo}$$

Demostración.

$i)$ $\underline{\le \text{ es un orden parcial en } \underline{K}[X].}$

En efecto, por (M_1), $\xi \le \xi$; por (M_2), $(\xi \le \xi' \text{ y } \xi' \le \xi'')$ implica $\xi \le \xi''$; por *K.21(2)(c)*, $(\xi \le \xi' \text{ y } \xi' \le \xi)$ implica $\xi = \xi'$.

$ii)$ $\underline{(\underline{K}[X], \le) \text{ es una retícula completa.}}$

En efecto, sea $\vartheta \in \underline{K}[X]$ final respecto al sumidero de identidades

$$\left((X, \xi)_{\xi \in \underline{K}[X]}, (1_X)_{\xi \in \underline{K}[X]}, X\right)$$

Entonces, para toda $\xi \in \underline{K}[X]$ se tiene que

$$\xi \le \vartheta$$

Supongamos que $\xi' \in \underline{K}[X]$ es tal que, para toda $\xi \in \underline{K}[X]$,

$$\xi \le \xi'$$

Entonces, para toda $\xi \in \underline{K}[X]$ se tiene el $\underline{K}$-morfismo

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi')$$

que es igual a la composición

$$X \overset{(1_X)_{\underline{K}[X]}}{\longrightarrow} X \overset{1_X}{\to} X$$

Por $\underline{K}$.*2(1)*(b),

$$1_X : (X, \vartheta) \to \left(X, \xi'\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, de donde $\vartheta \leq \xi'$; en consecuencia

$$\vartheta = \vee \underline{K}\,[X]$$

Casi dualmente se prueba que $\wedge \underline{K}\,[X]$ existe y es la estructura inicial de X respecto a la fuente de identidades

$$\left(X, (1_X)_{\xi \in \underline{K}[X]}, (X, \xi)_{\xi \in \underline{K}[X]}\right) \qquad \square$$

$\underline{K}$.*25 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada, entonces $\underline{K}$ es local y colocalmente pequeña.

Demostración.

$\underline{K}$ es localmente pequeña. En efecto, sea (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto arbitrario y para cada subconjunto A de X sean, $\iota_A : A \hookrightarrow X$ la inclusión e I_A el conjunto de las $\underline{K}$-estructuras α en A tales que

$$\iota_A : (A, \alpha) \hookrightarrow (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}$.*10*(a) es $((A, \alpha), \iota_A)$ un subobjeto de (X, ξ) y es claro que

$$J_X = \{((A, \alpha), \iota_A) : A \subseteq X, \alpha \in I_A\}$$

es un conjunto. Sea $f : (W, \omega) \to (X, \xi)$ un $\underline{K}$-monomorfismo. Por $\underline{K}$.*10*(a), $f : W \to X$ es inyectiva. Si $A = fX$, existe una función biyectiva $g : W \to A$ tal que $f = \iota_A g$. Por $\underline{K}$.*23* existe $\alpha \in \underline{K}\,[A]$ tal que

$$g : (W, \omega) \to (A, \alpha)$$

es un isomorfismo; entonces

$$fg^{-1} : (A, \alpha) \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo y coincide con ι_A. Por consiguiente, $\alpha \in I_A$ y $f = \iota_A g$ en $\underline{K}$, lo cual prueba que J_X es un conjunto representativo de la clase de subobjetos de (X, ξ); en consecuencia, $\underline{K}$ es localmente pequeña.

$\underline{K}$ es colocalmente pequeña. Sea (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto arbitrario y sea

$$(f_i : (X, \xi) \to (Y_i, \eta_i))_I$$

la fuente de todos los $\underline{K}$-morfismo suprayectivos de dominio (X, ξ). Por $\underline{K}$.*10*(b),

$$(f_i : X \to Y_i)_I$$

es una fuente en $\mathfrak{Set}$ tal que, para toda $i \in I$, f_i es suprayectiva. Por ser $\mathfrak{Set}$ colocalmente pequeña, existe un conjunto J y una partición $(I_j)_J$ de I tal que, para toda $i \in I_j$, existe una biyección

$$k_{ji} : Y_i \to Z_j$$

con la propiedad de que, para cualesquiera $i, i' \in I_j$,

$$k_{ji} f_i = k_{ji} f_{i'}$$

Sea $j \in J$ y para cada $i \in I_j$ sea $\theta_{ij} \in \underline{K}\,[Z_j]$ final respecto a

$$((Y_i, \eta_i), k_{ji}, Z_j)$$

Entonces, existe un conjunto C_j y una partición $(I_{jc})_{c\in C_j}$ de I_j tal que para toda $i \in I_{jc}$, es un $\underline{K}$-isomorfismo

$$1_{Z_j} : (Z_j, \theta_{ij}) \to (Z_j, \theta_c)$$

Por lo tanto, $\{I_{jc} : c \in C_j, j \in J\}$ es una partición de I tal que, para toda $i \in I_{jc}$, existe un $\underline{K}$-isomorfismo

$$1_{Z_j} k_{ji} : (Y_i, \eta_i) \to (Z_j, \theta_c)$$

tal que, si $i, i' \in I_{jc}$,

$$1_{Z_j} k_{ji} f_i = 1_{Z_j} k_{ji} f_{i'}$$

En consecuencia, $\underline{K}$ es colocalmente pequeña. □

$\underline{K}$*.26 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada, entonces:

(a) Si $f : X \to Y$ es constante y $X \neq \emptyset$ entonces, para cualesquiera $\xi \in \underline{K}[X]$, $\eta \in \underline{K}[Y]$,

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo.

(b) Cualquier $\underline{K}$-objeto (X, ξ), con $X \neq \emptyset$, es un separador en $\underline{K}$.

Demostración. Sea $P = (X_0, \xi_0)$ un $\underline{K}$-objeto, donde $\mathrm{card}X_0 = 1$ y ξ_0 es una estructura indiscreta en X_0; por $\underline{K}$*.17*(e), P es $\underline{K}$-final. Sea

$$g : (X, \xi) \to P$$

el $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{\mathrm{K}}$*.21(2)*(b), ξ_0 es discreta. Puesto que $X \neq \emptyset$, existe la función $h : X_0 \to Y$ tal que

$$\mathrm{im}h = \mathrm{im}f$$

Por $\underline{\mathrm{K}}$*.9*(a),

$$h : P \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo; además, $f = hg$ en $\mathfrak{Set}$, de donde, por (M_2),

$$f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, lo que prueba (a). Ya que $X \neq \emptyset$, por $\underline{K}$*.10*(b), g es un $\underline{K}$-morfismo; por $\underline{K}$*.12*(c), P es un separador en $\underline{K}$. En consecuencia, (X, ξ) es un separador en $\underline{K}$, y (b) está probado. □

$\underline{K}$*.27 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada y $\underline{A}$ es una subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$, entonces son equivalentes las condiciones:

(a) $\underline{A}$ es epirreflexiva en $\underline{K}$.

(b) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de productos y subobjetos extremados en $\underline{K}$.

Demostración. Por $\underline{K}$*.11*, $\underline{K}$ es una (E, M)-categoría, donde E es la clase de epimorfismos y M la de monomorfismos extremados. Por $\underline{K}$*.25*, $\underline{K}$ es colocalmente pequeña, y por $\underline{K}$*.5* tiene productos; entonces, por el teorema 37.1 de (H-S)[5], (a) y (b) son equivalentes. □

$\underline{K}$*.28 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada y $\underline{A}$ es una subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$, entonces son equivalentes las condiciones:

(a) $\underline{A}$ es monocorreflexiva en $\underline{K}$.

(b) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de coproductos y objetos cociente extremados en $\underline{K}$.

Demostración. Casi dual de $\underline{K}$*.27.*

$\underline{K}$*.29 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada y $\underline{A}$ es una subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$, entonces son equivalentes las condiciones:

(a) $\underline{A}$ es birreflexiva en $\underline{K}$.

(b) $\underline{A}$ es epirreflexiva en $\underline{K}$ y contiene a todos los objetos indiscretos.

(c) $\underline{A}$ es reflexiva en $\underline{K}$ y contiene a todos los objetos indiscretos.

[5] H. Herlich, G. Strecker; "Category Theory", Allyn and Bacon, 1973.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Sean, (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto indiscreto y

$$r : (X, \xi) \to \left(X', \xi'\right)$$

una $\underline{A}$-reflexión, cualesquiera. Por (a), r es biyectiva y, por la indiscreción de ξ, es

$$r^{-1} : \left(X', \xi'\right) \to (X, \xi)$$

un $\underline{K}$-morfismo. En consecuencia, r es un $\underline{K}$-isomorfismo, por lo que $(X, \xi) \in |\underline{A}|$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Obvio.

$(c) \Rightarrow (a)$ Por $\underline{K}$.*5*, $\underline{K}$ es completa; por $\underline{K}$.*25*, $\underline{K}$ es local y colocalmente pequeña; por $\underline{K}$.*12*(d), $\underline{A}$ contiene un coseparador de $\underline{K}$. Entonces, por el dual del teorema 37.3 de H-S[6], $\underline{A}$ es birreflexiva en $\underline{K}$. □

$\underline{K}$.*30 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada y $\underline{A}$ es una subcategoría plena y repleta de $\underline{K}$ que contiene a un $\underline{K}$-objeto cuyo conjunto subyacente es distinto del vacío, entonces son equivalentes las condiciones:

(a) $\underline{A}$ es correflexiva en $\underline{K}$.

(b) $\underline{A}$ es bicorreflexiva en $\underline{K}$.

(c) $\underline{A}$ está cerrada bajo la formación de coproductos y objetos cociente extremados en $\underline{K}$.

(d) $\underline{A}$ es correflexiva en $\underline{K}$ y contiene a todos los objetos discretos.

Demostración. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Por $\underline{K}$.*7*, $\underline{K}$ es cocompleta; por $\underline{K}$.*25*, $\underline{K}$ es local y colocalmente pequeña; por $\underline{K}$.*12*(c), $\underline{A}$ contiene un separador de $\underline{K}$. Entonces, por el teorema 37.3 de H-S[7], son equivalentes (a) y (b).

$(b) \Rightarrow (c)$ Por $\underline{K}$.*28*.

$(c) \Rightarrow (d)$ Por $\underline{K}$.*28*, $\underline{A}$ es correflexiva en $\underline{K}$. Sean, (X, ξ) un $\underline{K}$-objeto discreto y

$$c : \left(X', \xi'\right) \to (X, \xi)$$

una $\underline{A}$-correflexión, cualesquiera. Por la equivalencia de (a) y (b), la función c es biyectiva y, por la discreción de ξ, es

$$c^{-1} : (X, \xi) \to \left(X', \xi'\right)$$

un $\underline{K}$-morfismo. En consecuencia, c es un $\underline{K}$-isomorfismo, por lo que $(X, \xi) \in |\underline{A}|$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Obvio. □

$\underline{K}$.*31 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica (propiamente fibrada), entonces cualquier subcategoría birreflexiva $\underline{A}$, plena y repleta, es una categoría concreta topológica (propiamente fibrada).

Demostración. Sea $\underline{A}$ una subcategoría birreflexiva cualquiera de una categoría concreta topológica (propiamente fibrada) $\underline{K}$ y consideremos al funtor inclusión

$$\iota : \underline{A} \hookrightarrow \underline{K}$$

y al funtor que olvida

$$U : \underline{K} \to \mathfrak{Set}$$

Entonces, el funtor compuesto

$$U\iota : \underline{A} \to \mathfrak{Set}$$

es fiel, de donde $\underline{A}$ es una categoría concreta.

Por $\underline{K}$.*3*, cualesquiera que sean, un conjunto X, una familia $(Y_i, \eta_i)_I$ de $\underline{A}$-objetos y una familia de funciones $(f_i : X \to Y_i)_I$, existe una $\underline{K}$-estructura ξ en X, inicial respecto a

$$\left(X, (f_i)_I, (Y_i, \eta_i)_I\right)$$

Sea

$$r : (X, \xi) \to \left(X', \xi'\right)$$

[6] H. Herlich, G. Strecker; "Category Theory", Allyn and Bacon, 1973.
[7] H. Herlich, G. Strecker; "Category Theory", Allyn and Bacon, 1973.

una $\underline{A}$-reflexión. Entonces, para toda $i \in I$ existe un $\underline{K}$-morfismo

$$f_i' : (X', \xi') \to (Y_i, \eta_i)$$

tal que

$$f_i' r = f_i$$

Puesto que r es biyectiva, podemos considerar la función

$$r^{-1} : X' \to X$$

y se tiene, para toda $i \in I$, que

$$f_i r^{-1} = f_i'$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}$*.1(2)*,

$$r^{-1} : (X', \xi') \to (X, \xi)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. En consecuencia, r es un isomorfismo y $(X, \xi) \in |\underline{A}|$, lo que prueba que se satisface $\underline{K}$*.3*, es decir, $\underline{A}$ es topológica.

Finalmente, es claro que si $\underline{K}$ está propiamente fibrada, entonces $\underline{A}$ también lo está. □

$\underline{K}$*.32 Teorema.* Si $\underline{K}$ es una categoría concreta topológica (propiamente fibrada), entonces cualquier subcategoría bicorreflexiva $\underline{A}$, plena y repleta, es una categoría concreta topológica (propiamente fibrada).

Demostración. $\underline{A}$ es concreta por serlo $\underline{K}$. Por $\underline{K}$*.4*, $\underline{K}$ es cotopológica. Entonces, por el casi dual de $\underline{K}$*.31*, $\underline{A}$ es cotopológica y, por el casi dual de $\underline{K}$*.4*, $\underline{A}$ es topológica. Finalmente, si $\underline{K}$ está propiamente fibrada es claro que $\underline{A}$ también lo está. □

$\underline{K}$*.33 Nota.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica propiamente fibrada, $\underline{B}$ una subcategoría birreflexiva de $\underline{K}$ y $\underline{C}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\underline{K}$, ambas plenas y repletas. Entonces, para cualquier $\underline{K}$-objeto (X, ξ), existe una única $\underline{B}$-reflexión de la forma

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi_{\underline{B}})$$

y una única $\underline{C}$-correflexión de la forma

$$1_X : (X, \xi_{\underline{C}}) \to (X, \xi)$$

En efecto, sea

$$r : (X, \xi) \to (X', \xi')$$

una $\underline{B}$-reflexión de (X, ξ); entonces r es biyectiva y, por $\underline{K}$*.23*, existe una única $\xi_{\underline{B}} \in \underline{K}[X]$ tal que

$$r^{-1} : (X', \xi') \to (X, \xi_{\underline{B}})$$

es un $\underline{K}$-isomorfismo. En consecuencia, $(X, \xi_{\underline{B}}) \in |\underline{B}|$, porque $\underline{B}$ está repleta, y

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi_{\underline{B}})$$

es una $\underline{B}$-reflexión de (X, ξ). Si $\xi'_{\underline{B}}$ fuese otra $\underline{K}$-estructura en X tal que

$$1_X : (X, \xi) \to (X, \xi'_{\underline{B}})$$

fuese una $\underline{B}$-reflexión, se tendría que

$$1_X : (X, \xi_{\underline{B}}) \to (X, \xi'_{\underline{B}}) \quad \text{y} \quad 1_X : (X, \xi'_{\underline{B}}) \to (X, \xi_{\underline{B}})$$

serían $\underline{K}$-morfismos y, por $\underline{K}$*.21(2)(c)*, $\xi'_{\underline{B}} = \xi_{\underline{B}}$. Para $\underline{C}$, la demostración es casi dual. □

En los siguientes siete teoremas se supondrá que $\underline{K}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$ son como en $\underline{K}$*.33*;

$$R : \underline{K} \to \underline{B}$$

denotará a un $\underline{B}$-reflector y

$$R_{\underline{C}} : \underline{C} \to \underline{B}$$

denotará a su restricción a $\underline{C}$.

$$C : \underline{K} \to \underline{C}$$

denotará a un $\underline{C}$-correflector y

$$C_{\underline{B}} : \underline{B} \to \underline{C}$$

denotará a su restricción a $\underline{B}$. Para cualquier $\underline{K}$-objeto (X,ξ) se tendrán, por $\underline{K}$*.33*, la $\underline{B}$-reflexión $1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$ y la $\underline{C}$-correflexión $1_X : \left(X,\xi_{\underline{C}}\right) \to (X,\xi)$. Entonces tendremos que

$$R\,(X,\xi) = \left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \quad \text{y} \quad C\,(X,\xi) = \left(X,\xi_{\underline{C}}\right)$$

$\underline{K}$*.34 Teorema.* R y C son funtores fieles y, por consiguiente, $R_{\underline{C}}$ y $C_{\underline{B}}$ también lo son.

Demostración. Como $\underline{B}$ es birreflexiva, todo $\underline{B}$-reflector es fiel. Dualmente, todo $\underline{C}$-correflector es fiel. □

$\underline{K}$*.35 Teorema.* $R_{\underline{C}}$ es adjunto izquierdo de $C_{\underline{B}}$.

Demostración. Sean

$$(X,\xi)\,,\left(X',\xi'\right) \in |\underline{B}| \quad , \quad (Y,\eta)\,,(Y',\eta') \in |\underline{C}|$$
$$g : (X,\xi) \to \left(X',\xi'\right) \ \text{ un } \underline{B}\text{-morfismo}$$
$$h : (Y',\eta') \to (Y,\eta) \ \text{ un } \underline{C}\text{-morfismo}$$

Definimos

$$\underline{B}\left(\left(Y,\eta_{\underline{B}}\right),(X,\xi)\right) \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \underline{C}\left((Y,\eta)\,,\left(X,\xi_{\underline{C}}\right)\right)$$

como sigue:

Si $f : \left(Y,\eta_{\underline{B}}\right) \to (X,\xi)$ es un $\underline{B}$-morfismo, entonces consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y,\eta) \arrow[r, dashed, "\alpha f"] \arrow[d, "1_Y"'] & \left(X,\xi_{\underline{C}}\right) \arrow[d, "1_X"] \\
\left(Y,\eta_{\underline{B}}\right) \arrow[r, "f"'] & (X,\xi)
\end{tikzcd}$$

Ya que 1_X es $\underline{C}$-correflexión de (X,ξ) y $(Y,\eta) \in |\underline{C}|$, existe un único $\underline{C}$-morfismo αf que hace conmutativo el diagrama; es claro que $\alpha f = f$ en $\mathfrak{Set}$.

Si $f' : (Y,\eta) \to \left(X,\xi_{\underline{C}}\right)$ es un $\underline{C}$-morfismo, entonces consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y,\eta) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "1_Y"'] & \left(X,\xi_{\underline{C}}\right) \arrow[d, "1_X"] \\
\left(Y,\eta_{\underline{B}}\right) \arrow[r, dashed, "\beta f'"'] & (X,\xi)
\end{tikzcd}$$

Ya que 1_Y es $\underline{B}$-reflexión de (Y,η) y $(X,\xi) \in |\underline{B}|$, existe un único $\underline{B}$-morfismo $\beta f'$ que hace conmutativo el diagrama; es claro que $\beta f' = f'$ en $\mathfrak{Set}$.

Por lo anterior es inmediato que $\beta = \alpha^{-1}$. Únicamente resta probar que α es natural.

Se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(Y',\eta') \arrow[r, "h"] \arrow[d, "1_{Y'}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (Y,\eta) \arrow[r, "\alpha f"] \arrow[d, "1_Y"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \left(X,\xi_{\underline{C}}\right) \arrow[r, "g = Cg"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \left(X',\xi'_{\underline{C}}\right) \arrow[d, "1_{X'}"] \\
\left(Y',\eta'_{\underline{B}}\right) \arrow[r, "h = Rh"'] & \left(Y,\eta_{\underline{B}}\right) \arrow[r, "f"'] & (X,\xi) \arrow[r, "g"'] & (X',\xi')
\end{tikzcd}$$

De la definición de α se deduce que

$$\alpha\left(gf\left(Rh\right)\right) = \left(Cg\right)\left(\alpha f\right)h \qquad \square$$

$\underline{K}$*.36 Teorema.* Para cualquier objeto (X,ξ) en $\underline{C}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (X,ξ) es $\underline{B}$-**estructurable**, es decir, existe (X,ψ) en $\underline{B}$ con $\psi_{\underline{C}} = \xi$.

(b) $\xi = \left(\xi_{\underline{B}}\right)_{\underline{C}}$.

Demostración.

$(a) \Rightarrow (b)$ Por (a) $1_X : (X,\xi) \to (X,\psi)$ es una $\underline{C}$-correflexión de (X,ψ). Se tiene que $1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$ es una $\underline{B}$-reflexión y, por pertenecer (X,ψ) a $\underline{B}$, existe un único $\underline{B}$-morfismo, que debe ser 1_X, que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd}
(W,\omega) \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "f"'] & (X,\xi) \arrow[d, "1_X"] \arrow[dl, "1_X"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft", shift left=3] \\
\left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \arrow[r, "1_X"'] & (X,\psi)
\end{tikzcd}$$

Ahora sea $f : (W,\omega) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$ cualquier $\underline{K}$-morfismo con $(W,\omega) \in |\underline{C}|$. Ya que $1_X : (X,\xi) \to (X,\psi)$ es una $\underline{C}$-correflexión, existe un único $\underline{C}$-morfismo, que debe ser f, que hace conmutativo al cuadrado. En consecuencia, hace conmutativo al nuevo triángulo, lo cual prueba que $1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$ es una $\underline{C}$-correflexión. Por lo tanto, $\xi = \left(\xi_{\underline{B}}\right)_{\underline{C}}$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Definimos $\psi = \xi_{\underline{B}}$; entonces, $(X,\psi) \in |\underline{B}|$ y por (b) resulta $\psi_{\underline{C}} = \xi$. $\square$

$\underline{K}$*.37 Teorema.* Para cualquier objeto (X,ξ) en $\underline{B}$ las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) (X,ξ) es $\underline{C}$-**estructurable**, es decir, existe (X,ψ) en $\underline{C}$ con $\psi_{\underline{B}} = \xi$.

(b) $\xi = \left(\xi_{\underline{C}}\right)_{\underline{B}}$.

Demostración. Casi dual de la de $\underline{K}$*.36*. $\square$

$\underline{K}$*.38 Teorema.* La subcategoría plena $\underline{C}_{\underline{B}}$ de $\underline{C}$ cuyos objetos son los $\underline{B}$-estructurables en $\underline{C}$ (def. $\underline{K}$*.36*(a)) es birreflexiva en $\underline{C}$, siendo su reflector $\underline{C} \to \underline{C}_{\underline{B}}$ tal que su composición con la inclusión $\underline{C}_{\underline{B}} \hookrightarrow \underline{C}$ es el funtor

$$C_{\underline{B}}R_{\underline{C}} : \underline{C} \to \underline{C}$$

y para cualquier objeto (X,ξ) en $\underline{C}$ es

$$1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right)$$

una $\underline{C}_{\underline{B}}$-reflexión.

Demostración. Para cualquier objeto (X,ξ) en $\underline{C}$ se tiene

$$R_{\underline{C}}\left(X,\xi\right) = \left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \quad \text{ y } \quad R_{\underline{C}}\left(X,\xi\right) = \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right)$$

Por su parte,

$$1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$$

es una $\underline{B}$-reflexión y, por lo tanto, $\left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \in |\underline{B}|$. En tanto,

$$1_X : \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$$

es una $\underline{C}$-correflexión; entonces, $\left(X,\xi_{\underline{BC}}\right)$ es $\underline{B}$-estructurable y existe un $\underline{C}$-morfismo único, que debe ser 1_X, tal que

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[rr, dashed, "1_X"] \arrow[dr, "1_X"'] & \circlearrowleft & \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right) \arrow[dl, "1_X"] \\
& \left(X,\xi_{\underline{B}}\right) &
\end{tikzcd}$$

Sólo resta probar que el morfismo punteado anterior es una $\underline{C}_{\underline{B}}$-reflexión. Sea $f : (X,\xi) \to \left(X',\xi'\right)$ un $\underline{C}$-morfismo con $\left(X',\xi'\right) \in \left|\underline{C}_{\underline{B}}\right|$. Entonces, existe una estructura ψ' en X' tal que $\left(X',\psi'\right) \in |\underline{B}|$ y

$$1_{X'} : \left(X',\xi'\right) \to \left(X',\psi'\right)$$

es una $\underline{C}$-correflexión. Ya que $1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right)$ es una $\underline{B}$-reflexión y $\left(X',\psi'\right) \in |\underline{B}|$, existe un $\underline{B}$-morfismo único, que debe ser f, tal que

$$\begin{tikzcd}
(X,\xi) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \left(X',\xi'\right) \arrow[d, "1_{X'}"] \\
\left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \arrow[r, dashed, "f"'] & \left(X',\psi'\right)
\end{tikzcd}$$

Por ser

$$1_X : \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right) \to \left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \quad \text{y} \quad 1_{X'} : \left(X',\xi'\right) \to \left(X',\psi'\right)$$

$\underline{C}$-correflexiones, existe un $\underline{C}$-morfismo único, que debe ser f, tal que

$$\begin{tikzcd}
\left(X,\xi_{\underline{B}}\right) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \left(X',\psi'\right) \\
\left(X,\xi_{\underline{BC}}\right) \arrow[u, "1_X"] \arrow[r, dashed, "f"'] & \left(X',\xi'\right) \arrow[u, "1_{X'}"']
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, es claro que conmuta el triángulo

$$\begin{tikzcd}
\left(X',\xi'\right) & & \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right) \arrow[ll, dashed, "f"'] \\
& (X,\xi) \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "1_X"'] &
\end{tikzcd}$$

y que la f punteada es la única función que lo hace conmutativo; en consecuencia, $1_X : (X,\xi) \to \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right)$ es una $\underline{C}_{\underline{B}}$-reflexión. $\square$

$\underline{K}.39$ *Teorema.* La subcategoría plena $\underline{B}_{\underline{C}}$ de $\underline{B}$ cuyos objetos son los $\underline{C}$-estructurables en $\underline{B}$ (def. $\underline{K}$.*37*(a)) es bicorreflexiva en $\underline{B}$, siendo su correflector $\underline{B} \to \underline{B}_{\underline{C}}$ tal que su composición con la inclusión $\underline{B}_{\underline{C}} \hookrightarrow \underline{B}$ es el funtor

$$R_{\underline{C}}C_{\underline{B}} : \underline{B} \to \underline{B}$$

y para cualquier objeto (X,ξ) en $\underline{B}$ es

$$1_X : \left(X,\xi_{\underline{CB}}\right) \to (X,\xi)$$

una $\underline{B}_{\underline{C}}$-correflexión.

Demostración. Casi dual de la de $\underline{K}$.*38* . $\square$

$\underline{K}.40$ *Teorema.* El funtor $R_{\underline{C}} : \underline{C} \to \underline{B}$ induce un isomorfismo de categorías $\underline{C}_{\underline{B}} \to \underline{B}_{\underline{C}}$ cuyo inverso está inducido por el funtor $C_{\underline{B}} : \underline{B} \to \underline{C}$.

Demostración. Sea $(X,\xi) \in \left|\underline{C}_{\underline{B}}\right|$; entonces, por $\underline{K}$.*36(a)*, existe $(X,\psi) \in |\underline{B}|$ tal que $\psi_{\underline{C}} = \xi$. Luego

$$R_{\underline{C}}(X,\xi) = \left(X,\xi_{\underline{B}}\right) = \left(X,\psi_{\underline{CB}}\right)$$

que está en $\underline{B}_{\underline{C}}$ por $\underline{K}$.*39*, y

$$C_{\underline{B}}\left(X,\xi_{\underline{B}}\right) = \left(X,\xi_{\underline{BC}}\right) = (X,\xi)$$

por $\underline{K}$.*36*. Si $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ es un morfismo en $\underline{C}_{\underline{B}}$, entonces

$$R_{\underline{C}}(f)=f:\left(X,\xi_{\underline{B}}\right)\to\left(Y,\eta_{\underline{B}}\right)$$

y

$$C_{\underline{B}}R_{\underline{C}}(f)=f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$$

En consecuencia, la composición

$$\underline{C}_{\underline{B}}\to\underline{B}_{\underline{C}}\to\underline{C}_{\underline{B}}$$

es $1_{\underline{C}_{\underline{B}}}$. Casi dualmente resulta la composición

$$\underline{B}_{\underline{C}}\to\underline{C}_{\underline{B}}\to\underline{B}_{\underline{C}}$$

igual a $1_{\underline{B}_{\underline{C}}}$. $\square$

$\underline{K}$.*41 Teorema.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica propiamente fibrada, $\underline{C}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\underline{K}$, plena y repleta, $\underline{B}$ una subcategoría epirreflexiva (birreflexiva) de $\underline{C}$, plena y repleta. Entonces la subcategoría plena $\underline{D}$ de $\underline{K}$ que consta de los $\underline{K}$-objetos que tienen $\underline{C}$-correflexión en $\underline{B}$ es epirreflexiva (birreflexiva) en $\underline{K}$.

Demostración.

(i) $\underline{D}$ está cerrada bajo bajo la formación de productos en $\underline{K}$. En efecto, sean, $(X_i,\xi_i)_I$ una familia de objetos en $\underline{D}$,

$$1_{X_i}:\left(X_i,(\xi_i)_{\underline{C}}\right)\to(X_i,\xi_i)$$

una $\underline{C}$-correflexión para cada $i\in I$, $(\prod X_i,\xi)$ un producto en $\underline{K}$ de la familia $(X_i,\xi_i)_I$. Entonces, por la definición de $\underline{D}$, resulta que, para toda $i\in I$,

$$\left(X_i,(\xi_i)_{\underline{C}}\right)\in|\underline{B}|$$

Si $C:\underline{K}\to\underline{C}$ es un $\underline{C}$-correflector, entonces se tiene una $\underline{C}$-correflexión

$$C\left(\prod X_i,\xi\right)\to\left(\prod X_i,\xi\right)$$

Pero C conserva productos por tener adjunto izquierdo; en consecuencia $C(\prod X_i,\xi)$ es un producto en $\underline{C}$ de la familia $(X_i,\xi_i)_I$ y, como $\underline{B}$ está cerrada bajo bajo la formación de productos en $\underline{C}$, resulta $C(\prod X_i,\xi)\in|\underline{B}|$. Por lo tanto, $(\prod X_i,\xi)\in|\underline{D}|$.

(ii) $\underline{D}$ está cerrada bajo la formación de objetos extremados en $\underline{K}$. En efecto, sea $((X,\xi),f)$ un subobjeto extremado de $(Y,\eta)\in|\underline{D}|$. Por $\underline{K}$.*10*(e), es $f:(X,\xi)\to(Y,\eta)$ una inmersión en $\underline{K}$. Por otro lado, se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}(W,\omega) & \overset{g}{\dashrightarrow} & \left(X,\xi_{\underline{C}}\right) & \overset{f}{\to} & \left(Y,\eta_{\underline{C}}\right)\\ & & 1_X\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow 1_Y\\ & & (X,\xi) & \underset{f}{\to} & (Y,\eta)\end{array}$$

donde 1_X y 1_Y son $\underline{C}$-correflexiones, por lo que $\left(Y,\eta_{\underline{C}}\right)\in|\underline{B}|$. Si (W,ω) es un $\underline{C}$-objeto y $g:W\to X$ una función tales que

$$fg:(W,\omega)\to\left(Y,\eta_{\underline{C}}\right)$$

es un $\underline{C}$-morfismo, entonces

$$1_Yfg=fg:(W,\omega)\to(Y,\eta)$$

es un $\underline{K}$-morfismo. Por $\underline{K}$.*2*(2), es $g:(W,\omega)\to(X,\xi)$ un $\underline{K}$-morfismo, de modo que existe un $\underline{K}$-morfismo $\overline{g}:(W,\omega)\to\left(X,\xi_{\underline{C}}\right)$ tal que $1_X\overline{g}=g$, por lo que $\overline{g}=g$; es decir, $g:(W,\omega)\to\left(X,\xi_{\underline{C}}\right)$ es un $\underline{C}$-morfismo. Como $\underline{C}$ es una categoría concreta, se tiene que $f:\left(X,\xi_{\underline{C}}\right)\to\left(Y,\eta_{\underline{C}}\right)$ es una inmersión en $\underline{C}$. Por $\underline{K}$.*32*,

$\underline{C}$ es topológica y, por $\underline{K}.10$(e), es $\left(\left(X,\xi_{\underline{C}}\right),f\right)$ un subobjeto extremado en $\underline{C}$ de $\left(Y,\eta_{\underline{C}}\right)$. Por $\underline{K}.11$, $\underline{C}$ es una (epi, mono extremada)-categoría; por la proposición 36.11 de H-S resulta $\underline{B}$ cerrada bajo la formación de objetos extremados. En consecuencia, $\left(X,\xi_{\underline{C}}\right)\in|\underline{B}|$ y, por lo tanto, $(X,\xi)\in|\underline{D}|$.

(*iii*) $\underline{D}$ es epirreflexiva en $\underline{K}$. En efecto, por (*i*), (*ii*) y $\underline{K}.27$ resulta que $\underline{D}$ es epirreflexiva en $\underline{K}$.

(*iv*) Si $\underline{B}$ es birreflexiva en $\underline{C}$ entonces $\underline{D}$ es birreflexiva en $\underline{K}$. En efecto, sean, $\left(X,\xi^X\right)$ cualquier $\underline{K}$-objeto indiscreto y

$$1_X:\left(X,\xi^X_{\underline{C}}\right)\to\left(X,\xi^X\right)$$

una $\underline{C}$-correflexión. Por $\underline{K}.32$, $\underline{C}$ es una categoría concreta topológica propiamente fibrada; por $\underline{K}.33$, es

$$1_X:\left(X,\xi^X_{\underline{C}}\right)\to\left(X,\xi^X_{\underline{CB}}\right)$$

una $\underline{B}$-reflexión. Puesto que

$$1_X:\left(X,\xi^X_{\underline{CB}}\right)\to\left(X,\xi^X\right)$$

es un $\underline{K}$-morfismo, existe un único $\underline{C}$-morfismo, que debe ser 1_X, que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{array}{ccc}\left(X,\xi^X_{\underline{C}}\right) & \overset{1_X}{\rightarrow} & \left(X,\xi^X\right)\\ 1_X\nwarrow & \circlearrowleft & \nearrow 1_X\\ & \left(X,\xi^X_{\underline{CB}}\right) & \end{array}$$

Entonces, $1_X:\left(X,\xi^X_{\underline{C}}\right)\to\left(X,\xi^X_{\underline{CB}}\right)$ es un isomorfismo, de donde $\left(X,\xi^X_{\underline{C}}\right)\in|\underline{B}|$ y $\left(X,\xi^X\right)\in|\underline{D}|$. De (*iii*) y $\underline{K}.29$ se deduce que $\underline{D}$ es birreflexiva en $\underline{K}$. $\square$

$\underline{K}.42$ *Teorema.* Sean, $\underline{K}$ una categoría concreta topológica propiamente fibrada, $\underline{B}$ una subcategoría birreflexiva de $\underline{K}$, plena y repleta, $\underline{C}$ una subcategoría bicorreflexiva de $\underline{B}$, plena y repleta, conteniendo un objeto de conjunto subyacente no vacío. Entonces la subcategoría plena $\underline{D}$ de $\underline{K}$ que consta de los $\underline{K}$-objetos que tienen $\underline{B}$-reflexión en $\underline{C}$ es bicorreflexiva en $\underline{K}$.

Demostración. Casi dual de la de $\underline{K}.41$. $\square$