

Capítulo 4

Integrando sobre superficies

En el inicio del capítulo tres planteamos el problema de calcular la masa total de una lámina no homogénea y no necesariamente plana. Este, y otro tipo de problemas, son los que nos servirán de motivación para desarrollar el concepto de integral sobre una superficie, tanto de funciones con valores reales, como de funciones con valores vectoriales. Como en el caso de la integral de línea, antes será necesario precisar el concepto de superficie, así como desarrollar algunas de sus características más elementales. Ese es el objetivo de la siguiente sección.

4.1 Superficies

De la misma forma que en el caso de las curvas, para nosotros las superficies serán todos aquellos conjuntos que se puedan ver como la imagen de una función derivable definida sobre ciertos subconjuntos del plano. Aun cuando aquí sólo trataremos con superficies contenidas en el espacio (\mathbb{R}^3), daremos su definición para cualquier \mathbb{R}^n .

Definición 4.1 *Decimos que $S \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie si existen, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en U (abierto), y $A \subset U$ una región de tipo I o tipo II, tales que $S = \sigma(A)$. En este caso, decimos que σ es una parametrización de S .*

A pesar de que en esta definición hacemos el énfasis de que toda parametrización σ de una superficie S debe de estar definida en un conjunto abierto (puesto que se quiere que sea derivable), de aquí en adelante nos concretaremos a describir únicamente al conjunto A que bajo σ nos lleva al conjunto S .

Así, si tomamos $\sigma(x, y) = (\cos(x)\text{sen}(y), \text{sen}(x)\text{sen}(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ tenemos que $S = \sigma(A)$ es la esfera de radio 1 con centro en el origen de la figura 4.1 (a); o si tomamos $\sigma(x, y) = (\cos(x), \text{sen}(x), y)$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ tenemos que $S = \sigma(A)$ es el cilindro de la figura 4.1 (b); y si $\sigma(x, y) = (x \cos(y), x \text{sen}(y), x)$ con $(x, y) \in A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ tenemos que $S = \sigma(A)$ es el cono de la figura 4.1 (c).

Este último ejemplo es muy interesante porque, al igual que en el caso de las curvas, muestra que las superficies que acabamos de definir, también pueden tener “picos”.

Otras superficies que usaremos con mucha frecuencia, son aquellas que se obtienen por medio de la gráfica de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 (en U). Si $A \subset U$ es una región de tipo I o tipo II, entonces

$$\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y)) \tag{4.1}$$

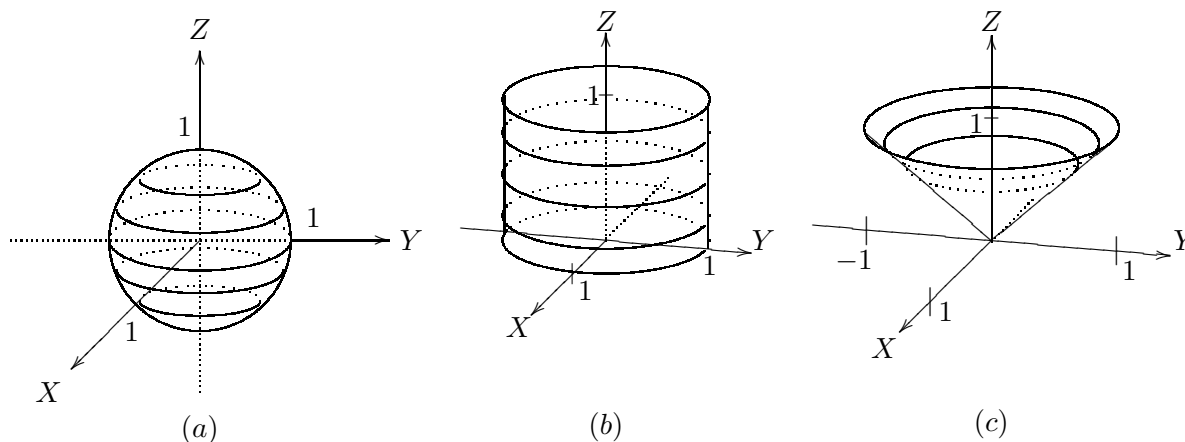


Figura 4.1: Estas superficies están parametrizadas de la siguiente manera: (a) por $\sigma(x, y) = (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$; (b) por $\sigma(x, y) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x), y)$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$; y (c) por $\sigma(x, y) = (x \cos(y), x \operatorname{sen}(y), x)$ con $(x, y) \in A = [0, 1] \times [0, 2\pi]$

con $(x, y) \in A$ es una parametrización de la parte de la gráfica de f que está por arriba del conjunto A , como sería el caso del sector de paraboloides que está por arriba del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ cuando consideramos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ (ver figura 4.2).

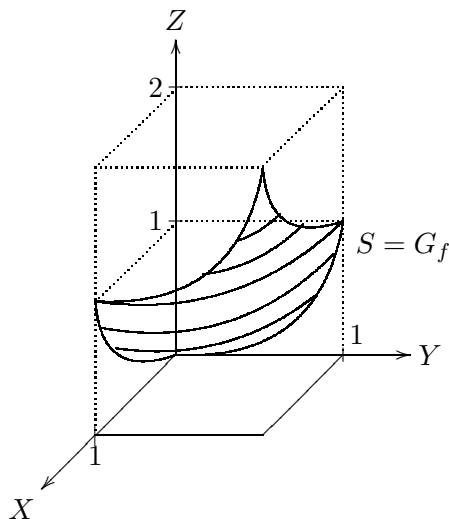


Figura 4.2: La gráfica G_f de una función $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tomada sobre $A \subset U$ (una región de tipo I o tipo II) también es una superficie parametrizada

Así como la parametrización de una curva en general nos permite calcular vectores tangentes (y por lo tanto, rectas tangentes), una parametrización de una superficie también nos proporciona la manera del calcular vectores normales a la superficie (y por lo tanto, planos tangentes). En efecto, si $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S y $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ entonces $\gamma(t) = \sigma(x_0 + t, y_0)$ y $\delta(t) = \sigma(x_0, y_0 + t)$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, parametrizan a un par de curvas

contenidas en S de tal forma que

$$\gamma'(0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) \right) \quad \text{y} \quad \delta'(0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \quad (4.2)$$

en general serán un par de vectores tangentes a S en el punto $\hat{y}_0 = \sigma(\hat{x}_0)$ (ver figura 4.3). De esta forma, si estos vectores son linealmente independientes, el vector

$$\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) \right) \times \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \right)$$

es distinto del vector cero y será normal a la superficie S en ese punto.

A los vectores que aparecen en 4.2 los denotaremos por $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ respectivamente, es decir

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \right)$$

de tal forma que el vector normal a S en el punto $\hat{y}_0 = \sigma(\hat{x}_0)$ inducido por la parametrización σ será denotado por

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0) \quad (4.3)$$

Observe que en el caso en que \hat{y}_0 sea un “pico” de S , los vectores de 4.2 serán el vector cero y por lo tanto este vector no será un vector normal a S (¡como era de esperarse!).

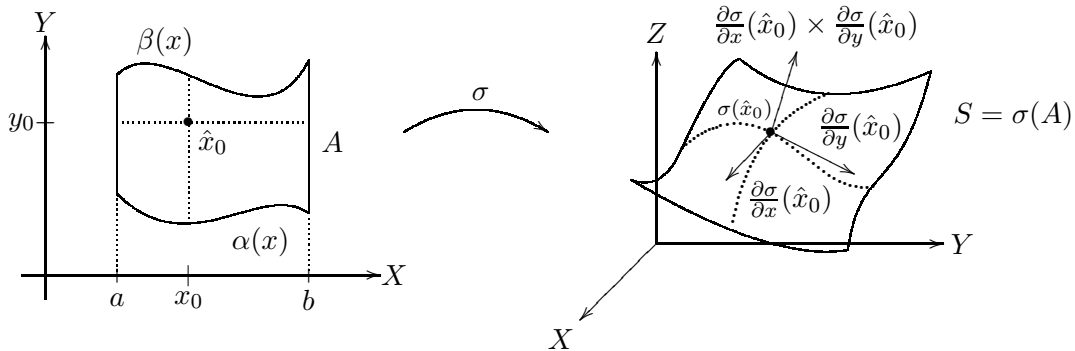


Figura 4.3: Si los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ son linealmente independientes entonces el vector $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ es normal a la superficie S en el punto $\sigma(\hat{x}_0)$

Cuando una superficie S tenga una parametrización σ tal que el vector dado por 4.3 sea distinto del vector cero, entonces diremos que la superficie S es *suave* en el punto $\hat{y}_0 = \sigma(\hat{x}_0)$, y si esto sucede para todo punto $\hat{y}_0 \in S$ diremos que S es una *superficie suave*. Como también es de esperarse, un ejemplo de superficie suave es aquella que coincide con la gráfica de una función derivable f . En efecto, dado que $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ es una parametrización para este tipo de superficies, entonces

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$

y

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right)$$

de modo que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), 1 \right)$$

el cual siempre es un vector distinto de cero.

Es importante hacer notar que los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ también se pueden obtener a través de la derivada de la función σ en el punto \hat{x}_0 ($D\sigma(\hat{x}_0)$). En efecto, como se recordará, esta derivada es la función lineal determinada por la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{pmatrix}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(\hat{x}_0) \\ \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\hat{x}_0) & \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2) \end{aligned}$$

Esta manera de obtener a estos vectores nos permitirá deducir una importante propiedad geométrica del vector normal $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, de la siguiente manera. Sea Γ el arco de la circunferencia unitaria, con centro en el origen, que une al punto $\hat{e}_1 = (1, 0)$ con el punto $\hat{e}_2 = (0, 1)$. Dado que cada punto $\hat{x} \in \Gamma$ se escribe como una combinación lineal de \hat{e}_1 y \hat{e}_2 con coeficientes no negativos, entonces cada punto $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{x})$ que pertenece a la imagen bajo la función lineal $D\sigma(\hat{x}_0)$ del arco Γ , también se puede escribir como una combinación lineal de los vectores $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2) = \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ con coeficientes no negativos. Con base en esta observación, podemos concluir que la curva $\tilde{\Gamma} = D\sigma(\hat{x}_0)(\Gamma)$ es una curva (contenida en el plano generado por los vectores $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ y $\frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$) que une a la “punta” del vector $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1)$ con la “punta” del vector $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2)$, y que esto lo hace siguiendo el ángulo menor a 180 grados formado por dichos vectores (ver figura 4.4). Si ahora recordamos que la dirección del producto cruz de estos mismos vectores también está determinada por el mismo ángulo (como se muestra en la misma figura 4.4), podemos concluir que el vector $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$ tiene la propiedad de que, si γ es una parametrización del arco Γ que lo recorre en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, entonces $\tilde{\gamma} = D\sigma(\hat{x}_0) \circ \gamma$ es una parametrización de la curva $\tilde{\Gamma}$ tal que, vista desde la dirección en la que apunta el vector $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, observaremos que ésta también está recorrida en el mismo sentido (contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

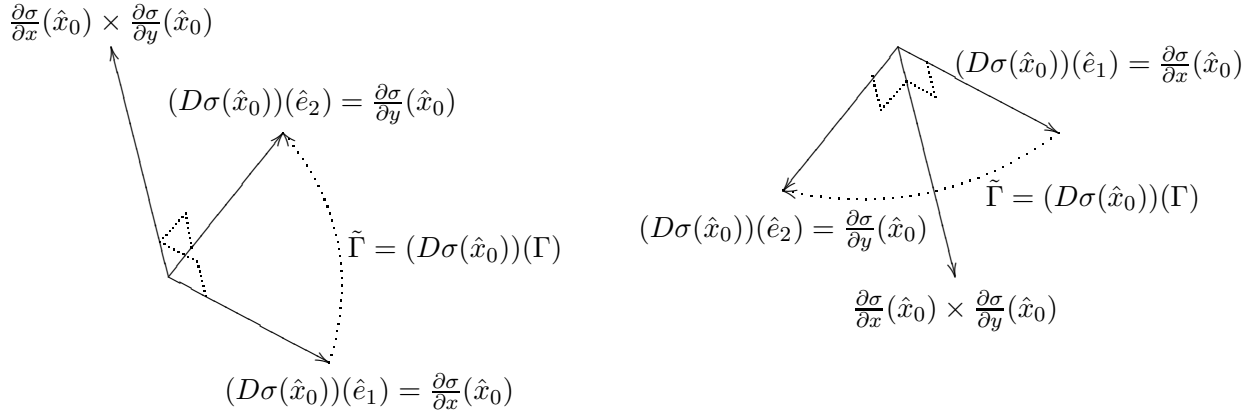


Figura 4.4: Si Γ es el arco de la circunferencia unitaria que está contenido en el primer cuadrante del plano XY que inicia en el punto $\hat{e}_1 = (1, 0)$ y termina en el punto $\hat{e}_2 = (0, 1)$, entonces $\tilde{\Gamma} = (D\sigma(\hat{x}_0))(\Gamma)$ es una curva (contenida en el plano generado por los vectores $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_1)$ y $D\sigma(\hat{x}_0)(\hat{e}_2)$) que une a la “punta” del vector $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{x}_0)$ con la “punta” del vector $\frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, y esto lo hace siguiendo el ángulo menor a 180 grados formado por dichos vectores

Con base en lo anterior ahora podemos asegurar que, si en general Γ es una circunferencia con centro en el origen de radio arbitrario (o cualquier otra curva cerrada simple que “rodea” al origen) parametrizada en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj por una función γ , entonces $\tilde{\gamma} = D\sigma(\hat{x}_0) \circ \gamma$ es una parametrización de la curva $\tilde{\Gamma} = D\sigma(\hat{x}_0)(\Gamma)$ tal que, vista desde la dirección en la que apunta el vector $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, observaremos que ésta también está recorrida en el mismo sentido (contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Finalmente, dado que para puntos \hat{x} muy cercanos a \hat{x}_0 la función $\sigma(\hat{x})$ y la función afin $(D\sigma(\hat{x}_0))(\hat{x} - \hat{x}_0) + \sigma(\hat{x}_0)$ se “parecen” mucho, podemos concluir que, si Γ es una curva cerrada simple (contenida en una vecindad “pequeña” del punto \hat{x}_0) que “rodea” al punto \hat{x}_0 , y dicha curva está parametrizada en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj por una función γ , entonces $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ es una parametrización de la curva $\tilde{\Gamma} = \sigma(\Gamma)$ (que está contenida en la superficie S parametrizada por σ) que tiene la propiedad de que, al observarla desde la dirección en que apunta el vector $\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{x}_0) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{x}_0)$, veremos que ésta también está recorrida en el mismo sentido (contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Otro tipo de puntos de una superficie S que es importante distinguir son aquellos que forman lo que “geoméricamente” caracterizamos como el borde de S . Si la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ tiene la particularidad de ser plana, es decir, que está contenida en un plano, el borde de S se puede ver como la frontera topológica de S (viendo a S como un subconjunto de \mathbb{R}^2). Sin embargo, esto ya no funciona tan fácilmente para una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que no sea plana.

Una posibilidad para caracterizar el borde (“geométrico”) de S es a través de una parametrización $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de S ; esta forma consiste en tomar el borde de A y fijarnos en su imagen bajo σ . Denotaremos por $\partial_\sigma S$ a la imagen del borde ∂A (o frontera de A , $Fr(A)$) bajo σ , es decir

$$\partial_\sigma S = \sigma(\partial A) \quad (4.4)$$

Aun cuando una parametrización σ de una superficie S puede ser una herramienta útil para identificar a este tipo de puntos, en general esto no siempre funciona. A continuación daremos una serie de ejemplos en los que mostraremos que el conjunto definido en 4.4 puede, desde coincidir con

ese conjunto que “geoméricamente” identificamos como el borde de S , o ser totalmente ajeno a éste.

Un ejemplo en el que el conjunto $\partial_\sigma S$ coincide con el borde “geométrico” de S es aquel en el que la superficie se puede ver como la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Recuérdese que en este caso S se puede parametrizar con la función $\sigma(x, y) = (x, y, f(x, y))$ y para esta parametrización es claro que el conjunto $\partial_\sigma S$ coincide con el borde “geométrico” de S (ver figura 4.2). En este caso, la parametrización σ tiene la propiedad de ser una función inyectiva en todo su dominio, lo que sin duda es una condición suficiente para que el conjunto $\partial_\sigma S$ siempre coincida con el borde “geométrico” de S .

Desafortunadamente no toda superficie S se puede parametrizar por medio de una función inyectiva, y justo cuando no se tiene esta propiedad es que el conjunto $\partial_\sigma S$ no es lo que esperamos. Sólo para ilustrar hasta qué punto el conjunto $\partial_\sigma S$ puede no tener nada que ver con el borde “geométrico” de S , damos el siguiente ejemplo.

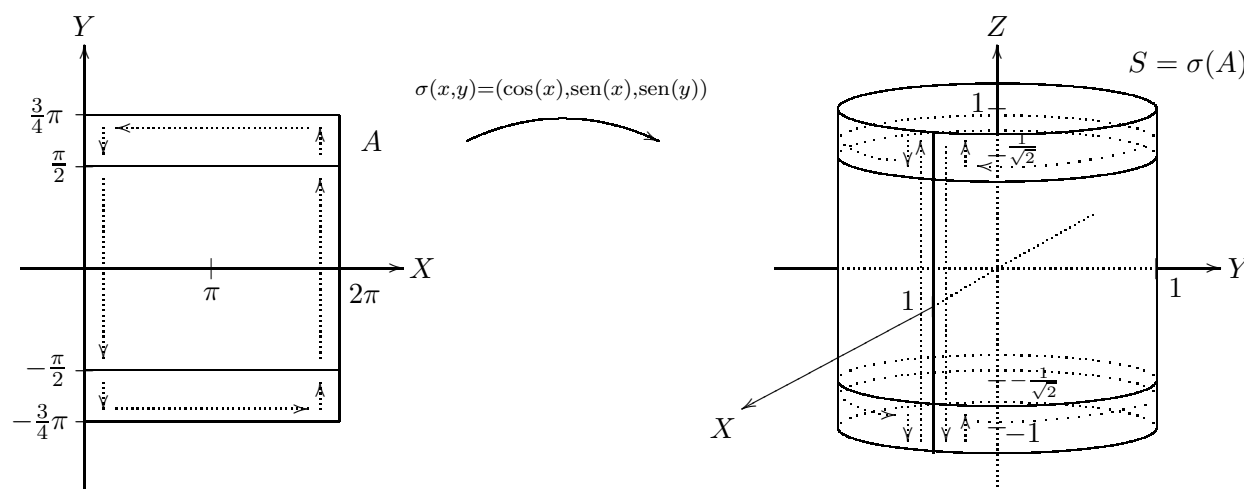


Figura 4.5: La superficie S parametrizada por la función σ es el cilindro circular recto cuyo borde “geométrico” está formado por dos circunferencias de radio 1: una con centro en el punto $(0, 0, -1)$ y contenida en el plano $z = -1$, y otra contenida en el plano $z = 1$ con centro en el punto $(0, 0, 1)$. Por otra parte, el conjunto $\partial_\sigma S$ está formado por otras dos circunferencias de radio 1, una con centro en el punto $(0, 0, -1/\sqrt{2})$ y contenida en el plano $z = -1/\sqrt{2}$, y otra contenida en el plano $z = 1/\sqrt{2}$ con centro en el punto $(0, 0, 1/\sqrt{2})$, además del segmento de recta que une a los puntos $(1, 0, -1)$ y $(1, 0, 1)$

Sea $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [-3\pi/4, 3\pi/4] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sen(x), \sen(y))$. Es fácil ver que la superficie S parametrizada por esta función es el cilindro circular recto cuyo borde “geométrico” está formado por dos circunferencias de radio 1: una con centro en el punto $(0, 0, -1)$ y contenida en el plano $z = -1$, y otra contenida en el plano $z = 1$ con centro en el punto $(0, 0, 1)$. Sin embargo, en este caso el conjunto $\partial_\sigma S$ estará formado por otras dos circunferencias de radio 1, una con centro en el punto $(0, 0, -1/\sqrt{2})$ y contenida en el plano $z = -1/\sqrt{2}$, y otra contenida en el plano $z = 1/\sqrt{2}$ con centro en el punto $(0, 0, 1/\sqrt{2})$, además del segmento de recta que une a los puntos $(1, 0, -1)$ y $(1, 0, 1)$ (ver figura 4.5). Seguramente no escapa al lector el hecho de que en este caso el conjunto $\partial_\sigma S$ está formado por estas curvas debido a que la parametrización σ , además de “unir” (o “pegar”) a los segmentos verticales que forman parte del borde de A , “recorre” dos veces algunas partes del cilindro S , “terminando” en las dos circunferencias que se encuentran contenidas

en los planos $z = 1/\sqrt{2}$ y $z = -1/\sqrt{2}$, y que este doble “recorrido” es la razón principal por la cual el conjunto $\partial_\sigma S$ no coincide con el borde “geométrico” de S .

Cuando la función σ es inyectiva en el interior de su dominio (en cuyo caso diremos que σ es una *parametrización simple* de S) se tienen más posibilidades de que $\partial_\sigma S$ coincida con el borde “geométrico” de S . Considérese ahora la superficie S parametrizada por la misma función $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sin(x), \sin(y))$ pero con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. En este caso se tiene que S es el mismo cilindro circular recto del ejemplo anterior, de tal forma que el borde “geométrico” de S también es el mismo. Por otra parte, ahora el conjunto $\partial_\sigma S$ está formado, además de las dos circunferencias que forman el borde “geométrico” de S , por el segmento de recta que une a los puntos $(1, 0, 1)$ y $(1, 0, -1)$. Si se observa con cuidado, se notará que este segmento es la imagen bajo σ del segmento que une a los puntos $(0, -\pi/2)$ y $(0, \pi/2)$, y del segmento que une a los puntos $(2\pi, -\pi/2)$ y $(2\pi, \pi/2)$, que no son más que la parte del borde de A que la función σ “pega” para formar el cilindro S (ver figura 4.5).

Un caso más extremo que el anterior es el que nos proporciona la función $\sigma(x, y) = (\cos(x) \sin(y), \sin(x) \sin(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Como vimos anteriormente, en este caso la superficie S es la esfera de radio 1 con centro en el origen la cual, geoméricamente hablando, ¡no tiene borde! Sin embargo, el conjunto $\partial_\sigma S$ es no vacío y coincide con la semicircunferencia de radio 1 contenida en el semiplano “derecho” del plano coordenado XZ (ver figura 4.6).

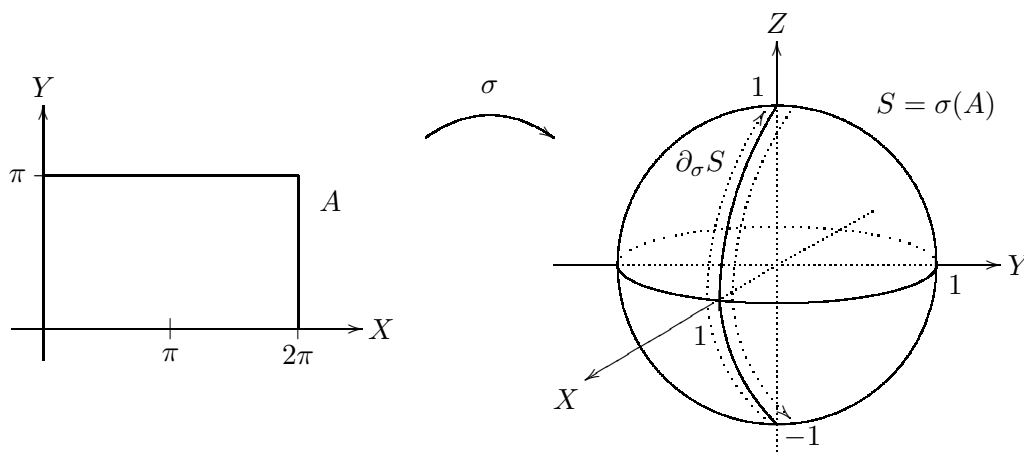


Figura 4.6: Si parametrizamos a la esfera unitaria con la función $\sigma(x, y) = (\cos(x) \sin(y), \sin(x) \sin(y), \cos(y))$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, el “borde” $\partial_\sigma S$ inducido por esta parametrización es la semicircunferencia de radio 1 contenida en el semiplano “derecho” del plano coordenado XZ

En estos dos últimos ejemplos se tiene que el conjunto $\partial_\sigma S$ no sólo contiene a los puntos que forman el borde “geométrico” de S , sino que también contiene (o incluso es igual) a los puntos que forman parte de lo que podríamos llamar la “costura” de S (producida por la parametrización σ). Obsérvese que, si γ es una parametrización del borde de A (en cualquiera de los dos ejemplos) que lo recorre una vez (sin importar con que orientación), entonces

$$\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma \quad (4.5)$$

será una parametrización de la curva $\partial_\sigma S$, parametrización que tiene la particularidad de que la curva que forma “la costura” de S , es recorrida dos veces por $\tilde{\gamma}$ sólo que, una vez en un sentido, y la otra ¡en el sentido contrario! (ver las figuras 4.5 y 4.6). Esto significa que, si usamos

la parametrización dada por 4.5 para integrar un campo F sobre la curva $\partial_\sigma S$, entonces esta integración a final de cuentas se reducirá a integrar sobre el borde “geométrico” de S (las dos circunferencias en el caso del cilindro), o dicha integral valdrá cero (en el caso de la esfera).

Aun cuando nuestro objetivo inicial era caracterizar a aquellos puntos de una superficie S que forman lo que hemos venido llamando el borde “geométrico” de S , el conjunto $\partial_\sigma S$ (definido en 4.4 y que de aquí en adelante llamaremos “el borde (o costura) de S inducido(a) por σ ”) nos será suficiente para formular los teoremas que veremos más adelante, razón por la cual abandonamos este objetivo y damos por concluido el análisis de estos puntos.

En varios de los ejemplos anteriores, la parametrización $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ de la curva $\partial_\sigma S$ siempre recorre dos (o más) veces a la parte de esta curva que forma lo que hemos llamado la “costura” de S (en caso de que exista dicha “costura”). Es importante mencionar que este doble recorrido no siempre lo hace en sentidos contrarios. A continuación daremos un ejemplo de una superficie S y una parametrización σ de ésta, que ilustra este hecho y que además nos da la pauta para introducir el concepto de superficie orientada.

La superficie que parametrizaremos a continuación es la muy conocida cinta de Möbius¹. Sea

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= ((2 + y \cos(x/2)) \cos(x), (2 + y \cos(x/2)) \sin(x), y \sin(x/2)) \\ &= 2(\cos(x), \sin(x), 0) + y(\cos(x/2) \cos(x), \cos(x/2) \sin(x), \sin(x/2)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$. Obsérvese que si tomamos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ una parametrización del borde de A que lo recorra en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, y tomamos $\gamma_2(y) = (2\pi, y)$ y $\gamma_4(y) = (0, -y)$ con $y \in [-1, 1]$, como las parametrizaciones correspondientes a los segmentos verticales del borde de A , entonces $\sigma(\gamma_2(y)) = \sigma(2\pi, y) = (2 - y, 0, 0)$ y $\sigma(\gamma_4(y)) = \sigma(0, -y) = (2 - y, 0, 0)$ recorren el segmento que une a los puntos $(1, 0, 0)$ y $(3, 0, 0)$, ambas empezando en el primero y terminando en el segundo (ver figura 4.7). Lo anterior muestra que dicho segmento es donde la parametrización σ “pega” los bordes verticales de A y que además la parametrización $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ de la curva $\partial_\sigma S$ lo recorre dos veces ¡en la misma dirección! Este último hecho es un reflejo de una característica muy importante de la banda de Möbius: es una superficie no orientada.

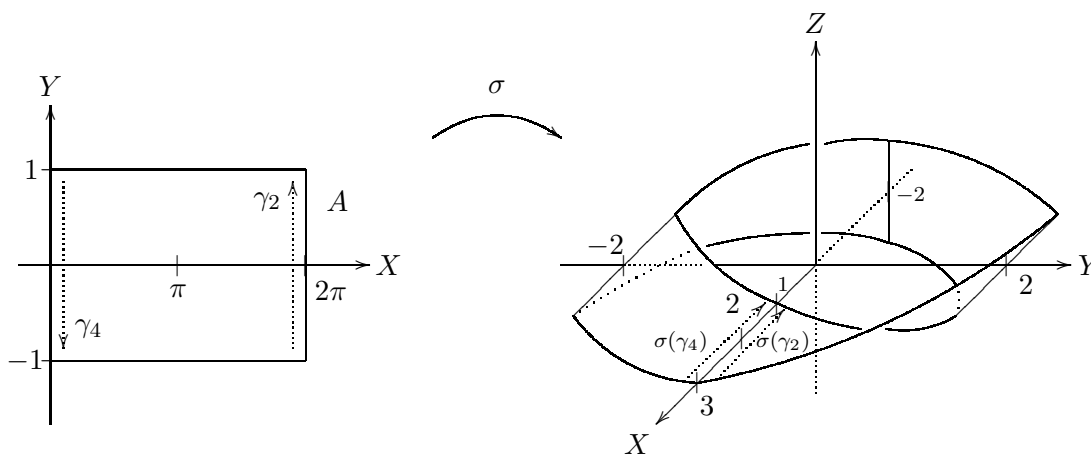


Figura 4.7: Una banda de Möbius parametrizada por la función $\sigma(x, y) = ((2 + y \cos(x/2)) \cos(x), (2 + y \cos(x/2)) \sin(x), y \sin(x/2))$

¹Esta superficie fue construida en 1858 de manera independiente por los matemáticos alemanes August Ferdinand Möbius (1790-1868) y Johann Benedict Listing (1808-1882).

El concepto de superficie orientada se puede describir en términos coloquiales de la siguiente manera: decimos que una superficie S es orientada si S tiene dos “lados” o dos “caras” perfectamente diferenciadas. Otra forma de decir esto mismo es la siguiente: existe una forma de “pintar” a toda la superficie S con dos colores distintos de tal manera que el único camino para “pasar” de un color a otro es a través del borde (geométrico) de S , o “perforándola”. Ejemplos de superficies orientadas son un cilindro o una esfera, en las cuales es muy fácil identificar sus dos “caras” (y que comúnmente llamamos “cara interior” y “cara exterior”). Este no es el caso de la cinta de Möbius² y de otra también muy famosa superficie, que además tiene la particularidad de ser una superficie “cerrada” (lo que significa que su borde “geométrico” es vacío, como en la esfera) y que se le conoce como la botella de Klein³ (ver figura 4.8).

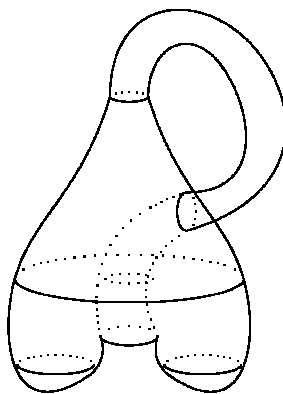


Figura 4.8: Una botella de Klein

La definición formal de superficie orientada es la siguiente:

Definición 4.2 Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ una superficie. Decimos que S es orientada si existe $F : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que F es continua en S , $F(\hat{x})$ es un vector normal a S en \hat{x} y $\|F(\hat{x})\| = 1$, para toda $\hat{x} \in S$.

Dado que cualquier superficie S que estamos considerando cuenta con una parametrización σ de clase C^1 a partir de la cual, de acuerdo con 4.3, podemos asignar vectores normales a S en cada uno de sus puntos, es claro que cada parametrización puede inducir una orientación sobre S ; sin embargo, esta asignación de vectores normales no necesariamente cumple con todas las condiciones de la definición anterior, como sucede en el caso de la parametrización que dimos (¡o cualquier otra!) de la banda de Möbius (ver problema 3).

Un concepto que no hemos mencionado hasta ahora y que está relacionado con lo anterior, es el concepto de reparametrización de una superficie. Obsérvese que, si $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^1 tal que $\alpha(B) = A \subset \mathbb{R}^2$ y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de una superficie S , entonces $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización de S . Queda como un problema para el lector (el número 4) probar que los vectores normales inducidos por esta nueva parametrización $\tilde{\sigma}$ satisfacen que

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) = J\alpha(u, v) \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right) \quad (4.7)$$

²Seguramente el lector alguna vez a construido una cinta de Möbius y ha intentado colorearla con las características descritas arriba (y si no la ha hecho ¡inténtelo!)

³Conocida con este nombre en honor de su creador, el matemático alemán Christian Felix Klein (1849-1925)

para toda $(u, v) \in B$.

Con la identidad anterior tenemos todo lo necesario para introducir el concepto de *reparametrización* de una superficie.

Definición 4.3 Dada $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de la superficie S y $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una función de clase C^1 , inyectiva en B y con $J\alpha \neq 0$ (salvo en un conjunto de medida de Jordan cero, para ambas condiciones) tal que $\alpha(B) = A$, decimos que la función $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una reparametrización de S . Si $J\alpha(u, v) \geq 0$ para toda $(u, v) \in B$ decimos que $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la misma “orientación” que σ y si $J\alpha(u, v) \leq 0$ para toda $(u, v) \in B$ entonces decimos que $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la “orientación” contraria a σ .

Como se recordará del capítulo 3, dada una parametrización γ de una curva Γ , se construye la parametrización $-\gamma$ que no es más que una reparametrización de Γ que la recorre justo en la dirección contraria que γ ; esta particularidad se reflejaba en el hecho de que los vectores tangentes a Γ inducidos por $-\gamma$ apuntan en la dirección contraria a los inducidos por γ . Esto mismo se puede hacer para las superficies y lo más interesante es que hay más de una forma de hacerlo. Por ejemplo, si $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de la superficie S , observe que la función $\tilde{\sigma} : \tilde{A} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid (u, -v) \in A\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(u, -v)$ es una reparametrización de S (¿cuál sería la función $\alpha : \tilde{A} \rightarrow A$ en este caso?) que tiene la particularidad de que el vector normal inducido por $\tilde{\sigma}$ en cada punto de S , apunta en la dirección contraria al asignado por σ (ver figura 4.9).

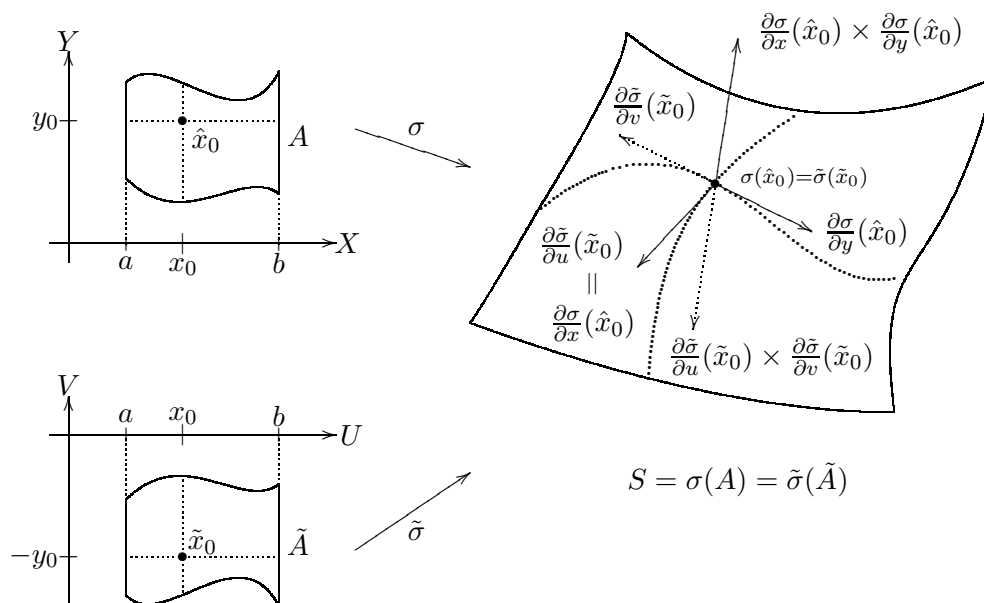


Figura 4.9: El vector normal inducido por la parametrización $\sigma(x, y)$ en cada punto de S , apunta en la dirección contraria al asignado por la parametrización $\tilde{\sigma}(u, v) = \sigma(u, -v)$

Terminamos el estudio general de las superficies definiendo lo que significará para nosotros que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ sea una superficie por pedazos. Como es de esperarse, un conjunto S será una superficie por pedazos si se puede expresar como la unión finita de superficies. A diferencia de lo que hicimos para las curvas, en este caso no nos preocuparemos por “construir” una parametrización de todo S ; nos bastará con tener una parametrización de cada “pedazo” de S . Todo esto lo resumimos en la siguiente

Definición 4.4 Decimos que $S \subset \mathbb{R}^n$ es una superficie por pedazos si existen $S_1, \dots, S_k \subset \mathbb{R}^n$ superficies tales que $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$. Si σ_i es una parametrización de S_i para $i = 1, \dots, k$, escribimos $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$ y decimos que σ es una parametrización⁴ de S .

Ejemplos de superficies por pedazos son un cubo (o parte de un cubo) y en general cualquier poliedro (o parte de un poliedro), o un cilindro con “tapas”, que además tiene la particularidad de ser una superficie cerrada (como sería el caso de un cubo o un poliedro completo). La forma en que se parametrice cada “pedazo” de una superficie S por pedazos es muy importante dado que por medio de cada una de esas parametrizaciones es que obtenemos vectores normales a S . En el siguiente ejemplo ilustramos lo anterior.

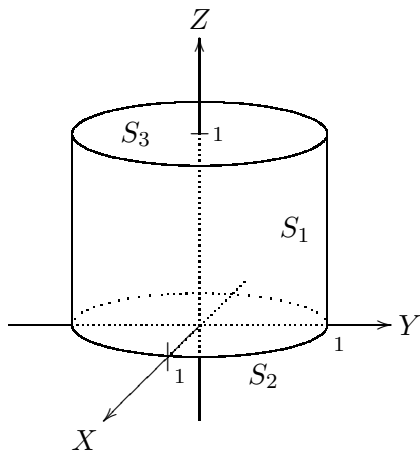


Figura 4.10: Un cilindro con “tapas” es ejemplo de una superficie por pedazos

Ejemplo 4.5 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie cerrada formada por el cilindro circular recto (cuyo eje es el eje Z) que está contenido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$, y los dos círculos que están contenidos en cada uno de estos dos planos y que forman las “tapas” de S . Calcular una parametrización de esta superficie.

Solución. Expresaremos a la superficie como $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ en donde S_1 es el cilindro y S_2 y S_3 son las “tapas” (ver figura 4.10). Hacemos $\sigma_1 : A = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma_1(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y)$; $\sigma_2 : A = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma_2(x, y) = (y \cos(x), y \sin(x), 0)$ y $\sigma_3 : A = [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma_3(x, y) = (y \cos(x), -y \sin(x), 1)$. De esta forma tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x, y) &= (-\sin(x), \cos(x), 0) \times (0, 0, 1) \\ &= (\cos(x), \sin(x), 0) \end{aligned}$$

que son vectores normales a S que “apuntan” hacia afuera de S .

Análogamente

$$\frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x, y) = (-y \sin(x), y \cos(x), 0) \times (\cos(x), \sin(x), 0)$$

⁴Esta notación no significa que una “parametrización” de una superficie por pedazos sea una suma de parametrizaciones de cada uno de los “pedazos” de S .

$$= (0, 0, -y)$$

que son vectores normales a la tapa inferior de S que “apuntan” hacia afuera de S . Finalmente

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x, y) &= (-y \operatorname{sen}(x), -y \operatorname{cos}(x), 0) \times (\operatorname{cos}(x), -\operatorname{sen}(x), 0) \\ &= (0, 0, y) \end{aligned}$$

que son vectores normales a la tapa superior de S que “apuntan” hacia afuera de S . Por tanto, la “parametrización” $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ de la superficie por pedazos S asigna vectores normales que “apuntan” hacia afuera de S .

4.1.1 Área de una superficie

Para concluir esta sección, abordaremos el problema de deducir lo que llamaremos el *área de una superficie* S parametrizada por una función $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la cual, dada la naturaleza del problema, supondremos que es simple. Procederemos de la siguiente manera: primero, “aproximamos” al conjunto A por medio de una familia finita de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k (contenidos en A); después, “subdividimos” a la superficie S en un número finito de “pedazos” a través de la imagen de estos rectángulos bajo la función σ (ver figura 4.11). Lo primero que hay que notar es que eso a lo que queremos llamar el área de S ($\text{área}(S)$) se le puede aproximar por la suma de las áreas de cada uno de estos pedazos de superficie (o parches) $\sigma(R_i)$, es decir

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i=1}^k \text{área}(\sigma(R_i))$$

y que esta aproximación será mejor en la medida de que los rectángulos R_1, \dots, R_k sean más pequeños.

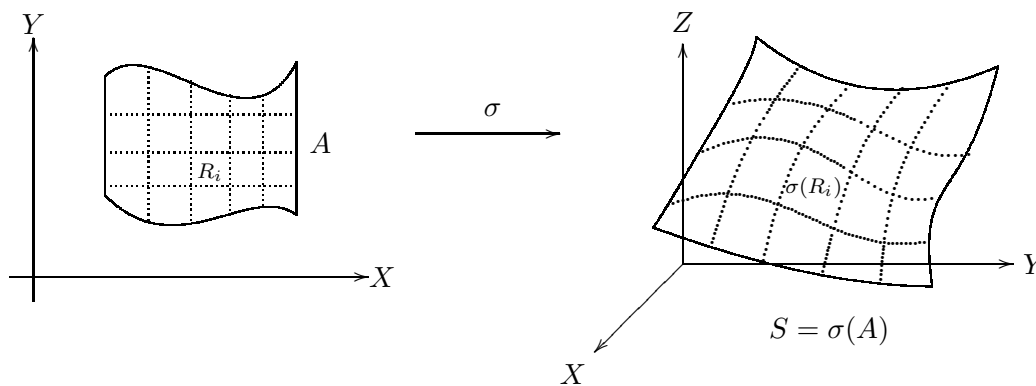


Figura 4.11: El área de una superficie S se puede aproximar por medio de la suma de las áreas de cada uno de los pedazos de superficie (o parches) $\sigma(R_i)$ y esta aproximación será mejor en la medida de que los rectángulos R_1, \dots, R_k sean más pequeños

En virtud de lo anterior, nuestro problema ahora es calcular o aproximar lo mejor que se pueda el área de cada pedazo de superficie $\sigma(R_i)$. Si $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ es un rectángulo muy pequeño es de esperarse que el pedazo de superficie $\sigma(R_i)$ se parezca mucho al paralelogramo P_i

generado por los vectores $\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$ (ver figura 4.12) de tal forma que, de acuerdo con lo que sabemos de la Geometría Analítica, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{área}(\sigma(R_i)) &\approx \text{área}(P_i) \\ &= \|(\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})) \times (\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}))\| \end{aligned}$$

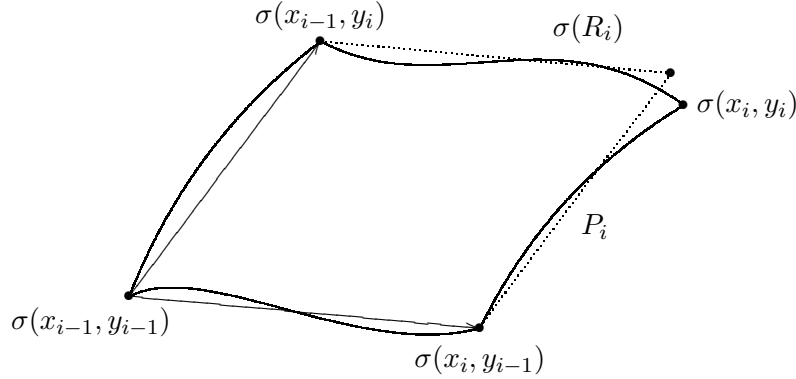


Figura 4.12: El área del pedazo de superficie $\sigma(R_i) \subset \mathbb{R}^3$ se parece mucho al área del paralelogramo $P_i \subset \mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$

Por otra parte, por el Teorema del Valor Medio aplicado a cada una de las funciones coordenadas $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ de σ , sabemos que

$$\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}(\xi_{1,i}, y_{i-1}), \frac{\partial \sigma_2}{\partial x}(\xi_{2,i}, y_{i-1}), \frac{\partial \sigma_3}{\partial x}(\xi_{3,i}, y_{i-1}) \right)$$

y

$$\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}) = (y_i - y_{i-1}) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}(x_{i-1}, \eta_{1,i}), \frac{\partial \sigma_2}{\partial y}(x_{i-1}, \eta_{2,i}), \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}(x_{i-1}, \eta_{3,i}) \right)$$

en donde $\xi_{1,i}, \xi_{2,i}, \xi_{3,i} \in (x_{i-1}, x_i)$ y $\eta_{1,i}, \eta_{2,i}, \eta_{3,i} \in (y_{i-1}, y_i)$.

Por tanto, dado que las funciones $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son de clase C^1 , si los intervalos (x_{i-1}, x_i) y (y_{i-1}, y_i) son muy pequeños, se tendrá que

$$\begin{aligned} \text{área}(\sigma(R_i)) &\approx \text{área}(P_i) & (4.8) \\ &= \|(\sigma(x_i, y_{i-1}) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1})) \times (\sigma(x_{i-1}, y_i) - \sigma(x_{i-1}, y_{i-1}))\| \\ &\approx \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| (x_i - x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \\ &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot \text{área}(R_i) \\ &= \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

para cualquier $\hat{\xi}_i \in R_i$.

Considerando todas estas aproximaciones, tenemos entonces que

$$\text{área}(S) \approx \sum_{i=1}^k \text{área}(\sigma(R_i))$$

$$\begin{aligned} &\approx \sum_{i=1}^k \text{área}(P_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^k \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

y como seguramente el lector sabrá reconocer, esta última suma es una suma de Riemann de la integral

$$\int_A \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\|$$

de donde se intuye que la forma más adecuada de definir lo que es el área de una superficie S parametrizada por una función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es la siguiente.

Definición 4.6 Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por la función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si σ es una parametrización simple, definimos el área de S (que denotamos por $\text{área}(S)$) de la siguiente forma:

$$\text{área}(S) = \int_A \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \quad (4.9)$$

Vale la pena resaltar la analogía que existe entre la integral de la identidad anterior y la correspondiente integral que se obtuvo en el capítulo 3 (3.2) para calcular la longitud de una curva Γ parametrizada por una función γ .

Lo siguiente que haremos será mostrar con un ejemplo que la integral de 4.9 en efecto nos permite calcular eso que nuestra intuición nos dice que debe ser el área de una superficie S . Lo mostraremos con una superficie para la cual podamos “calcular su área” por “otro método”.

Ejemplo 4.7 Sea S el cilindro circular recto parametrizado por la función $\sigma(x, y) = (\cos(x), \text{sen}(x), y)$ con $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$. Calcular el área de S .

Solución. Lo primero que hay que observar es que, si hacemos un “corte” vertical en el cilindro, y “aplanamos” la superficie (que en este caso sí se puede), entonces obtenemos un rectángulo cuya base mide 2π (el perímetro de la circunferencia que “genera” al cilindro) y altura 1 (ver figura 4.13). De esta forma, el área de S es 2π que es el valor que debemos obtener al calcular la integral de 4.9. Para calcular dicha integral, primero nótese que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) = (-\text{sen}(x), \cos(x), 0) \quad y \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = (0, 0, 1)$$

de tal forma que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) = (\cos(x), \text{sen}(x), 0)$$

para toda $(x, y) \in A = [0, 2\pi] \times [0, 1]$ (lo que significa que los vectores normales a S inducidos por la partición σ apuntan hacia “afuera” del cilindro). Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{área}(S) &= \int_A \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{área}(A) \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

que es lo que esperábamos.

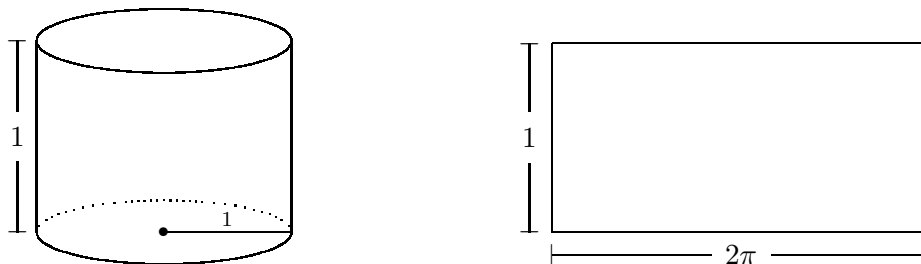


Figura 4.13: Si a la superficie de un cilindro circular recto (sin tapas) de altura 1 y base de radio 1 le hacemos un “corte” vertical y después la “aplanamos”, entonces obtenemos un rectángulo de base 2π (el perímetro de la circunferencia de radio 1) y altura 1 cuya área es 2π

4.2 Integrando funciones escalares

Ya en el capítulo tres mencionábamos el problema de calcular la masa total de una lámina no homogénea que tuviera la forma de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$. En esta sección empezaremos por resolver este problema y su solución nos conducirá a la definición de lo que significa integrar una función de valores reales sobre una superficie S .

Supongamos que $\rho : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función (continua) que en cada punto de S nos asigna su densidad de masa, y que S está parametrizada por la función $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, inyectiva en el interior de su dominio (es decir, una parametrización simple). Procediendo como en el problema del cálculo del área de S , “aproximamos” al conjunto A por medio de una familia de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k contenidos en A , los cuales a su vez usamos para “aproximarnos” a la superficie S por medio de la imagen de estos rectángulos bajo la función σ . De esta forma, tenemos que

$$\text{masa}(S) \approx \sum_{i=1}^k \rho(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$$

donde $\hat{\xi}_i \in R_i$ para $i = 1, \dots, k$.

Ahora, si usamos la misma aproximación para el $\text{área}(\sigma(R_i))$ obtenida en 4.8, tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{masa}(S) &\approx \sum_{i=1}^k \rho(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \text{área}(\sigma(R_i)) \\
 &\approx \sum_{i=1}^k \rho(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i)
 \end{aligned}$$

y esta última suma es fácilmente reconocible como una suma de Riemann de la integral

$$\int_A \rho(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\|$$

de tal forma que, como hemos hecho ya varias veces a lo largo de este texto, podemos deducir que

$$masa(S) = \int_A \rho(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \quad (4.10)$$

Obsérvese que de la identidad anterior se tiene que, si la función de densidad es constante ($\rho \equiv c$), es decir, que nuestra lámina es homogénea, entonces $masa(S) = c \cdot \text{área}(S)$ como tiene que suceder.

Con base en la identidad 4.10, definimos en general lo que significará la integral de una función f de valores reales definida sobre una superficie S que está parametrizada por una función σ , y que de aquí en adelante conoceremos como la *integral de superficie* de f sobre S , de la siguiente manera:

Definición 4.8 Sean, S una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos la integral de f sobre S según la parametrización σ , que denotamos por $\int_S f \|d\sigma\|$, como

$$\int_S f \|d\sigma\| = \int_A f(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \quad (4.11)$$

Como es de suponerse, esta definición se comporta bien con la aritmética básica de las funciones escalares, como lo establecemos en la siguiente proposición cuya prueba, sin lugar a dudas, queda en manos del lector.

Proposición 4.9 Si S es una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f, g : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_S (\alpha f + \beta g) \|d\sigma\| = \alpha \int_S f \|d\sigma\| + \beta \int_S g \|d\sigma\|$$

Otra cuestión importante con relación a la definición 4.8 es la de saber qué tanto depende el concepto de integral ahí definido, de la parametrización σ de la superficie S . Como en el caso de la integral de línea de funciones escalares, basta que dos parametrizaciones “recorran” a la superficie S esencialmente el mismo “número” de veces, para que el valor de la integral sea el mismo. Así, de acuerdo con la definición 4.3, basta que dos parametrizaciones de una superficie S la “recorran” con la misma dirección o con la dirección contraria, para que el valor de la integral 4.11 sea el mismo. Lo anterior queda expresado en la siguiente

Proposición 4.10 Sean, S una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $\tilde{\sigma} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es otra parametrización que “recorre” a S con la misma dirección o con la dirección contraria que σ entonces

$$\int_S f \|d\sigma\| = \int_S f \|d\tilde{\sigma}\|$$

Dem. De acuerdo con la definición 4.3, dado que $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la misma dirección o con la dirección contraria que σ , entonces existe $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $\det(D\alpha(u, v)) \geq 0$ para toda $(u, v) \in B$ ó $\det(D\alpha(u, v)) \leq 0$ para toda $(u, v) \in B$.

En cualquiera de estos dos casos, por el Teorema de Cambio de Variable sabemos que

$$\begin{aligned} \int_S f \|d\sigma\| &= \int_A f(\sigma(x, y)) \cdot \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(x, y) \right\| \\ &= \int_B f(\sigma(\alpha(u, v))) \cdot \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right\| \cdot |\det(D\alpha(u, v))| \\ &= \int_B f((\sigma \circ \alpha)(u, v)) \cdot \left\| \det(D\alpha(u, v)) \left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right) \right\| \end{aligned}$$

de tal forma que por la identidad 4.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \int_S f \|d\sigma\| &= \int_B f(\tilde{\sigma}(u, v)) \cdot \left\| \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) \right\| \\ &= \int_S f \|d\tilde{\sigma}\| \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Concluimos esta breve sección extendiendo el concepto de integral de superficie de funciones escalares, a superficies por pedazos.

Definición 4.11 Sean, $S = S_1 \cup \dots \cup S_k \subset \mathbb{R}^3$ una superficie por pedazos con $\sigma_i : A_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S_i para $i = 1, \dots, k$, y $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Definimos la integral de f sobre S , que denotamos por $\int_S f \|d\sigma\|$, como

$$\int_S f \|d\sigma\| = \int_{S_1} f \|d\sigma_1\| + \dots + \int_{S_k} f \|d\sigma_k\|$$

donde $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$.

Es una tarea fácil (tarea que se deja al lector) mostrar que la proposición 4.9 se puede extender a superficies por pedazos.

4.3 Integrando funciones vectoriales

Vamos a motivar el concepto de integral de superficie de una función de valores vectoriales por medio del problema equivalente (en el espacio) al que usamos en el capítulo tres para motivar el concepto de divergencia (en el plano). Esto es, vamos a suponer que $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una función que representa el campo de velocidades de un fluido y nuestro objetivo es encontrar una forma de “medir” qué tanto se “expande” este fluido a través de una superficie $S \subset U$.

Como hicimos antes, empezaremos por el caso más sencillo en el que F es constante, es decir, supondremos que $F(\hat{x}) \equiv \hat{F}$ para toda $\hat{x} \in U$. También empezaremos por suponer que S es una superficie plana, es decir, que existe $P \subset \mathbb{R}^3$ un plano tal que $S \subset P$. De esta forma, y recurriendo a los mismos argumentos que usamos en el capítulo tres, si $\hat{n} \in \mathbb{R}^3$ es un vector unitario que es normal al plano P (y por tanto a S), entonces el número $\hat{F} \cdot \hat{n}$ es una medida de qué tanto “cruza” el campo F a el plano P , en donde, como antes, su signo nos indica la dirección en la que lo hace

(si es positivo, “cruza” a P en la dirección en la que apunta \hat{n} , y si es negativo, en la dirección contraria). Por tanto, el número

$$(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{área}(S)$$

que es el volumen de un cilindro cuya base tiene la forma de la superficie S y altura $\hat{F} \cdot \hat{n}$, será una medida de qué tanto se “expande” el fluido representado por F a través de S (ver figura 4.14).

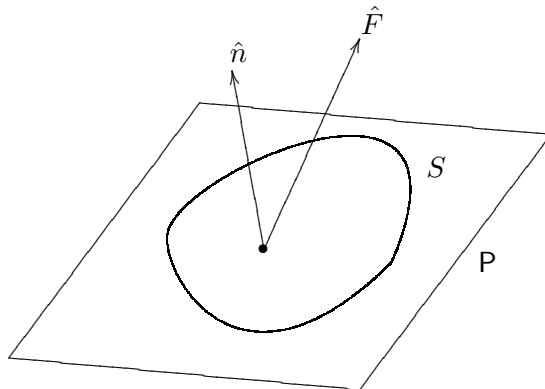


Figura 4.14: Si S es una superficie plana, es decir, contenida en un plano $P \subset \mathbb{R}^3$, y \hat{n} es un vector unitario que es normal a P (y por tanto a S), el número $\hat{F} \cdot \hat{n}$ es una medida de qué tanto “cruza” el vector \hat{F} a el plano P de modo que $(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{área}(S)$ será una medida de qué tanto se “expande” el fluido (cuya velocidad está representada por \hat{F}) a través de S

Para resolver el mismo problema en el caso más general (F no necesariamente constante y S no necesariamente plana), supondremos que S está parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, una parametrización simple. Como ya hicimos en dos ocasiones en este capítulo, “aproximamos” al conjunto A por medio de una familia de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k contenidos en A , los cuales a su vez usamos para “aproximarnos” a la superficie S por medio de la imagen de estos rectángulos bajo la función σ .

Ahora, si para cada $i = 1, \dots, k$ elegimos $\hat{\xi}_i \in R_i$ tal que $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \neq \hat{0}$ y hacemos

$$\hat{n}_i = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|}$$

entonces el número

$$(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$$

es una medida de qué tanto se “expande” el fluido a través del pedazo de superficie $\sigma(R_i)$ en la dirección del vector normal \hat{n}_i (ver figura 4.15) de tal forma que

$$\sum_{i=1}^k (F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$$

será una medida de qué tanto se “expande” el fluido (cuya velocidad está dada por F) a través de la superficie S en la dirección de los vectores normales $\hat{n}_1, \dots, \hat{n}_k$ inducidos por σ .

Si ahora recordamos que en la sección 4.1 (4.8) obtuvimos que

$$\text{área}(\sigma(R_i)) \approx \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i)$$

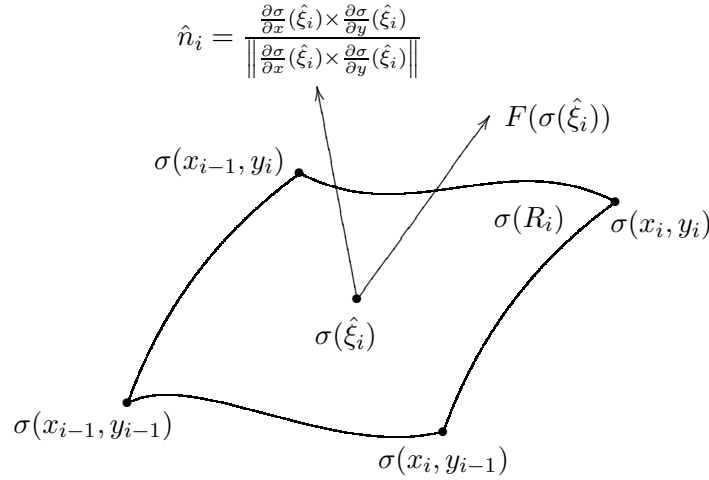


Figura 4.15: Si elegimos $\hat{\xi}_i \in R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ tal que $\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \neq \hat{0}$ entonces el número $(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i))$ será una medida de qué tanto se “expande” el fluido (cuya velocidad está dada por el campo F) a través del pedazo de superficie $\sigma(R_i)$ en la dirección del vector normal \hat{n}_i inducido por σ

entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k (F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i) \cdot \text{área}(\sigma(R_i)) &\approx \sum_{i=1}^k \left(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|} \right) \cdot \left(\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \right) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right) \cdot m(R_i) \end{aligned}$$

y esta última suma es fácilmente reconocible como una suma de Riemann de la integral

$$\int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$$

por lo que podemos intuir que la solución a nuestro problema está dada por esta integral.

El problema que planteamos y la solución que dedujimos son la base sobre la cual se obtiene el concepto de *integral de superficie de una función de valores vectoriales* y que dan pie a la siguiente

Definición 4.12 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Definimos la integral de F sobre S , que denotamos por $\int_S F \cdot d\sigma$, como

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$$

Si $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ es una superficie por pedazos y $\sigma_i : A_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S_i para cada $i = 1, \dots, k$, definimos

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 + \dots + \int_{S_k} F \cdot d\sigma_k$$

donde $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$

En el siguiente ejemplo, mostramos cómo se calcula una de estas integrales de superficie.

Ejemplo 4.13 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio $r > 0$ con centro en el origen, y $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Calcule $\int_S F \cdot d\sigma$ donde σ sea una parametrización que induzca vectores normales a S que apunten hacia adentro de S .

Solución. Parametrizamos a S por medio de la función

$$\sigma(x, y) = (r \cos(x) \operatorname{sen}(y), r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(y))$$

con $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) &= (-r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(x) \operatorname{sen}(y), 0) \times (r \cos(x) \cos(y), r \operatorname{sen}(x) \cos(y), -r \operatorname{sen}(y)) \\ &= -r \operatorname{sen}(y)(r \cos(x) \operatorname{sen}(y), r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(y)) \end{aligned}$$

los cuales son vectores normales a S que apuntan hacia adentro de S .

Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot d\sigma &= \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= \int_A \frac{1}{r^2} (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y)) \cdot (-r^2 \operatorname{sen}(y)(\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))) \\ &= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi]} -\operatorname{sen}(y) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} dx \right) \left(\int_0^\pi -\operatorname{sen}(y) dy \right) \\ &= 2\pi \left(\cos(y) \Big|_0^\pi \right) \\ &= -4\pi \end{aligned}$$

Con respecto a este ejemplo, vale la pena hacer las siguientes dos observaciones. La primera es que el campo F es tal que en cada punto $\hat{x} \in S$, $F(\hat{x})$ es un vector normal que apunta justo en la dirección normal y hacia afuera de S , lo que explica que el valor de la integral sea distinto de cero y negativo; y la segunda, que el valor de la integral es independiente del radio de la esfera. Ambos hechos jugarán un papel importante más adelante.

Como es de esperarse, este nuevo tipo de integral se lleva bien con la aritmética elemental de las funciones de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , lo cual dejamos expresado en la siguiente

Proposición 4.14 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F, G : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continuas y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\int_S (\alpha F + \beta G) \cdot d\sigma = \alpha \int_S F \cdot d\sigma + \beta \int_S G \cdot d\sigma$$

Si $S = S_1 \cup \dots \cup S_k$ es una superficie por pedazos y $\sigma_i : A_i \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una parametrización de S_i para cada $i = 1, \dots, k$, entonces la identidad anterior también se cumple, con $\sigma = \sigma_1 + \dots + \sigma_k$.

Dem. Se deja al lector ■

Como en los casos anteriores, es importante saber qué tanto depende la integral sobre una superficie S de una función de valores vectoriales F , de la parametrización σ de S que utilicemos. Dado que esta integral se puede interpretar como una medida de qué tanto se “expande” el campo F en la dirección de los vectores normales inducidos por la parametrización σ , es de esperarse que si otra parametrización $\tilde{\sigma}$ recorre a la superficie S con la misma orientación que σ , entonces las integrales son iguales para ambas parametrizaciones, mientras que si $\tilde{\sigma}$ recorre a la superficie S con la orientación contraria, entonces las integrales difieren sólo por el signo. Concluimos esta sección con una proposición que expresa justo estas propiedades.

Proposición 4.15 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie y $F : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua. Sean $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $\tilde{\sigma} : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dos parametrizaciones de S tales que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ .

1. si $\tilde{\sigma}$ recorre a S con la misma orientación que σ entonces

$$\int_S F \cdot d\sigma = \int_S F \cdot d\tilde{\sigma}$$

2. si $\tilde{\sigma}$ recorre a S con la orientación contraria que σ entonces

$$\int_S F \cdot d\sigma = - \int_S F \cdot d\tilde{\sigma}$$

Dem. Haremos la prueba del segundo inciso y se deja al lector la prueba del primero. Dado que $\tilde{\sigma}$ es una reparametrización de σ , sabemos que existe $\alpha : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ de clase C^1 tal que $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \alpha$, y como $\tilde{\sigma}$ recorre a S con la orientación contraria que σ entonces $\det(D\alpha(u, v)) \leq 0$ para toda $(u, v) \in B$. Por tanto, por el Teorema de Cambio de Variable y la identidad 4.7, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot d\sigma &= \int_A F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= \int_B F(\sigma(\alpha(u, v))) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) |\det(D\alpha(u, v))| \\ &= - \int_B F(\tilde{\sigma}(u, v)) \cdot \left(\det(D\alpha(u, v)) \frac{\partial \sigma}{\partial x}(\alpha(u, v)) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(\alpha(u, v)) \right) \\ &= - \int_B F(\tilde{\sigma}(u, v)) \cdot \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

$$= - \int_S F \cdot d\tilde{\sigma}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Es importante que el lector note la analogía que existe entre la proposición anterior y la proposición 3.16 del tercer capítulo.

4.4 El teorema de Stokes

Cuando en el capítulo tres formulamos el Teorema de Green, dijimos que este resultado se podía interpretar como una generalización del Teorema Fundamental del Cálculo. En efecto, así como este último teorema establece que la integral sobre un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ de una derivada f' se puede calcular simplemente evaluando la función original f en los puntos a y b (que por cierto forman “el borde” del intervalo $[a, b]$), el teorema de Green establece que la integral sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ de $\text{Rot } F(\hat{x})$ (que es como una cierta “derivada” de F) se puede calcular “evaluando” la función original F sobre el “borde” de A (la integral de línea de F sobre $\Gamma = \partial A$). De hecho, en el caso del teorema fundamental, éste se puede “extender” al cálculo de integrales sobre conjuntos unidimensionales (como lo es el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$) contenidos en espacios de dimensión más alta (\mathbb{R}^n), es decir, sobre curvas. Esto está expresado en la identidad

$$\int_{\Gamma} \nabla \varphi \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$$

en donde $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una parametrización de la curva $\Gamma \subset U \subset \mathbb{R}^n$ y $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, y en donde en lugar de integrar f' integramos $\nabla \varphi$.

Como seguramente el lector estará sospechando, ahora la pregunta es: ¿el Teorema de Green se puede “extender” al cálculo de integrales sobre conjuntos dos-dimensionales no necesariamente planos, es decir, superficies? La respuesta es que sí y eso es justo de lo que trata el Teorema de Stokes⁵.

Aun cuando la discusión anterior nos puede dar una idea de lo que afirma el Teorema de Stokes, es mejor deducirlo a partir de la interpretación física y geométrica de los conceptos que involucra, que en este caso son el de integral de superficie y el del rotacional de un campo. Como en el caso de los teoremas que hemos mencionado, el Teorema de Stokes trata de cómo calcular la integral sobre una superficie S de un cierto tipo de “derivada” de una función F de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 , el rotacional de F ($\mathbf{Rot}F$), es decir, trata de

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

Supongamos entonces que tenemos $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U . Como hemos hecho en ocasiones anteriores, “aproximamos” al conjunto A con un número finito de pequeños rectángulos R_1, \dots, R_k contenidos en A de tal forma que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_A \mathbf{Rot}F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y)$$

⁵Nombrado así por el físico y matemático inglés George Gabriel Stokes (1819-1903), a pesar de que la primera formulación conocida del teorema fue realizada por William Thomson (Lord Kelvin) y aparece en una correspondencia que él mantuvo con Stokes.

$$\begin{aligned} &\approx \sum_{i=1}^k \mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|} \right) \left(\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) \right) \end{aligned}$$

con $\hat{\xi}_i \in \text{int}(R_i)$ para cada $i = 1, \dots, k$.

Ahora, si hacemos

$$\hat{n}_i = \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i)}{\left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\|}$$

y recordamos que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial x}(\hat{\xi}_i) \times \frac{\partial\sigma}{\partial y}(\hat{\xi}_i) \right\| \cdot m(R_i) &\approx \text{área}(\sigma(R_i)) \\ &\approx \text{área}(P_i) \end{aligned}$$

en donde P_i es el paralelogramo que tomamos en 4.8 y que se “parece” mucho a $\sigma(R_i)$ (figura 4.12), para cada $i = 1, \dots, k$, tenemos entonces que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \approx \sum_{i=1}^k \left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i \right) \text{área}(P_i)$$

Una vez que hemos llegado hasta aquí, es el momento de recordar la identidad 3.30 del capítulo tres y tomarnos la libertad de sustituir cuadrados con paralelogramos en dicha identidad, de tal manera que podamos afirmar que

$$\left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_i)) \cdot \hat{n}_i \right) \text{área}(P_i) \approx \int_{\partial P_i} F \cdot d\delta_i$$

en donde δ_i es una parametrización del borde ∂P_i del paralelogramo P_i que lo recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el vector unitario \hat{n}_i .

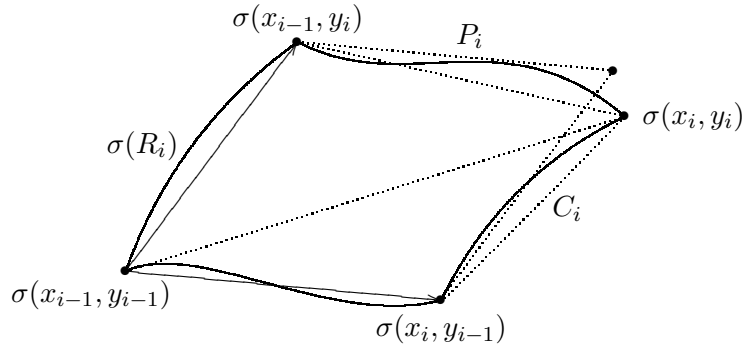


Figura 4.16: Si $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ y C_i es el “cuadrilátero” (formado por la unión de dos triángulos, no necesariamente contenidos en el mismo plano) cuyos vértices son los puntos $\sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$, $\sigma(x_{i-1}, y_i)$, $\sigma(x_i, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_i)$, entonces C_i y P_i “se parecen mucho”

Nótese que, como el campo F y la parametrización σ son funciones de clase C^1 , si $R_i = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i]$ y C_i es el “cuadrilátero” (formado por la unión de dos triángulos, no necesariamente contenidos en el mismo plano) cuyos vértices son los puntos $\sigma(x_{i-1}, y_{i-1})$, $\sigma(x_{i-1}, y_i)$, $\sigma(x_i, y_{i-1})$ y $\sigma(x_i, y_i)$ (ver figura 4.16), entonces C_i y P_i “se parecen mucho” de tal forma que

$$\int_{\partial P_i} F \cdot d\delta_i \approx \int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i$$

en donde ahora $\tilde{\delta}_i$ es una parametrización del borde ∂C_i del cuadrilátero C_i que lo recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el vector unitario \hat{n}_i . De esta forma, tenemos que

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma \approx \sum_{i=1}^k \int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i$$

y esta aproximación será mejor en la medida de que los cuadriláteros C_i sean muy pequeños (es decir, si los rectángulos R_i son muy pequeños).

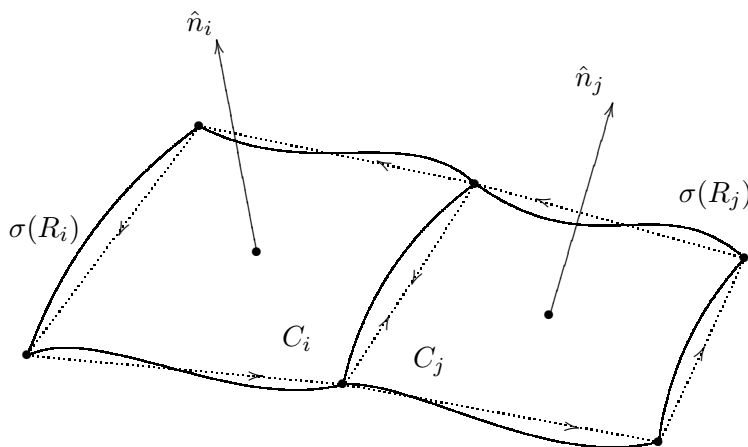


Figura 4.17: Si C_i y C_j son dos cuadriláteros adyacentes, la integral del campo F sobre el lado común a ambos cuadriláteros se cancela de tal forma que la suma de las integrales sobre el borde de cada uno de ellos, es igual a la integral de F sobre el borde de $C_i \cup C_j$, recorrido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apunta el vector \hat{n}_i o el vector \hat{n}_j

Ahora obsérvese que, dado que cada una de las integrales $\int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i$ se puede descomponer como la suma de cuatro integrales (sobre cada uno de los lados del cuadrilátero C_i), si C_i y C_j son dos cuadriláteros adyacentes, entonces en la suma

$$\int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i + \int_{\partial C_j} F \cdot d\tilde{\delta}_j$$

se cancela justo la integral sobre el lado común a ambos cuadriláteros de tal forma que esta suma es igual a la integral de F sobre el borde de $C_i \cup C_j$, recorrido en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apunta el vector \hat{n}_i o el

vector \hat{n}_j (ver figura 4.17). Si este proceso de “cancelación” de integrales sobre lados adyacentes lo hacemos para todos los C_i , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{\partial C_i} F \cdot d\tilde{\delta}_i = \int_{\Gamma} F \cdot d\tilde{\delta}$$

en donde Γ es la curva poligonal formada por todos los lados de los C_i que no se cancelaron, y $\tilde{\delta}$ es una parametrización de ésta que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apuntan los vectores normales inducidos por σ (ver figura 4.18). Lo mejor de todo esto es que, nuevamente, si los cuadriláteros C_i son muy pequeños (es decir, los rectángulos R_i son muy pequeños) entonces se tiene que $\Gamma \approx \partial_{\sigma} S$ (el borde de S inducido por σ definido en 4.4) y por lo tanto

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\tilde{\delta} \approx \int_{\partial_{\sigma} S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

en donde $\tilde{\gamma}$ es la parametrización de $\partial_{\sigma} S$ dada en 4.5.

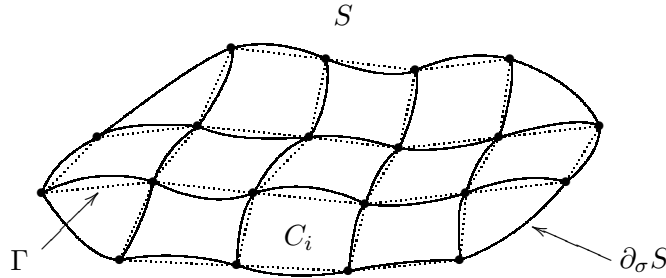


Figura 4.18: Si Γ es la curva poligonal formada por todos los lados de los cuadriláteros C_i que no se cancelan, y los C_i son muy pequeños (es decir, los rectángulos R_i son muy pequeños) entonces se tiene que $\Gamma \approx \partial_{\sigma} S$ (el borde de S inducido por σ)

Todas estas identidades y aproximaciones sugieren que

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial_{\sigma} S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

¡y esto es justo lo que asegura el Teorema de Stokes!

Con base en esta última identidad, formulamos el Teorema de Stokes de la siguiente manera:

Teorema 4.16 (de Stokes) Sean, $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^2 ⁽⁶⁾, $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización de ∂A (el borde de A , una curva cerrada simple) que lo recorre (una vez) en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, y $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U . Entonces

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\partial_{\sigma} S} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

en donde $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $\partial_{\sigma} S = \sigma(\partial A)$ (el borde de S inducido por σ).

⁶Aun cuando esta hipótesis no es necesaria, se pide así para hacer un poco más sencilla la prueba

Dem. Dado que esta prueba está basada en el Teorema de Green (como era de esperarse), supondremos que $A \subset \mathbb{R}^2$ es una región tipo I y tipo II.

Si hacemos

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) = (n_1(u, v), n_2(u, v), n_3(u, v))$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma &= \int_A \mathbf{Rot} F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \\ &= \int_A \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\sigma(u, v)) \right) n_1(u, v) + \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(u, v)) \right) n_2(u, v) \\ &\quad + \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\sigma(u, v)) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) \right) n_3(u, v) \\ &= \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) n_2(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) n_3(u, v) \right) \\ &\quad + \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\sigma(u, v)) n_3(u, v) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\sigma(u, v)) n_1(u, v) \right) \\ &\quad + \int_A \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(u, v)) n_1(u, v) - \frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(u, v)) n_2(u, v) \right) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} &= \int_a^b (P(\tilde{\gamma}(t)), Q(\tilde{\gamma}(t)), R(\tilde{\gamma}(t))) \cdot (\tilde{\gamma}'_1(t), \tilde{\gamma}'_2(t), \tilde{\gamma}'_3(t)) dt \\ &= \int_a^b P(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_1(t) dt + \int_a^b Q(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_2(t) dt + \int_a^b R(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_3(t) dt \end{aligned}$$

en donde $\tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3) = (\sigma_1 \circ \gamma, \sigma_2 \circ \gamma, \sigma_3 \circ \gamma)$.

Probaremos que

$$\begin{aligned} \int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z}(\sigma(u, v)) n_2(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y}(\sigma(u, v)) n_3(u, v) \right) &= \int_a^b P(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_1(t) dt \\ \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(\sigma(u, v)) n_3(u, v) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\sigma(u, v)) n_1(u, v) \right) &= \int_a^b Q(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_2(t) dt \end{aligned}$$

y que

$$\int_A \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\sigma(u, v)) n_1(u, v) - \frac{\partial R}{\partial x}(\sigma(u, v)) n_2(u, v) \right) = \int_a^b R(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_3(t) dt$$

Hacemos $\tilde{F} = (\tilde{P}, \tilde{Q}) = \left((P \circ \sigma) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, (P \circ \sigma) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right)$. Como σ es de clase C^2 , se tiene que

$$\mathbf{Rot} \tilde{F}(u, v) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial v}(u, v)$$

$$\begin{aligned}
&= \left((P \circ \sigma) \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial u \partial v} + \frac{\partial (P \circ \sigma)}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v) - \left((P \circ \sigma) \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial v \partial u} + \frac{\partial (P \circ \sigma)}{\partial v} \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \right) (u, v) \\
&= \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} (u, v) \left[\frac{\partial P}{\partial x} (\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} (u, v) + \frac{\partial P}{\partial y} (\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} (u, v) + \frac{\partial P}{\partial z} (\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} (u, v) \right] \\
&\quad - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} (u, v) \left[\frac{\partial P}{\partial x} (\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} (u, v) + \frac{\partial P}{\partial y} (\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} (u, v) + \frac{\partial P}{\partial z} (\sigma(u, v)) \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} (u, v) \right] \\
&= \frac{\partial P}{\partial z} (\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \frac{\partial \sigma_3}{\partial u} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v) - \frac{\partial P}{\partial y} (\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \right) (u, v)
\end{aligned}$$

Por tanto, como

$$n_2(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v)$$

y

$$n_3(u, v) = \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v)$$

por el Teorema de Green se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_A \left(\frac{\partial P}{\partial z} (\sigma(u, v)) n_2(u, v) - \frac{\partial P}{\partial y} (\sigma(u, v)) n_3(u, v) \right) &= \int_A \frac{\partial P}{\partial z} (\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_3}{\partial v} \right) (u, v) \\
&\quad - \int_A \frac{\partial P}{\partial y} (\sigma(u, v)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (u, v) \\
&= \int_A \text{Rot } \tilde{F}(u, v) \\
&= \int_{\partial A} \tilde{F} \cdot d\gamma \\
&= \int_a^b \tilde{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} (P \circ \sigma), \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} (P \circ \sigma) \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b (P \circ \sigma) (\gamma(t)) \left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}, \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} \right) (\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b P((\sigma \circ \gamma)(t)) (\sigma_1 \circ \gamma)'(t) dt \\
&= \int_a^b P(\tilde{\gamma}(t)) \tilde{\gamma}'_1(t) dt
\end{aligned}$$

Las dos identidades restantes se prueban de manera análoga (se dejan como un problema para el lector) ■

Es importante mencionar que la versión del Teorema de Stokes que hemos dado aquí tiene dos particularidades que vale la pena destacar. La primera, es que en la identidad

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} \quad (4.12)$$

que se establece en el teorema, se usa el “borde” de la superficie S inducido por la parametrización σ ($\partial_\sigma S$) y no el “borde geométrico” de S (∂S), que es como suele hacerse la mayoría de las veces. Hacerlo de esta forma tiene la ventaja de que nos ahorramos la definición precisa del “borde geométrico” ∂S (cuestión que discutimos ampliamente en la sección 4.1) además de que la demostración más frecuente (por ser la más sencilla) es precisamente la que hicimos aquí y que es usando el “borde” $\partial_\sigma S$. En todo caso, la validez de la identidad 4.12 en términos del “borde geométrico” ∂S es un problema que tiene que ver con la parametrización σ de S que se use y que casi siempre se resuelve tomando una parametrización simple σ (para que $\partial_\sigma S$ y ∂S coincidan, o cuando menos que $\partial S \subset \partial_\sigma S$, como también lo discutimos en la sección 4.1), junto con la hipótesis de que S sea una superficie orientable.

Y justo la segunda particularidad que se quiere destacar es que en la formulación que hemos dado, no es necesario suponer que S sea una superficie orientable, lo cual tiene que ver con el hecho de que el teorema lo escribimos precisamente en términos de $\partial_\sigma S$ y no de ∂S .

A continuación damos un par de ejemplos que sirven para ilustrar estas características del Teorema de Stokes.

Ejemplo 4.17 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, 3\pi/4] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sen(x), \sen(y))$, y $F(x, y, z) = (-zy, zx, 0)$ para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Muestre que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \neq \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

Solución. En este caso S es la parte del cilindro circular recto contenido entre los planos $z = 0$ y $z = 1$, cuyo eje es el eje Z , y σ es una parametrización de S que recorre dos veces parte de éste (la parte contenida entre los planos $z = 1/\sqrt{2}$ y $z = 1$, ver figura 4.19). Por esta razón, σ asigna dos vectores normales en cada punto de esta parte que recorre dos veces, como se observa al calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) &= (-\sen(x), \cos(x), 0) \times (0, 0, \cos(y)) \\ &= (\cos(x) \cos(y), \sen(x) \cos(y), 0) \end{aligned}$$

el cual es un vector normal a S que apunta hacia afuera si $y \in [0, \pi/2)$, y hacia adentro si $y \in (\pi/2, 3\pi/4]$.

Por tanto, como

$$\mathbf{Rot}F(x, y, z) = (-x, -y, 2z)$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma &= \int_A \mathbf{Rot}F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\ &= \int_A (-\cos(x), -\sen(x), 2\sen(y)) \cdot (\cos(x) \cos(y), \sen(x) \cos(y), 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{[0,2\pi] \times [0,3\pi/4]} -\cos(y) \\
&= 2\pi \left(-\operatorname{sen}(y) \Big|_0^{3\pi/4} \right) \\
&= -\frac{2\pi}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

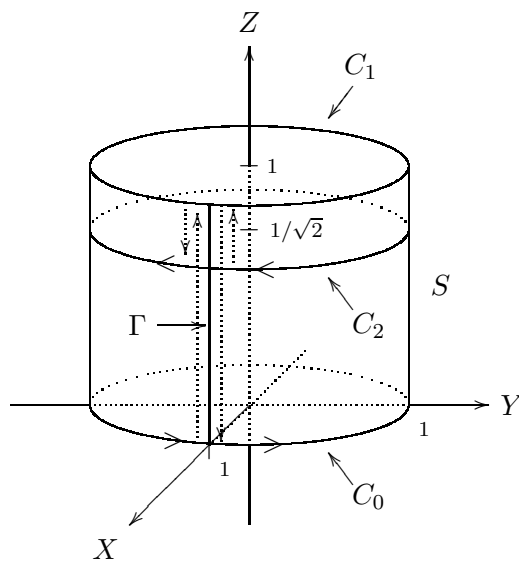


Figura 4.19: Para $S = \sigma(A)$ con $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, 3\pi/4] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(y))$, se tiene que $\partial S = C_0 \cup C_1$ y $\partial_\sigma S = C_0 \cup C_2 \cup \Gamma$

Por otra parte, $\partial S = C_0 \cup C_1$, con C_0 la circunferencia de radio 1 que está contenida en el plano $z = 0$ con centro en el origen, y C_1 la circunferencia de radio 1 que está contenida en el plano $z = 1$ con centro en el punto $(0, 0, 1)$. Dado que $F(x, y, 0) = (0, 0, 0)$ para toda $(x, y, 0) \in C_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_{C_0 \cup C_1} F \cdot d\gamma \\
&= \int_{C_0} F \cdot d\gamma + \int_{C_1} F \cdot d\gamma \\
&= 0 + \int_0^{2\pi} F(\cos(t), \operatorname{sen}(t), 1) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) \cdot (-\operatorname{sen}(t), \cos(t), 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt
\end{aligned}$$

$$= 2\pi$$

en donde tomamos la parametrización de C_1 que la recorre en el sentido de las manecillas del reloj cuando se le mira desde los vectores normales inducidos por σ que apuntan hacia afuera de S . Con esto mostramos que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \neq \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

y esto seguirá siendo cierto aun y cuando parametricemos a C_1 en la dirección contraria.

Observe que $\partial_\sigma S = C_0 \cup C_2 \cup \Gamma$, ahora con C_2 la circunferencia de radio 1 que está contenida en el plano $z = 1/\sqrt{2}$ con centro en el punto $(0, 0, 1/\sqrt{2})$, y Γ el segmento que une a los puntos $(1, 0, 0)$ y $(1, 0, 1/\sqrt{2})$ (pasando por el punto $(1, 0, 1)$). Como este último segmento es recorrido dos veces (de ida y de regreso) por la parametrización $\tilde{\gamma}$ de $\partial_\sigma S$ (dada por la identidad 4.5), se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} &= \int_{C_0 \cup C_2 \cup \Gamma} F \cdot d\tilde{\gamma} \\ &= \int_{C_0} F \cdot d\tilde{\gamma} + \int_{C_2} F \cdot d\tilde{\gamma} + \int_{\Gamma} F \cdot d\tilde{\gamma} \\ &= 0 + \int_0^{2\pi} F(\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t), \sin(3\pi/4)) \cdot (\sin(2\pi - t), -\cos(2\pi - t), 0) dt + 0 \\ &= \int_0^{2\pi} 1/\sqrt{2}(-\sin(2\pi - t), \cos(2\pi - t), 0) \cdot (\sin(2\pi - t), -\cos(2\pi - t), 0) dt \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{2}} \\ &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \end{aligned}$$

con lo cual confirmamos lo que asegura el Teorema de Stokes.

Si en el ejemplo anterior se muestra que la no inyectividad de una parametrización σ es determinante para que la identidad $\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$ no se satisfaga, en el siguiente ejemplo mostraremos que aun y cuando la parametrización sea simple, si la superficie S no es orientable, entonces dicha identidad tampoco se cumple. Como es de suponerse, S será la banda de Möbius y usaremos la parametrización que dimos en la sección 4.1.

Ejemplo 4.18 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la banda de Möbius parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$\sigma(x, y) = 2(\cos(x), \sin(x), 0) + y(\cos(x/2)\cos(x), \cos(x/2)\sin(x), \sin(x/2))$$

y

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$. Muestre que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \neq \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

Solución. Como se mencionó en el capítulo 3, es fácil ver que $\mathbf{Rot}F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$, y por lo tanto se tiene que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = 0$$

Por otra parte, si hacemos $\zeta(x) = \sigma(x, -1)$ y $\delta(x) = \sigma(x, 1)$, con $x \in [0, 2\pi]$, entonces

$$\begin{aligned} \zeta(x) &= (2 \cos(x) - \cos(x/2) \cos(x), 2 \sin(x) - \cos(x/2) \sin(x), -\sin(x/2)) \\ &= (\cos(x)[2 - \cos(x/2)], \sin(x)[2 - \cos(x/2)], -\sin(x/2)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \delta(x) &= (2 \cos(x) + \cos(x/2) \cos(x), \cos(x/2) \sin(x), \sin(x/2)) \\ &= (\cos(x)[2 + \cos(x/2)], \sin(x)[2 + \cos(x/2)], \sin(x/2)) \end{aligned}$$

de tal forma que $\zeta + \delta$ resulta ser una parametrización de ∂S que la recorre en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde un punto de la parte positiva del eje Z (ver figura 4.20).

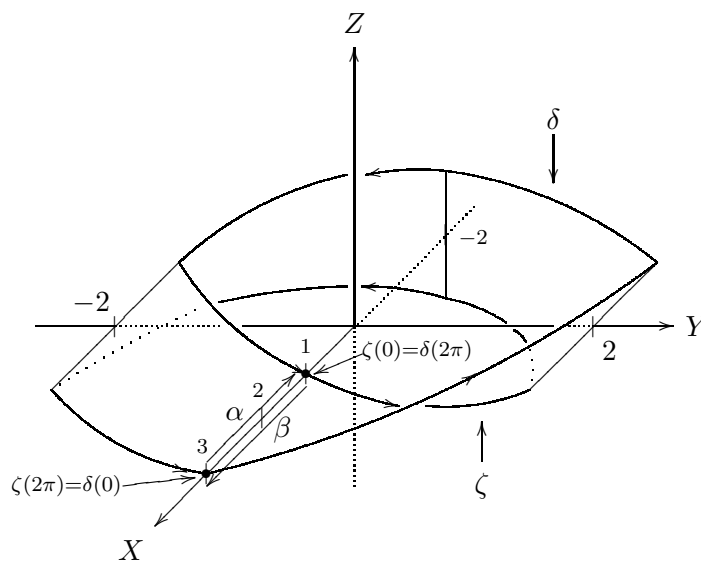


Figura 4.20: Una banda de Möbius parametrizada por la función $\sigma(x, y) = ((2 + y \cos(x/2)) \cos(x), (2 + y \cos(x/2)) \sin(x), y \sin(x/2))$

Realizando unos fáciles cálculos (que se dejan al lector), se obtiene que $F(\zeta(x)) \cdot \zeta'(x) = 1$ y $F(\delta(x)) \cdot \delta'(x) = 1$ para toda $x \in [0, 2\pi]$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot d(\zeta + \delta) &= \int_0^{2\pi} F(\zeta(x)) \cdot \zeta'(x) dx + \int_0^{2\pi} F(\delta(x)) \cdot \delta'(x) dx \\ &= 2 \int_0^{2\pi} dx \end{aligned}$$

$$= 4\pi$$

$$\neq \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

Ahora, si hacemos $\alpha(y) = \sigma(2\pi, y) = (2 - y, 0, 0)$ y $\beta(y) = \sigma(0, y) = (2 + y, 0, 0)$, con $y \in [-1, 1]$, entonces $\tilde{\gamma} = \zeta + \alpha + (-\delta) + (-\beta)$ es una parametrización de $\partial_\sigma S$ (como la que se toma en el Teorema de Stokes) de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d\tilde{\gamma} &= \int_{\partial_\sigma S} F \cdot d(\zeta + \alpha + (-\delta) + (-\beta)) \\ &= \int_0^{2\pi} F(\zeta(x)) \cdot \zeta'(x) dx + \int_{-1}^1 F(\alpha(y)) \cdot \alpha'(y) dy - \int_0^{2\pi} F(\delta(x)) \cdot \delta'(x) dx - \int_{-1}^1 F(\beta(y)) \cdot \beta'(y) dy \\ &= 2\pi + \int_{-1}^1 \left(0, \frac{1}{2-y}, 0\right) \cdot (-1, 0, 0) dy - 2\pi - \int_{-1}^1 \left(0, \frac{1}{2+y}, 0\right) \cdot (1, 0, 0) dy \\ &= 2\pi + \int_{-1}^1 0 dy - 2\pi - \int_{-1}^1 0 dy \\ &= 0 \\ &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \end{aligned}$$

con lo que nuevamente comprobamos la conclusión de dicho teorema.

Finalmente, en el siguiente ejemplo tomaremos una superficie orientable S y σ una parametrización simple de S , y verificaremos que en ese caso sí se cumple que $\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$, en donde γ es una parametrización que recorre a ∂S en el sentido de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apuntan los vectores normales a S inducidos por σ .

Ejemplo 4.19 Sean, $S \subset \mathbb{R}^3$ la semiesfera de radio 1 parametrizada por la función $\sigma : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi/2] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))$, y $F(x, y, z) = (y, -x, xy)$ para toda $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Muestre que

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

en donde γ es una parametrización que recorre a ∂S en el sentido de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apuntan los vectores normales a S inducidos por σ .

Solución. Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) &= (-\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(x) \operatorname{sen}(y), 0) \times (\cos(x) \cos(y), \operatorname{sen}(x) \cos(y), -\operatorname{sen}(y)) \\ &= -\operatorname{sen}(y)(\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y)) \end{aligned}$$

por lo que los vectores normales a S inducidos por σ apuntan hacia adentro de la semiesfera.

Por otra parte

$$\mathbf{Rot}F(x, y, z) = (x, -y, -2)$$

Así,

$$\begin{aligned}
\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma &= \int_A \mathbf{Rot} F(\sigma(x, y)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x, y) \times \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x, y) \\
&= \int_A (\cos(x) \operatorname{sen}(y), -\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), -2) \cdot (-\operatorname{sen}(y) (\cos(x) \operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), \cos(y))) \\
&= \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} -\operatorname{sen}(y) \left[(\cos(x) \operatorname{sen}(y))^2 - (\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y))^2 - 2 \cos(y) \right] \\
&= - \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} \operatorname{sen}^3(y) \cos(2x) + \int_{[0, 2\pi] \times [0, \pi/2]} 2 \operatorname{sen}(y) \cos(y) \\
&= - \left(\int_0^{2\pi} \cos(2x) dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3(y) dy \right) + 2\pi \int_0^{\pi/2} 2 \operatorname{sen}(y) \cos(y) dy \\
&= -0 + 2\pi \left(\operatorname{sen}^2(y) \Big|_0^{\pi/2} \right) \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Ahora, dado que ∂S es la circunferencia unitaria contenida en el plano $z = 0$ con centro en el origen, y dado que los vectores normales a S inducidos por σ apuntan hacia adentro de la semiesfera, definimos $\gamma(t) = (\cos(t), -\operatorname{sen}(t), 0)$ de modo que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), -2) \cdot (-\operatorname{sen}(t), -\cos(t), 0) dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi \\
&= \int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma
\end{aligned}$$

que es lo que deseábamos mostrar.

En el capítulo tres formulamos una versión más general del Teorema de Green la cual consistía en considerar campos definidos sobre regiones cuyo borde estaba formado por más de una curva (teorema 3.32). Para el caso del Teorema de Stokes, la situación equivalente consistirá en considerar una superficie S parametrizada por una función σ definida sobre una región $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que el borde (o frontera) de A (∂A) esté formada por más de una curva. En este caso es muy probable que la curva ∂S también esté formada por más de una curva, aunque esto ya podía suceder aun y cuando ∂A estuviera formada de una sola curva (como en el caso en que S es un cilindro).

Así, la generalización del Teorema de Stokes queda formulada de la siguiente manera y su prueba, por las mismas razones que en el caso de la generalización del Teorema de Green, tampoco la daremos.

Teorema 4.20 (de Stokes (versión general)) Sean, $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, y $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U . Si $\partial A = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$, con $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ curvas cerradas simples y Γ_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto), entonces

$$\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = \int_{\tilde{\Gamma}_0} F \cdot d\tilde{\gamma}_0 + \int_{\tilde{\Gamma}_1} F \cdot d\tilde{\gamma}_1 + \dots + \int_{\tilde{\Gamma}_k} F \cdot d\tilde{\gamma}_k$$

en donde $\tilde{\Gamma}_i = \sigma(\Gamma_i)$, $\tilde{\gamma}_i = \sigma \circ \gamma_i$ y γ_i una parametrización de Γ_i que la recorre una vez, en el sentido de las manecillas del reloj para $i = 1, \dots, k$ y γ_0 en el contrario (ver figura 4.21).

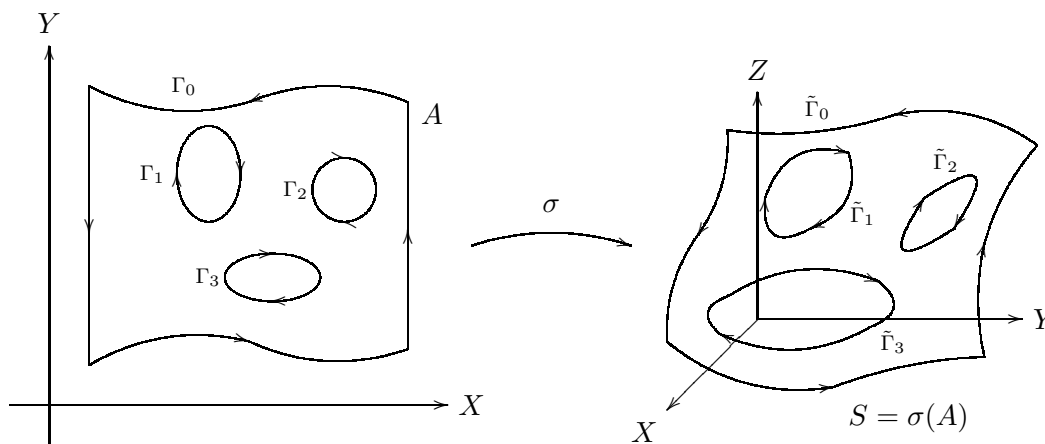


Figura 4.21: Ejemplo de superficie $S = \sigma(A)$ sobre la que se aplica la versión general del Teorema de Stokes

Como sucede en el caso del Teorema de Green, en la mayoría de los problemas en los que se puede aplicar la versión anterior del Teorema de Stokes, también se pueden resolver adaptándolos a una aplicación de la versión más sencilla.

Entre las consecuencias importantes del Teorema de Stokes está la de poder generalizar la identidad 3.30 del capítulo tres, en la que se establece que

$$\mathbf{Rot} F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)}$$

en donde R_r representa un cuadrado centrado en el punto \hat{x}_0 contenido en un plano P , \hat{n} es un vector unitario normal al mismo plano P , y $\Gamma_r = \partial R_r$.

Como anunciamos en ese mismo capítulo, la identidad anterior se generaliza de la siguiente manera.

Proposición 4.21 Sean, $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 tal que $\sigma(A) \subset U$, y $(u_0, v_0) \in \text{int}(A)$ tal que

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \hat{0}$$

Sea también $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de subconjuntos conexos de A tal que:

1. $(u_0, v_0) \in \text{int}(A_\varepsilon)$
2. $\Gamma_\varepsilon = \partial A_\varepsilon$ es una curva cerrada simple, y
3. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(A_\varepsilon) = 0$

Si S_ε es la superficie parametrizada por $\sigma|_{A_\varepsilon}$ (para cada $0 < \varepsilon < c$) entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} = \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n}$$

en donde: $\tilde{\gamma}_\varepsilon = \sigma \circ \gamma_\varepsilon$ y γ_ε es una parametrización de la curva Γ_ε que la recorre una vez y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (para cada $0 < \varepsilon < c$); $\hat{x}_0 = \sigma(u_0, v_0)$ y

$$\hat{n} = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|}$$

Dem. Por el teorema de Stokes tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon &= \int_{S_\varepsilon} \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= \int_{A_\varepsilon} \mathbf{Rot}F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

y por el Teorema del Valor Promedio

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} &= \frac{\int_{A_\varepsilon} \mathbf{Rot}F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)}{\int_{A_\varepsilon} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v) \right\|} \\ &= \frac{\left(\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_\varepsilon)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\hat{\xi}_\varepsilon) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \text{área}(A_\varepsilon)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\hat{\eta}_\varepsilon) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\hat{\eta}_\varepsilon) \right\| \text{área}(A_\varepsilon)} \\ &= \frac{\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_\varepsilon)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\hat{\xi}_\varepsilon) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\hat{\xi}_\varepsilon)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\hat{\eta}_\varepsilon) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\hat{\eta}_\varepsilon) \right\|} \end{aligned}$$

en donde $\hat{\xi}_\varepsilon, \hat{\eta}_\varepsilon \in A_\varepsilon$ para cada $0 < \varepsilon < c$.

Por otra parte, como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(A_\varepsilon) = 0$, se tiene que $\hat{\xi}_\varepsilon, \hat{\eta}_\varepsilon \rightarrow (u_0, v_0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, y como F y σ son de clase C^1 , entonces

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbf{Rot}F(\sigma(\hat{\xi}_\varepsilon)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\hat{\xi}_\varepsilon) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\hat{\xi}_\varepsilon)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(\hat{\eta}_\varepsilon) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(\hat{\eta}_\varepsilon) \right\|} \\ &= \frac{\mathbf{Rot}F(\sigma(u_0, v_0)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \\ &= \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \left(\frac{\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \right\|} \right) \\ &= \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n} \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

4.4.1 El rotacional en coordenadas esféricas

Una aplicación importante de la proposición 4.21 es la que nos permite obtener una expresión para el rotacional de un campo F cuando éste está dado en términos de coordenadas distintas a las cartesianas. En la sección cinco del capítulo tres ya discutimos lo que significa que un campo $F = (F_r, F_\theta)$ esté dado en términos de las coordenadas polares (r, θ) y lo que representa la pareja (F_r, F_θ) . En breves palabras, esto significa que F_r y F_θ son funciones (de valores reales) de las variables r y θ , y si $\hat{x} \neq \hat{0}$ es un punto del plano que tiene coordenadas polares (r, θ) , entonces $(F_r(r, \theta), F_\theta(r, \theta))$ representan las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en el sistema cartesiano ubicado en el punto \hat{x} , $\hat{e}_r(\hat{x}) = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ y $\hat{e}_\theta(\hat{x}) = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$ (ver figura 3.37 del capítulo 3).

De forma análoga, decir que un campo $F = (F_r, F_\theta, F_z)$ (definido en alguna región del espacio) está dado en términos de coordenadas cilíndricas, significará que F_r, F_θ y F_z son funciones (de valores reales) de las variables r, θ y z , y si \hat{x} es un punto del espacio que tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , entonces $(F_r(r, \theta, z), F_\theta(r, \theta, z), F_z(r, \theta, z))$ representará las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en un cierto sistema cartesiano ubicado en el punto \hat{x} . En este caso, este sistema cartesiano es el formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x}) = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, $\hat{e}_\theta(\hat{x}) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$ y $\hat{e}_z(\hat{x}) = (0, 0, 1)$, en donde estos vectores están expresados en términos de sus coordenadas en el sistema cartesiano XYZ asociado al sistema cilíndrico $r\theta z$ (ver figura 4.22). Lo anterior significa que, para cada \hat{x} en el dominio del campo F , se tiene que

$$F(\hat{x}) = F_r(\hat{x})\hat{e}_r(\hat{x}) + F_\theta(\hat{x})\hat{e}_\theta(\hat{x}) + F_z(\hat{x})\hat{e}_z(\hat{x})$$

Observe que los vectores $\hat{e}_r(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_z(\hat{x})$ sólo están bien definidos si \hat{x} es un punto que no pertenece al eje Z , en virtud de lo cual sólo se considerarán campos definidos en regiones $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$.

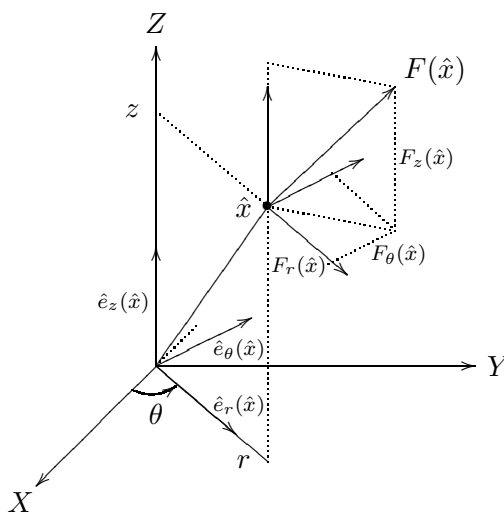


Figura 4.22: Si \hat{x} es un punto del dominio de un campo $F = (F_r, F_\theta, F_z)$, y tiene coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , entonces la terna $(F_r(r, \theta, z), F_\theta(r, \theta, z), F_z(r, \theta, z))$ representa a las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en el sistema cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_r(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_z(\hat{x})$

Análogamente, decir que un campo $F = (F_\rho, F_\theta, F_\varphi)$ está dado en términos de coordenadas esféricas, significará que F_ρ, F_θ y F_φ son funciones (de valores reales) de las variables ρ, θ y

φ , y si \hat{x} es un punto del espacio que tiene coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , entonces la terna $(F_\rho(\rho, \theta, \varphi), F_\theta(\rho, \theta, \varphi), F_\varphi(\rho, \theta, \varphi))$ representará las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en un cierto sistema cartesiano ubicado en el punto \hat{x} . En este caso, este sistema cartesiano es el formado por los vectores

$$\begin{aligned}\hat{e}_\rho(\hat{x}) &= (\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \\ \hat{e}_\theta(\hat{x}) &= (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta), 0) \\ \hat{e}_\varphi(\hat{x}) &= (\cos(\theta) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))\end{aligned}$$

en donde estos vectores están expresados en términos de sus coordenadas en el sistema cartesiano XYZ asociado al sistema esférico $\rho\theta\varphi$ (ver figura 4.23). Es decir,

$$F(\hat{x}) = F_\rho(\hat{x})\hat{e}_\rho(\hat{x}) + F_\theta(\hat{x})\hat{e}_\theta(\hat{x}) + F_\varphi(\hat{x})\hat{e}_\varphi(\hat{x}) \quad (4.13)$$

Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, estos vectores también sólo están bien definidos si \hat{x} es un punto que no pertenece al eje Z , en virtud de lo cual en este caso también sólo se considerarán campos definidos en regiones $U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$.

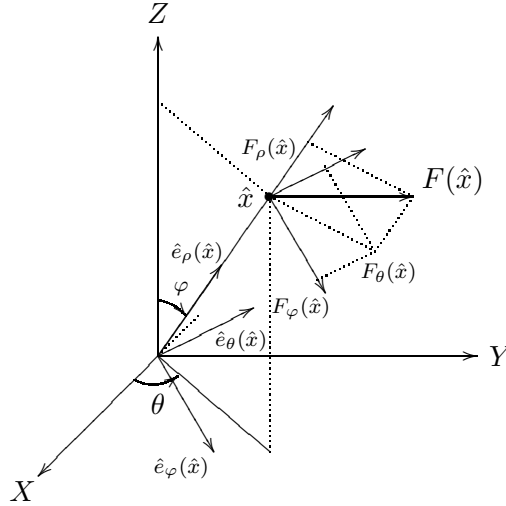


Figura 4.23: Si \hat{x} es un punto del dominio de un campo $F = (F_\rho, F_\theta, F_\varphi)$, y tiene coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) , entonces la terna $(F_\rho(\rho, \theta, \varphi), F_\theta(\rho, \theta, \varphi), F_\varphi(\rho, \theta, \varphi))$ representa a las coordenadas del valor del campo F en \hat{x} ($F(\hat{x})$) en el sistema cartesiano formado por los vectores $\hat{e}_\rho(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_\varphi(\hat{x})$

A diferencia del caso cartesiano en el que el valor $F(\hat{x})$ del campo siempre está expresado en términos de los vectores canónicos (tanto en el plano como en el espacio), cuando el campo F está dado en términos de otras coordenadas, el valor $F(\hat{x})$ se expresa en un sistema cartesiano que va cambiando con el punto \hat{x} (lo que explica la notación que empleamos).

Para ilustrar el uso de la última proposición que demostramos, mostraremos cómo encontrar una expresión para el rotacional de un campo $F = (F_\rho, F_\theta, F_\varphi) : U \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 que está dado en términos de coordenadas esféricas. Ya que el $\mathbf{Rot}F(\hat{x})$ en este caso es un vector, para conocer a dicho vector basta con saber sus coordenadas en algún sistema cartesiano, y justo el sistema coordinado formado por los vectores $\hat{e}_\rho(\hat{x}), \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\hat{e}_\varphi(\hat{x})$ resulta ser el más indicado. De esta forma, nuestro objetivo es calcular $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\rho(\hat{x})$, $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x})$ y $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\varphi(\hat{x})$.

Sean, $\hat{x}_0 \in U$ un punto con coordenadas esféricas $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$. Calcularemos $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\rho(\hat{x}_0)$. Definimos $\sigma : (-\infty, \infty) \times (0, \pi) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ como

$$\sigma(\theta, \varphi) = \rho_0(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \quad (4.14)$$

Observe que $\sigma(\theta_0, \varphi_0) = \hat{x}_0$ y que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) &= \rho_0^2(-\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), 0) \times (\cos(\theta) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi)) \\ &= -\rho_0^2 \operatorname{sen}(\varphi)(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi)) \\ &= -\rho_0^2 \operatorname{sen}(\varphi) \hat{e}_\rho(\sigma(\theta, \varphi)) \end{aligned}$$

de tal forma que, como $0 < \varphi_0 < \pi$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta_0, \varphi_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta_0, \varphi_0)}{\left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta_0, \varphi_0) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta_0, \varphi_0) \right\|} &= -\hat{e}_\rho(\sigma(\theta_0, \varphi_0)) \\ &= -\hat{e}_\rho(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $A_\varepsilon = [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \times [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{R}^2$. Nótese que existe $c > 0$ tal que $S_\varepsilon = \sigma(A_\varepsilon) \subset U$ para toda $0 < \varepsilon < c$, y que la familia $\{A_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ satisface todas las condiciones de la proposición 4.21 (ver figura 4.24).

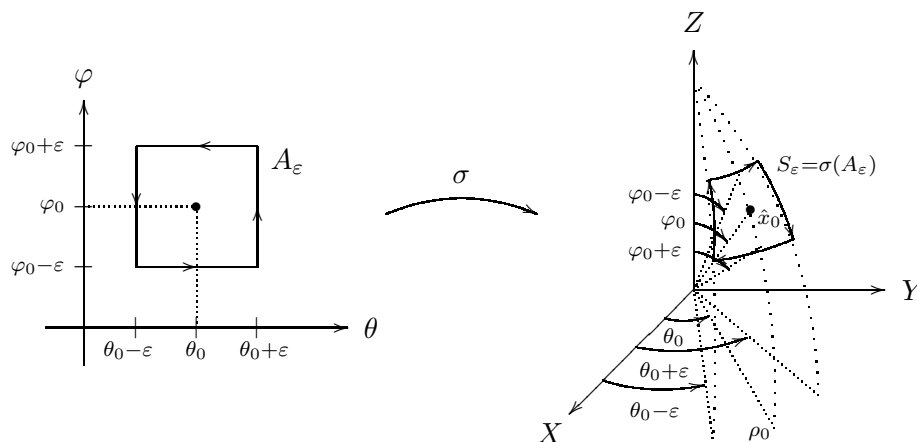


Figura 4.24: La familia $\{A_\varepsilon = \sigma(A_\varepsilon)\}_{0 < \varepsilon < c}$ con $\sigma(\theta, \varphi) = \rho_0(\cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \cos(\varphi))$ y $(\theta, \varphi) \in A_\varepsilon = [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon] \times [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$, satisface todas las condiciones de la proposición 4.21

Por lo tanto, sabemos que

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot (-\hat{e}_\rho(\hat{x}_0)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)}$$

Si recordamos que $\partial_\sigma S_\varepsilon = \sigma(\partial A_\varepsilon)$ y que $\tilde{\gamma}_\varepsilon = \sigma \circ \gamma_\varepsilon$, donde γ_ε es una parametrización del ∂A_ε que lo recorre una vez y en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, tenemos que

$$\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon = \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon)) \cdot (\rho_0(-\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon), \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon), 0)) d\theta$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) \cdot (\rho_0(\cos(\theta_0 + \varepsilon) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta_0 + \varepsilon) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))) d\varphi \\
& - \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)) \cdot (\rho_0(-\operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon), \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon), 0)) d\theta \\
& - \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)) \cdot (\rho_0(\cos(\theta_0 - \varepsilon) \cos(\varphi), \operatorname{sen}(\theta_0 - \varepsilon) \cos(\varphi), -\operatorname{sen}(\varphi))) d\varphi \\
& = \rho_0 \left[\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon)) \cdot (\operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) \hat{e}_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon))) d\theta \right. \\
& + \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) \cdot \hat{e}_\varphi(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) d\varphi \\
& - \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)) \cdot (\operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) \hat{e}_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon))) d\theta \\
& \left. - \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} F(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)) \cdot \hat{e}_\varphi(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)) d\varphi \right]
\end{aligned}$$

Si ahora usamos la identidad 4.13 y escribimos a los puntos $\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)$, $\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon)$, $\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)$ y $\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi)$ en términos de sus coordenadas esféricas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon & = \rho_0 \left[- \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} (\operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) F_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 + \varepsilon)) - \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) F_\theta(\sigma(\theta, \varphi_0 - \varepsilon))) d\theta \right. \\
& \left. + \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} (F_\varphi(\sigma(\theta_0 + \varepsilon, \varphi)) - F_\varphi(\sigma(\theta_0 - \varepsilon, \varphi))) d\varphi \right] \\
& = \rho_0 \left[- \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} (\operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta, \varphi_0 + \varepsilon) - \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta, \varphi_0 - \varepsilon)) d\theta \right. \\
& \left. + \int_{\varphi_0-\varepsilon}^{\varphi_0+\varepsilon} (F_\varphi(\rho_0, \theta_0 + \varepsilon, \varphi) - F_\varphi(\rho_0, \theta_0 - \varepsilon, \varphi)) d\varphi \right]
\end{aligned}$$

Ahora (y como en otras ocasiones), por el Teorema del Valor Promedio y el Teorema del Valor Medio, se obtiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon & = \rho_0 [-(2\varepsilon) (\operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon) - \operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) F_\theta(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi_0 - \varepsilon)) \\
& (2\varepsilon) (F_\varphi(\rho_0, \theta_0 + \varepsilon, \varphi_\varepsilon) - F_\varphi(\rho_0, \theta_0 - \varepsilon, \varphi_\varepsilon))]
\end{aligned}$$

$$= \rho_0(2\varepsilon)^2 \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta'_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \frac{\partial(\operatorname{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) \right)$$

en donde $\theta_\varepsilon, \theta'_\varepsilon \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$ y $\varphi_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon \in [\varphi_0 - \varepsilon, \varphi_0 + \varepsilon]$.

Por otra parte, sabemos que

$$\begin{aligned} \text{área}(S_\varepsilon) &= \int_{A_\varepsilon} \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}(\theta, \varphi) \times \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi}(\theta, \varphi) \right\| \\ &= \int_{A_\varepsilon} \left\| \rho_0^2 \operatorname{sen}(\varphi) \hat{e}_\rho(\sigma(\theta, \varphi)) \right\| \\ &= \rho_0^2 \left(\int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} d\theta \right) \left(\int_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} \operatorname{sen}(\varphi) d\varphi \right) \\ &= \rho_0^2(2\varepsilon) \left(-\cos(\varphi) \Big|_{\varphi_0 - \varepsilon}^{\varphi_0 + \varepsilon} \right) \\ &= \rho_0^2(2\varepsilon)(\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi_0 + \varepsilon)) \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\rho(\hat{x}_0) &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial_\sigma S_\varepsilon} F \cdot d\tilde{\gamma}_\varepsilon}{\text{área}(S_\varepsilon)} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho_0(2\varepsilon)^2 \left(\frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta'_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) - \frac{\partial(\operatorname{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) \right)}{\rho_0^2(2\varepsilon)(\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi_0 + \varepsilon))} \\ &= \frac{1}{\rho_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{(\cos(\varphi_0 - \varepsilon) - \cos(\varphi_0 + \varepsilon))} \left(\frac{\partial(\operatorname{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta'_\varepsilon, \varphi_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2}{(\operatorname{sen}(\varphi_0 - \varepsilon) + \operatorname{sen}(\varphi_0 + \varepsilon))} \left(\frac{\partial(\operatorname{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_\varepsilon, \varphi'_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_0 \operatorname{sen}(\varphi_0)} \left(\frac{\partial(\operatorname{sen}(\varphi)F_\theta)}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial F_\varphi}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \right) \end{aligned}$$

Para el cálculo de $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x}_0)$ y $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\varphi(\hat{x}_0)$ se sigue un procedimiento totalmente análogo. De hecho, una mirada cuidadosa a la función definida en 4.14 nos permitirá descubrir la estrecha relación que hay entre esta función σ y la función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de cambio de coordenadas esféricas a coordenadas cartesianas, dada por

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \cos(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \rho \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \rho \cos(\varphi))$$

Es decir, nótese que

$$\sigma(\theta, \varphi) = g(\rho_0, \theta, \varphi)$$

Esta última identidad debe de dar una idea de las funciones σ (y las correspondientes familias de superficies $\{S_\varepsilon\}$) que habrá que usar para mostrar que

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x}_0) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial(\rho F_\varphi)}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \right)$$

y

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{e}_\varphi(\hat{x}_0) = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}(\varphi_0)} \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) - \frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial \rho}(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) \right)$$

tarea que por supuesto, queda como un problema para el lector.

4.5 Campos solenoides (primera parte)

Como es bien sabido, toda identidad tiene dos formas de leerse: de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. En este sentido, la identidad que se prueba en el Teorema de Stokes no es la excepción. Una manera de leer esta identidad es que la integral de línea de un campo F sobre el borde de una superficie S se puede “cambiar” por la integral de superficie sobre S del rotacional de F , es decir

$$\int_{\partial S} F \cdot d\gamma = \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

Leerla de esta manera es muy conveniente, sobre todo cuando se está interesado en el problema de determinar si F es un campo conservativo. Como se recordará, en el capítulo tres abordamos este problema y mencionamos que el resultado más general que se puede obtener a este respecto es aquel que asegura que, si un campo F tiene rotacional cero en una región simplemente conexa U entonces F es un campo gradiente en U . Como también mencionamos (de manera informal), una región simplemente conexa es aquella en la que toda curva cerrada $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” (sin “salirse” de U) a un punto. Si este es el caso, justo al “contraer” dicha curva a un punto, “generamos” una superficie $S \subset U$ con la propiedad de que $\partial S = \Gamma$ (ver figura 4.25). De esta forma, se tendrá que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma \\ &= \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que la integral de línea de F sobre cualquier curva cerrada $\Gamma \subset U$ vale cero, lo cual es equivalente a que F sea un campo gradiente en U . Salvo por unos cuantos “detalles”, en términos generales esta argumentación sería una buena “demostración” de ese importante resultado y en la que la identidad probada en el Teorema de Stokes (leída de esa forma) juega un papel muy relevante.

La otra forma de leer la misma identidad nos diría que la integral del rotacional de un campo F ($\mathbf{Rot}F$) sobre una superficie S , se puede “reducir” a calcular la integral de línea del campo sobre el borde de S (lectura que por cierto, nos hace recordar al Teorema Fundamental del Cálculo). Es decir,

$$\int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

Esta forma de leer la misma identidad nos conduce a plantearnos el siguiente problema: si para cualquier campo $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se pudiera encontrar un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$G(\hat{x}) = \mathbf{Rot}F(\hat{x}) \tag{4.15}$$

para toda $\hat{x} \in U$, entonces para cualquier superficie $S \subset U$ se tendría que

$$\int_S G \cdot d\sigma = \int_S \mathbf{Rot}F \cdot d\sigma$$

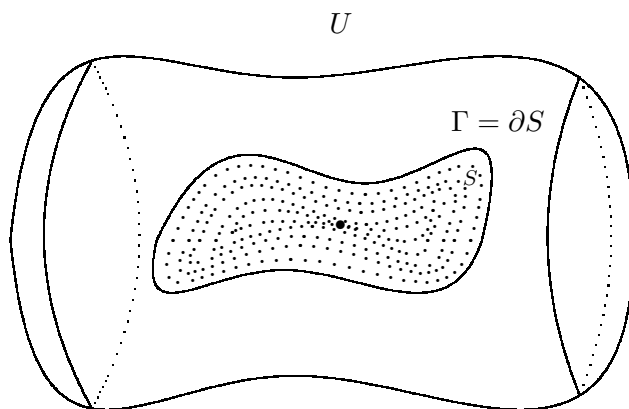


Figura 4.25: Una región $U \subset \mathbb{R}^3$ no tiene “hoyos” si cualquier curva cerrada simple $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” a un punto de U sin “salirnos” de U . En este proceso se “genera” una superficie $S \subset U$ con la propiedad de que $\partial S = \Gamma$

$$= \int_{\partial S} F \cdot d\gamma$$

lo que significaría que cualquier integral de superficie de un campo G se podría reducir a una integral de línea de un campo F que cumpliera la identidad 4.15.

Como es de suponerse, aquí la pregunta importante es si es verdad que para cualquier campo $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ se puede encontrar un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que satisfaga la condición 4.15. Lo más interesante de todo este problema es que a estas alturas ya contamos con un ejemplo (y los resultados necesarios) para mostrar que esto no siempre es cierto.

Ejemplo 4.22 Considerese el campo $G : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido como

$$G(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

Muestre que no existe $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $G(\hat{x}) = \mathbf{Rot} F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$.

Solución. En el ejemplo 4.13 probamos que si S es la esfera de radio $r > 0$ con centro en el origen (de modo que $S \subset U$) parametrizada por la función $\sigma(x, y) = (r \cos(x) \operatorname{sen}(y), r \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y), r \cos(y))$ con $(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, entonces

$$\int_S G \cdot d\sigma = -4\pi$$

Por otra parte, si existiera un campo $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que cumpliera la condición 4.15, por el primer inciso del problema 24 se tendría que

$$\begin{aligned} \int_S G \cdot d\sigma &= \int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual contradice la identidad anterior y por lo tanto podemos concluir que no existe este campo F (¡definido en U !).

A un campo que cumple la condición 4.15 se le conoce con el nombre de *campo solenoide*⁷, lo cual establecemos en la siguiente

Definición 4.23 Sea $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ continua en la región U . Decimos que G es un campo solenoide en U si existe $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U tal que

$$G(\hat{x}) = \mathbf{Rot}F(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in U$.

Encontrar condiciones necesarias y suficientes que nos garanticen cuándo un campo es solenoide será un problema que abordaremos de manera análogo a como lo hicimos para los campos conservativos. Así como el concepto de rotacional y el Teorema de Green jugaron un papel muy importante para encontrar condiciones necesarias y suficientes que nos garantizaran cuándo un campo era conservativo, para el caso de los campos solenoide desarrollaremos el concepto de divergencia (para campos en el espacio) y probaremos un teorema muy importante relacionado con este concepto: el Teorema de Gauss⁸.

4.6 Divergencia y teorema de Gauss

Como se recordará, en la sección tres de este capítulo introdujimos el concepto de integral de superficie de un campo vectorial en el espacio, por medio del problema equivalente (en el espacio) al que usamos en el capítulo tres para motivar el concepto de divergencia (en el plano). En este caso, se supuso que $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representaba el campo de velocidades de un fluido y nuestro objetivo fue encontrar una forma de “medir” qué tanto se “expande” este fluido a través de una superficie $S \subset U$. De esta forma, la integral de superficie $\int_S F \cdot d\sigma$ se puede interpretar como una medida (dada en términos de un volumen) de qué tanto se “expande” este fluido a través de una superficie S en la dirección en que apuntan los vectores normales a S inducidos por la parametrización σ .

Ahora, si en particular tomamos E_r igual a la esfera (sólida) de radio $r > 0$ con centro en un punto $\hat{x}_0 \in U$, $S_r = Fr(E_r)$ y σ_r una parametrización que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de S_r , entonces la integral $\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r$ se puede interpretar como una medida de qué tanto se “expande” nuestro fluido alrededor del punto \hat{x}_0 y además el signo de dicha integral tiene la siguiente interpretación: si es positivo, significa que la “expansión hacia afuera” de la esfera fue

⁷De acuerdo con la Wikipedia: un “solenoides es un alambre aislado enrollado en forma de hélice (bobina) o n número de espiras con un paso acorde a las necesidades, por el que circula una corriente eléctrica. Cuando esto sucede, se genera un campo magnético dentro del solenoide. El solenoide con un núcleo apropiado se convierte en un imán (en realidad electroimán). Este tipo de bobinas o solenoides es utilizado para accionar un tipo de válvula, llamada válvula solenoide, que responde a pulsos eléctricos respecto de su apertura y cierre. Eventualmente controlable por programa, su aplicación más recurrente en la actualidad, tiene relación con sistemas de regulación hidráulica y neumática.”

⁸Johann Carl Friedrich Gauss (30 de abril de 1777-23 de febrero de 1855), fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Conocido como “el príncipe de las matemáticas” y “el matemático más grande desde la antigüedad”, Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos cuyo trabajo ha tenido más relevancia en la historia.

Gauss fue un niño prodigio de quien existen muchas anécdotas acerca de su asombrosa precocidad siendo apenas un infante, e hizo sus primeros grandes descubrimientos mientras era apenas un adolescente. Completó su magnum opus, *Disquisitiones Arithmeticae* a los veintiún años (1798), aunque no sería publicado hasta 1801. Un trabajo que fue fundamental para que la teoría de los números se consolidara y ha moldeado esta área hasta los días presentes. (fuente: Wikipedia)

mayor que la “expansión hacia adentro”, mientras que si es negativo, significa que la “expansión hacia adentro” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia afuera” (ver figura 4.26).

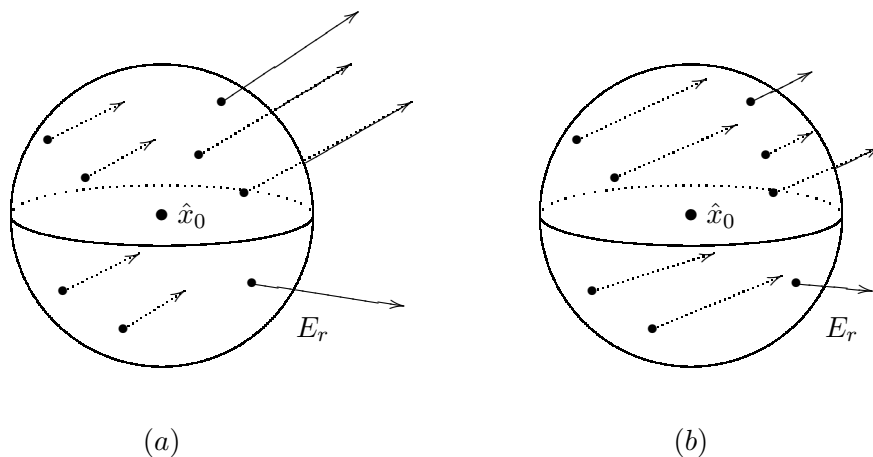


Figura 4.26: La integral de un campo F sobre la esfera $S_r = Fr(E_r)$ ($\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r$) se puede interpretar como una medida de qué tanto se “expande” nuestro fluido alrededor del punto \hat{x}_0 y además el signo de dicha integral tiene la siguiente interpretación: si es positivo, significa que la “expansión hacia afuera” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia adentro” (figura (a)), mientras que si es negativo, significa que la “expansión hacia adentro” de la esfera fue mayor que la “expansión hacia afuera” (figura (b))

Una vez hecho lo anterior, tenemos entonces que la integral $\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r$ es una medida de la “expansión” (dada en términos de un volumen) producida por el campo de velocidades F a través de la esfera E_r , de tal forma que el cociente

$$\frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(E_r)} = \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{(4/3)\pi r^3}$$

se puede interpretar como la “expansión” promedio producida por F a través de la esfera de radio r con centro en \hat{x}_0 . Como seguramente se sospecha, si el cociente de arriba tiene límite cuando $r \rightarrow 0$, a este valor límite lo llamaremos la “expansión” producida por F en el punto \hat{x}_0 .

A estas alturas el lector seguramente ya intuye (o se imagina) que en la discusión anterior es irrelevante el hecho de que S_r sea una esfera y que ésta se puede cambiar por cualquier otro tipo de superficie “cerrada”, centrada en el punto $\hat{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y que tenga la particularidad de “colapsarse” en este punto cuando $r \rightarrow 0$. De hecho, lo siguiente que vamos a demostrar es que si en particular $S_r = Fr(R_r)$, en donde

$$R_r = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset U$$

y cada “cara” de S_r la parametrizamos de tal forma que los vectores normales inducidos apunten hacia “afuera” de R_r , entonces el

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)}$$

existe si $F = (P, Q, R)$ es de clase C^1 en U , y además

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0)$$

Proposición 4.24 Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , y $c > 0$ tal que

$$R_r = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \times [z_0 - r, z_0 + r] \subset U$$

para toda $0 < r < c$. Si $S_r = Fr(R_r)$ y σ_r es una parametrización simple de S_r tal que los vectores normales inducidos en cada una de las “caras” apuntan hacia “afuera” de R_r , entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0)$$

Dem. Sean $\sigma_1(u, v) = \hat{x}_0 + (u, v, r)$, $\sigma_2(u, v) = \hat{x}_0 + (u, v, -r)$, $\sigma_3(u, v) = \hat{x}_0 + (u, r, v)$, $\sigma_4(u, v) = \hat{x}_0 + (u, -r, v)$, $\sigma_5(u, v) = \hat{x}_0 + (r, u, v)$ y $\sigma_6(u, v) = \hat{x}_0 + (-r, u, v)$, con $(u, v) \in A_r = [-r, r] \times [-r, r]$. Entonces $\sigma_r = \sigma_1 + (-\sigma_2) + \sigma_3 + (-\sigma_4) + \sigma_5 + (-\sigma_6)$ cumple con las condiciones requeridas y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{S_r} F \cdot d\sigma_r &= \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 - \int_{S_2} F \cdot d\sigma_2 + \int_{S_3} F \cdot d\sigma_3 - \int_{S_4} F \cdot d\sigma_4 + \int_{S_5} F \cdot d\sigma_5 - \int_{S_6} F \cdot d\sigma_6 \\ &= \int_{A_r} F(\sigma_1(u, v)) \cdot (0, 0, 1) - \int_{A_r} F(\sigma_2(u, v)) \cdot (0, 0, 1) + \int_{A_r} F(\sigma_3(u, v)) \cdot (0, 1, 0) \\ &\quad - \int_{A_r} F(\sigma_4(u, v)) \cdot (0, 1, 0) + \int_{A_r} F(\sigma_5(u, v)) \cdot (1, 0, 0) - \int_{A_r} F(\sigma_6(u, v)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= \int_{A_r} (R(x_0 + u, y_0 + v, z_0 + r) - R(x_0 + u, y_0 + v, z_0 - r)) \\ &\quad + \int_{A_r} (Q(x_0 + u, y_0 + r, z_0 + v) - Q(x_0 + u, y_0 - r, z_0 + v)) \\ &\quad + \int_{A_r} (P(x_0 + r, y_0 + u, z_0 + v) - P(x_0 - r, y_0 + u, z_0 + v)) \end{aligned}$$

de tal forma que, como en múltiples ocasiones hemos argumentado, por el Teorema de Valor Promedio y el Teorema del Valor Medio, se tiene que existen

$$\xi_{1,r}, \eta_{1,r}, \zeta_{1,r}, \xi_{2,r}, \eta_{2,r}, \zeta_{2,r}, \xi_{3,r}, \eta_{3,r}, \zeta_{3,r} \in [-r, r]$$

tales que

$$\begin{aligned} \int_{S_r} F \cdot d\sigma_r &= (P(x_0 + r, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r}) - P(x_0 - r, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r})) \text{área}(A_r) \\ &\quad + (Q(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + r, z_0 + \eta_{2,r}) - Q(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 - r, z_0 + \eta_{2,r})) \text{área}(A_r) \\ &\quad + (R(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + r) - R(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 - r)) \text{área}(A_r) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \zeta_{1,r}, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r})(2r) \text{área}(A_r) \\ &\quad + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + \zeta_{2,r}, z_0 + \eta_{2,r})(2r) \text{área}(A_r) \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + \zeta_{3,r})(2r) \text{área}(A_r) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} &= \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \zeta_{1,r}, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + \zeta_{2,r}, z_0 + \eta_{2,r}) \\ &\quad + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + \zeta_{3,r}) \end{aligned}$$

Ahora, como F es de clase C^1 y $\xi_{1,r}, \eta_{1,r}, \zeta_{1,r}, \xi_{2,r}, \eta_{2,r}, \zeta_{2,r}, \xi_{3,r}, \eta_{3,r}, \zeta_{3,r}$ tienden a cero cuando $r \rightarrow 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{S_r} F \cdot d\sigma_r}{\text{volumen}(R_r)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + \zeta_{1,r}, y_0 + \xi_{1,r}, z_0 + \eta_{1,r}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + \xi_{2,r}, y_0 + \zeta_{2,r}, z_0 + \eta_{2,r}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial R}{\partial z}(x_0 + \xi_{3,r}, y_0 + \eta_{3,r}, z_0 + \zeta_{3,r}) \right] \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Como el lector seguramente intuirá, el resultado anterior sirve como base para definir el concepto de *divergencia* de un campo $F = (P, Q, R)$ de la siguiente manera.

Definición 4.25 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x})$, $\frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x})$ y $\frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x})$ existen para cada $\hat{x} \in U$. Definimos la *divergencia* de F en $\hat{x} \in U$, que denotamos por $\text{div } F(\hat{x})$, como

$$\text{div } F(\hat{x}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x})$$

A continuación, calcularemos este número para un campo específico, el cual nos será de gran utilidad más adelante.

Ejemplo 4.26 Sea $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido como

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

Calcule $\text{div } F(\hat{x})$ para cualquier $\hat{x} \in U$.

Solución. Dado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} F(x, y, z) &= \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3x^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3y^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\
 &\quad + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\
 &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} (x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\
 &= \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 3(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

para toda $(x, y, z) \in U$.

Un tipo de campos para los cuales resulta de particular interés el cálculo de su divergencia, son los campos conservativos o campos gradiente. Si $F = \nabla\varphi = (\partial\varphi/\partial x, \partial\varphi/\partial y, \partial\varphi/\partial z)$, con $\varphi : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} F &= \operatorname{div}(\nabla\varphi) \\
 &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

A esta expresión se le conoce con el nombre de el *laplaciano*⁹ de φ y se le denota como $\nabla^2\varphi$, es decir

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Cuando $\nabla^2\varphi(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$ decimos que φ es *armónica* en U .

Este campo escalar asociado al campo escalar φ es de gran relevancia y algunos resultados importantes con respecto a éste se obtienen en los problemas 26,27 y 28 de este capítulo.

Por supuesto que el concepto de divergencia también se lleva bien con las operaciones aritméticas elementales entre campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 (y de hecho, también para los de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2), lo cual dejamos expresado en la siguiente proposición y cuya prueba, como es de suponer, se deja al lector.

Proposición 4.27 Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (con $n = 2$ ó $n = 3$) tales que $\operatorname{div} F(\hat{x})$ y $\operatorname{div} G(\hat{x})$ existen para toda $\hat{x} \in U$.

1. si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\operatorname{div}(\alpha F + \beta G)(\hat{x}) = \alpha \operatorname{div} F(\hat{x}) + \beta \operatorname{div} G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$
2. si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^1 entonces $\operatorname{div}(fF)(\hat{x}) = f(\hat{x}) \operatorname{div} F(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x}) \cdot F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$

Asociado al concepto de divergencia para campos de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 existe un importante teorema, cuya formulación deduciremos a partir de la identidad probada en la proposición 4.24.

Si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo de clase C^1 , entonces la divergencia de F en cada punto \hat{x} de U define una función de valores reales (que denotamos como $\operatorname{div} F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow$

⁹Este nombre es en reconocimiento de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), físico y matemático francés, quien estudió soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en las que aparecía dicha expresión.

\mathbb{R}) la cual será continua en U y por lo tanto integrable sobre cualquier conjunto $\Omega \subset U$ que sea Jordan-medible. Supongamos que $\Omega \subset U$ es uno de estos conjuntos con la propiedad adicional de que $S = Fr(\Omega)$ es una superficie por pedazos. Si $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo tal que $\Omega \subset R$ y lo subdividimos (por medio de una partición \mathcal{P} muy fina) en subrectángulos muy pequeños, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F &\approx \sum_{i=1}^k \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot \operatorname{volumen}(R_i) \end{aligned}$$

en donde $\hat{\xi}_i \in R_i$ y R_i (con $i = 1, \dots, k$) son aquellos subrectángulos tales que $R_i \subset \Omega \cup S$.

Como podemos suponer que tanto R como los R_i son cubos, y que $\hat{\xi}_i$ es el centro de cada R_i , por la proposición 4.24, sabemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot \operatorname{volumen}(R_i) &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_i) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_i) \right) \operatorname{volumen}(R_i) \\ &\approx \int_{S_i} F \cdot d\sigma_i \end{aligned}$$

en donde $S_i = Fr(R_i)$ y σ_i es una parametrización simple de S_i que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de R_i (para cada $i = 1, \dots, k$), y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F &\approx \sum_{i=1}^k \operatorname{div} F(\hat{\xi}_i) \cdot \operatorname{volumen}(R_i) \\ &\approx \sum_{i=1}^k \int_{S_i} F \cdot d\sigma_i \end{aligned}$$

Ahora obsérvese que, dado que cada una de las integrales $\int_{S_i} F \cdot d\sigma_i$ se puede descomponer como la suma de seis integrales (sobre cada uno de las “caras” del cubo R_i), si R_i y R_j son dos cubos adyacentes, entonces en la suma

$$\int_{S_i} F \cdot d\sigma_i + \int_{S_j} F \cdot d\sigma_j$$

se cancelan justo las integrales sobre la “cara” común a ambos cubos (ya que en dichas integrales se usan vectores normales “opuestos” (ver figura 4.27 (a))) de tal forma que esta suma es igual a la integral de F sobre la frontera del rectángulo $R_i \cup R_j$ (tomando vectores normales que apuntan hacia “afuera” de $R_i \cup R_j$) (ver figura 4.27 (b)).

Si este proceso de “cancelación” de integrales sobre “caras” adyacentes lo hacemos para todos los R_i , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{S_i} F \cdot d\sigma_i = \int_{\tilde{S}} F \cdot d\tilde{\sigma}$$

en donde $\tilde{S} = Fr(\cup_{i=1}^k R_i)$ es una superficie “poliédrica” de “caras” paralelas a los planos coordenados (ver figura 4.28 (a)) y $\tilde{\sigma}$ es una parametrización simple de ésta que induce vectores normales

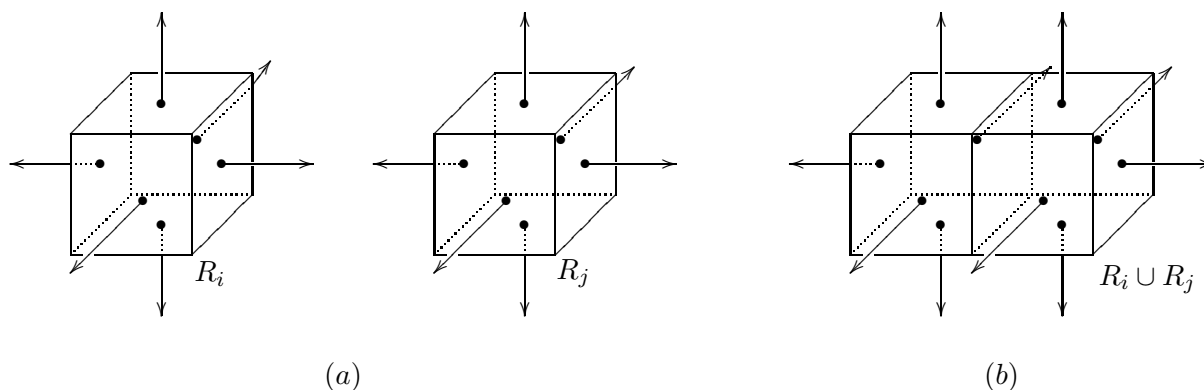


Figura 4.27: Si los cubos R_i y R_j son adyacentes, al sumar las integrales de un campo F sobre la frontera de cada uno de ellos, las correspondientes integrales sobre la “cara” común a ambos cubos se cancelan (ya que en dichas integrales se usan vectores normales “opuestos” (figura (a))), de tal forma que la suma es igual a la integral de F sobre la frontera del rectángulo $R_i \cup R_j$ (figura (b))

que apuntan hacia “afuera” de $\cup_{i=1}^k R_i$. Lo mejor de todo esto es que, si los cubos R_i son muy pequeños (es decir, la partición \mathcal{P} es muy fina) entonces $\tilde{S} \approx S = Fr(\Omega)$ (ver figura 4.28 (b)) y por lo tanto se debe tener que

$$\int_{\tilde{S}} F \cdot d\tilde{\sigma} \approx \int_S F \cdot d\sigma$$

en donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

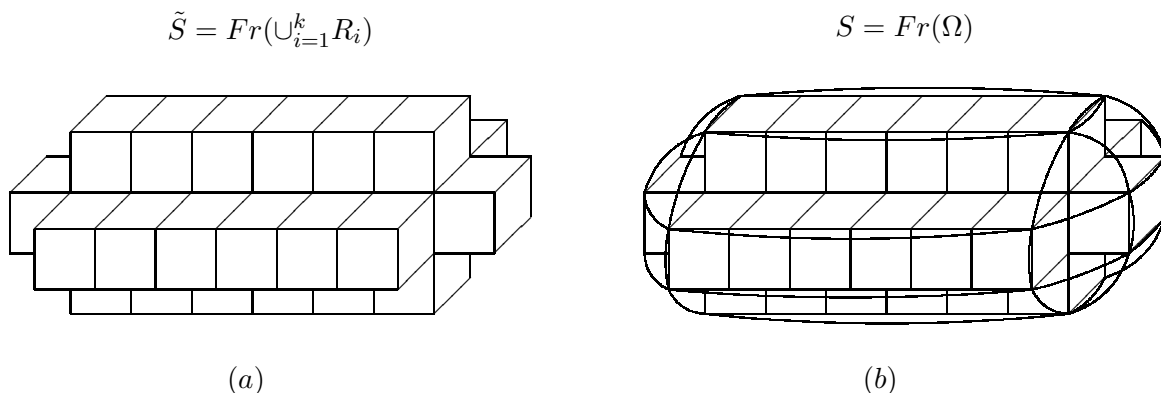


Figura 4.28: $\tilde{S} = Fr(\cup_{i=1}^k R_i)$ es una superficie “poliédrica” de “caras” paralelas a los planos coordenados (figura (a)) y si los cubos R_i son muy pequeños entonces $\tilde{S} \approx S = Fr(\Omega)$ (figura (b))

Todas estas identidades y aproximaciones sugieren que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \int_{S=Fr(\Omega)} F \cdot d\sigma$$

¡y esto es justo lo que asegura el Teorema de Gauss!

Formularemos el Teorema de Gauss en los mismos términos en que acabamos de deducirlo, aun cuando la prueba sólo la haremos para cierto tipo de regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Teorema 4.28 (de Gauss) Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $S = Fr(\Omega) = \partial\Omega$ es una superficie por pedazos y $\Omega \cup S \subset U$. Entonces

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) = \int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma$$

donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

Dem. Haremos la prueba para aquellas regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que sean tipo I, tipo II y tipo III, simultáneamente. Dado que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \end{aligned}$$

calcularemos cada una de estas integrales por separado.

Como estamos suponiendo que Ω se puede expresar como una región tipo III, sabemos que existe $A \subset \mathbb{R}^2$ (Jordan-medible) y $\alpha, \beta : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en A , tales que

$$\Omega = \{(t, u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid (u, v) \in A, \alpha(u, v) \leq t \leq \beta(u, v)\}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} &= \int_A \left(\int_{\alpha(u,v)}^{\beta(u,v)} \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) \\ &= \int_A (P(\beta(u, v), u, v) - P(\alpha(u, v), u, v)) \end{aligned}$$

Por otra parte, obsérvese que cuando Ω se describe de esta forma, se tiene que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ en donde S_1 y S_3 son las gráficas (sobre A) de las funciones α y β , respectivamente, y S_2 es una superficie “cilíndrica” (que sigue al borde de A) perpendicular al plano YZ (ver figura 4.29).

De esta manera se tiene que, si $\sigma_1(u, v) = (\alpha(u, v), u, v)$, $\sigma_3(u, v) = (\beta(u, v), u, v)$ con $(u, v) \in A$, entonces σ_1 y σ_3 son parametrizaciones simples de S_1 y S_3 , respectivamente, tales que los vectores normales que inducen están dados por

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma_1}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}(u, v), 1, 0 \right) \times \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}(u, v), 0, 1 \right)$$

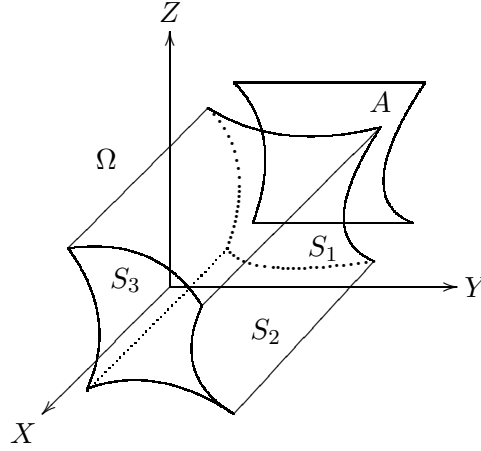


Figura 4.29: Cuando $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ se describe como una región tipo III, se tiene que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, en donde S_1 y S_3 son las gráficas (sobre A) de dos funciones α y β , respectivamente, y S_2 es una superficie “cilíndrica” (que sigue al borde de A) perpendicular al plano YZ

$$= \left(1, -\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u, v) \right)$$

que apuntan hacia “adentro” de Ω , y

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_3}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma_3}{\partial v}(u, v) &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial u}(u, v), 1, 0 \right) \times \left(\frac{\partial\beta}{\partial v}(u, v), 0, 1 \right) \\ &= \left(1, -\frac{\partial\beta}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial\beta}{\partial v}(u, v) \right) \end{aligned}$$

que apuntan hacia “afuera” de Ω .

Ahora, si σ_2 es una parametrización simple de S_2 , dado que esta superficie es perpendicular al plano YZ , se debe tener que los vectores normales inducidos por esta parametrización (o cualquier otra) están contenidos en dicho plano, es decir, son de la forma

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma_2}{\partial v}(u, v) = (0, \cdot, \cdot)$$

Tomando estas parametrizaciones, tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \int_{S=\partial\Omega} (P, 0, 0) \cdot d\sigma &= - \int_{S_1} (P, 0, 0) \cdot d\sigma_1 + \int_{S_2} (P, 0, 0) \cdot d\sigma_2 + \int_{S_3} (P, 0, 0) \cdot d\sigma_3 \\ &= - \int_A (P(\sigma_1(u, v)), 0, 0) \cdot \left(1, -\frac{\partial\alpha}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial\alpha}{\partial v}(u, v) \right) + \int_A (P(\sigma_2(u, v)), 0, 0) \cdot (0, \cdot, \cdot) \\ &\quad + \int_A (P(\sigma_3(u, v)), 0, 0) \cdot \left(1, -\frac{\partial\beta}{\partial u}(u, v), -\frac{\partial\beta}{\partial v}(u, v) \right) \\ &= \int_A (P(\sigma_3(u, v)) - P(\sigma_1(u, v))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_A (P(\beta(u, v), u, v) - P(\alpha(u, v), u, v)) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}
 \end{aligned}$$

Si ahora usamos que Ω también es una región tipo II, por un procedimiento análogo podemos probar que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} = \int_{S=\partial\Omega} (0, Q, 0) \cdot d\sigma$$

y si usamos que Ω también es una región tipo I, probamos que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} = \int_{S=\partial\Omega} (0, 0, R) \cdot d\sigma$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\
 &= \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \\
 &= \int_{S=\partial\Omega} (P, 0, 0) \cdot d\sigma + \int_{S=\partial\Omega} (0, Q, 0) \cdot d\sigma + \int_{S=\partial\Omega} (0, 0, R) \cdot d\sigma \\
 &= \int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma
 \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

No podemos dejar de mencionar que, así como los teoremas de Green y Stokes nos hacen recordar el Teorema Fundamental del Cálculo, el Teorema de Gauss también tiene esta peculiaridad. En efecto, si recordamos la motivación que nos condujo a la definición de la divergencia de un campo F , dicho concepto se puede interpretar como una cierta “derivada”, de tal forma que integrar esta “derivada” sobre una región $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ¡se reduce a “evaluar” (de cierta forma) la función original F sobre el borde (o frontera) $S = \partial\Omega$ de la región!

Dado que el Teorema de Gauss relaciona una integral de superficie de una función de valores vectoriales con una integral de Riemann de una función de valores reales, ambas definidas en algún subconjunto del espacio, este teorema se suele usar para sustituir el cálculo de alguna de estas integrales en términos de la otra. El siguiente ejemplo muestra cómo usar el teorema de Gauss para calcular integrales de superficie.

Ejemplo 4.29 Sea $F : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right)$$

Muestre que

$$\int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma = 0$$

en donde $\Omega \subset U$ es cualquier conjunto Jordan-medible tal que su frontera (o borde $\partial\Omega = S$) es una superficie por pedazos.

Solución. Nótese que

$$\begin{aligned}\operatorname{div} F(x, y, z) &= \frac{(-2x)(-y)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{(-2y)x}{(x^2 + y^2)^2} + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

para toda $(x, y, z) \in U$. Como $\Omega \subset U$ satisface la hipótesis del teorema de Gauss, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{S=\partial\Omega} F \cdot d\sigma &= \int_{\Omega} \operatorname{div} F \\ &= 0\end{aligned}$$

El Teorema de Gauss se puede extender a regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera esté formada por varias superficies (incluyendo superficies por pedazos), como sería el caso de una región acotada entre dos esferas concéntricas. Para deducir el tipo de identidad que se obtiene en este caso, podemos recurrir al mismo procedimiento que seguimos antes: si a la región Ω la “metemos” dentro de un cubo $R \subset \mathbb{R}^3$ y a éste lo subdividimos (o lo particionamos) en cubos muy pequeños, haciendo las mismas aproximaciones, sustituciones y cancelaciones que en el caso anterior, llegaremos a la conclusión de que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \int_{S_0} F \cdot d\sigma_0 + \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 + \cdots + \int_{S_k} F \cdot d\sigma_k\end{aligned}$$

en donde S_0, S_1, \dots, S_k son las superficies tales que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$, con S_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto) y $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ parametrizaciones simples de éstas, respectivamente, que inducen vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω (ver figura 4.30).

Aun cuando formularemos esta versión más general del teorema de Gauss, no estamos en condiciones de dar una prueba “rigurosa” de ella. Sería necesario precisar algunos conceptos, como el de que S_0 es la superficie “más exterior” (o que “rodea” al resto), lo cual, nuevamente, escapa a los objetivos de este texto.

Teorema 4.30 (de Gauss (versión general)) Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$, con S_0, S_1, \dots, S_k superficies (por pedazos) y S_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto). Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \operatorname{div} F &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} F \cdot d\sigma \\ &= \int_{S_0} F \cdot d\sigma_0 + \int_{S_1} F \cdot d\sigma_1 + \cdots + \int_{S_k} F \cdot d\sigma_k\end{aligned}$$

donde $\sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ son parametrizaciones simples de S_0, S_1, \dots, S_k , que inducen vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

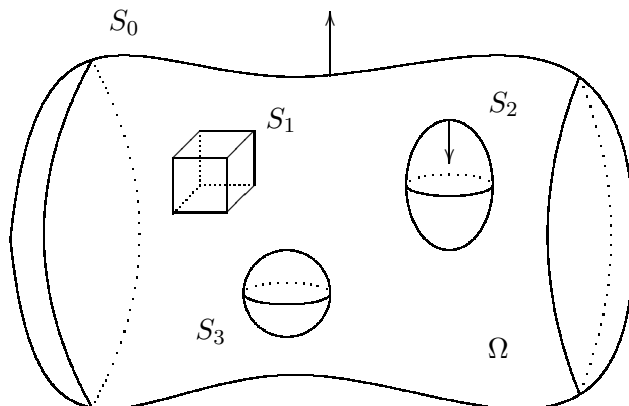


Figura 4.30: El Teorema de Gauss se puede extender a regiones $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ cuya frontera esté formada por varias superficies (suaves por pedazos). En esta figura, $Fr(\Omega) = \partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$, con S_0 “la más exterior” (o que “rodea” al resto) y $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ y σ_3 parametrizaciones simples de éstas, respectivamente, que inducen vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω

De hecho, y de forma análoga a como sucede en el caso de las correspondientes generalizaciones de los teoremas de Green y Stokes, en la mayoría de los problemas en los que se puede aplicar la versión anterior del teorema de Gauss, también se pueden resolver adaptándolos a una aplicación de la versión más sencilla. El siguiente ejemplo, además de ilustrar lo anterior, también muestra en qué tipo de situaciones suele ser útil este teorema.

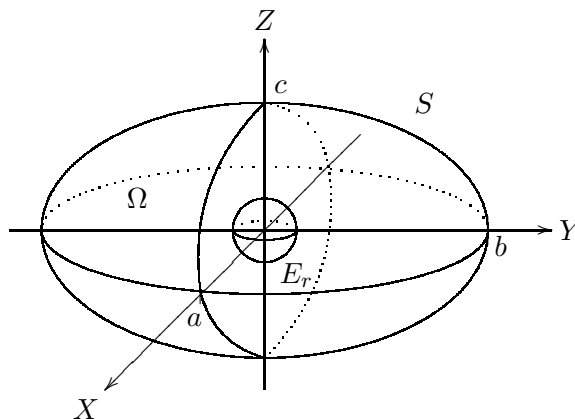


Figura 4.31: Si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es la región definida en el ejemplo 4.31 entonces $Fr(\Omega) = S \cup E_r$

Ejemplo 4.31 Calcule la integral $\int_S F \cdot d\sigma$ donde

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

S es el elipsoide determinado por la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $0 < a, b, c$, y σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” del elipsoide.

Solución. Tomamos $r > 0$ tal que $r < \min\{a, b, c\}$. Por tanto el conjunto (Jordan-medible)

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \text{ y } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

está contenido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, que es el dominio del campo F , y además $Fr(\Omega) = S \cup E_r$, donde E_r es la esfera de radio r con centro en el origen (ver figura 4.31). De esta forma, por la versión general del teorema de Gauss, se tiene que

$$\int_S F \cdot d\sigma + \int_{E_r} F \cdot d\tilde{\sigma} = \int_{\Omega} \operatorname{div} F = 0$$

en donde $\tilde{\sigma}$ es una parametrización simple de E_r que induce vectores normales que apuntan hacia “adentro” de la esfera. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot d\sigma &= - \int_{E_r} F \cdot d\tilde{\sigma} \\ &= -(-4\pi) \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

(considerando el cálculo realizado en el ejemplo 4.13).

Otra consecuencia importante del teorema de Gauss es que en el caso de un campo F de clase C^1 , la divergencia de un campo F en un punto \hat{x} ($\operatorname{div} F(\hat{x})$) se puede ver como un límite, y no sólo haciendo uso de la expansión o contracción producida sobre esferas o cubos centrados en \hat{x} (como se hizo en la proposición 4.24) sino para regiones más generales. En la siguiente proposición establecemos este hecho.

Proposición 4.32 Sean, $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , $\hat{x} \in U$ y $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$ una familia de conjuntos contenidos en U , Jordan-medibles, cerrados y acotados, y tales que: $S_\varepsilon = Fr(\Omega_\varepsilon) = \partial\Omega_\varepsilon$ es una superficie (por pedazos), $\hat{x} \in \operatorname{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$ y $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$. Entonces

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} F \cdot d\sigma_\varepsilon}{\operatorname{volumen}(\Omega_\varepsilon)}$$

donde σ_ε es una parametrización simple de S_ε que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω_ε .

Dem. De acuerdo con el Teorema de Gauss, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{S_\varepsilon} F \cdot d\sigma_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot m(\Omega_\varepsilon) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot \operatorname{volumen}(\Omega_\varepsilon) \end{aligned}$$

para alguna $\hat{\xi}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$ (Teorema del Valor Promedio). Como $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ y $\frac{\partial R}{\partial z}$ son continuas y $\hat{\xi}_\varepsilon \rightarrow \hat{x}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, ya que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$ y $\hat{x} \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$ para toda $0 < \varepsilon < c$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{S_\varepsilon} F \cdot d\sigma_\varepsilon}{\text{volumen}(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}) + \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}) \\ &= \text{div } F(\hat{x}) \end{aligned}$$

que es lo que se deseaba demostrar. ■

Una de las ventajas de poder usar una gama amplia de regiones para ver a la divergencia de un campo F (en un punto \hat{x}) como un límite, es que podemos deducir cómo se calcula este valor en el caso en que el campo F esté expresado en otros sistemas coordenados. Dado que esto ya lo hemos hecho en varias ocasiones en este texto, ahora esta tarea queda como un problema para el lector.

El teorema de Gauss también es una herramienta muy útil para obtener una interpretación alternativa del concepto de rotacional para campos en \mathbb{R}^3 . Para mostrar esto, empecemos planteando la siguiente situación: supongamos que la superficie E_r es la esfera de radio $r > 0$ con centro en un punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, que \hat{x} es un punto de E_r y que $\hat{n}_{\hat{x}}$ es el vector unitario normal a E_r en el punto \hat{x} , que apunta hacia “afuera” de E_r . La primera pregunta que nos haremos es la siguiente: si suponemos que la esfera está “sujeta” al punto \hat{x}_0 (por medio de un alfiler ¡puesto desde una cuarta dimensión!) de tal forma que al golpearla por una fuerza \hat{F} en el punto \hat{x} , no se desplaza pero si “rota”, ¿cómo (¿y con qué?) medimos este movimiento de rotación?

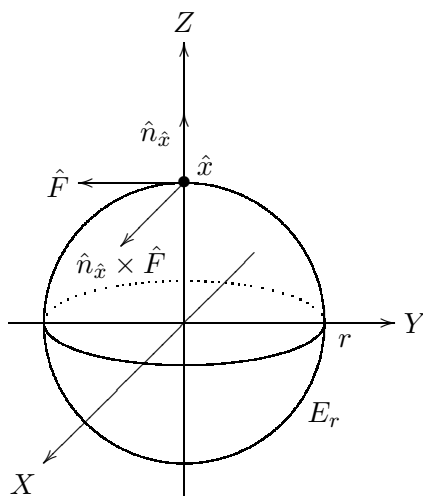


Figura 4.32: Si \hat{x} es el punto de la esfera E_r de coordenadas $(0, 0, r)$ y $\hat{F} = (0, a, 0)$, es de esperarse que el eje de rotación del movimiento producido por esta fuerza sobre E_r sea el eje X , lo cual concuerda con el hecho de que $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F} = (0, 0, 1) \times (0, a, 0) = (-a, 0, 0)$. Obsérvese además que si miramos al punto \hat{x} desde la dirección en la que apunta el vector $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$, se verá que éste (o la esfera E_r) gira en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj

Para saber cómo rota una esfera es necesario conocer su “eje de rotación” por lo que lo más probable es que este tipo de movimiento se deba medir por medio de un vector. En la situación que acabamos de plantear, parece razonable suponer que este eje de rotación está determinado por

el vector

$$\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$$

Por ejemplo (suponiendo que \hat{x}_0 es el origen) si \hat{x} es el punto de E_r de coordenadas $(0, 0, r)$ y $\hat{F} = (0, a, 0)$ (ver figura 4.32), es de esperarse que el eje de rotación del movimiento producido por esta fuerza sobre E_r sea el eje X , lo cual concuerda con el hecho de que

$$\begin{aligned}\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F} &= (0, 0, 1) \times (0, a, 0) \\ &= (-a, 0, 0)\end{aligned}$$

Obsérvese además que si miramos al punto \hat{x} desde la dirección en la que apunta el vector $(-a, 0, 0)$, se verá que éste gira en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Es decir, el vector $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$ además de indicarnos cuál es el eje de rotación del movimiento producido sobre la esfera, nos indicará desde dónde hay que observar al punto \hat{x} (o a la esfera E_r) para ver que éste (o ésta) se mueva en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

Como es de esperarse, la magnitud del vector $\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}$ será una medida de la magnitud de la fuerza ejercida sobre la esfera E_r en el punto \hat{x} , de tal forma que este punto \hat{x} girará a razón de

$$\frac{\|\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}\|}{2\pi r} = \left\| \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F}) \right\|$$

revoluciones (por unidad de tiempo) lo que también se puede tomar como una medida de la rotación producida sobre la esfera E_r .

En resumen, el vector

$$\frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F})$$

contiene toda la información necesaria para conocer el movimiento de rotación producido por la fuerza \hat{F} sobre la esfera E_r . Vale la pena hacer notar que si $\hat{n}_{\hat{x}} = (n_{\hat{x},1}, n_{\hat{x},2}, n_{\hat{x},3})$ y $\hat{F} = (F_1, F_2, F_3)$ entonces

$$\begin{aligned}\hat{n}_{\hat{x}} \times \hat{F} &= (n_{\hat{x},2}F_3 - n_{\hat{x},3}F_2, n_{\hat{x},3}F_1 - n_{\hat{x},1}F_3, n_{\hat{x},1}F_2 - n_{\hat{x},2}F_1) \\ &= ((0, F_3, -F_2) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (-F_3, 0, F_1) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (F_2, -F_1, 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}})\end{aligned}\quad (4.16)$$

Si ahora tomamos un número finito de puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en E_r y suponemos que en cada uno de ellos actúa una fuerza $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$, respectivamente, el lector coincidirá en que el eje de la rotación producida sobre la esfera E_r por todas estas fuerzas estará dado por el vector

$$\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k$$

y que la magnitud del movimiento de rotación producido por dichas fuerzas estará dado por

$$\frac{\|\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k\|}{2\pi r} = \left\| \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k) \right\|$$

Hay muchas formas sencillas de tomar puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en E_r , y fuerzas $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$ que “experimentalmente” confirmarían esta afirmación (ver figura 4.33).

Nuevamente es importante destacar que, si $\hat{n}_{\hat{x}_i} = (n_{\hat{x}_i,1}, n_{\hat{x}_i,2}, n_{\hat{x}_i,3})$ y $\hat{F}_i = (F_{i,1}, F_{i,2}, F_{i,3})$ (para $i = 1, \dots, k$) entonces

$$\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k = \left(\sum_{i=1}^k (0, F_{i,3}, -F_{i,2}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}_i}, \sum_{i=1}^k (-F_{i,3}, 0, F_{i,1}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}_i}, \sum_{i=1}^k (F_{i,2}, -F_{i,1}, 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}_i} \right)$$

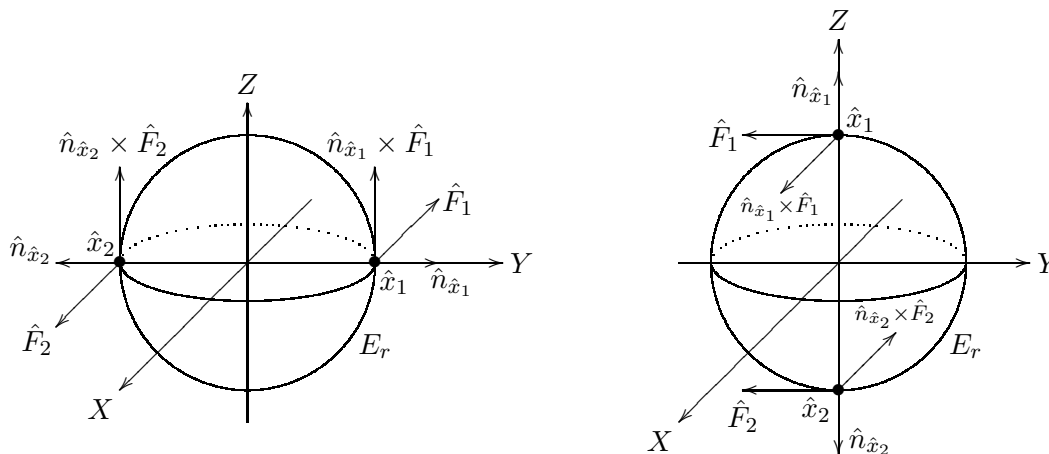


Figura 4.33: Formas sencillas de tomar puntos $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$ en E_r y fuerzas $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$ que “confirman” que el vector $\hat{n}_{\hat{x}_1} \times \hat{F}_1 + \dots + \hat{n}_{\hat{x}_k} \times \hat{F}_k$ contiene toda la información necesaria para “medir” el movimiento de rotación producido por dichas fuerzas sobre la esfera E_r .

Ahora el siguiente paso es suponer que tenemos todo un campo de fuerzas que actúa en cada punto de la esfera E_r y el problema que tenemos que resolver es el de calcular la rotación que éste produce en la esfera. Supongamos que el campo de fuerzas está representado por una función continua $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y que D_r , la esfera (sólida) de radio $r > 0$ con centro en \hat{x}_0 , está contenida en U .

Con base en este campo F , podemos definir otro campo vectorial sobre la esfera E_r de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} G(\hat{x}) &= \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times F(\hat{x})) \\ &= \frac{1}{2\pi r} (\hat{n}_{\hat{x}} \times (P(\hat{x}), Q(\hat{x}), R(\hat{x}))) \\ &= \frac{1}{2\pi r} ((0, R(\hat{x}), -Q(\hat{x})) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (-R(\hat{x}), 0, P(\hat{x})) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}, (Q(\hat{x}), -P(\hat{x}), 0) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}) \end{aligned}$$

para cada $\hat{x} \in E_r$. Nótese que este campo se puede interpretar como el campo que, para cada $\hat{x} \in E_r$, nos dice cuál es el eje de la rotación producida por la fuerza $F(\hat{x})$ sobre la esfera E_r , y su norma $\|G(\hat{x})\|$ nos indica la magnitud de esta rotación.

Si ahora hacemos uso de la fórmula que nos permite calcular el valor promedio (sobre la esfera E_r) de cada una de las funciones coordenadas de este campo G (y que el lector deducirá en el problema 15), podemos asegurar que el vector

$$\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{1}{\text{área}(E_r)} \left(\int_{E_r} (0, R(\hat{x}), -Q(\hat{x})) \cdot d\sigma, \int_{E_r} (-R(\hat{x}), 0, P(\hat{x})) \cdot d\sigma, \int_{E_r} (Q(\hat{x}), -P(\hat{x}), 0) \cdot d\sigma \right)$$

contiene la información necesaria (eje de rotación e intensidad) para conocer la rotación (promedio) producida por el campo F sobre la esfera E_r .

Por el teorema de Gauss tenemos que este vector se puede escribir como

$$\frac{1}{\text{área}(E_r)(2\pi r)} \left(\int_{D_r} \text{div}(0, R(\hat{x}), -Q(\hat{x})), \int_{D_r} \text{div}(-R(\hat{x}), 0, P(\hat{x})), \int_{D_r} \text{div}(Q(\hat{x}), -P(\hat{x}), 0) \right)$$

y por el Teorema de Valor Promedio, como

$$\frac{\text{volumen}(D_r)}{\text{área}(E_r)(2\pi r)} \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{\xi}_r) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{\xi}_r), -\frac{\partial R}{\partial x}(\hat{\eta}_r) + \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{\eta}_r), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\zeta}_r) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\zeta}_r) \right)$$

en donde $\hat{\xi}_r, \hat{\eta}_r, \hat{\zeta}_r \in D_r$.

Si, finalmente, tomamos el límite de estos vectores cuando $r \rightarrow 0$, en cuyo caso se tiene que $\hat{\xi}_r, \hat{\eta}_r, \hat{\zeta}_r \rightarrow \hat{x}_0$, entonces el vector

$$\frac{1}{6\pi} \left(\frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), -\frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) = \frac{1}{6\pi} \mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$$

se puede interpretar como el vector que nos indica cuál es la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 .

La conclusión más importante de toda esta discusión es que el $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$ es un vector que también se puede interpretar como el eje de la rotación producida por el campo F en el punto \hat{x}_0 . Es decir, si en el punto \hat{x}_0 colocamos una esfera de radio muy pequeño, como resultado de la acción del campo F esta esfera rotará teniendo como eje de rotación al vector $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$, y esta rotación será en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le mira desde la dirección en la que apunta éste.

4.7 Campos solenoides (segunda parte)

Una vez que hemos llegado hasta aquí, recordemos que el concepto de divergencia lo introdujimos con la idea de contar con una herramienta que nos permitiera saber cuándo un campo $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un campo solenoide. Un primer resultado importante con respecto a este concepto y los campos solenoides se puede deducir a partir del *teorema de las derivadas parciales cruzadas*. En efecto, usando este teorema se puede probar que, si F es un campo solenoide (de clase C^1) en una región U , entonces se debe tener que $\text{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$. Nótese que este resultado nos proporciona una consecuencia (o condición) necesaria del hecho de que un campo sea solenoide.

Proposición 4.33 Si $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 es un campo solenoide en U entonces $\text{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$.

Dem.

Se deja al lector. ■

Sin duda la pregunta que inmediatamente tiene uno que hacerse es si el recíproco de esta proposición también es cierto, es decir, ¿si $\text{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$ entonces F es un campo solenoide en U ? Como seguramente el lector ya se imagina, la respuesta es negativa. En el ejemplo 4.22, apoyándonos en el problema 24, mostramos que el campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

no es un campo solenoide en la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, y en el ejemplo 4.26 mostramos que este mismo campo es tal que $\text{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$.

¿Cuál es el problema? De la misma forma en que el recíproco de la proposición 3.46 del capítulo tres (es decir, que todo campo de rotacional cero en una región U es un campo gradiente en dicha región) no es cierto por razones que tienen que ver con la geometría de la región U , eso mismo sucede ahora con el recíproco de la proposición 4.33.

Así como los campos que sirven de contraejemplo al recíproco de la proposición 3.46 del capítulo tres están definidos en regiones U que tienen la característica geométrica de que no toda curva cerrada $\Gamma \subset U$ se puede “contraer” (sin salirse de U) a un punto de U , obsérvese ahora que en la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ (que es el dominio del campo F que nos sirvió de contraejemplo al recíproco de la proposición 4.33) podemos encontrar cierto tipo de superficies “cerradas” $S \subset U$ que tampoco se pueden “contraer” (sin salirse de U) a un punto de U , como por ejemplo, cualquier esfera con centro en el origen (ver figura 4.34).

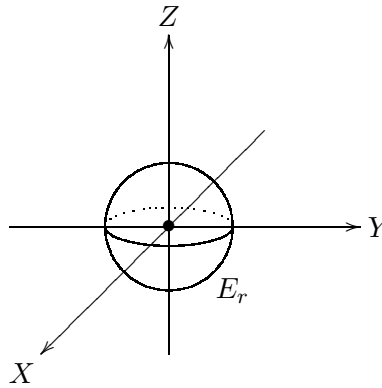


Figura 4.34: Si tomamos la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ entonces la esfera E_r es un ejemplo de una superficie contenida en U que no se puede “contraer” (sin salirse de U) a un punto de U

Formalizar de manera más rigurosa lo que significa que una superficie “cerrada” $S \subset \mathbb{R}^3$ se pueda “contraer” a un punto, es algo que escapa a los objetivos de este texto. Simplemente mencionaremos que a las regiones $U \subset \mathbb{R}^3$ que tuvieran la propiedad de que cierto tipo de superficies “cerradas” (específicamente las esferas o las “parecidas” a éstas) $S \subset U$ se pudieran contraer a un punto de U , sin salirse de U (y que geoméricamente significaría que U no tiene algo que bien podríamos bautizar como “hoyos” de dimensión dos), se les deberían de llamar regiones *doblemente* (o *dos-dimENSIONALMENTE*) *conexas* y que el teorema más general que se podría formular con relación a los campos solenoides y este tipo de regiones, diría lo siguiente:

Teorema 4.34 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , con U una región dos-dimENSIONALMENTE conexa. Si

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$$

para toda $\hat{x} \in U$ entonces F es un campo solenoide en U .

Aun y cuando no contamos con todo lo necesario para probar este teorema, no hay porque desanimarse. Afortunadamente existen las regiones estrelladas (cuya definición dimos en el capítulo 3) y para las cuales se puede probar un teorema completamente análogo al anterior.

Teorema 4.35 Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función de clase C^1 en U , con U una región estrellada. Si

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$$

para toda $\hat{x} \in U$ entonces F es un campo solenoide en U .

Dem. Para esta prueba, supondremos que U es estrellada con respecto al origen. El caso general queda como un problema para el lector. Bajo este supuesto se tiene que, si $\hat{x} \in U$, entonces $t\hat{x} \in U$ para toda $t \in [0, 1]$.

En virtud de lo anterior, definimos $G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente manera:

$$G(x, y, z) = \int_0^1 (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt$$

para cada $(x, y, z) = \hat{x} \in U$, (en donde la integral de la función de valores vectoriales $F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})$ es igual al vector formado por la integral de cada una de las funciones coordenadas de $F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})$).

Dado que F es de clase C^1 en U , por el teorema 2.7 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}G(\hat{x}) &= \mathbf{Rot} \left(\int_0^1 (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt \right) \\ &= \int_0^1 \mathbf{Rot} (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt \end{aligned}$$

Ahora, por el problema 34 de este capítulo tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot} (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) &= 2tF(t\hat{x}) + t^2 \frac{d(F(t\hat{x}))}{dt} \\ &= \frac{d(t^2F(t\hat{x}))}{dt} \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}G(\hat{x}) &= \int_0^1 \mathbf{Rot} (F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) dt \\ &= \int_0^1 \left(2tF(t\hat{x}) + t^2 \frac{d(F(t\hat{x}))}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{d(t^2F(t\hat{x}))}{dt} \right) dt \\ &= t^2F(t\hat{x}) \Big|_0^1 \\ &= F(\hat{x}) \end{aligned}$$

lo que demuestra que F es un campo solenoide en U . ■

Concluimos esta sección (¡y este capítulo!) con un ejemplo en el cual se da una aplicación de este teorema. Ahí mostraremos explícitamente que, si bien el campo del ejemplo 4.22 no es solenoide en su dominio ($\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$), lo debe de ser en la (sub)región estrellada de éste, $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\}$, como lo afirma el teorema.

Ejemplo 4.36 Muestre que el campo

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

es solenoide en la región $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\}$.

Solución. Sea $G : U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq 0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como

$$G(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right), \frac{x}{x^2+y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right), 0 \right) & \text{si } x^2 + y^2 \neq 0 \\ (0, 0, 0) & \text{si } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) \left(1 + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

de tal forma que, por ejemplo, se tiene que

$$\frac{x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}}$$

y de donde se deduce que, si $0 < z_0$, entonces

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,z_0)} \frac{x}{x^2 + y^2} \left(1 - \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}\right) = 0$$

(¿por qué?).

Con base en lo anterior se prueba que G es continua en U y por procedimientos análogos se puede probar que es de clase C^1 (en U). Además, es fácil ver que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$, que es lo que se quería mostrar.

4.8 Problemas

1. Calcule una parametrización para cada una de las siguientes superficies:

- el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
- el paraboloides elíptico $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - z$
- el hiperboloides de una rama $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
- el hiperboloides de dos ramas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (*parametrice cada rama*)
- el hiperboloides parabólico $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$

2. En cada uno de los siguientes incisos, describa cuál es la superficie parametrizada por la función σ , encuentre una ecuación cartesiana que la determine y calcule el vector normal $\frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u, v)$.

- $\sigma(u, v) = (u \cos(v), u \sin(v), u^2)$ con $(u, v) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$

- (b) $\sigma(u, v) = (a \cos(v), a \sin(v), u)$ con $(u, v) \in (-\infty, \infty) \times [0, 2\pi]$
- (c) $\sigma(u, v) = (a \sin(u) \cos(v), b \sin(u) \sin(v), c \cos(u))$ con $(u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$
- (d) $\sigma(u, v) = (a(u + v), b(u - v), uv)$ con $(u, v) \in [-\infty, \infty] \times (-\infty, \infty)$
- (e) $\sigma(u, v) = (\cos(u)(2 - \cos(v)), \sin(u)(2 - \cos(v)), \sin(v))$, con $(u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.
3. Dé un argumento de por qué la banda de Möbius no es una superficie orientada. ¿Por qué los vectores normales inducidos por la parametrización dada en 4.6 no hacen de la banda de Möbius una superficie orientada? Justifique su respuesta.
4. Pruebe la identidad 4.7.
5. Sean, $\tilde{\sigma} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\tilde{\sigma}(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y)$ y $\sigma : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $\sigma(x, y) = (\cos(x), \sin(x), y^2)$. Muestre, que σ y $\tilde{\sigma}$ parametrizan a la misma superficie S (¿cuál?), y que existe $\alpha : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow [0, 2\pi] \times [0, 1]$ de clase C^1 tal que $\sigma = \tilde{\sigma} \circ \alpha$. ¿ $\tilde{\sigma}$ “recorre” a S con la misma “orientación” que σ ? ¿con la orientación contraria? Justifique su respuesta.
6. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ de clase C^1 . Si $\gamma([a, b])$ está contenida en el semiplano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$, encuentre una parametrización de la superficie que se obtiene al girar a la curva γ con respecto al eje y . Encuentre una fórmula para el área de esta superficie.
7. Encuentre una parametrización del toro generado por una circunferencia de radio a con centro en el punto $(0, b, 0)$ cuando éste se gira alrededor del eje Z , en donde $0 < a < b$. Calcule el área de dicho toro.
8. Supóngase que una superficie S es la gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , y que también es la superficie de nivel cero de una cierta función $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial F}{\partial z}(u, v, f(u, v)) \neq 0$ para toda $(u, v) \in A$. Encuentre una fórmula para el área de S ($A(S)$) que sólo involucre a f y otra que sólo involucre a F .
9. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Si $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametriza a una curva suave contenida en A , entonces $\tau = \sigma \circ \gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva suave contenida en S . Pruebe que, $\tau'(t)$ es un vector ortogonal al vector normal a S en $\tau(t)$ y que $\tau(t) + \tau'(t)$ pertenece al plano tangente a S en $\tau(t)$.
10. Sea S la gráfica de la función de clase C^1 , $z = g(x, y)$ sobre el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$.

(a) pruebe que el área de S está dada por la fórmula

$$\int_A \sec(\alpha) dx dy$$

donde α es el ángulo entre el vector $(0, 0, 1)$ y el vector unitario \hat{n} normal a S (en cada punto de S) cuya tercera componente siempre es positiva.

(b) pruebe que, si S está contenida en un plano P , entonces

$$\text{área}(S) = \sec(\alpha) \cdot \text{área}(A)$$

donde α es el ángulo formado por el vector unitario \hat{n} (normal a P y cuya tercera componente es positiva) y el vector $(0, 0, 1)$.

11. Usando la fórmula para calcular el área de superficies contenidas en un plano del ejercicio anterior, calcule el área de las siguientes superficies:
- el triángulo cuyos vértices son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$
 - la porción del plano $x + y + z = a$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
 - la porción del plano $y = 2z$ que queda dentro de la superficie $x^2 + y^2 - 2ay = z^2$
12. Calcule el área de la superficie S , donde:
- S es la esfera de radio $r > 0$ con centro en $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$
 - S es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$, con $a > 0$
 - S es la porción del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que queda dentro del cilindro $z^2 + y^2 = a^2$
 - S es la superficie de la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ que está arriba del plano xy y debajo del plano $2z = y + 1$
 - S es la superficie parametrizada por la función $\sigma(u, v) = (u, v, uv)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, que queda dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$
13. Dadas las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y $x^2 + y^2 = a(z + a)$, con $a > 0$
- calcule el área de la parte de la esfera que queda dentro del paraboloide
 - calcule el área de la parte del paraboloide que queda dentro de la esfera
14. El ángulo sólido determinado por un cono sólido \mathcal{C} en \mathbb{R}^3 , con vértice en el origen, se define como el área de la intersección de \mathcal{C} con la superficie de la esfera unitaria
- calcule el ángulo sólido determinado por el cono $x^2 + y^2 \leq 2z^2$, $0 \leq z$
 - muestre que una reducción adecuada de la definición anterior, conduce a la definición usual de ángulo entre dos semirectas que parten del origen (en \mathbb{R}^2)
15. Sean, $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $S \subset U$ una superficie y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización simple de S . Deduzca una fórmula para calcular el promedio de los valores de f sobre S . Justifique su respuesta.
16. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio r con centro en el origen y $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $\hat{x}_0 \notin S$. Si definimos $f : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(\hat{x}) = 1/\|\hat{x} - \hat{x}_0\|$, calcule $\int_S f \|d\sigma\|$
17. Calcule la masa total de una lámina cuya forma corresponde a la de una superficie S , y con una función de densidad ρ , donde:
- S es el paraboloide $x^2 + y^2 = z$, $0 \leq z \leq 1$, y $\rho(x, y, z) = 1 + z$
 - S es el cilindro $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$, y $\rho(x, y, z) = |x| + |y|$
18. Deduzca cuáles son las coordenadas del centro de masa de una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ que tiene una función de densidad $\rho(x, y, z)$.
19. Calcule qué tanto se “expande” un fluido a través y hacia afuera de la superficie S , si el fluido tiene un campo de velocidades dado por la función F , donde:

- (a) S es la esfera de radio r con centro en el origen y $F(x, y, z) = (-y, x, -z)$
 (b) S es la porción del parabolide $x^2 + y^2 = z$, $0 \leq z \leq 4$ y $F(x, y, z) = (x, y, 0)$
20. Pruebe que, si F es un campo vectorial (continuo) sobre una superficie S , parametrizada por $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, con A cerrado y acotado, entonces

$$\left| \int_S F \cdot d\sigma \right| \leq M \cdot A(S)$$

donde $M = \max \{ \|F(\hat{x})\| \mid \hat{x} \in S \}$ y $A(S)$ es el área de S .

21. Sea $S \subset U$ una superficie y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de S . Si $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es de clase C^1 tal que $F(\hat{x})$ es perpendicular a la tangente del “borde” de S inducido por σ ($\partial_\sigma S$) en \hat{x} , para todo $\hat{x} \in \partial_\sigma S$. Pruebe que $\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = 0$.
22. Muestre que el Teorema de Green se puede obtener como un caso particular del Teorema de Stokes.
23. Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $S \subset U$, σ , y $\tilde{\gamma} = \sigma \circ \gamma$ son como en las hipótesis del teorema de Stokes, pruebe que:

(a)

$$\int_S (f \mathbf{Rot} F) \cdot dS = \int_{\partial_\sigma S} (fF) \cdot d\tilde{\gamma} - \int_S (\nabla f \times F) \cdot dS$$

(b)

$$\int_S (F \times \mathbf{Rot} G) \cdot dS = \int_{\partial_\sigma S} (F \times G) \cdot dS - \int_S (\mathbf{Rot} F \times G) \cdot dS$$

(Fórmulas de *integración por partes* para la integral de superficie. *Sugerencia*: para el inciso (a) use la identidad del inciso 2 de la proposición 3.43, y para el inciso (b) la indentidad del problema 36 del capítulo 3).

24. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 . Pruebe que $\int_S \mathbf{Rot} F \cdot d\sigma = 0$ en donde:
- (a) $S \subset U$ es una esfera (cuyo centro no necesariamente debe estar en U) y $\sigma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización simple de S .
- (b) $S = \partial R = Fr(U) \subset U$, con $R = [a, b] \times [c, d] \times [e, f] \subset \mathbb{R}^3$ un rectángulo no degenerado, y en donde las parametrizaciones simples de las “caras” de S inducen vectores normales que apuntan (todos) hacia “afuera” de R ó que apuntan (todos) hacia “dentro” de R .
- (c) $S \subset U$ es un sector de un cilindro recto (cuyo eje es paralelo a uno de los ejes coordenados) incluyendo las “tapas” de sus extremos, y en donde las parametrizaciones de las “caras” de S (que las recorren una vez) inducen vectores normales que apuntan (todos) hacia “afuera” de S ó que apuntan (todos) hacia “dentro” de S .

25. Sea S el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

y sea $D(x, y, z)$ la distancia del origen al plano tangente a S en (x, y, z) .

(a) muestre que, si

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)$$

entonces $F \cdot \hat{n} = D^{-1}$, donde \hat{n} es el vector normal unitario exterior a S en (x, y, z)

(b) pruebe que

$$\int_S D^{-1} \|d\sigma\| = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c} \right)$$

26. Sean $u, v : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en U , y $\Omega \subset U$ un conjunto Jordan-medible tal que $S = \partial\Omega = Fr(\Omega) \subset U$ es una superficie. Pruebe las siguientes identidades:

(a)

$$\int_S (v \nabla u) \cdot d\sigma = \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla v + v \nabla^2 u) dx dy dz$$

(b)

$$\int_S (v \nabla u - u \nabla v) \cdot d\sigma = \int_{\Omega} (v \nabla^2 u - u \nabla^2 v) dx dy dz$$

(c) ¿Cuáles son las identidades que debieran cumplirse en el caso de que $\partial\Omega = S \cup S_1 \cup \dots \cup S_k$ sea una superficie por pedazos?

27. Sean u , Ω y S como en el problema anterior, y suponga además que: u es una función armónica en Ω (es decir, $\nabla^2 u(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \Omega$), y que $int(\Omega)$ es conexo. Pruebe que:

(a)

$$\int_S \nabla u \cdot d\sigma = 0$$

(b)

$$\int_S (u \nabla u) \cdot d\sigma = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx dy dz$$

(c) si $u(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in S$ entonces $u(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in int(\Omega)$.

(d) si \tilde{u} es armónica en Ω tal que $\tilde{u}(\hat{x}) = u(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in S$ entonces $\tilde{u}(\hat{x}) = u(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in int(\Omega)$.

28. Sean u , Ω y S como en el problema anterior. Dado $\hat{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in int(\Omega)$, definimos $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{x}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$v(x, y, z) = \frac{1}{((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2)^{1/2}}$$

Pruebe que

$$u(\hat{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S (v \nabla u - u \nabla v) \cdot d\sigma$$

29. Sean $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $\Omega \subset U$ es un conjunto Jordan-medible tal que $S = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una superficie por pedazos y $\Omega \cup S \subset U$, pruebe que

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} F = \int_{S=\partial\Omega} (fF) \cdot d\sigma - \int_{\Omega} \nabla f \cdot F$$

en donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω . (Fórmula de *integración por partes* para la divergencia. *Sugerencia*: use la identidad del inciso 2 de la proposición 4.27).

30. Sea $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en la región U . Si $\Omega = \{\hat{x} \in U \mid f(\hat{x}) \neq 0\}$ es un conjunto Jordan-medible tal que $S = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ es una superficie por pedazos y $\Omega \cup S \subset U$, pruebe que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y} = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

(*sugerencia*: aplique el problema 29, usando un campo F “adecuado” en cada caso).

31. Pruebe la proposición 4.33.
32. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región Jordan-medible cuya frontera (o “borde”) es una superficie S por pedazos. Deduzca una fórmula para calcular el volumen de Ω por medio de una integral sobre la superficie S de un cierto campo F .
33. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ una región Jordan-medible tal que $\hat{0} \in \operatorname{int}(\Omega)$ y cuya frontera (o “borde”) es una superficie S suave por pedazos. Si

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

pruebe que

$$\int_S F \cdot d\sigma = 4\pi$$

donde σ es una parametrización simple de S que induce vectores normales que apuntan hacia “afuera” de Ω .

34. Sea $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , una región estrellada con respecto a $\hat{0} \in U$. Pruebe que, si $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in U$, entonces

$$\mathbf{Rot}(F(t\hat{x}) \times (t\hat{x})) = 2tF(t\hat{x}) + t^2 \frac{d(F(t\hat{x}))}{dt}$$

para cada $\hat{x} \in U$ y cada $t \in [0, 1]$.

35. Pruebe el caso general del teorema 4.35 (*sugerencia*: use el problema 38 del capítulo tres).
36. Determine si el campo F definido en el ejemplo 4.29 es un campo solenoide. Pruebe su respuesta.
37. Tomando el conjunto $U \subset \mathbb{R}^3$, y los campos F y G del ejemplo 4.36, compruebe que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$.

38. Sea $F = (P, Q, R) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , tal que $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$. Definimos $G = (G_1, G_2, G_3) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} G_1(x, y, z) &= \int_0^z Q(x, y, t) dt - \int_0^y R(x, t, 0) dt \\ G_2(x, y, z) &= - \int_0^z P(x, y, t) dt \\ G_3(x, y, z) &= 0 \end{aligned}$$

para toda $\hat{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Pruebe que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$, y que esta G es única, salvo por campos conservativos. Es decir, si $\tilde{G} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es tal que $\mathbf{Rot}\tilde{G}(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^3$ entonces $G - \tilde{G}$ es un campo conservativo en \mathbb{R}^3 .

39. Sea $F = (P, Q, R) : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 , tal que $\operatorname{div} F(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \Omega$. Muestre que, para cada $\hat{x}_0 \in \Omega$ existen $r > 0$ y $G : B_r(\hat{x}_0) \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = F(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in B_r(\hat{x}_0)$. Calcule explícitamente G (imite la construcción del ejercicio anterior).
40. Deduzca una expresión para la divergencia de un campo $F = (F_r, F_\theta, F_\varphi)$ que está dado en términos de coordenadas esféricas.
41. Sean $F, G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase C^1 en U , una región estrellada, tales que $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = \mathbf{Rot}G(\hat{x})$ y $\operatorname{div} F(\hat{x}) = \operatorname{div} G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in U$. Si $\Omega \subset U$ es tal que $S = Fr(\Omega) \subset U$ es una superficie suave por pedazos y $F(\hat{x}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}} = G(\hat{x}) \cdot \hat{n}_{\hat{x}}$ para toda $\hat{x} \in S$, en donde $\hat{n}_{\hat{x}}$ representa un campo continuo de vectores unitarios normales a la superficie S , pruebe que $F(\hat{x}) = G(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in \Omega$.