Capítulo 5

Formas: el concepto que unifica

Cuando en los capítulos tres y cuatro insistimos en definir a el rotacional y a la divergencia (tanto en el plano como en el espacio) a través de un límite, fue con la idea de que éstos se entendieran como un cierto tipo de derivada. Esta manera de ver a estos conceptos, junto con la introducción de las integrales de línea y de superficie, es lo que a su vez nos permitió interpretar a los teoremas de Green, Stokes y Gauss como una especie de generalización del Teorema Fundamental del Cálculo.

En este capítulo vamos a mostrar que, en efecto, el rotacional y la divergencia (¡y el gradiente!) se pueden ver como un caso particular de una especie de derivada, que llamaremos la *diferencial*, de un cierto tipo de función que se conoce con el nombre de *p-forma*. Así mismo, mostraremos que las integrales de línea y de superficie también son un caso particular de la integral definida para estos mismos objetos, y lo que es mejor de todo, veremos que los teoremas de Green, Stokes y Gauss son un caso particular de un único teorema que involucra a todos estos conceptos.

En este capítulo definiremos y describiremos de la manera más concisa posible (¡y sólo eso!), todo lo necesario para entender qué es una forma y los conceptos asociados de derivación e integración de estos objetos. Para concluir, formularemos el teorema que generaliza a los multicitados teoremas de los capítulos 3 y 4, mostrando simplemente por qué éstos últimos son un caso particular de aquel.

Finalmente, es importante mencionar que, aun y cuando el concepto de forma se puede trabajar en un contexto mas amplio, aquí nos limitaremos al ámbito del espacio $\mathbb{R}^n$.

5.1 Formas básicas

Lo primero que hay que decir es que definiremos a las formas básicas a través del concepto de función, y que los distintos tipos de formas básicas con los que trabajaremos se distinguirán por el dominio sobre el cual estarán definidas dichas funciones. Para cada $p \in \mathbb{N}$ se tendrá un número finito de formas básicas en $\mathbb{R}^n$; por ejemplo, para $p = 1$ definiremos (en $\mathbb{R}^n$) n distintas formas básicas (que denotaremos por $dx_1, \dots, dx_n$ y a las que por razones obvias llamaremos $1-$*formas básicas*), como las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definidas como:

$$dx_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \tag{5.1}$$

para cada $(a_1, \dots, a_n) = \hat{a} \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, \dots, n)$ y que geométricamente se puede(n) identificar como la(s) "proyección(es)" del punto $\hat{a}$ sobre el $i - \acute{e}simo$ eje coordenado (ver figura 5.1).

Para $p = 2$ definiremos (en $\mathbb{R}^n$) n^2 formas básicas (que denotaremos por $dx_i \wedge dx_j$ (con $i, j = 1, \dots, n$) y a las que por razones también obvias llamaremos $2-$*formas básicas*), como las funciones

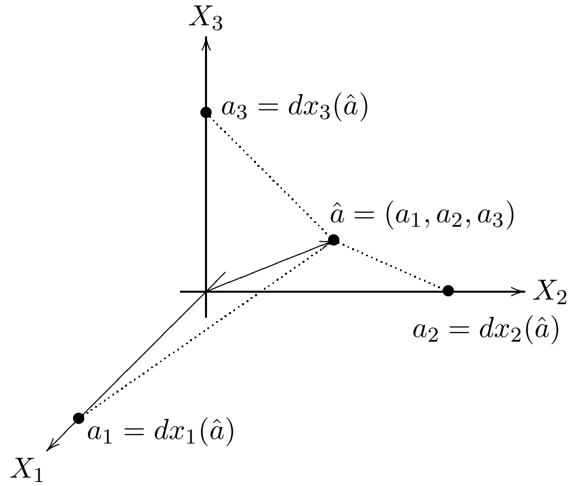

Figura 5.1: El valor de la $1-$forma básica dx_i sobre el vector $\hat{a}$ es igual a la $i-$ésima coordenada de éste o, geométricamente, es la proyección de $\hat{a}$ sobre el eje X_i

de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definidas como:

$$(dx_i \wedge dx_j)\left((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\right) = \det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

para cada $((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (con $i, j = 1, \ldots, n$) y que geométricamente se puede(n) identificar como la(s) función(es) que asignan ($+$ o $-$) el área del paralelogramo que se forma al "proyectar" en el plano X_iX_j a los vectores $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$ (ver figura 5.2).

Con base en estos dos ejemplos ya se pueden vislumbrar algunas cuestiones importantes relacionadas con las formas básicas en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, nótese que en la definición de las $2-$formas básicas dada en 5.2 se pueden usar las $1-$formas básicas de la siguiente manera: si $\hat{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\hat{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ entonces

$$\begin{aligned}
(dx_i \wedge dx_j)\left((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)\right) &= (dx_i \wedge dx_j)(\hat{a}, \hat{b}) \\
&= \det \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{bmatrix} \\
&= \det \begin{bmatrix} dx_i(\hat{a}) & dx_i(\hat{b}) \\ dx_j(\hat{a}) & dx_j(\hat{b}) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

También vale la pena destacar, con base en la identidad 5.2 (o en algunas propiedades elementales de los determinantes), que la $2-$forma básica $dx_i \wedge dx_i$ resulta ser la función constante cero, es decir

$$dx_i \wedge dx_i \equiv 0$$

para cada $i = 1, \ldots, n$, y que

$$dx_i \wedge dx_j = -(dx_j \wedge dx_i)$$

para cada $i, j = 1, \ldots, n$.

En general, dado $p \in \mathbb{N}$, las $p-$formas básicas en $\mathbb{R}^n$ se definen de la siguiente manera:

Definición 5.1 *Sea $p \in \mathbb{N}$. Dado $(l_1, \ldots, l_p) \in \{1, \ldots, n\} \times \cdots \times \{1, \ldots, n\} = \{1, \ldots, n\}^p$, definimos la $p-$forma básica en $\mathbb{R}^n$ asociada a este vector de índices, y que denotamos por $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$,*

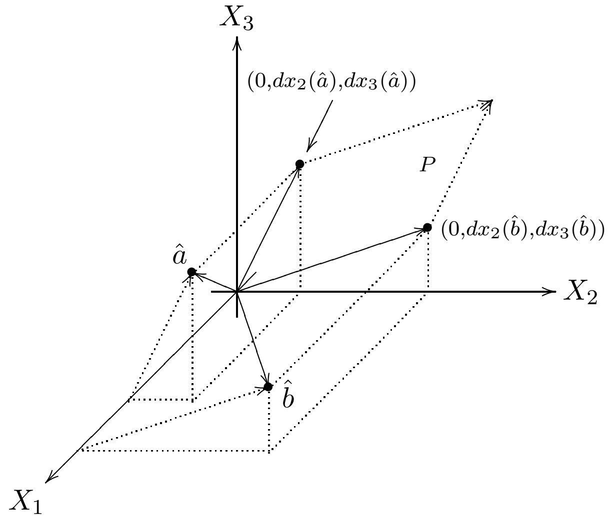

Figura 5.2: Geométricamente, la $2-$forma básica $dx_i \wedge dx_j$ se puede interpretar como la función que asigna ($+$ o $-$) el área del paralelogramo que se forma al "proyectar" en el plano X_iX_j a los vectores $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(b_1, \ldots, b_n)$. En la figura (en $\mathbb{R}^3$) se tiene que $(dx_2 \wedge dx_3)(\hat{a}, \hat{b}) =$ $-$área(P)

como la función

$$dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{p \text{ veces}} = (\mathbb{R}^n)^p \to \mathbb{R}$$

dada por

$$\left(dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}\right)(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_p) = \det\left(dx_{l_i}(\hat{a}_j)\right)$$

donde $i, j = 1, \ldots, p$.

Como ya mencionamos en el caso de las $2-$formas básicas, y por razones que resultan evidentes, en general las propiedades de los determinantes son fundamentales para deducir las propiedades de las $p-$formas básicas. Por ejemplo, del hecho de que el determinante de una matriz vale cero si ésta contiene dos columnas (o dos renglones) que son iguales, se deducen las siguientes propiedades de las $p-$formas básicas.

Proposición 5.2 *Sean* $p \in \mathbb{N}$ *y* $(l_1, \ldots, l_p) \in \{1, \ldots, n\}^p$.

1. *si* $l_i = l_j$ *para alguna* i *y una* j *entonces* $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \equiv 0$
2. *si* $p > n$ *entonces* $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \equiv 0$

Del segundo inciso de esta proposición concluimos que las únicas $p-$formas básicas (en $\mathbb{R}^n$) que vale la pena considerar son aquellas en las que $p \in \{1, \ldots, n\}$. En cuanto al primer inciso, este nos permite concluir que si $p \in \{1, \ldots, n\}$, entonces el número de $p-$formas básicas no triviales (de las n^p que definimos) está dado por $\binom{n}{p}$ (el número de subconjuntos del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ con exactamente p elementos).

Por otra parte, usando la propiedad de los determinantes que establece que el determinante de una matriz cambia de signo si se intercambian dos columnas (o dos renglones) adyacentes, obtenemos que todas las $p-$formas básicas que comparten el mismo conjunto de índices son iguales o difieren en el signo. Por ejemplo, de todas las $3-$formas que se pueden construir con los índices $1, 2$ y 3 (en cualquier $\mathbb{R}^n$), se tiene que

$$\begin{aligned} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 &= -(dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3) \\ &= dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &= -(dx_3 \wedge dx_2 \wedge dx_1) \\ &= dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= -(dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_2) \end{aligned}$$

De estas propiedades podemos concluir que un conjunto (máximo) de $p-$formas básicas que sean no triviales e independientes entre sí, se puede obtener considerando aquellas que se escriben como

$$dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \tag{5.3}$$

en donde $1 \leq l_1 < \cdots < l_p \leq n$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^3$ un conjunto (máximo) de $2-$formas básicas que son no triviales e independientes entre sí está dado por

$$\{dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2\}$$

Para el caso de las $1-$formas básicas (y en cualquier $\mathbb{R}^n$), dado que todas las que definimos son no triviales e independientes entre sí, el único conjunto (máximo) de $1-$formas básicas que tiene estas características está dado por

$$\{dx_1, dx_2, \ldots, dx_n\}$$

Como las $p-$formas básicas son funciones de valores reales, éstas se pueden multiplicar y sumar por números reales de la manera que todos conocemos. Con base en estas operaciones consideraremos combinaciones de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}}$$

con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ y $\left(l_1^{(i)}, \ldots, l_p^{(i)}\right) \in \{1, \ldots, n\}^p$ (para $i = 1, \ldots, k$) y seguiremos llamándolas $p-$formas básicas.

Observe que estas operaciones entre $p-$formas básicas hacen que el conjunto de todas ellas tengan una estructura de espacio vectorial sobre el campo de los números reales (de dimensión $\binom{n}{p}$). Denotaremos por $\Omega^{(p)}$ al espacio de todas las posibles combinaciones de $p-$formas básicas en $\mathbb{R}^n$ y en particular denotaremos por $0^{(p)}$ al cero de este espacio, y que corresponde a la función constante cero definida en $(\mathbb{R}^n)^p$. De esta forma, por ejemplo, el conjunto $\Omega^{(1)}$ de todas las combinaciones de $1-$formas básicas en $\mathbb{R}^n$ estará dado por

$$\Omega^{(1)} = \{\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 + \cdots + \alpha_n dx_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

y el de todas las $2-$formas básicas en $\mathbb{R}^3$ estará dado por

$$\Omega^{(2)} = \{\alpha_{2,3}(dx_2 \wedge dx_3) + \alpha_{3,1}(dx_3 \wedge dx_1) + \alpha_{1,2}(dx_1 \wedge dx_2) \mid \alpha_{1,2}, \alpha_{3,1}, \alpha_{2,3} \in \mathbb{R}\}$$

Finalmente, terminamos esta sección definiendo las $0-$formas básicas en $\mathbb{R}^n$. La $0-$forma básica más elemental es sólo una, que denotaremos por $1^{(0)}$, y está dada por la función constante uno definida en el conjunto $\{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^n$ ([1]). Si a esta función la multiplicamos por diferentes escalares (reales) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ y las sumamos, obtenemos la función constante $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)1^{(0)}$ definida en el conjunto $\{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^n$. Como se podrá observar, al conjunto $\Omega^{(0)}$ de todas las $0-$formas básicas (en cualquier $\mathbb{R}^n$) se le puede identificar simplemente con el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

5.2 Formas diferenciables

Una vez que hemos descrito a las $p-$formas básicas en $\mathbb{R}^n$, introduciremos el concepto de forma y el de forma diferenciable. Así como a una $p-$forma básica $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ la podemos multiplicar por un número real α (y después sumarla con otras similares), ahora podemos tomar una región $U \subset \mathbb{R}^n$, una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y para cada $\hat{x} \in U$, considerar la $p-$forma básica $f(\hat{x})dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$. Esta es la idea que está detrás del concepto de $p-$forma, el cual precisamos en la siguiente

Definición 5.3 *Sean, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región, $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ una $p-$forma básica (en $\mathbb{R}^n$). Dada una función $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la $p-$forma asociada a la $p-$forma básica $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ y a la función f, que denotamos por $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$, es la función*

$$f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} : U \subset \mathbb{R}^n \to \Omega^{(p)}$$

definida como

$$(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p})(\hat{x}) = f(\hat{x}) dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$$

En general, dadas las $p-$formas básicas

$$dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}}, \ldots, dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}} \in \Omega^{(p)}$$

y las funciones $f_1, \ldots, f_k : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \binom{n}{p}$, diremos que la suma

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

es una $p-$forma definida en $U \subset \mathbb{R}^n$.

A continuación, damos algunos ejemplos que ilustran esta definición.

Ejemplo 5.4 *Sean*

1. *la $1-$forma definida en $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ dada por*

$$\frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

en donde (como queda implícito)

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \quad y \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{-x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Esta misma $1-$forma, en términos de las variables x y y, se escribe como

$$\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{-x}{x^2 + y^2} dy$$

[1] La elección de este dominio (que tratándose de funciones constantes, no es tan importante) obedece a la idea de que, si para el resto de las $p-$formas básicas su dominio es $(\mathbb{R}^n)^p$, para las $0-$formas debiera de ser el conjunto $(\mathbb{R}^n)^0$ el cual podemos identificar con el conjunto $\{\hat{0}\}$.

2. *la* $2-$*forma definida en* $U = \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\} \subset \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} dx_1 \wedge dx_2$$

en donde (como nuevamente queda claro)

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}}, \qquad f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}}$$

y

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}}$$

Esta misma $2-$*forma, en términos de las variables* x, y *y* z*, se escribe como*

$$\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \wedge dx + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx \wedge dy$$

Como es de esperarse, la diferenciabilidad de la $p-$forma $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ dependerá de la diferenciabilidad de la fución f, y lo que sí resultará novedoso es la manera en cómo definiremos a la diferencial de la $p-$forma $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$. Para ello, empezaremos por definir lo que significa la diferencial de una $0-$forma $f1^{(0)}$, de la siguiente manera:

Definición 5.5 *Sea* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *en* U*. Definimos la diferencial de la* $0-$*forma* $f1^{(0)}$*, que denotamos por* $d(f1^{(0)})$*, como la* $1-$*forma (definida en* $U \subset \mathbb{R}^n$*) dada por*

$$d(f1^{(0)}) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

es decir

$$d(f1^{(0)})(\hat{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\hat{x}) dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\hat{x}) dx_n$$

para cada $\hat{x} \in U$*.*

Una vez hecho lo anterior, definimos en general lo que significa que una $p-$forma sea diferenciable (y que por razones obvias llamaremos $p-$*forma diferenciable*) de la siguiente manera:

Definición 5.6 *Sean,* $U \subset \mathbb{R}^n$ *una región,* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *en* U*,* $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *y* $dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$ *una* $p-$*forma básica. Definimos a la diferencial de la* $p-$*forma* $f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}$*, que denotamos por* $d(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p})$*, como a la* $(p+1)-$*forma (definida en* $U \subset \mathbb{R}^n$*) dada por*

$$\begin{aligned} d(f dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p}) &= d(f1^{(0)}) \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \wedge dx_{l_1} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p} \end{aligned}$$

En general, dadas las $p-$*formas básicas*

$$dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}}, \ldots, dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}} \in \Omega^{(p)}$$

y las funciones $f_1, \ldots, f_k : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq \binom{n}{p}$, *definimos la diferencial de la* $p-$*forma*

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

como

$$d\left(\omega^{(p)}\right) = d(f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}}) + \cdots + d(f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}})$$

Sin duda un buen número de ejemplos ayudará a entender mejor este concepto.

Ejemplo 5.7 *Calcule la diferencial:*

1. *de la* $1-$*forma en* $\mathbb{R}^2$ *dada por*

$$Pdx + Qdy$$

Solución. De la definición de diferencial, se tiene que

$$\begin{aligned}
d\left(Pdx + Qdy\right) &= d\left(P1^{(0)}\right) \wedge dx + d(Q1^{(0)}) \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dy \\
&= 0 - \frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy - 0 \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\
&= (\mathrm{Rot}\, F)\, dx \wedge dy
\end{aligned}$$

en donde $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

2. *de la* $1-$*forma en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

Solución. Como en el inciso anterior

$$\begin{aligned}
d\left(Pdx + Qdy + Rdz\right) &= d(P1^{(0)}) \wedge dx + d(Q1^{(0)}) \wedge dy + d(R1^{(0)}) \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dy \\
&+ \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dz \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dy \\
&+ \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dz \\
&= \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz \wedge dy \\
&+ \frac{\partial R}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dz \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy
\end{aligned}$$

3. en general, de la $1-$*forma en* $\mathbb{R}^n$ *dada por*

$$\omega^{(1)} = f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n$$

Solución. Una vez más, sabemos que

$$\begin{aligned}
d\omega^{(1)} &= d(f_1 1^{(0)}) \wedge dx_1 + d(f_2 1^{(0)}) \wedge dx_2 + \cdots + d(f_n 1^{(0)}) \wedge dx_n \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j\right) \wedge dx_n \\
&= \left(-\sum_{j=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} dx_1 \wedge dx_j\right) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 - \sum_{j=3}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_2 \wedge dx_j\right) \\
&+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3 - \sum_{j=4}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_j} dx_2 \wedge dx_j\right) + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_n\right) \\
&= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_3 + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right) dx_1 \wedge dx_n \\
&+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_4}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right) dx_2 \wedge dx_4 + \cdots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right) dx_2 \wedge dx_n \\
&\vdots \\
&+ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n}\right) dx_{n-1} \wedge dx_n \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j
\end{aligned}$$

4. de la $2-$*forma en* $\mathbb{R}^3$ *dada por*

$$\omega^{(2)} = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$$

Solución. En este caso se tiene que

$$\begin{aligned}
d(\omega^{(2)}) &= d(P1^{(0)}) \wedge (dy \wedge dz) + d(Q1^{(0)}) \wedge (dz \wedge dx) + d(R1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge (dy \wedge dz) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge (dz \wedge dx) \\
&+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\
&= (\operatorname{div} F)\, dx \wedge dy \wedge dz
\end{aligned}$$

en donde $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

5. *la 2–forma en $\mathbb{R}^4$ dada por*

$$\omega^{(2)} = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dw + Rdw \wedge dx + Wdx \wedge dy$$

Solución. Ahora tenemos que

$$\begin{aligned}
d(\omega^{(2)}) &= d(P1^{(0)}) \wedge (dy \wedge dz) + d(Q1^{(0)}) \wedge (dz \wedge dw) + d(R1^{(0)}) \wedge (dw \wedge dx) \\
&\quad + d(W1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz + \frac{\partial P}{\partial w}dw\right) \wedge (dy \wedge dz) \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz + \frac{\partial Q}{\partial w}dw\right) \wedge (dz \wedge dw) \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz + \frac{\partial R}{\partial w}dw\right) \wedge (dw \wedge dx) \\
&\quad + \left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz + \frac{\partial W}{\partial w}dw\right) \wedge (dx \wedge dy) \\
&= \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial P}{\partial w}dw \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dz \wedge dw + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dw \\
&\quad + \frac{\partial R}{\partial y}dy \wedge dw \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dw \wedge dx + \frac{\partial W}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy + \frac{\partial W}{\partial w}dw \wedge dx \wedge dy \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dy \wedge dz \wedge dw + \left(\frac{\partial R}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial w}\right) dx \wedge dy \wedge dw \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx \wedge dz \wedge dw
\end{aligned}$$

6. *de la 3–forma en $\mathbb{R}^4$ dada por*

$$\omega^{(3)} = Pdx \wedge dy \wedge dz + Qdy \wedge dz \wedge dw + Rdx \wedge dy \wedge dw + Wdx \wedge dz \wedge dw$$

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned}
d(\omega^{(3)}) &= d(P1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz) + d(Q1^{(0)}) \wedge (dy \wedge dz \wedge dw) + d(R1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dy \wedge dw) \\
&\quad + d(W1^{(0)}) \wedge (dx \wedge dz \wedge dw) \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz + \frac{\partial P}{\partial w}dw\right) \wedge (dx \wedge dy \wedge dz) \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz + \frac{\partial Q}{\partial w}dw\right) \wedge (dy \wedge dz \wedge dw) \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz + \frac{\partial R}{\partial w}dw\right) \wedge (dx \wedge dy \wedge dw) \\
&\quad + \left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz + \frac{\partial W}{\partial w}dw\right) \wedge (dx \wedge dz \wedge dw) \\
&= \frac{\partial P}{\partial w}dw \wedge dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy \wedge dw \\
&\quad + \frac{\partial W}{\partial y}dy \wedge dx \wedge dz \wedge dw \\
&= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial w} + \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) dx \wedge dy \wedge dz \wedge dw
\end{aligned}$$

Como seguramente el lector habrá observado, algunos de estos ejemplos ilustran la estrecha relación que existe entre el concepto de diferencial de una $p-$forma, y algunos de los conceptos que definimos en los capítulos tres y cuatro (relación que, por cierto, viene a justificar por qué afirmábamos que los conceptos de rotacional y divergencia se podían ver "como una derivada").

Además de lo anterior, también vale la pena observar lo siguiente. Si en los incisos 1 y 2 del ejemplo anterior se supusiera que existen $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\psi : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 (en U) tales que

$$\begin{aligned}(P,Q) &= \nabla\varphi \\ &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(P,Q,R) &= \nabla\psi \\ &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\end{aligned}$$

en cuyo caso se tendría que

$$\begin{aligned}Pdx + Qdy &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy \\ &= d(\varphi 1^{(0)})\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}Pdx + Qdy + Rdz &= \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz \\ &= d(\psi 1^{(0)})\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}d\left(d(\varphi 1^{(0)})\right) &= d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy\right) \\ &= d\left(Pdx + Qdy\right) \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &= (0)\, dx \wedge dy \\ &= 0^{(2)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}d\left(d(\psi 1^{(0)})\right) &= d\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz\right) \\ &= d\left(Pdx + Qdy + Rdz\right) \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial y}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) dx\wedge dy \\
&= 0^{(2)}
\end{aligned}
$$

lo cual coincide con el hecho de que $\mathrm{Rot}(\nabla\varphi) = 0$ y $\mathbf{Rot}(\nabla\psi) = (0,0,0)$ (en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$, respectivamente), como se probó en el capítulo tres.

Algo análogo sucede si combinamos los incisos 2 y 4. Observe que, si

$$\omega^{(1)} = Pdx + Qdy + Rdz$$

entonces

$$
\begin{aligned}
d\left(d\left(\omega^{(1)}\right)\right) &= d\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy\right) \\
&= \left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right) dx\wedge dy\wedge dz \\
&= \left(\left(\frac{\partial^2 R}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial z}\right) + \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y\partial x}\right) + \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z\partial y}\right)\right) dx\wedge dy\wedge dz \\
&= 0^{(3)}
\end{aligned}
$$

lo que también coincide con el hecho de que $\mathrm{div}\left(\mathbf{Rot}(P,Q,R)\right) = 0$, como se probó en el capítulo cuatro.

Lo más interesante de esta propiedad (que dos diferenciales consecutivas de una $p-$forma nos lleva a la $(p+2)-$forma constante cero), es que ésta se sigue verificando aun y cuando estas diferenciales no estén relacionadas con conceptos que hayamos visto previamente. Tal es el caso del inciso 3 del mismo ejemplo. Observe que, si existe $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 (en U) tal que

$$f_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

para cada $i = 1,\ldots,n$, entonces

$$
\begin{aligned}
d\left(d\left(\varphi 1^{(0)}\right)\right) &= d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}dx_n\right) \\
&= d\left(f_1dx_1 + f_2dx_2 + \cdots + f_ndx_n\right) \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) dx_i\wedge dx_j \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial_j\varphi}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)\right) dx_i\wedge dx_j \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_i}\right) dx_i\wedge dx_j \\
&= 0^{(2)}
\end{aligned}
$$

Y observamos la misma propiedad si combinamos los incisos 5 y 6. En efecto, si tomamos la $2-$forma en $\mathbb{R}^4$

$$\omega^{(2)} = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dw + Rdw\wedge dx + Wdx\wedge dy$$

entonces

$$\begin{aligned}
d\left(d\left(\omega^{(2)}\right)\right) &= d\left(\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial w}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dy\wedge dz\wedge dw\right.\\
&\left.+\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial w}\right)dx\wedge dy\wedge dw+\left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx\wedge dz\wedge dw\right)\\
&=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial w}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial R}{\partial y}+\frac{\partial W}{\partial w}\right)\right.\\
&\left.-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial R}{\partial z}+\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right)dx\wedge dy\wedge dz\wedge dw\\
&=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial w}+\frac{\partial^2 Q}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 P}{\partial w\partial x}-\frac{\partial^2 W}{\partial w\partial z}+\frac{\partial^2 R}{\partial z\partial y}+\frac{\partial^2 W}{\partial z\partial w}-\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 Q}{\partial y\partial x}\right)dx\wedge dy\wedge dz\wedge dw\\
&=0^{(4)}
\end{aligned}$$

Sin duda a estas alturas el lector ya debe estar convencido de que estos ejemplos no son más que un caso particular de un resultado bastante más general, y por supuesto que está en lo correcto. Este resultado generaliza las identidades $\mathrm{Rot}(\nabla\varphi)=0$, $\mathbf{Rot}(\nabla\psi)=(0,0,0)$ y $\mathrm{div}\,(\mathbf{Rot}(P,Q,R))=0$ como mencionamos anteriormente, y su prueba es un poco más elaborada que la de éstas. Dada la importancia de este resultado, es que le otorgamos el grado de

Teorema 5.8 *Sean*

$$dx_{l_1^{(1)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(1)}},\ldots,dx_{l_1^{(k)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(k)}}\in\Omega^{(p)}$$

$p-$formas básicas, y $f_1,\ldots,f_k:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ funciones de clase C^2 en U, $1\leq k\leq\binom{n}{p}$. Si

$$\omega^{(p)}=f_1dx_{l_1^{(1)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(1)}}+\cdots+f_kdx_{l_1^{(k)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

entonces

$$d\left(d\left(\omega^{(p)}\right)\right)=0^{(p+2)}$$

Dem. Dado que, de acuerdo con la definición 5.6, se tiene que

$$d\left(d\left(\sum_{i=1}^{k}f_idx_{l_1^{(i)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(i)}}\right)\right)=\sum_{i=1}^{k}d\left(d\left(f_idx_{l_1^{(i)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(i)}}\right)\right)$$

bastará probar que, si $dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\in\Omega^{(p)}$ y $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es de clase C^2 en U, entonces

$$d\left(d\left(fdx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\right)\right)=0^{(p+2)}$$

Por esta misma definición sabemos que

$$\begin{aligned}
d\left(fdx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\right)&=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\right)\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}
\end{aligned}$$

de modo que, denotando $\omega^{(p)}=fdx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}$, se tiene que

$$d\left(d\left(\omega^{(p)}\right)\right)=d\left(d\left(fdx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\right)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\right)\\
&= d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\right)+\cdots+d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\right)\\
&= \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_1}dx_i\right)\wedge dx_1\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_2}dx_i\right)\wedge dx_2\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\\
&+\cdots+\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_n}dx_i\right)\wedge dx_n\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\\
&= -\sum_{i=2}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_1}dx_1\wedge dx_i\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1\wedge dx_2\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\\
&-\sum_{i=3}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_2}dx_2\wedge dx_i\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}+\cdots+\\
&\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_n}dx_i\wedge dx_n\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\\
&= \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\right)dx_i\wedge dx_j\wedge dx_{l_1}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p}\\
&= 0^{(p+2)}
\end{aligned}
$$

■

5.3 Diferenciales exactas (primera parte)

Como siempre sucede con los teoremas importantes, ahora es inevitable hacerse la siguiente pregunta: si una $p-$forma diferenciable

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(1)}}+\cdots+f_k dx_{l_1^{(k)}}\wedge\cdots\wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

(definida en una región $U\subset\mathbb{R}^n$) es tal que

$$d\left(\omega^{(p)}\right)=0^{(p+1)}$$

¿existe una $(p-1)-$forma diferenciable (definida en $U\subset\mathbb{R}^n$)

$$\tau^{(p-1)}=\tilde{f}_1 dx_{n_1^{(1)}}\wedge\cdots\wedge dx_{n_{p-1}^{(1)}}+\cdots+\tilde{f}_m dx_{n_1^{(m)}}\wedge\cdots\wedge dx_{n_{p-1}^{(m)}}$$

tal que

$$\omega^{(p)}=d\left(\tau^{(p-1)}\right)?$$

Lo más interesante de esta cuestión es que esta es una pregunta que ya nos planteamos (¡y que ya resolvimos!) para algunos casos particulares.

En efecto, como se recordará, en el capítulo tres nos planteamos el problema de determinar cuándo un campo era conservativo (o gradiente) y como solución probamos el teorema 3.51 el cual nos aseguraba que, si

$$F=(F_1,\ldots,F_n):U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$$

era una función de clase C^1 en U, una región estrellada, tal que

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $(i \neq j)$ entonces F era un campo gradiente en U, lo que significaba que existía $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = F_i(\hat{x})$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.

Como el lector habrá notado, este resultado resuelve la pregunta que nos hicimos al inicio de esta sección para el caso de las $1-$formas diferenciables puesto que, si la $1-$forma

$$\omega^{(1)} = f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n$$

es tal que

$$\begin{aligned} 0^{(2)} &= d\left(\omega^{(1)}\right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) dx_i \wedge dx_j \end{aligned}$$

(de acuerdo con el inciso 3 del ejemplo 5.7), esto significa que

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$ y para toda $i, j \in \{1, \dots, n\}$, de tal forma que, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = f_i$$

entonces la $0-$forma

$$\tau^{(0)} = \varphi 1^{(0)}$$

satisface que

$$\begin{aligned} d\left(\tau^{(0)}\right) &= d\left(\varphi 1^{(0)}\right) \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \\ &= f_1 dx_1 + \cdots + f_n dx_n \\ &= \omega^{(1)} \end{aligned}$$

Como seguramente el lector ya se imagina, el otro caso particular que ya resolvimos es el de las $2-$formas diferenciables en $\mathbb{R}^3$, y que está relacionado con el problema de determinar cuándo un campo F (en $\mathbb{R}^3$) es un campo solenoide.

Como también se recordará, el teorema 4.35 del capítulo cuatro nos aseguraba que, si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ era una función de clase C^1 en U, con U una región estrellada tal que

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$$

para toda $\hat{x} \in U$, entonces F era un campo solenoide en U, lo que significaba que existía $G = (\tilde{P}, \tilde{Q}, \tilde{R}) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{Rot}G &= \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y}, \frac{\partial \tilde{R}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}\right) \\ &= F \\ &= (P, Q, R)\end{aligned}$$

Obsérvese que, apoyados en este teorema, tenemos que, si

$$\omega^{(2)} = f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy$$

es una $2-$forma diferenciable definida sobre una región estrellada $U \subset \mathbb{R}^3$ (¡que es así como se pueden escribir todas las $2-$formas en $\mathbb{R}^3$!) tal que $d\left(\omega^{(2)}\right) = 0^{(3)}$, entonces

$$\begin{aligned}0^{(3)} &= d\left(\omega^{(2)}\right) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \operatorname{div}(f_1, f_2, f_3) dx \wedge dy \wedge dz\end{aligned}$$

lo que significa que $\operatorname{div}(f_1, f_2, f_3) = 0$, de modo que, por el teorema antes mencionado, sabemos que existe $G = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned}\mathbf{Rot}G &= \left(\frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}, \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x}, \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}\right) \\ &= (f_1, f_2, f_3)\end{aligned}$$

Por tanto, si tomamos la $1-$forma

$$\tau^{(1)} = \tilde{f}_1 dx + \tilde{f}_2 dy + \tilde{f}_3 dz$$

ésta tiene la propiedad de que

$$\begin{aligned}d\left(\tau^{(1)}\right) &= d\left(\tilde{f}_1 dx + \tilde{f}_2 dy + \tilde{f}_3 dz\right) \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial y} - \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{f}_3}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy \\ &= f_1 dy \wedge dz + f_2 dz \wedge dx + f_3 dx \wedge dy \\ &= \omega^{(2)}\end{aligned}$$

Cuando para una $p-$forma

$$\omega^{(p)} = f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}}$$

(definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$) existe una $(p-1)-$forma (definida en $U \subset \mathbb{R}^n$)

$$\tau^{(p-1)} = \tilde{f}_1 dx_{n_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{n_{p-1}^{(1)}} + \cdots + \tilde{f}_m dx_{n_1^{(m)}} \wedge \cdots \wedge dx_{n_{p-1}^{(m)}}$$

tal que

$$\omega^{(p)} = d\left(\tau^{(p-1)}\right)$$

decimos que $\omega^{(p)}$ es una *diferencial exacta* (en la región $U \subset \mathbb{R}^n$) y la pregunta que nos hicimos al inicio de esta sección se puede reformular de la siguiente manera: ¿si $d\left(\omega^{(p)}\right) = 0^{(p+1)}$ entonces $\omega^{(p)}$ es una diferencial exacta?

De acuerdo con lo que acabamos de ver, ahora podemos responder que este no siempre es el caso (al menos para las $1-$formas en $\mathbb{R}^n$ o para las $2-$formas en $\mathbb{R}^3$) y que en gran medida la respuesta a esta pregunta depende de la "geometría" de la región $U \subset \mathbb{R}^n$ sobre la cual esta definida la $p-$forma $\omega^{(p)}$.

Como sucedió en el capítulo tres (para el caso de los campos conservativos) y en el capítulo cuatro (para el caso de los campos solenoides), para responder esta pregunta (en el caso general) será indispensable definir nuevos conceptos (y teoremas relacionados con éstos) a fin de contar con las herramientas necesarias.

Si en los capítulos tres y cuatro hubo necesidad de introducir los conceptos de curva e integral de línea, y los de superficie e integral de superficie (respectivamente), ahora será necesario introducir los conceptos de $p-$variedad parametrizada en $\mathbb{R}^n$ y el de integral de una $p-$forma sobre una $p-$variedad, así como algunos teoremas relacionados con estos conceptos. Esto es justo lo que haremos en las siguientes secciones.

5.4 $p-$variedades parametrizadas

Así como una curva o una superficie no es más que la imagen bajo una función σ (de clase C^1) de un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, o de una región $A \subset \mathbb{R}^2$ (tipo I o tipo II), respectivamente, un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ será una *$p-$variedad parametrizada* (con $p \in \{1, \ldots, n\}$,) si M se puede ver como la imagen bajo una función σ (de clase C^1) de alguna región $A \subset \mathbb{R}^p$, en donde A será el tipo de región en $\mathbb{R}^p$ que generaliza a las regiones tipo I y tipo II de $\mathbb{R}^2$ (y tipo III, de $\mathbb{R}^3$).

Empezaremos por definir de manera más precisa a este tipo de regiones, y lo haremos de forma inductiva a partir de las regiones tipo I y tipo II que ya conocemos en $\mathbb{R}^2$, de la siguiente manera:

Definición 5.9 *Decimos que $B \subset \mathbb{R}^2$ es una región básica (en $\mathbb{R}^2$), si es una región tipo I o tipo II, como se definieron en el capítulo dos. En general, diremos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es una* región básica *en $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 3$) si existe $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$, una región básica en $\mathbb{R}^{n-1}$, y existen $\alpha, \beta : B \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ (de clase C^1) tales que*

$$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{1+1}, \ldots, x_n) \in B, \alpha(\hat{x}) \leq x_i \leq \beta(\hat{x})\}$$

para alguna $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dado que las únicas regiones básicas que podemos dibujar se encuentran en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$, y en el capítulo dos ya dimos algunos ejemplos de ellas, continuamos con la definición del concepto de $p-$variedad parametrizada. Simplemente observe que los rectángulos de la forma

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

son ejemplos de regiones básicas en $\mathbb{R}^n$ (con respecto a cualquier $i \in \{1, \ldots, n\}$) y que el número de regiones básicas diferentes que se pueden construir en $\mathbb{R}^n$ es $n!$.

La descripción que hicimos de una $p-$variedad parametrizada en $\mathbb{R}^n$ al inicio de esta sección es muy precisa, por lo que simplemente la formalizamos en la siguiente

Definición 5.10 *Decimos que un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es una $p-$variedad parametrizada, con $p \in \{1, \ldots, n\}$, si existe $\sigma : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1 (lo que significa que σ es de clase C^1 en un abierto (en $\mathbb{R}^p$) que contiene a A) tal que $M = \sigma(A)$, donde A es una región básica (o A es un intervalo de la forma $[a, b]$ si $p = 1$). En este caso diremos que σ es una parametrización de M. Si σ es inyectiva en el interior de A ($int(A)$) diremos que σ es una parametrización simple de M. Finalmente, al conjunto $\sigma(Fr(A))$ lo llamaremos el borde de M inducido por la parametrización σ, y lo denotaremos por $\partial_\sigma M$, es decir, $\partial_\sigma M = \sigma(Fr(A))$.*

Nuevamente, algunos ejemplos serán muy útiles para ilustrar este concepto.

Ejemplo 5.11 *Considere:*

1. *$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región básica A, y $M = \left\{(\hat{x}, f(\hat{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{x} \in A\right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. En este caso M es una $n-$variedad en $\mathbb{R}^{n+1}$ y una parametrización de M está dada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida como*

$$\sigma(\hat{x}) = (\hat{x}, f(\hat{x}))$$

   Como se podrá observar, en este caso M es la gráfica de f.

2. *$M = \sigma(A) \subset \mathbb{R}^4$, en donde $A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3$ y*

$$\sigma(\theta, \varphi, \psi) = (r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi), r \cos(\psi))$$

   con $r > 0$. Observe que

$$\begin{aligned} \|\sigma(\theta, \varphi, \psi)\|^2 &= \|(r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), r \operatorname{sen}(\psi) \cos(\varphi), r \cos(\psi))\|^2 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

   por lo que a esta $3-$variedad M bien se le puede bautizar como la $3-$esfera (en $\mathbb{R}^4$) de radio $r > 0$ con centro en el origen.

3. *$M = \sigma(A) \subset \mathbb{R}^4$, en donde $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}^2$ y*

$$\begin{aligned} \sigma(\theta, \varphi) = ((\cos(\varphi) + 2)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta/2), (\cos(\varphi) + 2)\operatorname{sen}(\theta) - \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta/2) \\ , \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta/2), \operatorname{sen}(\theta/2)) \end{aligned}$$

   Observe que en este caso M es una $2-$variedad (o una superficie) en $\mathbb{R}^4$ que tiene las siguientes características geométricas. La primera de ellas es que la imagen bajo σ de las líneas verticales de A, es decir, la imagen de los puntos de la forma $\sigma(\theta_0, \varphi)$, con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo, es tal que

$$\begin{aligned} &\|\sigma(\theta_0, \varphi) - (2\cos(\theta_0), 2\operatorname{sen}(\theta_0), 0, \operatorname{sen}(\theta_0/2))\|^2 \\ &= (\cos(\varphi)\cos(\theta_0) + \operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 + (\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta_0) - \operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 \\ &+ (\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta_0/2))^2 \\ &= (\cos(\varphi)\cos(\theta_0))^2 + (\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta_0)\operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 + (\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta_0))^2 + (\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta_0)\operatorname{sen}(\theta_0/2))^2 \\ &+ \operatorname{sen}^2(\varphi)\cos^2(\theta_0/2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

lo que significa que la imagen del conjunto $\{\theta_0\} \times [0, 2\pi]$ *es una circunferencia de radio* 1 *con centro en el punto*

$$(2\cos(\theta_0), 2\,\mathrm{sen}(\theta_0), 0, \mathrm{sen}(\theta_0/2))$$

Esto quiere decir que la función σ *"pega" las líneas horizontales* $[0, 2\pi] \times \{0\}$ *y* $[0, 2\pi] \times \{2\pi\}$ *(que forman parte de la* $Fr(A)$*) con lo que forma un "cilindro" (en* $\mathbb{R}^4$*). Si ahora observamos que en particular las dos líneas verticales* $\{0\} \times [0, 2\pi]$ *y* $\{2\pi\} \times [0, 2\pi]$ *(que forman el resto de la* $Fr(A)$*) son tales que*

$$\sigma(0, \varphi) = (\cos(\varphi) + 2, \cos(\varphi) + 2, \mathrm{sen}(\varphi), 0)$$

y

$$\sigma(2\pi, \varphi) = (\cos(\varphi) + 2, \cos(\varphi) + 2, -\,\mathrm{sen}(\varphi), 0)$$

concluimos que su imagen bajo σ *es la misma circunferencia, sólo que recorridas en direcciones opuestas (si ambas líneas verticales se recorren de abajo hacia arriba). Por esta razón, si la línea* $\{0\} \times [0, 2\pi]$ *es recorrida de arriba hacia abajo (que es como queda recorrida cuando la* $Fr(A)$ *se recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj), concluimos que* σ *"pega" a las circunferencias que forman los extremos del "cilindro" inicial, pero de tal forma que éstas queden recorridas en la misma dirección (a diferencia de lo que sucede cuando "pegamos" los extremos de un cilindro para formar un toro (o una dona). Para lograr esta forma de "pegado" en* $\mathbb{R}^3$ *es necesario "cruzar" la "pared" del cilindro, y al hacerlo obtenemos la ya conocida botella de Kline (figura 4.8). La parametrización* σ *de este ejemplo hace lo mismo (por lo que la* $2-$*variedad* M *de este inciso es la botella de Kline) pero sin necesidad de "cruzar" la "pared" del cilindro. De hecho,* σ *es una parametrización simple de la botella de Kline, la que, por supuesto, sólo es posible obtener en* $\mathbb{R}^4$ *(o en* $\mathbb{R}^n$*, con* $n \geq 4$*).*

La definición de $p-$variedad se puede generalizar al de $p-$variedad por pedazos, justo de la misma forma en que lo hicimos para el caso de las superficies. Dado que nuestra intención no es extendernos en este concepto, simplemente lo formalizamos en la siguiente definición.

Definición 5.12 *Decimos que un conjunto* $M \subset \mathbb{R}^n$ *es una* $p-$*variedad parametrizada por pedazos, si existen* $M_1, \ldots, M_k \subset \mathbb{R}^n$ $p-$*variedades parametrizadas tales que*

$$M = M_1 \cup \cdots \cup M_k$$

Si $\sigma_i : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ *es una parametrización de* M_i *(para* $i = 1, \ldots, k$*), escribimos* $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k$ *y decimos que* σ *es "una parametrización" de* M*.*

Sólo una observación es necesario hacer con respecto a este concepto. Si se revisa con cuidado la definición 5.9 se podrá notar que, si $A \subset \mathbb{R}^p$ (con $p \geq 2$) es una región básica, entonces la frontera de A ($Fr(A)$ ó ∂A) es una $(p-1)-$variedad parametrizada por pedazos (en $\mathbb{R}^p$). En efecto, nótese que en este caso la $Fr(A)$ está formada por la gráfica de dos funciones definidas sobre una región básica $B \subset \mathbb{R}^{p-1}$, y algunos otros "pedazos cilíndricos" (que se "levantan" sobre la $Fr(B)$) (ver figura 5.3 que ilustra el caso $p = 3$). De hecho, esta característica de la frontera de una región básica A nos permitiría definir lo que significaría que una parametrización de esta $(p-1)-$variedad "indujera" vectores normales que apuntan hacia "afuera" de A, justo a través de los vectores normales a las gráficas de las funciones que la determinan. Hacer esto con más formalidad nos llevaría algunas páginas más, razón por la cual sólo nos quedamos con esta idea intuitiva.

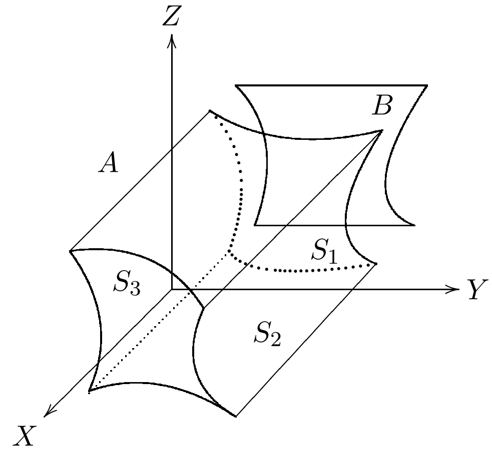

Figura 5.3: Si $A \subset \mathbb{R}^3$ es una región básica, la $Fr(A) = \partial A = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ está formada por la gráfica de dos funciones definidas sobre una región básica $B \subset \mathbb{R}^2$ (en la figura las superficies S_1 y S_3), y algunos "pedazos cilíndricos" que se "levantan" sobre la $Fr(B)$ (en la figura la superficie S_2)

Una consecuencia de lo anterior es que, si $M \subset \mathbb{R}^n$ es una $p-$variedad parametrizada por σ (sobre A), el conjunto $\partial_\sigma M = \sigma(Fr(A))$ también será una $(p-1)-$variedad parametrizada por pedazos (en $\mathbb{R}^n$).

De las $p-$variedades parametrizadas habría muchas cosas interesantes que decir, pero por ahora con estas ideas elementales nos es suficiente para lograr nuestro objetivo. Con este fin, lo que sigue es definir la integral de una $p-$forma $\omega^{(p)}$ sobre una $p-$variedad parametrizada M, cuestión que abordaremos en la siguiente sección.

5.5 Integrando formas

Como se recordará, en el capítulo tres definimos la integral de un campo $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sobre una curva $\Gamma \subset U$ parametrizada por una función $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (que denotamos por $\int_\Gamma F \cdot d\gamma$ y bautizamos con el nombre de integral de línea), como

$$\begin{aligned}
\int\limits_\Gamma F \cdot d\gamma &= \int\limits_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt \\
&= \int\limits_a^b \left(F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\right) dt
\end{aligned}$$

Lo interesante de esta definición, y de acuerdo con los conceptos que hemos definido en este capítulo, es que el integrando que aparece en la segunda identidad de arriba se puede obtener como el resultado de evaluar una cierta $1-$forma.

En efecto, considere la $1-$forma (en $\mathbb{R}^n$) definida en $U \subset \mathbb{R}^n$ dada por

$$\omega^{(1)} = F_1 dx_1 + \cdots + F_n dx_n$$

Dado que $\omega^{(1)}$ es una función definida en U y que toma valores en el conjunto de las $1-$formas básicas $\Omega^{(1)}$ (definidas en $\mathbb{R}^n$), observe que para cada $t \in [a,b]$ se tiene que

$$\omega^{(1)}(\gamma(t)) = F_1(\gamma(t))dx_1 + \cdots + F_n(\gamma(t))dx_n$$

la que a su vez es una $1-$forma básica que se aplica en vectores de $\mathbb{R}^n$ y para la cual, en particular aplicada a $\gamma'(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\omega^{(1)}(\gamma(t))\right)\left(\gamma'(t)\right) &= \left(F_1(\gamma(t))dx_1 + \cdots + F_n(\gamma(t))dx_n\right)\left(\gamma'(t)\right)\\ &= F_1(\gamma(t))dx_1\left(\gamma'(t)\right) + \cdots + F_n(\gamma(t))dx_n\left(\gamma'(t)\right)\\ &= F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\end{aligned}$$

De hecho, con base en esta última identidad es que definimos el concepto de integral de una $1-$forma $F_1dx_1 + \cdots + F_ndx_n$ sobre la $1-$variedad Γ parametrizada por la función $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, la cual denotamos por

$$\int_{\Gamma} \left(F_1dx_1 + \cdots + F_ndx_n\right)d\gamma$$

como

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \left(F_1dx_1 + \cdots + F_ndx_n\right)d\gamma &= \int_a^b \left(\left(F_1dx_1 + \cdots + F_ndx_n\right)(\gamma(t))\right)\left(\gamma'(t)\right)dt\\ &= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))dx_1\left(\gamma'(t)\right) + \cdots + F_n(\gamma(t))dx_n\left(\gamma'(t)\right)\right)dt\\ &= \int_a^b \left(F_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma(t))\gamma_n'(t)\right)dt\\ &= \int_{\Gamma} F\cdot d\gamma\end{aligned}$$

o, si simplemente escribimos $\omega^{(1)} = F_1dx_1 + \cdots + F_ndx_n$, como

$$\int_{\Gamma} \omega^{(1)}d\gamma = \int_a^b \left(\omega^{(1)}(\gamma(t))\right)\left(\gamma'(t)\right)dt$$

Para deducir la manera en que se define la integral de una $2-$forma sobre una $2-$variedad (o si se prefiere decir una superficie), como es de suponerse, recurriremos a la definición que dimos en el capítulo cuatro del concepto de integral de superficie de un campo vectorial definido en alguna región de $\mathbb{R}^3$.

Como se recordará, si $F = (F_1, F_2, F_3) : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es continua y $S \subset U$ es una superficie parametrizada por una función $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 tal que A es una región tipo I o tipo II y $\sigma(A) = S$, se definió la integral de F sobre la superficie S como

$$\int_S F\cdot d\sigma = \int_A F(\sigma(u,v))\cdot\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$$

en donde

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \sigma_2}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \sigma_3}{\partial u}(u,v) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \sigma_2}{\partial v}(u,v), \frac{\partial \sigma_3}{\partial v}(u,v) \right)$$

Del mismo modo que sucede en el caso de la integral de línea, observe que el integrando

$$F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

se puede obtener a partir de una cierta $2-$forma definida en $U \subset \mathbb{R}^3$.

Considere la $2-$forma $\omega^{(2)}$ dada por

$$\omega^{(2)} = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

Si esta $2-$forma la evaluamos en $\sigma(u,v) \in U$, para cada $(u,v) \in A$, tenemos que

$$\omega^{(2)}(\sigma(u,v)) = F_1(\sigma(u,v)) dy \wedge dz + F_2(\sigma(u,v)) dz \wedge dx + F_3(\sigma(u,v)) dx \wedge dy$$

que a su vez es una $2-$forma básica, que como se recordará, se evalúa en elementos de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \left(\mathbb{R}^3\right)^2$; si en particular a ésta $2-$forma básica la evaluamos en

$$\left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \right) = \left(\hat{a}, \hat{b} \right) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

obtenemos, de acuerdo con 5.2, que

$$\begin{aligned}
\left(\omega^{(2)}(\sigma(u,v)) \right) \left(\hat{a}, \hat{b} \right) &= \left(F_1(\sigma(u,v)) dy \wedge dz \right) \left(\hat{a}, \hat{b} \right) + \left(F_2(\sigma(u,v)) dz \wedge dx \right) \left(\hat{a}, \hat{b} \right) \\
&\quad + \left(F_3(\sigma(u,v)) dx \wedge dy \right) \left(\hat{a}, \hat{b} \right) \\
&= F_1(\sigma(u,v)) \det \begin{bmatrix} dy(\hat{a}) & dy(\hat{b}) \\ dz(\hat{a}) & dz(\hat{b}) \end{bmatrix} + F_2(\sigma(u,v)) \det \begin{bmatrix} dz(\hat{a}) & dz(\hat{b}) \\ dx(\hat{a}) & dx(\hat{b}) \end{bmatrix} \\
&\quad + F_3(\sigma(u,v)) \det \begin{bmatrix} dx(\hat{a}) & dx(\hat{b}) \\ dy(\hat{a}) & dy(\hat{b}) \end{bmatrix} \\
&= F_1(\sigma(u,v)) \left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right)(u,v) + F_2(\sigma(u,v)) \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right)(u,v) \\
&\quad + F_3(\sigma(u,v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right)(u,v) \\
&= \left(F_1(\sigma(u,v)), F_2(\sigma(u,v)), F_3(\sigma(u,v)) \right) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \\
&= F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)
\end{aligned}$$

Como en el caso de las $1-$formas, todo indica que lo más razonable es entonces definir la integral de la $2-$forma (en $\mathbb{R}^3$)

$$\omega^{(2)} = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

sobre la $2-$variedad $S \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por σ, que denotaremos por

$$\int_S \left(F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy \right) d\sigma$$

o simplemente

$$\int_{\sigma} \omega^{(2)} d\sigma$$

como:

$$\begin{aligned}\int_{S} (F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy)\, d\sigma &= \int_{A} F(\sigma(u,v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \\ &= \int_{S} F \cdot d\sigma\end{aligned}$$

o

$$\int_{S} \omega^{(2)} d\sigma = \int_{A} \left(\omega^{(2)}(\sigma(u,v))\right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\right)$$

De hecho, seguramente al lector ya le resultará natural concluir que, si ahora $\omega^{(2)}$ representa una $2-$forma en $\mathbb{R}^n$ dada por

$$\omega^{(2)} = f_1 dx_{l_1} \wedge dx_{m_1} + \cdots + f_k dx_{l_k} \wedge dx_{m_k}$$

(con $l_i, m_i \in \{1, \ldots, n\}$ para $i = 1, \ldots, k$) y $S \subset \mathbb{R}^n$ es una $2-$variedad parametrizada por una función $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$, entonces la integral de $\omega^{(2)}$ sobre $S = \sigma(A)$, que denotaremos por

$$\int_{S} (f_1 dx_{l_1} \wedge dx_{m_1} + \cdots + f_k dx_{l_k} \wedge dx_{m_k})\, d\sigma$$

o simplemente

$$\int_{S} \omega^{(2)} d\sigma$$

deberá estar definida como

$$\begin{aligned}\int_{S} (f_1 dx_{l_1} \wedge dx_{m_1} + \cdots + f_k dx_{l_k} \wedge dx_{m_k})\, d\sigma &= \int_{A} \sum_{i=1}^{k} (f_i(\sigma(u,v)) dx_{l_i} \wedge dx_{m_i}) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v), \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)\right) \\ &= \int_{A} \sum_{i=1}^{k} f_i(\sigma(u,v)) \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{l_i}}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_{l_i}}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial v}(u,v) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

en donde ahora

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u,v), \ldots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial u}(u,v)\right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u,v), \ldots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial v}(u,v)\right)$$

Una vez que hemos revisado y discutido todo lo anterior, sin duda estamos en condiciones de dar una definición general del concepto de integral de una $p-$forma $\omega^{(p)}$ en $\mathbb{R}^n$ sobre una $p-$variedad parametrizada $M \subset \mathbb{R}^n$, para $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, de la siguiente manera.

Definición 5.13 *Sean,* $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\omega^{(p)}$ *una* $p-$*forma en* $\mathbb{R}^n$ *dada por*

$$\omega^{(p)} = \sum_{i=1}^{k} f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}}$$

donde $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *es una función continua sobre la región* U *(para cada* $i = 1, \ldots, k = \binom{n}{p}$*), y* $M \subset \mathbb{R}^n$ *una* $p-$*variedad parametrizada por la función* $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$*. Definimos la integral de* $\omega^{(p)}$ *sobre* M*, que denotamos por*

$$\int\limits_M \left(f_1 dx_{l_1^{(1)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(1)}} + \cdots + f_k dx_{l_1^{(k)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(k)}} \right) d\sigma = \int\limits_M \left(\sum_{i=1}^{k} f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}} \right) d\sigma$$

o simplemente

$$\int\limits_M \omega^{(p)} d\sigma$$

como

$$\begin{aligned}
\int\limits_M \left(\sum_{i=1}^{k} f_i dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}} \right) d\sigma &= \int\limits_A \left(\sum_{i=1}^{k} \left(f_i(\sigma(\hat{u})) dx_{l_1^{(i)}} \wedge \cdots \wedge dx_{l_p^{(i)}} \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\hat{u}), \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_p}(\hat{u}) \right) \right) \\
&= \int\limits_A \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(\sigma(\hat{u})) \det \left(dx_{l_m^{(i)}} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_j}(\hat{u}) \right) \right)_{m,j=1}^{p} \right) \\
&= \int\limits_A \left(\sum_{i=1}^{k} f_i(\sigma(\hat{u})) \det \left(\frac{\partial \sigma_{l_m^{(i)}}}{\partial u_j}(\hat{u}) \right)_{m,j=1}^{p} \right)
\end{aligned}$$

o

$$\int\limits_M \omega^{(p)} d\sigma = \int\limits_A \left(\omega^{(p)}(\sigma(\hat{u})) \right) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial u_1}(\hat{u}), \ldots, \frac{\partial \sigma}{\partial u_p}(\hat{u}) \right)$$

en donde $\hat{u} = (u_1, \ldots, u_p)$ *y*

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u_j}(\hat{u}) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u_j}(\hat{u}), \ldots, \frac{\partial \sigma_n}{\partial u_j}(\hat{u}) \right)$$

para $j = 1, \ldots, p$.

Todas la integrales de línea y de superficie de campos vectoriales que hicimos en los capítulos tres y cuatro, son ejemplos de integrales de $1-$formas y $2-$formas sobre $1-$variedades y $2-$variedades parametrizadas (respectivamente). Para ilustrar aún mejor este concepto de la integral de formas, daremos un ejemplo de cómo se integra una $3-$forma sobre una $3-$variedad parametrizada, ambas en $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 5.14 *Considere, la* $3-$*forma en* $\mathbb{R}^4$ *dada por*

$$\omega^{(3)} = P dx \wedge dy \wedge dz + Q dy \wedge dz \wedge dw + R dx \wedge dy \wedge dw + W dx \wedge dz \wedge dw$$

en donde

$$P(x, y, z, w) = \frac{-w}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2}$$

$$
\begin{aligned}
Q(x,y,z,w) &= \frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)^2} \\
R(x,y,z,w) &= \frac{z}{\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)^2}
\end{aligned}
$$

y

$$
W(x,y,z,w) = \frac{-y}{\left(x^2+y^2+z^2+w^2\right)^2}
$$

con $(x,y,z,w) \in U = \mathbb{R}^4 \backslash \{(0,0,0,0)\}$*; y la* $3-$*variedad parametrizada* $M \subset \mathbb{R}^4$ *dada por la función del ejemplo 5.11*

$$
\sigma : A = [0,2\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4
$$

que está definida como

$$
\sigma(\theta,\varphi,\psi) = (r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), r\operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi), r\cos(\psi))
$$

Calcule

$$
\int\limits_M \omega^{(3)} d\sigma
$$

Solución. Sabemos que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,\varphi,\psi) &= (-r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta), 0, 0) \\
\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}(\theta,\varphi,\psi) &= (r\operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), -r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi), 0) \\
\frac{\partial\sigma}{\partial\psi}(\theta,\varphi,\psi) &= (r\cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta), r\cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta), r\cos(\psi)\cos(\varphi), -r\operatorname{sen}(\psi))
\end{aligned}
$$

de modo que

$$
\begin{aligned}
& dx \wedge dy \wedge dz \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right) \\
&= r^3 \det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\psi)\cos(\varphi) \end{bmatrix} \\
&= -r^3\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\left[\operatorname{sen}(\psi)\cos^2(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\cos(\psi)\right. \\
&\left.+\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi)\cos(\psi)\operatorname{sen}(\theta)\right] \\
&- r^3\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)\left[\operatorname{sen}(\psi)\cos^2(\varphi)\cos(\theta)\cos(\psi)\right. \\
&\left.+\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi)\cos(\psi)\cos(\theta)\right] \\
&= -r^3\operatorname{sen}^2(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}^2(\theta)\cos(\psi) \\
&- r^3\operatorname{sen}^2(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos^2(\theta)\cos(\psi) \\
&= -r^3\operatorname{sen}^2(\psi)\cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)
\end{aligned}
$$

Análogamente

$$
dy \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= r^3 \det \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\psi)\cos(\varphi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\
&= r^3 \operatorname{sen}^3(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi)\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
&dx \wedge dy \wedge dw \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right) \\
&= r^3 \det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) & \operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) & \cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\
&= -r^3 \operatorname{sen}(\psi)\left[-\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\right. \\
&\left.-\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)\operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\cos(\theta)\right] \\
&= r^3 \operatorname{sen}^3(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)
\end{aligned}
$$

y por último

$$
\begin{aligned}
&dx \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right) \\
&= r^3 \det \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)\cos(\theta) & \cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta) \\ 0 & -\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi) & \cos(\psi)\cos(\varphi) \\ 0 & 0 & -\operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\
&= -r^3 \operatorname{sen}(\psi) r \operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta) r \operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi) \\
&= -r^3 \operatorname{sen}^3(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\int_M \omega^{(3)} d\sigma \\
&= \int_A \left(\omega^{(3)}(\sigma(\theta,\varphi,\psi))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right) \\
&= \int_A \left(P(\sigma(\theta,\varphi,\psi))dx \wedge dy \wedge dz \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right) + Q(\sigma(\theta,\varphi,\psi))dy \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right)\right. \\
&\left. R(\sigma(\theta,\varphi,\psi))dx \wedge dy \wedge dw \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right) + W(\sigma(\theta,\varphi,\psi))dx \wedge dz \wedge dw \left(\frac{\partial\sigma}{\partial\theta}, \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}, \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\right)\right) \\
&= \int_A \left(\frac{-r\cos(\psi)}{r^4}\left(-r^3\operatorname{sen}^2(\psi)\cos(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\right) + \frac{r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\theta)}{r^4}\left(r^3\operatorname{sen}^3(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi)\cos(\theta)\right)\right. \\
&\left. + \frac{r\operatorname{sen}(\psi)\cos(\varphi)}{r^4}\left(r^3\operatorname{sen}^3(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\cos(\varphi)\right) + \frac{-r\operatorname{sen}(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)}{r^4}\left(-r^3\operatorname{sen}^3(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi)\operatorname{sen}(\theta)\right)\right) \\
&= \int_A \left(\operatorname{sen}^2(\psi)\cos^2(\psi)\operatorname{sen}(\varphi) + \operatorname{sen}^4(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\left(\operatorname{sen}^2(\varphi)\cos^2(\theta) + \cos^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\varphi)\operatorname{sen}^2(\theta)\right)\right) \\
&= \int_A \operatorname{sen}^2(\psi)\operatorname{sen}(\varphi)\left(\cos^2(\psi) + \operatorname{sen}^2(\psi)\operatorname{sen}^2(\varphi) + \operatorname{sen}^2(\psi)\cos^2(\varphi)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_A \operatorname{sen}^2(\psi)\operatorname{sen}(\varphi) \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\varphi)d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2(\psi)d\psi\right) \\
&= (2\pi)\left(-\cos(\varphi)_0^{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&= 2\pi^2
\end{aligned}
$$

Un caso particular en el que la integral de una $p-$forma (en $\mathbb{R}^n$) tiene un cierto interés, es justo cuando $p = n$, es decir, la integral de una $n-$forma sobre una $n-$variedad parametrizada, ambas en $\mathbb{R}^n$.

Como se recordará de la sección 5.2, las $n-$formas definidas sobre una región $U \subset \mathbb{R}^n$, se corresponden con las funciones (de valores reales) definidas sobre U en virtud de que todas ellas se escriben como

$$f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

en donde $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Por otra parte, si $A \subset U$ es una región básica, entonces dicha región también se puede ver como una $n-$variedad parametrizada en la medida de que $A = \sigma_I(A)$, tomando a σ_I como la función identidad (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$), es decir

$$\sigma_I(\hat{x}) = \hat{x}$$

Nótese que en este caso se tiene que

$$\frac{\partial \sigma_I}{\partial x_i}(\hat{x}) = \hat{e}_i$$

para toda $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, en donde $\hat{e}_i$ es el $i-$ésimo vector básico de $\mathbb{R}^n$. De esta manera, tenemos que

$$
\begin{aligned}
dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial x_1}(\hat{x}), \ldots, \frac{\partial \sigma_I}{\partial x_n}(\hat{x})\right) &= \det \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Con base en lo anterior, tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
\int_A (f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)\, d\sigma_I &= \int_A f(\sigma_I(\hat{x})) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \left(\frac{\partial \sigma_I}{\partial x_1}(\hat{x}), \ldots, \frac{\partial \sigma_I}{\partial x_n}(\hat{x})\right) \\
&= \int_A f(\hat{x}) \\
&= \int_A f
\end{aligned}
$$

lo que significa que la integral de la $n-$forma $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sobre la $n-$variedad parametrizada $A \subset \mathbb{R}^n$ (con A una región básica parametrizada por la función identidad), coincide con la integral (de Riemann) de la función f sobre la región A.

Lo mejor de esta identidad es que (como siempre), también la podemos leer al revés; esto es, la integral (de Riemann) de la función f sobre la región básica $A \subset \mathbb{R}^n$ se puede ver como la integral de la $n-$forma $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ sobre la $n-$variedad parametrizada (por la función identidad) A.

Una consecuencia importante de lo anterior, es que las identidades que se obtienen en los teoremas de Green, Stokes y Gauss, se pueden reformular ahora en términos de integrales de $p-$formas.

Por ejemplo, como se recordará el teorema de Green establece que, si $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es de clase C^1 y $\Omega \subset U$ es una región básica (una $2-$variedad en $\mathbb{R}^2$) tal que $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una curva suave por pedazos (una $1-$variedad por pedazos en $\mathbb{R}^2$) entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\Omega} \operatorname{Rot} F \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

(en donde γ es una paramatrización de Γ que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj). Pues bien, si como vimos al principio de esta sección, se tiene que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} (Pdx + Qdy)\, d\gamma$$

y como acabamos de ver, también se tiene que

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) d\sigma_I$$

(σ_I representa a la función identidad definida sobre la región básica Ω), entonces tenemos que la identidad de la cual nos habla el teorema de Green se puede escribir como

$$\int_{\Gamma = \partial\Omega = \partial_{\sigma_I}\Omega} (Pdx + Qdy)\, d\gamma = \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) d\sigma_I$$

Lo mejor de todo esto es que, si ahora recordamos que

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy = d\,(Pdx + Qdy)$$

entonces el teorema de Green asegura que

$$\int_{\Gamma = \partial\Omega = \partial_{\sigma_I}\Omega} (Pdx + Qdy)\, d\tilde{\gamma} = \int_{\Omega} d\,(Pdx + Qdy)\, d\sigma_I$$

(en donde $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma_I$, que en este caso $\tilde{\gamma} = \gamma$ dado que σ_I es la función identidad de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$) igualdad que, por cierto, justifica el porqué afirmábamos que dicho teorema era una especie de generalización del Teorema Fundamental del Cálculo.

Procediendo de manera análoga, del teorema de Stokes obtenemos que

$$\int_{\partial_\sigma S} (Pdx + Qdy + Rdz)\, d\tilde{\gamma} = \int_{\Gamma = \partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\
&= \int_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \right) d\sigma \\
&= \int_S d\left(Pdx + Qdy + Rdz\right) d\sigma
\end{aligned}
$$

en donde $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie (o 2−variedad) $S \subset \mathbb{R}^3$, y $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$, en donde γ es una parametrización (en el sentido contrario al de las manecillas del reloj) de la frontera de la región básica A ($Fr(A)$).

Finalmente, si ahora σ_I representa a la función identidad de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, del teorema de Gauss concluimos que

$$
\begin{aligned}
\int_{S=\partial\Omega=\partial_{\sigma_I}\Omega} \left(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy\right) d\tilde{\sigma} &= \int_{S=\partial\Omega=\partial_{\sigma_I}\Omega} F \cdot d\tilde{\sigma} \\
&= \int_\Omega \operatorname{div} F \\
&= \int_\Omega d\left(Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy\right) d\sigma_I
\end{aligned}
$$

en donde, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es una región básica cuyo borde $S = \partial\Omega = \partial_{\sigma_I}\Omega$ es una superficie (o 2−variedad) por pedazos parametrizada por una función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ que induce vectores normales (a S) que apuntan hacia "afuera" de S, y $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \sigma_I$ (que en este caso resulta igual a σ dado que σ_I es la función identidad).

Finalmente, y para completar el cuadro, el propio Teorema Fundamental del Cálculo que todos conocemos (o su equivalente expresado en la identidad 3.11 del capítulo tres) se puede formular en términos de integrales de formas. Para ello, sólo hace falta definir los conceptos de 0−variedad parametrizada y el de integral sobre este tipo de variedades, lo cual se puede hacer de la siguiente manera: diremos que $M \subset \mathbb{R}^n$ es una 0−variedad parametrizada si existe $\sigma : \{0,1\} \to \mathbb{R}^n$ tal que $M = \sigma(\{0,1\})$ (lo que significa que una 0−variedad en $\mathbb{R}^n$ es simplemente cualquier conjunto formado por uno o dos puntos).

Por otra parte, si $f1^{(0)}$ es una 0−forma definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ y $M \subset U$ es una 0−variedad parametrizada por $\sigma : \{0,1\} \to \mathbb{R}^n$, definimos la integral de $f1^{(0)}$ sobre M, que denotamos por $\int_M f1^{(0)} d\sigma$, como

$$
\int_M f1^{(0)} d\sigma = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0))
$$

Finalmente, si $\Gamma \subset U$ es una curva (o una 1−variedad) suave parametrizada por $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definimos el borde de Γ inducido por su parametrización γ, que denotamos por $\partial_\gamma \Gamma$, como la 0−variedad (en $\mathbb{R}^n$) formada por los puntos $\gamma(Fr([a,b])) = \gamma(\{a,b\}) = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

Ahora, si $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 en U, párrafos arriba vimos que

$$
\int_\Gamma \nabla\varphi \cdot d\gamma = \int_\Gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx_n \right) d\gamma
$$

$$= \int_{\Gamma} d\left(\varphi 1^{(0)}\right) d\gamma$$

Por otra parte, si a la $0-$variedad (en $\mathbb{R}$) formada por los puntos $\{a, b\}$ (que no es más que el borde de la $1-$variedad (en $\mathbb{R}$) dada por el intervalo $[a, b]$, el que a su vez se puede ver como una región básica en $\mathbb{R}$) la parametrizamos por la función $\sigma : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ dada por $\sigma(0) = a$ y $\sigma(1) = b$, entonces

$$\int_{\partial_\gamma \Gamma} \varphi 1^{(0)} d\tilde{\sigma} = \nabla\varphi(\gamma(b)) - \nabla\varphi(\gamma(a))$$

en donde $\tilde{\sigma} = \gamma \circ \sigma$ es una parametrización de la $0-$variedad $\partial_\gamma \Gamma = \{\gamma(a), \gamma(b)\}$.

Por lo tanto, con base en estas dos últimas identidades, la identidad 3.11 del capítulo tres se puede escribir como

$$\int_{\partial_\gamma \Gamma} \varphi 1^{(0)} d\tilde{\sigma} = \int_{\Gamma} d\left(\varphi 1^{(0)}\right) d\gamma$$

5.6 El Gran Teorema Fundamental del Cálculo

La reformulación de los teoremas de Green, Stokes, Gauss y Fundamental del Cálculo que acabamos de hacer en la sección anterior, nos hacen pensar que éstos deben de ser casos particulares de un teorema más general, y sin duda estamos en lo correcto. Lo siguiente que haremos será formular dicho teorema el cual, además del valor que tiene por si mismo, tendrá un papel relevante en la solución del problema que planteamos en la sección anterior acerca de las diferenciales exactas. Este teorema es conocido tradicionalmente como el Teorema de Stokes (sobre formas diferenciables) pero aquí preferimos llamarlo el *Gran Teorema Fundamental del Cálculo* (nombre que, sin duda, refleja mejor su contenido). Por otra parte, y como seguramente el lector ya lo sospechará, entre los objetivos de este texto no está el de dar la prueba de este teorema.

Teorema 5.15 (Fundamental del Cálculo (Gran)) *Sean, $p \in \{1, \dots, n\}$, $\omega^{(p-1)}$ una $(p-1)-$forma diferenciable definida en la región $U \subset \mathbb{R}^n$, y $M \subset U$ una $p-$variedad, parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\int_{M} d\left(\omega^{(p-1)}\right) d\sigma = \int_{\partial_\sigma M} \omega^{(p-1)} d\tilde{\sigma}$$

en donde $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \mu$ y μ es una parametrización de la $(p-1)-$variedad (por pedazos) $Fr(A)$.[2]

Este es sin duda el teorema más importante de todo este texto, aun y cuando no hayamos incluido su prueba. En él se encuentran sintetizados los conceptos y teoremas más relevantes que hemos desarrollado a lo largo de todos estos capítulos.

Para concluir esta breve sección, aplicaremos este teorema en algunos ejemplos que posteriormente nos serán útiles, cuando en la siguiente sección regresemos al problema de las diferenciales exactas.

Ejemplo 5.16 *Considere:*

[2]Aquí habría que agregar que la parametrización μ "induce" vectores normales a la $Fr(A)$ que apuntan hacia "afuera" de A, de acuerdo con la idea descrita en la observación que sigue a la definición 5.12.

1. *la* $1-$*variedad (o curva)* $M \subset \mathbb{R}^n$ *parametrizada por la función* $\sigma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *definida como*

$$\sigma(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t), 0, \ldots, 0)$$

Muestre que

$$\int\limits_M d\left(\omega^{(0)}\right) d\gamma = 0$$

para cualquier $0-$*forma diferenciable* $\omega^{(0)}$ *definida en una región* $U \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $M \subset U$.
Solución. Por el Gran Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int\limits_M d\left(\omega^{(0)}\right) d\gamma = \int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(0)} d\tilde{\sigma}$$

por lo que basta probar que

$$\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(0)} d\tilde{\sigma} = 0$$

Ahora, si al borde (o frontera) del intervalo $[0, 2\pi]$ *que está formado por el conjunto* $\{0, 2\pi\}$ *lo parametrizamos por la función* $\mu : \{0, 1\} \to \mathbb{R}$ *dada por* $\mu(0) = 0$ *y* $\mu(1) = 2\pi$*, entonces*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(0)} d\tilde{\sigma} &= \omega^{(0)}(\tilde{\sigma}(1)) - \omega^{(0)}(\tilde{\sigma}(0)) \\
&= \omega^{(0)}(\sigma(\mu(1))) - \omega^{(0)}(\sigma(\mu(0))) \\
&= \omega^{(0)}(\sigma(2\pi)) - \omega^{(0)}(\sigma(0)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $\sigma(2\pi) = \sigma(0)$.

2. *la* $2-$*variedad (o superficie)* $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ *parametrizada por la función* $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ *definida como*

$$\sigma(u, v) = (r\,\mathrm{sen}(v)\cos(u), r\,\mathrm{sen}(v)\,\mathrm{sen}(u), r\cos(v), 0, \ldots, 0)$$

Muestre que

$$\int\limits_M d\left(\omega^{(1)}\right) d\sigma = 0$$

para cualquier $1-$*forma diferenciable* $\omega^{(1)}$ *definida en una región* $U \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $M \subset U$.
Solución. Por el Gran Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int\limits_M d\left(\omega^{(1)}\right) d\sigma = \int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma}$$

por lo que basta probar que

$$\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma} = 0$$

Así, si parametrizamos a la $Fr(A)$ en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma} &= \int\limits_0^{2\pi} \left(\omega^{(1)}(\sigma(t,0))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)\right) dt + \int\limits_0^{\pi} \left(\omega^{(1)}(\sigma(2\pi,t))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(2\pi,t)\right) dt \\
&- \int\limits_0^{2\pi} \left(\omega^{(1)}(\sigma(t,\pi))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,\pi)\right) dt - \int\limits_0^{\pi} \left(\omega^{(1)}(\sigma(0,t))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(0,t)\right) dt \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left[\left(\omega^{(1)}(\sigma(t,0))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0)\right) - \left(\omega^{(1)}(\sigma(t,\pi))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,\pi)\right)\right] dt \\
&+ \int\limits_0^{\pi} \left[\left(\omega^{(1)}(\sigma(2\pi,t))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(2\pi,t)\right) - \left(\omega^{(1)}(\sigma(0,t))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(0,t)\right)\right] dt
\end{aligned}
$$

Ahora, dado que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0) = (0,0,0,0,\ldots,0) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,\pi)$$

para toda $t \in [0,2\pi]$, y por otra parte

$$\sigma(2\pi,t) = \sigma(0,t) \quad y \quad \frac{\partial\sigma}{\partial v}(2\pi,t) = \frac{\partial\sigma}{\partial v}(0,t)$$

para toda $t \in [0,\pi]$, concluimos que

$$\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(1)} d\tilde{\sigma} = 0$$

3. *la $3-$variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 4$) parametrizada por la función $\sigma : A = [0,2\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^n$ definida como*

$$\sigma(u,v,w) = (r\,\mathrm{sen}(w)\,\mathrm{sen}(v)\cos(u), r\,\mathrm{sen}(w)\,\mathrm{sen}(v)\,\mathrm{sen}(u), r\,\mathrm{sen}(w)\cos(v), r\cos(w), 0, \ldots, 0)$$

Muestre que

$$\int\limits_M d\left(\omega^{(2)}\right) d\sigma = 0$$

para cualquier $2-$forma diferenciable $\omega^{(2)}$ definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $M \subset U$.
Solución. Nuevamente, por el Gran Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que

$$\int\limits_M d\left(\omega^{(2)}\right) d\sigma = \int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma}$$

por lo que basta probar que

$$\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma} = 0$$

Ahora, si parametrizamos a cada una de las caras que forman parte de la $Fr(A) \subset \mathbb{R}^3$ de tal manera que cada una de estas parametrizaciones induzcan vectores normales que apunten hacia "afuera" de A, y agrupamos las correspondientes integrales sobre caras opuestas, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma} = \int\limits_{[0,\pi]\times[0,\pi]} & \left[\left(\omega^{(2)}(\sigma(2\pi,t,s))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(2\pi,t,s), \frac{\partial\sigma}{\partial w}(2\pi,t,s)\right) \right. \\
& \left. - \left(\omega^{(2)}(\sigma(0,t,s))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial v}(0,t,s), \frac{\partial\sigma}{\partial w}(0,t,s)\right) \right] \\
+ \int\limits_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} & \left[\left(\omega^{(2)}(\sigma(t,0,s))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0,s), \frac{\partial\sigma}{\partial w}(t,0,s)\right) \right. \\
& \left. - \left(\omega^{(2)}(\sigma(t,\pi,s))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,\pi,s), \frac{\partial\sigma}{\partial w}(t,\pi,s)\right) \right] \\
+ \int\limits_{[0,2\pi]\times[0,\pi]} & \left[\left(\omega^{(2)}(\sigma(t,s,0))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,s,0), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(t,s,0)\right) \right. \\
& \left. - \left(\omega^{(2)}(\sigma(t,s,\pi))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,s,\pi), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(t,s,\pi)\right) \right]
\end{aligned}
$$

En la primera integral, se tiene que

$$\sigma(2\pi,t,s) = \sigma(0,t,s), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(2\pi,t,s) = \frac{\partial\sigma}{\partial v}(0,t,s) \quad y \quad \frac{\partial\sigma}{\partial w}(2\pi,t,s) = \frac{\partial\sigma}{\partial w}(0,t,s)$$

para toda $t, s \in [0,\pi]$ de tal manera que el integrando es cero y por tanto, dicha integral es igual a cero.
En cuanto a la segunda integral, se cumple que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0,s) = (0,0,0,0,0,\dots,0) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,\pi,s)$$

lo que es suficiente para concluir que

$$
\begin{aligned}
\left(\omega^{(2)}(\sigma(t,0,s))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,0,s), \frac{\partial\sigma}{\partial w}(t,0,s)\right) &= 0 \\
&= \left(\omega^{(2)}(\sigma(t,\pi,s))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,\pi,s), \frac{\partial\sigma}{\partial w}(t,\pi,s)\right)
\end{aligned}
$$

para toda $(t,s) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]$, y por tanto, que la segunda integral también es igual a cero.
Finalmente, en la tercera integral se tiene que

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,s,0) = (0,0,0,0,0,\dots,0) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,s,\pi)$$

lo que también es suficiente para concluir que

$$
\begin{aligned}
\left(\omega^{(2)}(\sigma(t,s,0))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,s,0), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(t,s,0)\right) &= 0 \\
&= \left(\omega^{(2)}(\sigma(t,s,0))\right)\left(\frac{\partial\sigma}{\partial u}(t,s,\pi), \frac{\partial\sigma}{\partial v}(t,s,\pi)\right)
\end{aligned}
$$

para toda $(t, s) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, *y por tanto, que la tercera integral también es igual a cero. Por lo tanto*

$$\int\limits_{\partial_\sigma M} \omega^{(2)} d\tilde{\sigma} = 0$$

5.7 Diferenciales exactas (segunda parte)

Para concluir este capítulo (¡y este trabajo!), en esta sección regresaremos al problema de las diferenciales exactas que planteamos en la sección 5.3. Como se recordará, ahí nos hicimos la siguiente pregunta: si $\omega^{(p)}$ es una $p-$forma diferenciable (con $p \in \{1, \ldots, n-1\}$) definida en una región $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $d\left(\omega^{(p)}\right) = 0^{(p+1)}$, ¿existe $\tau^{(p-1)}$, una $(p-1)-$forma diferenciable definida en U, tal que $d\left(\tau^{(p-1)}\right) = \omega^{(p)}$?

El Gran Teorema Fundamental del Cálculo y los ejemplos que dimos en la sección anterior, nos serán de gran ayuda para contestar esta pregunta. De hecho, así como está planteada, su respuesta es negativa.

En efecto, ahora podemos mostrar, por ejemplo, que en cualquier $\mathbb{R}^n$ existe una región U y una $1-$forma $\omega^{(1)}$ definida ahí, tal que $d\left(\omega^{(1)}\right) = 0^{(2)}$, y que sin embargo no puede existir una $\tau^{(0)}$ definida en U tal que $d\left(\tau^{(0)}\right) = \omega^{(1)}$.

Tómese, en cualquier $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 2$), la $1-$forma $\omega^{(1)}$ dada por

$$\omega^{(1)} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^n \backslash \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = 0\}$. Un cálculo sencillo mostrará que $d\left(\omega^{(1)}\right) = 0^{(2)}$.

Por otra parte, si tomamos la $1-$variedad (o curva) $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por la función $\gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$\gamma(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t), 0, \ldots, 0)$$

se tiene que $\Gamma \subset U$ y otro cálculo sencillo mostrará que

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma} \omega^{(1)} d\gamma &= 2\pi \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

de tal manera que, por el primer inciso del ejemplo 5.16, podemos concluir que no existe una $0-$forma $\tau^{(0)}$ definida en U tal que $d\left(\tau^{(0)}\right) = \omega^{(1)}$.

¿Cuál es el problema en este ejemplo? Como seguramente el lector intuirá, el problema se encuentra en la región $U \subset \mathbb{R}^n$ más que en la $1-$forma $\omega^{(1)}$ que elegimos. En particular, nótese que la curva (cerrada) $\Gamma \subset U$ no se puede "contraer" o "llevar" a un punto sin salirnos de la región U, es decir, U no es una región simplemente conexa.

Otro ejemplo que resultará bastante ilustrativo, es el siguiente. Sea, en cualquier $\mathbb{R}^n$ (con $n \geq 3$), la $2-$forma $\omega^{(2)}$ dada por

$$\omega^{(2)} = \frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} dx_2 \wedge dx_3 + \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{x_3}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^{3/2}} dx_1 \wedge dx_2$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^n \backslash \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\}$. Ya sea por un cálculo directo, o con base en los ejemplos 5.7 (cuarto inciso) y 4.26 (del capítulo cuatro), sabemos que $d\left(\omega^{(2)}\right) = 0^{(3)}$.

Ahora, si tomamos la 2−variedad (o superficie) $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$\sigma(u, v) = (r \operatorname{sen}(v) \cos(u), r \operatorname{sen}(v) \operatorname{sen}(u), r \cos(v), 0, \ldots, 0)$$

se tiene que $M \subset U$ y con base en el ejemplo 4.13 del capítulo cuatro (o calculándola directamente) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_M \omega^{(2)} d\gamma &= -4\pi \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

de tal manera que, ahora por el segundo inciso del ejemplo 5.16, podemos concluir que no existe una 1−forma $\tau^{(1)}$ definida en U tal que $d\left(\tau^{(1)}\right) = \omega^{(2)}$.

Como en el ejemplo anterior, al parecer el problema no está en la 2−forma $\omega^{(2)}$ sino en la región U sobre la cual está definida. En particular, nótese ahora que la superficie (cerrada) $M \subset U$ no se puede "contraer" o "llevar" a un punto sin salirnos de la región U, es decir, U no es una región doblemente conexa (de acuerdo con el término que usamos en la sección 7 del capítulo cuatro).

Para terminar con esta ilustrativa serie de contraejemplos, considérese el siguiente. Sea en $\mathbb{R}^4$ la 3−forma $\omega^{(3)}$ dada por

$$\omega^{(3)} = P dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + Q dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + R dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + W dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

en donde

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{-x_4}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2} \\ Q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2} \\ R(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2} \end{aligned}$$

y

$$W(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{-x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)^2}$$

que está definida en $U = \mathbb{R}^n \backslash \{(0, 0, 0, 0)\}$.

De acuerdo con el último inciso del ejemplo 5.7, se tiene que

$$d(\omega^{(3)}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_4} + \frac{\partial R}{\partial x_3} - \frac{\partial W}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$$

de donde, haciendo los respectivos cálculos (¡los cuales se dejan al lector!), obtenemos que

$$d(\omega^{(3)}) = 0^{(4)}$$

Por otra parte, si ahora tomamos la 3−variedad $M \subset \mathbb{R}^4$ parametrizada por la función

$$\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

dada por

$$\sigma(u,v,w) = (r\operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(v)\cos(u), r\operatorname{sen}(w)\operatorname{sen}(v)\operatorname{sen}(u), r\operatorname{sen}(w)\cos(v), r\cos(w))$$

se tiene que $M \subset U$ y con base en el ejemplo 5.14 tenemos que

$$\begin{aligned}\int_M \omega^{(3)} d\sigma &= 2\pi^2 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

de tal manera que ahora, por el tercer inciso del ejemplo 5.16, podemos concluir que no existe una 2$-$forma $\tau^{(2)}$ definida en U tal que $d\left(\tau^{(2)}\right) = \omega^{(3)}$.

Como seguramente el lector ya intuye, por supuesto que el problema no está en la 3$-$forma $\omega^{(3)}$ sino en la región $U \subset \mathbb{R}^4$ sobre la cual está definida. Como seguramente también el lector ya habrá notado, ahora lo que se puede observar es que la 3$-$variedad $M \subset U$ (la cual es "cerrada", dado que es una "esfera" en $\mathbb{R}^4$) no se puede "contraer" o "llevar" a un punto sin salirse de la región U (¿cómo llamaría el lector a las regiones $U \subset \mathbb{R}^n$ en las que este tipo de 3$-$variedades ("cerradas") se puedan "contraer" o "llevar" a un punto sin salirse de U?).

Después de esta serie de contraejemplos (y las observaciones que hemos hecho sobre ellos) se vislumbra lo que será el resultado más importante con relación a las diferenciales exactas. Antes de formularlo, describiremos de manera intuitiva algunos conceptos que serán necesarios.

El primero de ellos se refiere a las $p-$variedades parametrizadas que llamaremos "cerradas". Si una $p-$variedad $M \subset \mathbb{R}^n$ está parametrizada por una función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, diremos que M es "cerrada" si σ "pega" a los puntos de la frontera de A ($Fr(A)$), es decir, si para cada $\hat{x} \in Fr(A)$ existe $\hat{y} \in Fr(A)$, $\hat{y} \neq \hat{x}$, tal que $\sigma(\hat{x}) = \sigma(\hat{y})$. Observe que este concepto abarca a más $p-$variedades que las que "geométricamente" parecen ser cerradas. Por ejemplo, un simple segmento puede ser una 1$-$variedad cerrada (o curva cerrada) si lo recorremos de tal manera que empecemos y terminemos en el mismo punto.

Otro concepto, sin duda muy relevante, se refiere a la caracterización de ciertas regiones $U \subset \mathbb{R}^n$. Dada $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, diremos que U es una región $p-$conexa si las $p-$variedades parametrizadas "cerradas" contenidas en U que sean tipo "esferas" de dimensión p (es decir, $p-$variedades parametrizadas que están formadas por puntos cuya distancia a un punto fijo, es constante), se pueden "contraer" o "llevar" a un punto sin salirse de U. De esta manera, las regiones 1$-$conexas serán aquellas a las que en el capítulo tres llamamos simplemente conexas, y las 2$-$conexas serán aquellas a las que en el capítulo cuatro llamamos doblemente conexas.

Con base en estos conceptos, ahora estamos en condiciones se establecer un teorema que nos da condiciones suficientes para garantizar cuándo una forma diferenciable es una diferencial exacta.

Teorema 5.17 *Sean, $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región $p-$conexa, y $\omega^{(p)}$ una $p-$forma diferenciable definida sobre U. Si $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$ entonces existe $\tau^{(p-1)}$ una $(p-1)-$forma diferenciable definida sobre U tal que $d(\tau^{(p-1)}) = \omega^{(p)}$.*

Como hicimos notar en los capítulos tres y cuatro, las regiones estrelladas son regiones simplemente conexas y doblemente conexas, y no es difícil convencerse de que también son $p-$conexas, para cualquier $p \in \{1,\ldots,n-1\}$. De este hecho, y del teorema anterior se desprende el siguiente corolario, que será el último resultado de este texto.

Corolario 5.18 *Sean, $p \in \{1,\ldots,n-1\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ una región estrellada, y $\omega^{(p)}$ una $p-$forma diferenciable definida sobre U. Si $d(\omega^{(p)}) = 0^{(p+1)}$ entonces existe $\tau^{(p-1)}$ una $(p-1)-$forma diferenciable definida sobre U tal que $d(\tau^{(p-1)}) = \omega^{(p)}$.*