

# Capítulo 3

## Integrando sobre curvas

En el capítulo anterior vimos cómo calcular la masa total de un alambre, aun cuando éste fuera de densidad no homogénea, pero suponiendo que era recto. Surge entonces la pregunta de cómo hacer el mismo cálculo, pero suponiendo ahora que nuestro alambre está curvado. Y ya metidos en gastos, por supuesto que también nos podemos preguntar lo mismo para láminas no necesariamente planas. Parte de lo que haremos en este capítulo será desarrollar las herramientas necesarias para contestar la primera pregunta y en el siguiente, las necesarias para responder la segunda.

En este capítulo también desarrollaremos herramientas que nos permitirán dar sentido a la idea de integrar una función de valores reales sobre una curva (de este tipo es la función que nos da la densidad de masa de un alambre no homogéneo), y más aun, veremos que hay ciertos problemas (de la Física, ¡por supuesto!) que nos conducen al concepto de integral sobre una curva de una función de valores vectoriales.

### 3.1 Curvas y trayectorias

La herramienta más adecuada para describir la forma de un alambre que no es recto, son las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$  (si nuestro alambre no es recto pero es plano) o de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^3$ , justo porque las imágenes de este tipo de funciones se ven como curvas. Para ser más precisos, trabajaremos con funciones que están definidas sobre algún intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  y cuyos valores están en  $\mathbb{R}^n$ , en general. Necesitaremos también que estas funciones sean derivables<sup>1</sup>, o cuando menos que lo sean por pedazos, y que esta derivada sea continua (para no tener problemas si nos topamos con alguna expresión que la incluya y que vayamos a integrar). Este tipo de funciones reciben un nombre particular el cual queda establecido en la siguiente

**Definición 3.1** Una función  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es suave por pedazos si existe una partición  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\gamma$  tiene derivada continua (de clase  $C^1$ ) en cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  (para  $i = 1, \dots, k$ ). A la imagen  $\Gamma = \gamma([a, b])$  de una función  $\gamma$  suave por pedazos la llamaremos curva suave por pedazos y diremos que  $\gamma$  es una parametrización suave por pedazos de  $\Gamma$ . A  $\gamma(a)$  se le conoce como el punto inicial de  $\gamma$  y a  $\gamma(b)$  como el punto final, y si  $\gamma(a) = \gamma(b)$  decimos que  $\gamma$  es cerrada.

Un ejemplo típico de una curva suave por pedazos es la siguiente:

---

<sup>1</sup>Existen funciones definidas sobre el intervalo  $[0, 1]$  con valores en  $\mathbb{R}^2$ , continuas, cuya imagen es el cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Se les conoce con el nombre de “curvas de Peano” en honor del matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932).

**Ejemplo 3.2** Considere el cuadrado (en  $\mathbb{R}^2$ ) con vértices en los puntos  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(0,1)$  (ver figura 3.1). Una parametrización (suave por pedazos) para esta curva puede ser la función  $\gamma : [0,4] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como:

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t - 1) & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \\ (3 - t, 1) & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4 - t) & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

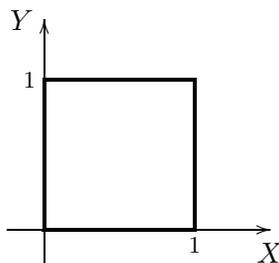


Figura 3.1: Cuadrado unitario

Es un hecho conocido que una curva con “picos” se puede ver como la imagen de una función  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  derivable en todo su dominio (sólo que en estos “picos” es necesario que la velocidad se haga cero, para que se pueda hacer un cambio “brusco” de dirección). Tal es el caso de la gráfica de la función  $f(x) = |x|$  en el intervalo  $[-1, 1]$  (ver figura 3.2) para la cual se puede conseguir una parametrización que sea derivable y que además dicha derivada sea continua en todo su dominio (es un buen ejercicio encontrar esta parametrización). Sin embargo, la función  $\gamma : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\gamma(t) = (t, |t|)$  también es una parametrización suave por pedazos de la misma curva (basta tomar la partición  $\{-1, 0, 1\}$ ), en donde además la derivada de  $\gamma$  en los correspondientes subintervalos nunca se hace cero.

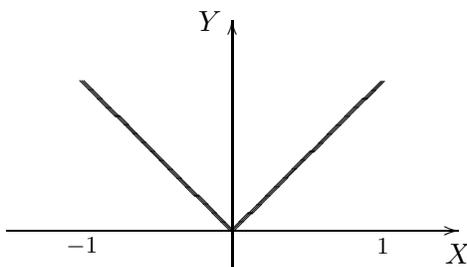


Figura 3.2: Valor absoluto

Observe que el ejemplo anterior no es más que un caso particular de algo que se puede hacer de manera más general. Nótese que, si  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave por pedazos, entonces la gráfica de  $f$  ( $G_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b]\}$ ) también es una curva suave por pedazos y la función  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  definida como  $\gamma(x) = (x, f(x))$  es una parametrización (suave por pedazos) de ella (ver figura 3.3).

Muchas de las propiedades de las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$  ya las conocemos, así que sólo agregaremos algunas muy específicas de las suaves por pedazos.

La primera de ellas, y que usaremos con mucha frecuencia, es que este tipo de funciones se pueden “unir” o “pegar”. En efecto, si dos funciones  $\gamma$  y  $\delta$  son suaves por pedazos, con la propiedad

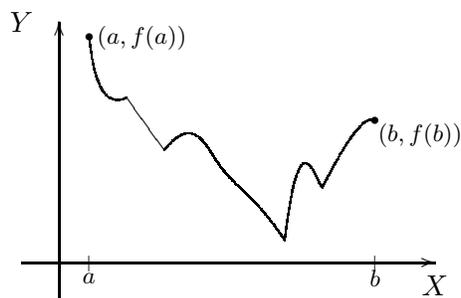
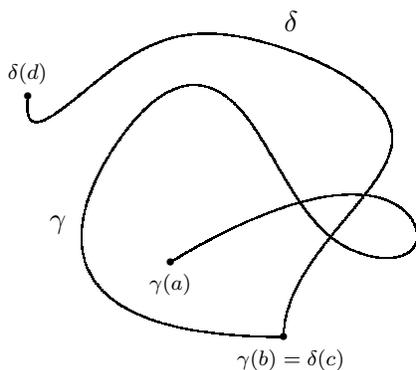


Figura 3.3: La gráfica de una función también es una curva

de que  $\delta$  “empieza” donde “termina”  $\gamma$ , entonces podemos construir una tercera función (o curva) suave por pedazos, que denotaremos por  $\gamma + \delta$ , y que se obtiene “pegando” ambas funciones (ver figura 3.4). Formalizamos esta “operación” en la siguiente

**Definición 3.3** Sean,  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos funciones suaves por pedazos tales que  $\gamma(b) = \delta(c)$ . Definimos la función  $\gamma + \delta : [a, b + (d - c)] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$(\gamma + \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \delta(t - b + c) & \text{si } t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$

Figura 3.4: La curva  $\gamma + \delta$ 

Se deja como ejercicio al lector probar que en efecto,  $\gamma + \delta$  es nuevamente una función suave por pedazos, y por lo tanto, que la unión de sus imágenes también es una curva suave por pedazos.

Otro concepto importante relacionado con las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$  es el que tiene que ver con la idea de cambio de parámetro o reparametrización. Incluimos todo lo relacionado con este concepto en la siguiente

**Definición 3.4** Sea  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave por pedazos y  $\alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$  suprayectiva en  $[a, b]$ , y de clase  $C^1$  en  $[c, d]$ . Si la función  $\gamma \circ \alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  (cuya imagen es la misma que la de  $\gamma$ ) es nuevamente suave por pedazos, decimos que  $\gamma \circ \alpha$  es una reparametrización de la curva  $\Gamma = \gamma([a, b])$ . Si adicionalmente la función  $\alpha$  es inyectiva, se debe tener que  $\alpha'(t) \geq 0$  para toda  $t \in [c, d]$  ó  $\alpha'(t) \leq 0$  para toda  $t \in [c, d]$ . En el primer caso (en el que se debe de cumplir que  $\alpha(c) = a$  y  $\alpha(d) = b$ ) decimos que  $\gamma \circ \alpha$  es una reparametrización que preserva la dirección, y en el segundo (en el que se debe de cumplir que  $\alpha(c) = b$  y  $\alpha(d) = a$ ) que invierte la dirección.

Dada  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave por pedazos, hay una reparametrización muy particular de ésta que usaremos con mucha frecuencia y que por tanto merece mención aparte. Es la que se obtiene al considerar la función  $\alpha : [a, b] \rightarrow [a, b]$  definida como  $\alpha(t) = a+b-t$ . Como se verifica fácilmente,  $\gamma \circ \alpha$  es una reparametrización que invierte la orientación y que tiene la particularidad de recorrer la misma curva  $\Gamma = \gamma([a, b])$ , sólo que en sentido contrario; el punto inicial de  $\gamma \circ \alpha$  es el punto final de  $\gamma$  y el punto final de  $\gamma \circ \alpha$  es el punto inicial de  $\gamma$ . A esta reparametrización específica de  $\gamma$  la denotaremos como  $-\gamma$  (ver figura 3.5). Resumiendo, si  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función suave por pedazos, definimos  $-\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  como

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$$

que también es una función suave por pedazos.

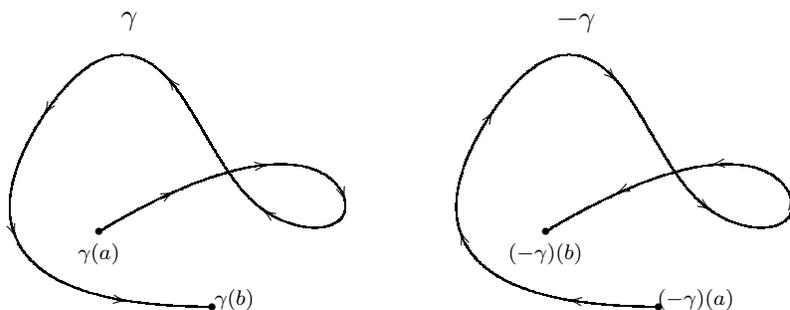


Figura 3.5: Las curvas  $\gamma$  y  $-\gamma$

Concluimos esta sección recordando cómo se usan las parametrizaciones para calcular la longitud de una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Supongamos por ahora que  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización inyectiva y de clase  $C^1$  de esta curva. Como es intuitivamente claro, un método para aproximarse a la longitud de la curva  $\Gamma$  consiste en tomar un número finito de puntos de ésta (empezando y terminando en los puntos inicial y final), digamos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$ , y calcular la longitud entre cada dos consecutivos, es decir  $\|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$ . De esta forma, la suma de todos estos números  $\left(\sum_{i=1}^k \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|\right)$  es una aproximación a la longitud de la curva, y esta será mejor si tomamos más puntos y más cercanos entre sí (ver figura 3.6).

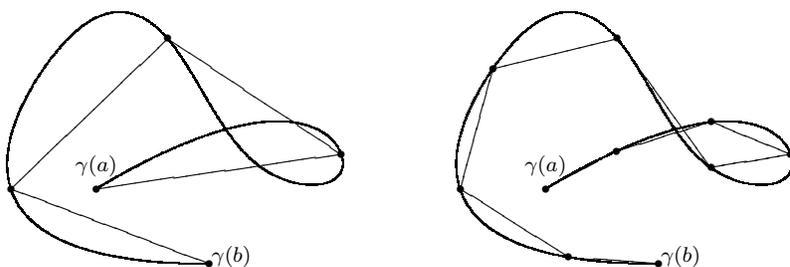


Figura 3.6: Aproximación a la longitud de la curva  $\gamma$

Dado que estamos suponiendo que  $\gamma$  es una parametrización inyectiva de  $\Gamma$ , existe una única partición  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\hat{P}_i = \gamma(t_i)$ , y por lo tanto tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| = \sum_{i=1}^k \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Por otra parte, como estamos suponiendo que  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  es una función de clase  $C^1$  en  $[a, b]$ , por el Teorema del Valor Medio para funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ , tenemos que existen  $t_i^{(1)}, \dots, t_i^{(n)} \in [t_{i-1}, t_i]$  tales que

$$\begin{aligned}\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= (\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), \dots, \gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})) \\ &= \left( \gamma_1'(t_i^{(1)}) \cdot (t_i - t_{i-1}), \dots, \gamma_n'(t_i^{(n)}) \cdot (t_i - t_{i-1}) \right) \\ &= (t_i - t_{i-1}) \left( \gamma_1'(t_i^{(1)}), \dots, \gamma_n'(t_i^{(n)}) \right)\end{aligned}$$

Ahora, si los puntos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$  son muchos y muy cercanos entre sí (los consecutivos), entonces la partición  $\mathcal{P}$  será muy fina, de tal forma que  $t_{i-1}$  y  $t_i$  también serán puntos muy cercanos. Así, por la continuidad de la derivada de  $\gamma$  debemos tener que

$$\left( \gamma_1'(t_i^{(1)}), \dots, \gamma_n'(t_i^{(n)}) \right) \approx \left( \gamma_1'(\xi_i), \dots, \gamma_n'(\xi_i) \right)$$

para cualquier  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ . De esta forma, debemos tener entonces que

$$\begin{aligned}\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= (t_i - t_{i-1}) \left( \gamma_1'(t_i^{(1)}), \dots, \gamma_n'(t_i^{(n)}) \right) \\ &\approx (t_i - t_{i-1}) \left( \gamma_1'(\xi_i), \dots, \gamma_n'(\xi_i) \right)\end{aligned}\tag{3.1}$$

para cualquier  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  y para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \left\| \hat{P}_i - \hat{P}_{i-1} \right\| &= \sum_{i=1}^k \left\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \right\| \\ &\approx \sum_{i=1}^k \left\| \left( \gamma_1'(\xi_i), \dots, \gamma_n'(\xi_i) \right) \right\| \cdot (t_i - t_{i-1})\end{aligned}$$

y como el lector sabrá reconocer, esta última suma es una suma de Riemann correspondiente a la integral

$$\int_a^b \left\| \gamma'(t) \right\| dt$$

por lo que es de esperarse que la longitud de la curva  $\Gamma$ , que denotaremos por  $l(\Gamma)$ , coincida con esta integral, es decir, se debe tener que

$$l(\Gamma) = \int_a^b \left\| \gamma'(t) \right\| dt\tag{3.2}$$

Es importante destacar que la integral que aparece en la identidad anterior está bien definida aun y cuando  $\gamma$  sea una función suave por pedazos, en virtud de que  $\|\gamma'(t)\|$  será una función acotada y continua en  $[a, b]$ , salvo por un número finito de puntos. Por otra parte, si  $\gamma$  no es una función inyectiva entonces esta integral no representa la longitud de la curva descrita, sino la longitud total recorrida por un objeto que sigue la trayectoria descrita por  $\gamma$ . Esta última observación es muy relevante, puesto que expresa el otro uso que le vamos a dar a las funciones como  $\gamma$ ; es decir, este tipo de funciones también las usaremos para describir el recorrido o trayectoria seguida por un objeto.

Para terminar esta sección, vale la pena decir que la aproximación expresada en 3.1 funciona muy bien y por tanto será muy usada en lo que resta de este capítulo.

### 3.2 Integrando funciones escalares

Una vez que hemos definido y establecido las propiedades básicas de la herramienta con la cual vamos a trabajar (las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$  suaves por pedazos), estamos en condiciones de abordar el primer problema que nos planteamos al inicio de este capítulo.

Supongamos que tenemos un alambre no homogéneo cuya forma coincide con la de una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  (claro, con  $n = 2$  ó  $n = 3$ ) y cuya densidad de masa está dada por la función  $\rho$ . Por ahora, vamos a suponer que  $\Gamma$  es la imagen de una función  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  inyectiva y de clase  $C^1$ . La pregunta es: ¿cómo calcular la masa total del alambre?

De forma análoga a como hicimos en el caso del cálculo de la longitud de una curva, todo parece indicar que lo más apropiado es proceder de la siguiente manera (ver figura 3.7):

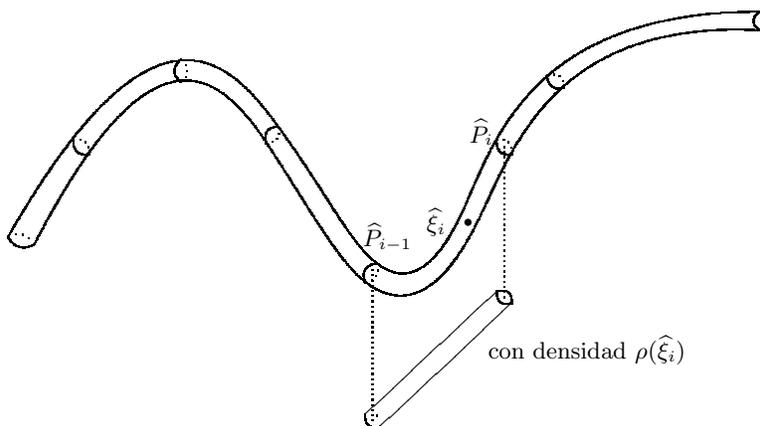


Figura 3.7: Un alambre no homogéneo cuya forma coincide con la de una curva  $\Gamma$

1. elegir nuevamente un número finito de puntos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$
2. en cada arco de curva  $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$  elegir un punto  $\hat{\xi}_i$
3. suponer que la densidad de masa a lo largo de cada arco  $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$  está dada por  $\rho(\hat{\xi}_i)$
4. aproximar la longitud del arco  $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$  por la distancia entre los puntos  $\hat{P}_i$  y  $\hat{P}_{i-1}$ , es decir, por  $\|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$

Siguiendo estos pasos se tiene que la cantidad  $\rho(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$  es una aproximación a la cantidad de masa contenida en el pedazo de alambre representado por el arco  $\widehat{\hat{P}_{i-1}\hat{P}_i}$ , por lo que la suma

$$\sum_{i=1}^k \rho(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| \tag{3.3}$$

es una aproximación a la masa total, la cual, como siempre sucede y sucederá en estos casos, será mejor en la medida de que tomemos muchos puntos, y muy bien distribuidos, a lo largo de  $\Gamma$ .

Si ahora recordamos que la curva  $\Gamma$  está parametrizada por la función  $\gamma$ , la selección de los puntos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$  se corresponde con una partición  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$  del intervalo  $[a, b]$  tal que

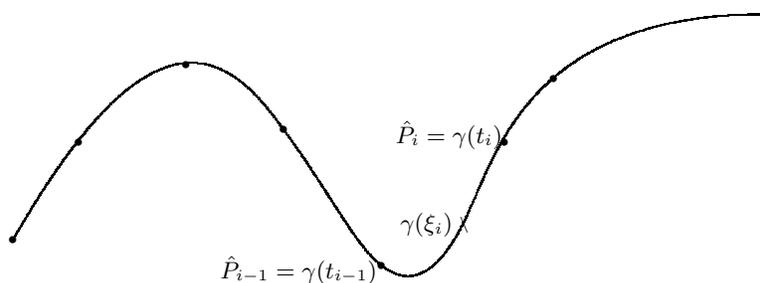


Figura 3.8: Los puntos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$  se corresponden con los elementos de una partición  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$  del intervalo  $[a, b]$

$\hat{P}_i = \gamma(t_i)$ , y la elección de los puntos  $\hat{\xi}_i \in \widehat{P_{i-1}P_i}$ , con la elección de un punto  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ , para cada  $i = 1, \dots, k$  (ver figura 3.8). De esta forma, la suma 3.3 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^k \rho(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

y esta suma se aproximará cada vez mejor a la masa del alambre si la partición  $\mathcal{P}$  es cada vez más fina.

Por otra parte, si usamos 3.1 tendremos que

$$\sum_{i=1}^k \rho(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \approx \sum_{i=1}^k \rho(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \quad (3.4)$$

y nuevamente, el ojo bien entrenado del lector reconocerá rápidamente que la suma de la derecha es una suma de Riemann correspondiente a la integral

$$\int_a^b \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \quad (3.5)$$

y que dicha suma se parecerá más a esta integral, justo en la medida de que  $\mathcal{P}$  sea una partición muy fina.

Dado que la suma que está a la izquierda en 3.4 se parece más a la masa total de nuestro alambre en la medida de que  $\mathcal{P}$  sea una partición muy fina, y en esta misma medida, la suma de la derecha se parece más a la integral 3.5, es fácil concluir entonces que la masa total deberá estar dada por esta integral. De hecho obsérvese que, si el alambre es homogéneo, es decir,  $\rho$  es una función constante, entonces el valor de esta integral es igual a esta constante multiplicada por la longitud de la curva  $l(\Gamma)$ , como era de esperarse.

Es importante destacar que la integral que aparece en 3.5 está perfectamente bien definida aun cuando  $\gamma$  sea una curva suave por pedazos, razón por la cual todos nuestros razonamientos son aplicables en este caso.

Ilustraremos la discusión anterior con el siguiente

**Ejemplo 3.5** Considere un alambre cuya forma coincide con la imagen de la función  $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), t)$  con  $t \in [-1, 1]$  (un resorte), y su densidad de masa está dada por la función  $\rho(x, y, z) = 1 - z^2$ . Calcular la masa total del alambre.

*Solución.* Dado que  $\gamma'(t) = (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi \operatorname{cos}(2\pi t), 1)$  entonces  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + 4\pi^2}$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \rho(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt &= \sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot \int_{-1}^1 (1 - t^2) dt \\ &= \sqrt{1 + 4\pi^2} \cdot \left(2 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \sqrt{1 + 4\pi^2} \end{aligned}$$

Hay otro problema, en este caso geométrico, cuya solución nos conduce a calcular una integral como la que aparece en 3.5. Supóngase que se tiene una barda cuya base tiene la forma de una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  y su altura, que varía en cada punto de esta curva, está dada por una función  $f$  (la que supondremos que es continua, aunque podemos suponer menos que eso) (ver figura 3.9). Como es de imaginarse, la pregunta en este caso es: ¿cuál es el área total de la barda?

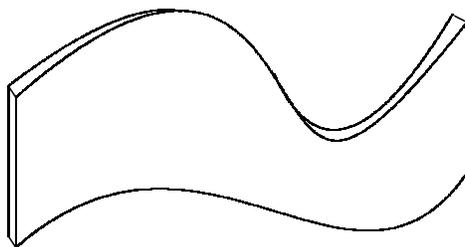


Figura 3.9: Una barda de altura variable (dada por la función  $f$ ) y cuya base tiene la forma de la curva  $\gamma$

Si seguimos exactamente los mismos cuatro pasos que en el caso anterior, aclarando que en el paso 3 ahora lo que supondríamos es que la altura de la barda a lo largo del arco  $\widehat{P_{i-1}P_i}$  está dada por  $f(\hat{\xi}_i)$ , entonces la cantidad  $f(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$  representa el área de una tabla que se parece mucho a la barda en ese arco de la curva (ver figura 3.10). De esta forma, la suma

$$\sum_{i=1}^k f(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\|$$

será una aproximación al área total de la barda.

Si ahora suponemos que tenemos una parametrización  $\gamma$  de la curva  $\Gamma$ , con las mismas características de antes, y aplicamos la misma aproximación para la cantidad

$$\|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| = \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \approx \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

entonces

$$\sum_{i=1}^k f(\hat{\xi}_i) \cdot \|\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}\| \approx \sum_{i=1}^k f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1})$$

y como la suma de la derecha es una suma de Riemann de la integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \tag{3.6}$$

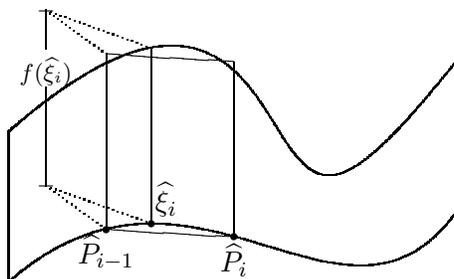


Figura 3.10: Una tabla que se parece mucho a la barda en un subarco de la curva  $\gamma$

llegamos a la conclusión de que el área de la barda debe estar dada por esta integral.

El siguiente ejemplo muestra que estamos en lo correcto.

**Ejemplo 3.6** Considere una barda circular (de radio 1) cuya altura en cada punto está dada por la función  $f(x, y) = 1 - y$  (ver figura 3.11). Calcular el área de la barda.

*Solución.* Lo primero que se debe destacar es que el área que se quiere calcular, coincide con ser la mitad del área de un cilindro de base circular (de radio 1) y altura 2 (perímetro de la base  $(2\pi) \times$  altura  $(2) = 4\pi$ ). Por esta razón, el valor al que debemos llegar es  $2\pi$ .

Para calcular la integral 3.6, parametrizaremos la base de la barda con la función  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Por tanto,  $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$  de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin(t)) \cdot 1 dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

como habíamos previsto.

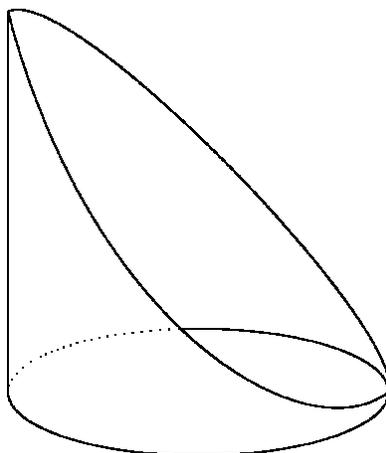


Figura 3.11: Una barda circular

El trabajo desarrollado hasta aquí es parte de la motivación para introducir el concepto matemático que definiremos a continuación. Se trata del concepto de integral de una función  $f$  (de valores reales) sobre una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  parametrizada por una función  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . A este tipo de

integral se le conoce con el nombre de *integral de línea* de una función  $f$  (o de un *campo escalar*  $f$ , como también se le nombra a este tipo de funciones por su cercanía con la Física). En términos estrictamente matemáticos, la definición es la siguiente:

**Definición 3.7** Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una curva suave por pedazos, parametrizada por una función (suave por pedazos)  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, definimos la integral de  $f$  sobre  $\Gamma$ , según la parametrización  $\gamma$ , (que denotaremos por  $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$ ) como

$$\int_{\Gamma} f \|d\gamma\| = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

Por el trabajo realizado hasta aquí, este tipo de integral puede tener varias interpretaciones (masa, área, etc.) de acuerdo con el contexto en el que se esté trabajando, lo que por cierto, es una característica común a muchos conceptos matemáticos.

Lo siguiente que haremos será mostrar algunas de las propiedades de este nuevo concepto, todas ellas muy sencillas. La primera se relaciona con la aritmética del tipo de funciones que se integran, y dice lo siguiente:

**Proposición 3.8** Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una curva suave por pedazos parametrizada por la función  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $f, g : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces

$$\int_{\Gamma} (\alpha f + \beta g) \|d\gamma\| = \alpha \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| + \beta \int_{\Gamma} g \|d\gamma\|$$

Como es de suponerse, la prueba de esta proposición se deja al lector.

La siguiente propiedad que mencionaremos tiene que ver con lo se puede llamar la “aritmética de las curvas” sobre las que se integra, y establece que, si una curva se puede ver como la “suma” de otras dos (ver definición 3.3), entonces la integral de una función sobre la curva original, es igual a la suma de las integrales sobre cada una de ellas.

**Proposición 3.9** Sean,  $\Gamma, \Delta \subset \mathbb{R}^n$  curvas suaves por pedazos parametrizadas por las funciones  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente, tales que  $\Gamma \cup \Delta$  es suave por pedazos y está parametrizada por  $\gamma + \delta$ . Si  $f : \Gamma \cup \Delta \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es continua entonces

$$\int_{\Gamma \cup \Delta} f \|d(\gamma + \delta)\| = \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| + \int_{\Delta} f \|d\delta\|$$

**Dem.** De acuerdo con la definición de  $\gamma + \delta$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cup \Delta} f \|d(\gamma + \delta)\| &= \int_a^{b+d-c} f((\gamma + \delta)(t)) \cdot \|(\gamma + \delta)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f((\gamma + \delta)(t)) \cdot \|(\gamma + \delta)'(t)\| dt + \int_b^{b+d-c} f((\gamma + \delta)(t)) \cdot \|(\gamma + \delta)'(t)\| dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt + \int_b^{b+d-c} f(\delta(t-b+c)) \cdot \|\delta'(t-b+c)\| dt \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| + \int_b^{b+d-c} f(\delta(t-b+c)) \cdot \|\delta'(t-b+c)\| dt$$

Ahora, si en la segunda integral del último renglón hacemos el cambio de variable  $s = t - b + c$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \int_b^{b+d-c} f(\delta(t-b+c)) \cdot \|\delta'(t-b+c)\| dt &= \int_c^d f(\delta(s)) \cdot \|\delta'(s)\| ds \\ &= \int_{\Delta} f \|d\delta\| \end{aligned}$$

con lo cual concluimos la prueba. ■

Esta propiedad tiene un valor práctico muy importante, ya que nos permite “ahorrarnos” el cálculo de la parametrización  $\gamma + \delta$ . Ilustraremos esto con un ejemplo.

**Ejemplo 3.10** Considere el cuadrado  $\Gamma$  parametrizado por la función  $\gamma$  (suave por pedazos) del ejemplo 3.2, y la función  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Calcule  $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$ .

*Solución.* De acuerdo con el problema 4, se tiene que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$  de modo que, por la proposición 3.9

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| &= \int_{\Gamma_1} f \|d\gamma_1\| + \int_{\Gamma_2} f \|d\gamma_2\| + \int_{\Gamma_3} f \|d\gamma_3\| + \int_{\Gamma_4} f \|d\gamma_4\| \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1+t^2) dt + \int_0^1 (1+(1-t)^2) dt + \int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= \int_0^1 (4-4t+4t^2) dt \\ &= 4 - 2 + \frac{4}{3} \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

en donde  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  son la curva imagen (cada uno de los lados del cuadrado) de las funciones  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  y  $\gamma_4$ , respectivamente.

Una pregunta que es muy pertinente hacerse con relación a este tipo de integral es la siguiente: ¿qué tanto depende el valor de  $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$  de la parametrización  $\gamma$ ? Cuando se calculó la longitud de una curva  $\Gamma$  (o la masa total de un alambre, o el área de una barda) supusimos que la parametrización con la que estábamos trabajando era inyectiva, y esto se hizo con el fin de no “agregar de más” a lo que estábamos calculando. Esto nos lleva a sospechar que, en tanto dos parametrizaciones  $\gamma$  y  $\delta$  recorran “el mismo número de veces” a la curva  $\Gamma$ , sin importar la rapidez y la orientación con que lo hagan, al realizar la integral con cualquiera de ellas nos debe de dar el mismo resultado. Esta idea de que dos parametrizaciones recorran “el mismo número de veces” a la curva  $\Gamma$ , se puede formalizar usando el concepto de reparametrización definida en 3.4, de la

siguiente manera: si  $\delta$  se puede escribir como una reparametrización inyectiva de  $\gamma$  (sin importar si preserva o no la orientación) entonces diremos que  $\gamma$  y  $\delta$  recorren “el mismo número de veces” a la curva  $\Gamma$ . La siguiente proposición, con la que concluimos esta sección, concreta estas ideas.

**Proposición 3.11** Sean,  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una curva suave por pedazos y  $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos parametrizaciones de  $\Gamma$  tales que existe  $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$  una biyección de clase  $C^1$  con la propiedad de que  $\delta = \gamma \circ \alpha$ , entonces

$$\int_{\Gamma} f \|d\gamma\| = \int_{\Gamma} f \|d\delta\|$$

**Dem.** Como se establece en la definición 3.4 (y se pide probar en el problema 5), dado que  $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$  es una biyección, se debe tener que  $\alpha'(s) \geq 0$  para toda  $s \in [c, d]$  ó  $\alpha'(s) \leq 0$  para toda  $s \in [c, d]$ . Supongamos que ocurre la segunda posibilidad (la primera se deja como problema al lector) en cuyo caso se debe tener que  $\alpha(c) = b$  y  $\alpha(d) = a$ . Ahora, si en la integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt$$

hacemos el cambio de variable  $t = \alpha(s)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_d^c f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s) ds \\ &= - \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot \alpha'(s) ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot (-\alpha'(s)) ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s))\| \cdot |\alpha'(s)| ds \\ &= \int_c^d f(\gamma(\alpha(s))) \cdot \|\gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\| ds \\ &= \int_c^d f((\gamma \circ \alpha)(s)) \cdot \|(\gamma \circ \alpha)'(s)\| ds \\ &= \int_c^d f(\delta(s)) \cdot \|\delta'(s)\| ds \end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} f \|d\delta\|$$

■

Una consecuencia de la proposición anterior que es importante mencionar, es que

$$\int_{\Gamma} f \|d\gamma\| = \int_{\Gamma} f \|d(-\gamma)\|$$

Concluimos esta sección mostrando otra interpretación del concepto de integral de una función escalar  $f$  sobre una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ . Un problema que suele ser importante resolver, es el de conocer el “promedio” de los valores de la función  $f$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  (si, por ejemplo,  $f$  representa la densidad de masa de un alambre que tiene la forma de la curva  $\Gamma$ , suele ser importante saber cuál es la “densidad promedio” de dicho alambre).

A fin de contestar esta pregunta, empezaremos por subdividir a la curva  $\Gamma$  en  $k$  subarcos  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  de la misma longitud y elegir en cada uno de ellos puntos  $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_k$ . De esta forma, el número

$$\frac{f(\hat{\xi}_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k)}{k}$$

es una aproximación al promedio de los valores de la función  $f$  sobre la curva  $\Gamma$ , y esta aproximación será mejor en la medida de que  $k$  sea más grande.

Dado que subdividimos en subarcos  $\Gamma_i$  de la misma longitud, se tiene que

$$\frac{l(\Gamma_i)}{l(\Gamma)} = \frac{1}{k}$$

para cada  $i = 1, \dots, k$ , de tal forma que

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{\xi}_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k)}{k} &= f(\hat{\xi}_1) \frac{1}{k} + \dots + f(\hat{\xi}_k) \frac{1}{k} \\ &= f(\hat{\xi}_1) \frac{l(\Gamma_1)}{l(\Gamma)} + \dots + f(\hat{\xi}_k) \frac{l(\Gamma_k)}{l(\Gamma)} \\ &= \frac{1}{l(\Gamma)} \left( f(\hat{\xi}_1) l(\Gamma_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k) l(\Gamma_k) \right) \end{aligned}$$

Ahora, si  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una parametrización inyectiva de  $\Gamma$ , si tomamos la partición  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$  del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = \Gamma_i$  y elegimos  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  tal que  $\gamma(\xi_i) = \hat{\xi}_i$  (para cada  $i = 1, \dots, k$ ), entonces

$$\begin{aligned} \frac{f(\hat{\xi}_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k)}{k} &= \frac{1}{l(\Gamma)} \left( f(\hat{\xi}_1) l(\Gamma_1) + \dots + f(\hat{\xi}_k) l(\Gamma_k) \right) \\ &\approx \frac{1}{l(\Gamma)} \sum_{i=1}^k f(\hat{\xi}_i) \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &\approx \frac{1}{l(\Gamma)} \sum_{i=1}^k f(\gamma(\xi_i)) \cdot \|\gamma'(\xi_i)\| \cdot (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| \end{aligned}$$

de donde es claro que el número

$$\frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$$

es la forma adecuada de calcular el “promedio” de los valores de  $f$  a lo largo de la curva  $\Gamma$  (sin olvidar que  $\gamma$  debe ser una parametrización inyectiva de  $\Gamma$ ).

### 3.3 Integrando funciones vectoriales

Como en los casos anteriores, plantearemos un problema cuya solución nos conduzca a la definición del concepto de integral de línea de funciones vectoriales, que desarrollaremos en esta sección.

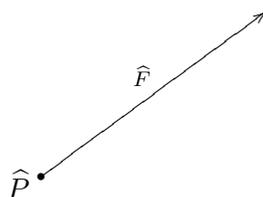


Figura 3.12: Una fuerza  $\hat{F}$  “actuando” en un punto  $\hat{P}$

Todos tenemos una idea intuitiva de lo que significa que en un cierto punto  $\hat{P}$  del espacio (o del plano) esté “actuando” una fuerza  $\hat{F}$ . Este hecho lo podemos representar geoméricamente si en este punto  $\hat{P}$  colocamos una flecha que represente a esa fuerza  $\hat{F}$  (ver figura 3.12). Un ejemplo de esto es la fuerza de gravedad que ejerce la tierra y que actúa en cada punto del espacio. En general, sabemos que hay situaciones en las que, ya sea por la presencia de un objeto de masa muy grande, de un objeto que posea carga eléctrica, o de un imán, en cada punto alrededor de ellos “actúa” una fuerza, es decir, se crea un “campo de fuerzas” (ver figura 3.13).

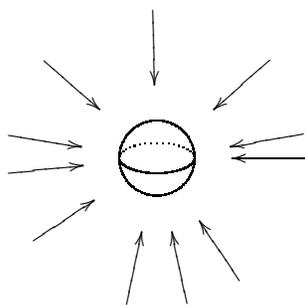


Figura 3.13: Un campo de fuerzas

Para empezar con algo sencillo, supongamos que en el plano tenemos un campo de fuerzas constante, es decir, que en cada punto  $\hat{P}$  del plano actúa la misma fuerza hacia abajo  $\hat{F}$ , como se muestra en la figura 3.14 (así suele suponerse que es el campo gravitatorio de la tierra para escalas muy pequeñas).

Si ahora suponemos que un objeto se mueve desde un punto  $\hat{P}$  hacia un punto  $\hat{Q}$  sobre el segmento de recta que los une. Existen básicamente tres situaciones que se pueden distinguir en cuanto a las posiciones de estos puntos:

1.  $\hat{P}$  está más elevado que  $\hat{Q}$

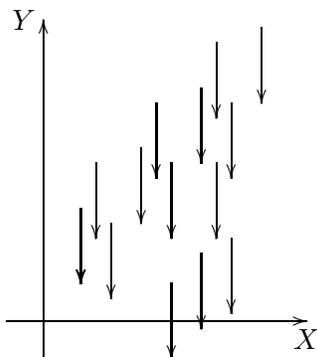
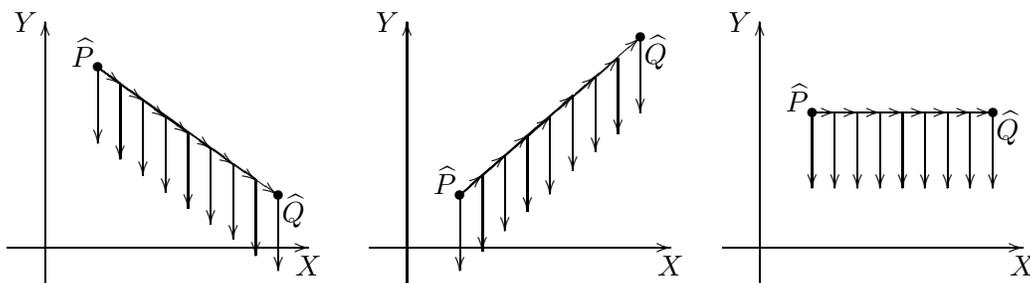


Figura 3.14: Un campo de fuerzas constante

2.  $\hat{Q}$  está más elevado que  $\hat{P}$
3.  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$  están a la misma altura

En el primer caso, en cada punto del trayecto de  $\hat{P}$  a  $\hat{Q}$  el campo de fuerzas actúa en “favor” del movimiento; en el segundo caso actúa en “contra” del movimiento y en el tercero, ni en “favor” ni en “contra” del movimiento (situaciones que seguramente todos las hemos experimentado) (ver figura 3.15). Una manera de medir la magnitud de esta “acción” del campo es a través de la componente de la fuerza  $\hat{F}$  en la dirección del vector  $\hat{Q} - \hat{P}$  (que es el que determina la dirección del movimiento) y que está dada por:

$$\hat{F} \cdot \left( \frac{\hat{Q} - \hat{P}}{\|\hat{Q} - \hat{P}\|} \right)$$

Figura 3.15: Posibles posiciones de los puntos  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ 

Nótese que este número nos da una medida muy precisa del efecto producido por el campo en cada punto del recorrido. Justo cuando el campo no actúa en favor o en contra del movimiento, este número es cero; y si no es cero, su valor absoluto es una medida de la magnitud con la que actúa, y su signo nos dice si lo hace en favor o en contra del movimiento. En la Física, a este número, multiplicado por la distancia recorrida, es decir,

$$\hat{F} \cdot \left( \frac{\hat{Q} - \hat{P}}{\|\hat{Q} - \hat{P}\|} \right) \cdot \|\hat{Q} - \hat{P}\| = \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) \quad (3.7)$$

se le conoce como el *trabajo* realizado por el campo de fuerzas a lo largo de ese segmento.

Como es de suponerse, este concepto de trabajo se puede extender a un campo de fuerzas arbitrario y a una trayectoria (o curva) arbitraria que una a dos puntos. Supongamos que tenemos una función  $F$  que a cada punto  $\hat{x}$  del plano le asocia un vector  $F(\hat{x})$  (también en el plano) que representa a la fuerza que actúa en  $\hat{x}$ , y que  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función que describe la trayectoria que sigue un objeto para ir de un punto  $\hat{P} = \gamma(a)$  hacia un punto  $\hat{Q} = \gamma(b)$ . ¿Cuál es, y cómo lo calculamos, el trabajo total (o el trabajo “neto”, como sería más adecuado llamarlo) realizado por el campo de fuerzas  $F$  a lo largo de la trayectoria descrita por  $\gamma$ ?

Hagamos lo siguiente:

1. tomemos una partición  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$  del intervalo  $[a, b]$
2. en cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  elijamos un punto  $\xi_i$  (para cada  $i = 1, \dots, k$ ), y
3. supongamos que en cada punto del segmento de recta que une a los puntos  $\gamma(t_{i-1})$  y  $\gamma(t_i)$  el campo de fuerzas  $F$  tiene un valor constante  $F(\gamma(\xi_i))$

Entonces, de acuerdo con 3.7, el número

$$F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))$$

es el trabajo realizado por el campo  $F$  si el objeto se mueve del punto  $\gamma(t_{i-1})$  hacia el punto  $\gamma(t_i)$  sobre el segmento de recta que los une, y sería una aproximación a lo que bien podría calificarse como el trabajo realizado por el campo  $F$ , cuando se empieza y se termina en estos mismos puntos, pero siguiendo la trayectoria descrita por  $\gamma$  (restringida al intervalo  $[t_{i-1}, t_i]$ ). De esta forma, la suma

$$\sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})) \tag{3.8}$$

será una buena forma de “medir” el trabajo realizado por el campo  $F$  cuando el objeto se mueve del punto  $\hat{P} = \gamma(a)$  hacia el punto  $\hat{Q} = \gamma(b)$ , siguiendo la trayectoria descrita por  $\gamma$ .

La mejor parte de este procedimiento es que si ahora usamos la aproximación

$$\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx (t_i - t_{i-1}) (\gamma'_1(\xi_i), \dots, \gamma'_n(\xi_i)) = (t_i - t_{i-1}) \gamma'(\xi_i)$$

que establecimos en 3.1 para este vector, la suma 3.8 será muy parecida a la suma

$$\sum_{i=1}^k (F(\gamma(\xi_i)) \cdot \gamma'(\xi_i)) (t_i - t_{i-1})$$

la cual es fácilmente reconocible como una suma de Riemann de la integral

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \tag{3.9}$$

Dado que todas las estimaciones que estamos haciendo, tanto para “medir” el trabajo realizado por el campo, como para calcular la integral anterior, son mejores en la medida de que la partición  $\mathcal{P}$  sea cada vez más fina, es del todo razonable concluir que la integral 3.9 es la forma más adecuada de extender el concepto de trabajo realizado por un campo arbitrario  $F$  sobre una trayectoria  $\gamma$ , también arbitraria.

Vale la pena destacar que, al menos en el caso en que  $F$  es un campo constante (es decir, que  $F(\hat{x}) = \hat{F}$  para toda  $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ ) y  $\gamma$  es la trayectoria que recorre el segmento de recta que une a  $\hat{P}$  con  $\hat{Q}$  (empezando en  $\hat{P}$  y terminando en  $\hat{Q}$ ), la integral 3.9 nos conduce a lo mismo que definimos en 3.7. En efecto, si tomamos  $\gamma(t) = \hat{P} + t(\hat{Q} - \hat{P})$  con  $t \in [0, 1]$ , entonces

$$\begin{aligned} \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt &= \int_0^1 \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) dt \\ &= \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) \cdot \int_0^1 dt \\ &= \hat{F} \cdot (\hat{Q} - \hat{P}) \end{aligned}$$

El concepto (físico) de trabajo (realizado por un campo de fuerzas) es una de las motivaciones más importantes para definir el concepto (matemático) de integral de línea (o de trayectoria) de una función de valores vectoriales. Nuestro siguiente trabajo será formalizar este último concepto y exponer sus propiedades más importantes, la mayoría de las cuales serán motivadas e interpretadas en términos de este concepto físico.

**Definición 3.12** Sean,  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en el conjunto  $U$ , abierto y conexo, una curva  $\Gamma \subset U$  y  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave por pedazos tal que  $\Gamma = \gamma([a, b])$ . Definimos la integral de  $F$  sobre la curva  $\Gamma$  según la parametrización  $\gamma$  (que denotaremos por  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ ) como

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Es relevante destacar que dos de las herramientas más importantes que se usan en esta definición son:

1. las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  con las cuales describimos a los campos de fuerza de la siguiente manera: cada  $n$ -ada  $(x_1, \dots, x_n)$  del dominio representará las coordenadas (casi siempre en un sistema euclideo) del punto  $\hat{x}$  sobre el que actúa la fuerza  $F(\hat{x})$ , que a su vez se representará por la  $n$ -ada  $(F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$  la cual (casi siempre) se interpretará como las coordenadas de un vector en el mismo sistema euclideo, sólo que trasladado al punto  $\hat{x}$ . En cuanto al dominio de estas funciones, de aquí en adelante siempre supondremos que es un conjunto abierto y conexo, y para abreviar, a este tipo de conjunto simplemente le llamaremos *región*.
2. las funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$  suaves por pedazos, con las cuales describiremos a la trayectoria seguida entre dos puntos, y cuyas propiedades ya discutimos anteriormente.

Antes de abordar las propiedades básicas de este nuevo concepto (y que serán muy parecidas a las de la integral de línea de funciones escalares), daremos el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.13** Considere la función  $F(x, y) = (0, -g)$  para toda  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , con  $g \geq 0$ . Calcular  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$  donde  $\Gamma$  sea:

1. el segmento de recta que va del punto  $(0,0)$  al punto  $(1,1)$ , recorrido en esa dirección
2. el arco de la circunferencia con centro en el  $(0,1)$  que une a esos mismos puntos, recorrido en la dirección contraria a las manecillas del reloj y cuyo punto inicial es el  $(0,0)$
3. el segmento de la parábola  $y = x^2$  que une a estos dos puntos, recorrido del punto  $(1,1)$  al punto  $(0,0)$

*Solución.* Para el primer inciso, hacemos  $\gamma(t) = (t, t)$  con  $t \in [0, 1]$ . Entonces,  $\gamma'(t) = (1, 1)$  para toda  $t \in [0, 1]$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^1 (0, -g) \cdot (1, 1) dt \\ &= \int_0^1 -g dt \\ &= -g \end{aligned}$$

Para el segundo inciso, hacemos  $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t) + 1)$  con  $t \in [-\pi/2, 0]$ . Entonces,  $\gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$  para toda  $t \in [-\pi/2, 0]$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{-\pi/2}^0 (0, -g) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= -g \int_{-\pi/2}^0 \cos(t) dt \\ &= -g \left( \sin(t) \Big|_{-\pi/2}^0 \right) \\ &= -g (\sin(0) - \sin(-\pi/2)) \\ &= -g \end{aligned}$$

Para el último inciso, tomamos  $\gamma(t) = (1-t, (1-t)^2)$  con  $t \in [0, 1]$ . Entonces,  $\gamma'(t) = (-1, -2(1-t))$  para toda  $t \in [0, 1]$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^1 (0, -g) \cdot (-1, -2(1-t)) dt \\ &= -g \int_0^1 -2(1-t) dt \\ &= -g \left( (1-t)^2 \Big|_0^1 \right) \\ &= -g(0 - 1) \\ &= g \end{aligned}$$

Los resultados de este ejemplo darán lugar a algunas reflexiones importantes acerca de este tipo de integrales, pero antes veremos sus propiedades básicas.

Las dos primeras son totalmente equivalentes a las que vimos para el caso de funciones escalares y en su formulación casi es suficiente nada más cambiar el nombre de la integral.

**Proposición 3.14** Sean,  $U \subset \mathbb{R}^n$  una región, y  $\Gamma \subset U$  una curva suave por pedazos parametrizada por la función  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Si  $F, G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son continuas y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces

$$\int_{\Gamma} (\alpha F + \beta G) \cdot d\gamma = \alpha \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \beta \int_{\Gamma} G \cdot d\gamma$$

**Proposición 3.15** Sean,  $U \subset \mathbb{R}^n$  una región, y  $\Gamma, \Delta \subset U$  curvas suaves por pedazos parametrizadas por las funciones  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , respectivamente, tales que  $\Gamma \cup \Delta$  es suave por pedazos y está parametrizada por  $\gamma + \delta$ . Si  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua entonces

$$\int_{\Gamma \cup \Delta} F \cdot d(\gamma + \delta) = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \int_{\Delta} F \cdot d\delta$$

Como es de suponerse, la prueba de estas proposiciones se deja como un problema para el lector.

Con respecto a la tercera proposición que probamos para el caso de la integral de funciones escalares, si bien hay una equivalente para el caso de la integral de funciones vectoriales, tenemos que ser más cuidadosos a la hora de formularla puesto que, como se puede apreciar en su definición, la “dirección” con que se hace un recorrido afecta la forma que en que “actúa” un campo de fuerzas (simplemente tenga presente el lector, por ejemplo, que bajo la influencia del campo gravitatorio de la tierra no es lo mismo ir para “arriba” que para “abajo” (¡como en muchas otras situaciones de la vida!)).

**Proposición 3.16** Sean,  $U \subset \mathbb{R}^n$  una región,  $\Gamma \subset U$  una curva suave por pedazos, y  $F : \Gamma \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua. Si  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos parametrizaciones de  $\Gamma$  tales que existe  $\alpha : [c, d] \rightarrow [a, b]$  una biyección de clase  $C^1$  con la propiedad de que  $\delta = \gamma \circ \alpha$ , entonces:

1. si  $\alpha$  preserva la dirección, se tiene que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} F \cdot d\delta$$

2. si  $\alpha$  invierte la dirección, se tiene que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = - \int_{\Gamma} F \cdot d\delta$$

En particular

$$\int_{\Gamma} F \cdot d(-\gamma) = - \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

**Dem.** Probaremos el segundo inciso y el primero queda como un problema para el lector. En el caso que nos ocupamos, se tiene que  $\alpha(c) = b$  y  $\alpha(d) = a$ . Ahora, si en la integral

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

hacemos el cambio de variable  $t = \alpha(s)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_d^c F(\gamma(\alpha(s))) \cdot \gamma'(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s) ds \\ &= - \int_c^d F(\delta(s)) \cdot \delta'(s) ds \\ &= - \int_{\Gamma} F \cdot d\delta \end{aligned}$$

■

Con base en el segundo inciso de esta última proposición podemos concluir que, si en el tercer inciso del ejemplo 3.13 calculamos  $\int_{\Gamma} F \cdot d(-\gamma)$ , entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d(-\gamma) = -g$$

de tal forma que el trabajo realizado por el campo  $F$  es el mismo para los tres recorridos ahí descritos (los cuales empiezan en el  $(0,0)$  y terminan en el  $(1,1)$ ). Esta característica de este campo  $F$  constituye el punto de arranque de la siguiente sección.

### 3.4 Campos conservativos (primera parte)

Como se recordará, el tipo de problemas que motivan la definición del concepto de integral de línea de funciones escalares, están relacionados con el cálculo de la masa de un alambre o el área de una barda. Así, si dos alambres coinciden en sus extremos pero son de formas diferentes, aun cuando hubiera una sola función que describa la densidad de masa de ambos alambres, en general no hay porque esperar que sus masas sean iguales. De esta forma, lo más seguro es que las integrales de una función escalar sobre dos curvas que coinciden en sus puntos extremos, en general no tengan por qué ser iguales (¡lo más seguro es que casi nunca lo sean!).

Este no es el caso de la integral de línea de una función de valores vectoriales. Por el contrario, cuando se tiene un campo de fuerzas  $F(\hat{x})$ , una de las preguntas importantes a responder es si el trabajo realizado por dicho campo a lo largo de una trayectoria  $\gamma$  que une a dos puntos  $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ , depende de la trayectoria  $\gamma$  que se siguió, o sólo de los puntos extremos de ésta ( $\hat{P}$  y  $\hat{Q}$ ) (ver figura 3.16).

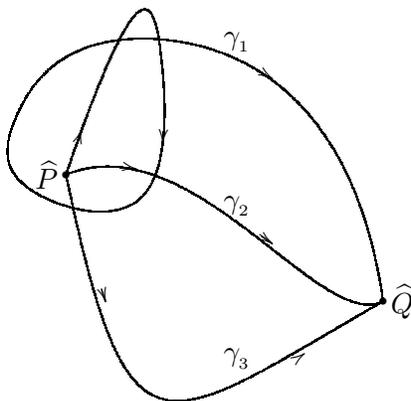


Figura 3.16: Distintas curvas (o trayectorias) que inician en  $\hat{P}$  y terminan en  $\hat{Q}$

El campo de fuerzas definido por la función del ejemplo 3.13 (que por cierto es la forma en que suele representarse al campo gravitacional de la tierra a pequeñas escalas y en un plano), pareciera ser uno de esos campos para los cuales el trabajo realizado sólo dependerá de los puntos extremos de la trayectoria y no de ésta.

En términos más técnicos, la pregunta que abordaremos en esta sección es la siguiente:

¿si  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua, y  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos funciones suaves por pedazos, una describiendo una curva  $\Gamma \subset U$  y la otra una curva  $\Delta \subset U$ , tales que  $\gamma(a) = \hat{P} = \delta(c)$  y  $\gamma(b) = \hat{Q} = \delta(d)$  (es decir, que empiezan en el mismo punto  $\hat{P} \in U$  y terminan en el mismo punto  $\hat{Q} \in U$ ) entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Delta} F \cdot d\delta?$$

En el caso particular de la función del ejemplo 3.13 es fácil verificar que esta propiedad sí se cumple. Supongamos que  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\delta = (\delta_1, \delta_2) : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  satisfacen las condiciones requeridas y que  $F$  es la función dada en ese ejemplo. En particular, tendremos que:

$$\gamma_2(a) = \delta_2(c) \quad \text{y} \quad \gamma_2(b) = \delta_2(d)$$

Entonces, usando el Teorema Fundamental del Cálculo (problema 2), tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b (0, -g) \cdot ((\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))) dt \\ &= -g \int_a^b \gamma_2'(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -g(\gamma_2(b) - \gamma_2(a)) \\
&= -g(\delta_2(d) - \delta_2(c)) \\
&= -g \int_c^d \delta_2'(t) dt \\
&= \int_c^d (0, -g) \cdot (\delta_1'(t), \delta_2'(t)) dt \\
&= \int_c^d F(\delta(t)) \cdot \delta'(t) dt \\
&= \int_{\Delta} F \cdot d\delta
\end{aligned}$$

El ejemplo anterior sugiere que la clave de nuestra pregunta se encuentra en la expresión

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

y si el lector tiene buena memoria, recordará que una expresión similar a ésta aparece en la fórmula de cambio de variable para integrales de funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  (ecuación 2.5 del capítulo 2) y que ésta coincidiría con ser la derivada de una composición de funciones, si  $F$  tuviera una especie de “primitiva”.

Las funciones cuya derivada se representa en términos de un vector son las funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ . En efecto, si  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una de estas funciones, su derivada en cada punto  $\hat{x} \in U$  (a la cual se le conoce con el nombre de gradiente de  $\varphi$  en  $\hat{x}$  y se denota por  $\nabla\varphi(\hat{x})$ ) es un vector en  $\mathbb{R}^n$ , de tal forma que si

$$F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x}) \quad \text{para toda } \hat{x} \in U \tag{3.10}$$

entonces

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = (\varphi \circ \gamma)'(t)$$

para toda  $t \in [a, b]$ , y de esta manera se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b \nabla\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\
&= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\
&= (\varphi \circ \gamma) \Big|_a^b \\
&= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \\
&= \varphi(\hat{Q}) - \varphi(\hat{P})
\end{aligned}$$

con lo cual concluimos que, si una función  $F$  satisface la condición 3.10 para alguna función  $\varphi$ , entonces la integral de línea de  $F$  sobre una curva  $\Gamma$  parametrizada por una función  $\gamma$  sólo depende de los puntos extremos de  $\gamma$  (y de la función  $\varphi$ ). ¡Obsérvese que la identidad

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \quad (3.11)$$

cuando  $F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x})$ , es una especie de generalización del Teorema Fundamental del Cálculo!

De la identidad 3.11 también se desprende una propiedad que está muy relacionada con el problema que planteamos en un principio. Nótese que, si en particular la función  $\gamma$  describe una trayectoria cerrada, es decir que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

En resumen, si la función (o el campo)  $F$  satisface la condición 3.10, entonces necesariamente sucede lo siguiente:

1. la integral de línea de  $F$  sobre una curva  $\Gamma$  parametrizada por una función  $\gamma$  sólo depende de los puntos extremos de  $\gamma$
2. la integral de línea de  $F$  sobre cualquier curva  $\Gamma$  parametrizada por una trayectoria cerrada  $\gamma$ , vale cero

La mejor parte de esta historia es que ¡es suficiente que alguna de las condiciones anteriores se cumpla para que podamos asegurar que existe una función  $\varphi$  para la cual se satisface 3.10!

Si una función  $\varphi$  satisface la multicitada condición 3.10 entonces se dice que la función  $F$  es un *campo conservativo* (o *gradiente*) y este concepto lo formalizamos en la siguiente

**Definición 3.17** Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en la región  $U$ . Decimos que  $F$  es un *campo conservativo* (o *gradiente*) en  $U$  si existe  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x}) \quad \text{para toda } \hat{x} \in U$$

En este caso decimos que  $\varphi$  es un *gradiente* (o un *potencial*)<sup>2</sup> de  $F$ .

Un ejemplo de un campo conservativo es justo el que definimos en el ejemplo 3.13. Nótese que, si tomamos  $\varphi(x, y) = -gy$  entonces

$$\nabla\varphi(x, y) = (0, -g) = F(x, y)$$

para toda  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , es decir, esta función  $F$  es un campo conservativo en la región  $U = \mathbb{R}^2$ , lo que por cierto explica los resultados obtenidos en ese ejemplo.

Toda la discusión anterior queda sintetizada en el siguiente

**Teorema 3.18** Sea  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua en la región  $U$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $F$  es un campo conservativo en  $U$

<sup>2</sup>Como es de suponer, el término “potencial” proviene de la Física.

2. la integral de línea de  $F$  sobre cualquier curva  $\Gamma \subset U$  parametrizada por una función suave por pedazos y cerrada  $\gamma$  vale cero, es decir

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

3. la integral de línea de  $F$  sobre cualquier curva  $\Gamma \subset U$  parametrizada por una función suave por pedazos  $\gamma$  sólo depende de los puntos extremos de  $\gamma$ . Es decir, si  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos funciones suaves por pedazos, una describiendo una curva  $\Gamma \subset U$  y la otra una curva  $\Delta \subset U$ , tales que  $\gamma(a) = \delta(c)$  y  $\gamma(b) = \delta(d)$  entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Delta} F \cdot d\delta$$

**Dem.** 1)  $\Rightarrow$  2) Se sigue de manera inmediata de la identidad 3.11 y de que  $\gamma$  es una parametrización cerrada, es decir, que  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

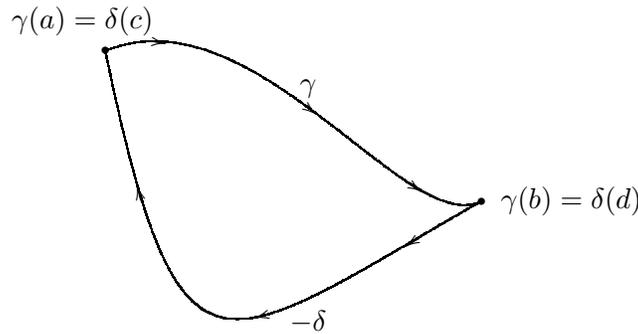


Figura 3.17: La curva  $\Gamma \cup \Delta$  parametrizada por  $\gamma + (-\delta)$

2)  $\Rightarrow$  3) Sean  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\delta : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos funciones suaves por pedazos, una describiendo una curva  $\Gamma \subset U$  y la otra una curva  $\Delta \subset U$ , tales que  $\gamma(a) = \delta(c)$  y  $\gamma(b) = \delta(d)$ . Por estas dos últimas identidades, y el hecho de que  $(-\delta)(c) = \delta(d) = \gamma(b)$  y  $(-\delta)(d) = \delta(c) = \gamma(a)$ , podemos construir la parametrización  $\gamma + (-\delta)$  de  $\Gamma \cup \Delta$  y además concluir que es cerrada (ver figura 3.17). De esta forma, por la hipótesis tenemos que

$$\int_{\Gamma \cup \Delta} F \cdot d(\gamma + (-\delta)) = 0$$

Por otra parte, por la proposición 3.15 y el segundo inciso de la proposición 3.16, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma \cup \Delta} F \cdot d(\gamma + (-\delta)) &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma + \int_{\Delta} F \cdot d(-\delta) \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{\Delta} F \cdot d\delta \end{aligned}$$

con lo cual, considerando ambas identidades, obtenemos el resultado deseado.

3)  $\Rightarrow$  1) Sea  $\hat{x}_0 \in U$  un punto fijo. Definiremos  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera: dado  $\hat{x} \in U$ , hacemos

$$\varphi(\hat{x}) = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

en donde  $\Gamma \subset U$  es cualquier curva formada por segmentos paralelos a los ejes coordenados (en el problema 18 se pide probar que siempre existe al menos una de estas curvas) (ver figura 3.18) parametrizada por una función suave por pedazos  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\gamma(a) = \hat{x}_0$  y  $\gamma(b) = \hat{x}$ . Nótese que por nuestra hipótesis, podemos asegurar que el valor  $\varphi(\hat{x})$  no depende ni de la curva  $\Gamma \subset U$  ni de su parametrización  $\gamma$ , siempre y cuando ésta última empiece en  $\hat{x}_0$  y termine en  $\hat{x}$ . Por esta razón,  $\varphi$  está bien definida.

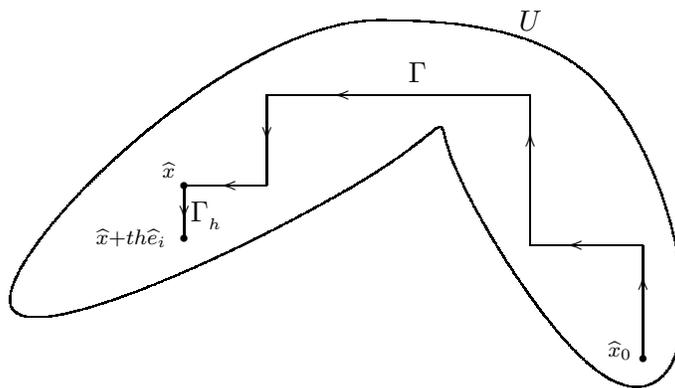


Figura 3.18: La curva  $\Gamma \cup \Gamma_h$

Probaremos ahora que  $\nabla\varphi(\hat{x}) = F(\hat{x})$  para toda  $\hat{x} \in U$ . Para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  sabemos que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_i) - \varphi(\hat{x})}{h}$$

en donde  $\hat{e}_i$  es el  $i$ -ésimo vector básico de  $\mathbb{R}^n$  (el que tiene un 1 en la  $i$ -ésima coordenada y cero en las demás).

Supongamos que  $\Gamma$  y  $\gamma$  son como en la definición de  $\varphi(\hat{x})$  y sea  $\Gamma_h$  el segmento de recta que va del punto  $\hat{x}$  al punto  $\hat{x} + h\hat{e}_i$  y  $\gamma_h(t) = \hat{x} + th\hat{e}_i$  con  $t \in [0, 1]$ , una parametrización de éste (ver figura 3.18). Usando estas curvas y sus parametrizaciones, podemos escribir que

$$\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_i) = \int_{\Gamma \cup \Gamma_h} F \cdot d(\gamma + \gamma_h)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_i) - \varphi(\hat{x})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \left( \int_{\Gamma \cup \Gamma_h} F \cdot d(\gamma + \gamma_h) - \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_{\Gamma_h} F \cdot d\gamma_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^1 F(\gamma_h(t)) \cdot \gamma'_h(t) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \int_0^1 F(\hat{x} + th\hat{e}_i) \cdot (h\hat{e}_i) dt \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 F_i(\hat{x} + th\hat{e}_i) dt \\
 &= F_i(\hat{x})
 \end{aligned}$$

en donde la última identidad se sigue de la continuidad de  $F$  (y por tanto de cada  $F_i$ ) y con la cual concluimos la prueba. ■

La importancia del teorema anterior está en el hecho de que establece dos maneras diferentes de responder a la pregunta con que iniciamos esta sección. Por lo general, la condición del primer inciso suele ser útil para mostrar cuándo el trabajo realizado por un campo de fuerzas no depende de la trayectoria que une a dos puntos, y la condición del segundo inciso suele ser más útil cuando sucede lo contrario. Estas características quedan ilustradas en los siguientes ejemplos.

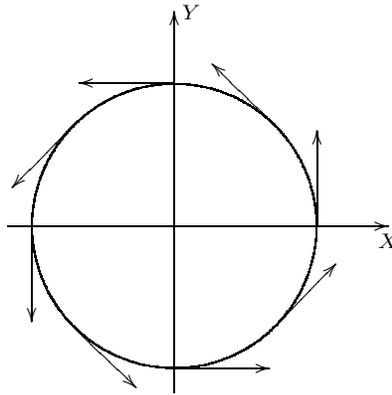


Figura 3.19: El campo  $F$  y la curva  $\Gamma$  del ejemplo 3.19

**Ejemplo 3.19** Considere el campo definido por la función

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \tag{3.12}$$

con  $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Mostraremos, usando el inciso dos del teorema 3.18, que este campo no es conservativo en su dominio  $U$ .

*Solución.* En efecto, sea  $\Gamma \subset U$  la circunferencia de radio  $r > 0$  con centro en el origen, parametrizada por la función  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \text{sen}(t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left( \frac{-r \operatorname{sen}(t)}{(r \cos(t))^2 + (r \operatorname{sen}(t))^2}, \frac{r \cos(t)}{(r \cos(t))^2 + (r \operatorname{sen}(t))^2} \right) \cdot (-r \operatorname{sen}(t), r \cos(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} (r^2 \operatorname{sen}^2(t) + r^2 \cos^2(t)) dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

y por lo tanto, dado que  $\gamma$  es una parametrización cerrada de  $\Gamma$ , el inciso dos del teorema 3.18 nos asegura que este campo no es conservativo en  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Vale la pena aclarar que en este ejemplo lo que se prueba es que el campo definido por la función de 3.12 *no es conservativo en  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$* , aclaración cuya razón de ser será comprendida más adelante.

En realidad, hasta ahora no contamos con ninguna herramienta que nos permita, ya no digamos decidir, sino cuando menos sospechar, cuándo un campo cumple alguna de las tres condiciones del teorema 3.18. Si bien es cierto que la elección que hicimos de la curva  $\Gamma$  (y de su parametrización  $\gamma$ ) del ejemplo anterior se podría justificar “geométricamente”<sup>3</sup>, esto es algo que en general sólo se puede hacer con algunos ejemplos. Proceder con audacia (o ingenuidad, si se prefiere) puede tener sus compensaciones, como se ilustra en el siguiente

**Ejemplo 3.20** Considere el campo definido por la función  $F(x, y) = (-e^x \cos(y), e^x \operatorname{sen}(y))$  con  $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2$ . ¿ $F$  es un campo conservativo en la región  $U$ ?

*Solución.* Si partimos del supuesto de que la respuesta es afirmativa, esto significa que debe existir una función  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = -e^x \cos(y) \quad y \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) \quad (3.13)$$

para toda  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

De la primera de estas identidades concluimos entonces que

$$\varphi(x, y) = -e^x \cos(y) + g(y)$$

donde  $g$  es una función que sólo depende de la variable  $y$ . Ahora, si la expresión anterior la derivamos con respecto de la variable  $y$  tendremos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y) + g'(y)$$

y comparando con la segunda identidad de 3.13, llegamos a que

$$g'(y) = 0$$

---

<sup>3</sup>Observe el lector que en cada punto de esta curva, el campo  $F$  siempre “actúa” en la dirección del movimiento determinada por la parametrización  $\gamma$  (ver figura 3.19), lo cual “explica” por qué el trabajo neto realizado por el campo  $F$  a lo largo de esa curva cerrada no es cero.

para toda  $y$ , o lo que es lo mismo, que  $g$  debe ser una función constante. Por tanto, nuestra conclusión es que

$$\varphi(x, y) = -e^x \cos(y) + c$$

para toda  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , con  $c \in \mathbb{R}$  una constante. Como el lector podrá comprobar fácilmente, ¡cualquier función  $\varphi$  de este tipo cumple con ser un gradiente para nuestro campo  $F$ !

No se puede negar que la función del ejemplo anterior es muy sencilla y que el procedimiento que ahí se sigue se puede complicar si el número de variables aumenta. Sin embargo, el hecho de suponer que un campo sí es conservativo nos puede llevar a conclusiones muy interesantes.

En efecto, nótese que si un campo  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo conservativo en  $U$ , esto significa que existe  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \quad (3.14)$$

para toda  $(x, y) \in U$ . Si ahora también suponemos que  $F$  es una función de clase  $C^1$  en  $U$  (como en el ejemplo anterior), las identidades anteriores nos llevan a concluir que  $\varphi$  es entonces una función de clase  $C^2$  en  $U$  y justo para este tipo de funciones existe una propiedad muy importante: la propiedad de las derivadas parciales cruzadas (ver problema 4 del capítulo 2) que establece que

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y)$$

para toda  $(x, y) \in U$ . Dado que, por las identidades 3.14, los dos elementos de la identidad anterior se pueden escribir en términos de las funciones  $P$  y  $Q$ , entonces debemos tener que

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(x, y) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x, y) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

para toda  $(x, y) \in U$ .

Como el lector habrá notado, la discusión anterior nos permite establecer un primer criterio para determinar si un campo  $F$  es un campo conservativo. Aún cuando lo hicimos para campos en  $\mathbb{R}^2$ , su generalización es muy sencilla para campos en  $\mathbb{R}^n$  y así lo establecemos en la siguiente

**Proposición 3.21** *Sea  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  en  $U$ . Si  $F$  es un campo conservativo en  $U$  entonces*

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x}) \quad (3.15)$$

para toda  $\hat{x} \in U$  y para toda  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i \neq j$ .

**Dem.** Se deja al lector ■

La proposición anterior establece lo que se conoce como una consecuencia (o condición) necesaria del hecho de que un campo  $F$  sea un campo conservativo en una región  $U$ . Como suele suceder, este tipo de condiciones son más útiles cuando no se satisfacen. En efecto, si la identidad 3.15 no se cumple para al menos una  $\hat{x} \in U$  podemos asegurar entonces que el campo  $F$  no es conservativo en  $U$ . El siguiente ejemplo ilustra esto.

**Ejemplo 3.22** Considere el campo definido por la función

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)) \\ &= \left( \frac{-yz}{x^2 + y^2}, \frac{xz}{x^2 + y^2}, \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \right) \end{aligned}$$

con  $(x, y, z) \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ . ¿ $F$  es un campo conservativo en  $U$ ?

*Solución.* De las tres identidades que debieran satisfacerse en caso de que este campo fuera conservativo, dos de ellas no se satisfacen para toda  $(x, y, z) \in U$ . En efecto

$$\frac{\partial F_3}{\partial x}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(x, y, z) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

las cuales difieren, por ejemplo, en  $(x, y, z) = (1, 0, 0) \in U$ .

Análogamente

$$\frac{\partial F_3}{\partial y}(x, y, z) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

y

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

que también difieren en el mismo punto. Por tanto, la proposición 3.21 nos permite asegurar que el campo  $F$  no es un campo conservativo en  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ .

Sin duda la pregunta que surge de manera natural e inmediata es si la condición 3.15 de la proposición 3.21 también es una condición suficiente para que un campo  $F$  sea un campo conservativo en una región  $U$ , y como seguramente el lector ya se sospecha, la respuesta es negativa. Y el contraejemplo nos lo proporciona la función del ejemplo 3.19. En efecto, si tomamos

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

sabemos que este campo no es un campo conservativo en  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Sin embargo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= \frac{(x^2 + y^2) - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

de modo que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para toda  $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

¿Cuál es el problema? ¿hace falta pedir alguna condición adicional a la función  $F$ ? La respuesta a estas preguntas requiere de la introducción de otros conceptos y de algunos resultados relacionados con ellos, trabajo que haremos en la siguiente sección. Estos nuevos conceptos y resultados nos mostrarán que el problema que aparece aquí tiene que ver con la “geometría” (o topología) del dominio de  $F$ .

### 3.5 El rotacional en el plano

Como lo hemos hecho a lo largo de este texto, empezaremos por plantear un problema físico que, por ahora, sólo lo discutiremos para el caso del espacio de dos dimensiones.

Supongamos que tenemos un disco  $D$  de radio  $r > 0$ , “infinitamente delgado” (y por tanto “sin volumen”) el cual se encuentra sujeto por su centro (con un alfiler) en un punto  $\hat{x}_0$  de un plano. Ahora, si en un punto  $\hat{x}$  del perímetro  $\Gamma$  del disco  $D$  (en este caso una circunferencia) aplicamos una fuerza  $\hat{F}$ , es de esperarse que dicha fuerza produzca una rotación (o un giro) del disco (ver figura 3.20).

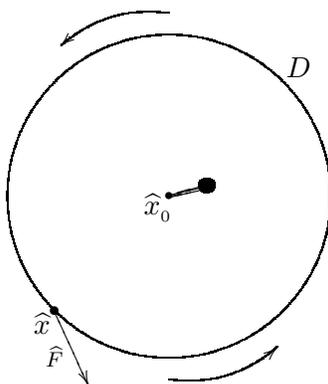


Figura 3.20: Una fuerza  $\hat{F}$  “actuando” sobre el punto  $\hat{x}$  que está en el “borde” del disco (“infinitamente delgado”)  $D$  centrado (y “sujetado” por un alfiler) en el punto  $\hat{x}_0$

¿Cómo medimos esta rotación? Es claro que la intensidad de esta rotación dependerá de “la forma” en que la fuerza  $\hat{F}$  pegue sobre el punto  $\hat{x} \in \Gamma$ . Por ejemplo, si la fuerza pega en “dirección perpendicular” al disco, éste no girará, mientras que si lo hace de “dirección tangencial”, seguramente será de esta manera como se produzca la máxima rotación posible (ver figura 3.21).

Como el lector se habrá dado cuenta, cuando hablamos de “la forma” en que la fuerza  $\hat{F}$  pega sobre el punto  $\hat{x}$ , en realidad nos referimos al ángulo que forman dicha fuerza y el disco en ese punto. De hecho, si  $\hat{T}_{\hat{x}}$  es un vector unitario y tangente a la circunferencia  $\Gamma$  en el punto  $\hat{x}$ , “la parte” de  $\hat{F}$  que realmente actúa para producir una rotación es justo la componente de  $\hat{F}$  a lo largo de  $\hat{T}_{\hat{x}}$ , la cual está dada por el número  $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$ , número que a su vez sirve para medir el ángulo entre  $\hat{F}$  y  $D$  (en  $\hat{x}$ ). Además de lo anterior, nótese también que el signo de  $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$  indica si la fuerza  $\hat{F}$  actúa en la dirección de  $\hat{T}_{\hat{x}}$  o en la contraria, lo que sin duda será de utilidad para determinar “la dirección de la rotación” producida, la que por cierto, sólo tiene dos opciones: o rota en la dirección

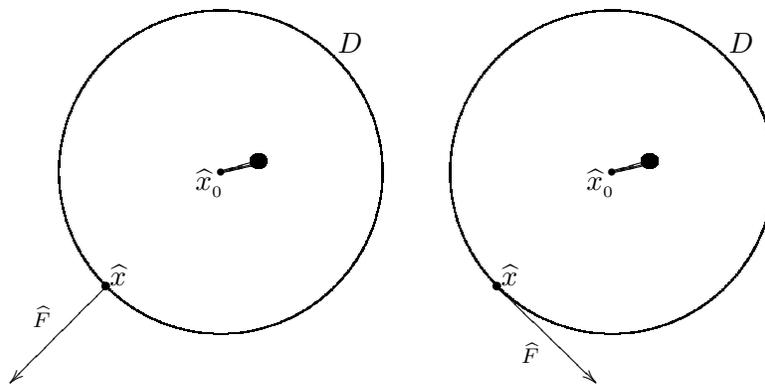


Figura 3.21: La fuerza  $\hat{F}$  “pegando” sobre el punto  $\hat{x}$  en “dirección perpendicular” a  $D$  y en “dirección tangencial” a  $D$

del movimiento de las manecillas del reloj, o rota en la contraria. Con respecto a esto, obsérvese que cualquier vector  $\hat{T}_{\hat{x}}$  tangente a la circunferencia  $\Gamma$  sólo puede “apuntar” en alguna de estas dos posibles “direcciones de rotación” (o “direcciones de recorrido”) (ver figura 3.22). Con el fin de evitar ambigüedades, aquí supondremos que siempre tomamos los vectores tangentes que apuntan en la “dirección de rotación” (o “dirección de recorrido”) contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

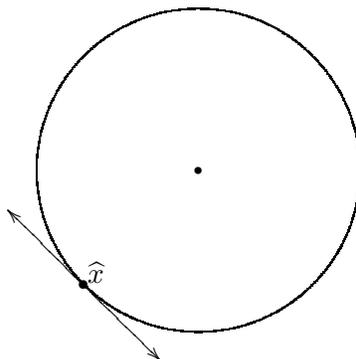


Figura 3.22: Un vector tangente al disco  $D$  en un punto  $\hat{x}$  de su “borde” siempre “apunta hacia” alguna de las dos posibles “direcciones de rotación” (o “direcciones de recorrido”) de  $D$

Así pues, por todas estas razones, es un hecho que el número

$$\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$$

es una buena forma de medir la fuerza neta ejercida (que produce rotación) sobre el disco  $D$  al aplicar la fuerza  $\hat{F}$  en el punto  $\hat{x}$  de su perímetro  $\Gamma$ , y no sólo su intensidad, sino también su dirección: si este número es negativo, significa que la fuerza ejercida actúa en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, y si es positivo, en la contraria.

Una vez que hemos determinado la fuerza neta ejercida sobre el disco  $D$  al aplicar la fuerza  $\hat{F}$  en el punto  $\hat{x}$  de su perímetro  $\Gamma$ , podemos determinar cuál es la intensidad del movimiento de rotación producido por la acción de dicha fuerza. Recuérdese que, como una consecuencia de la Primera Ley de Newton (o Ley de la Inercia), si en un instante dado un objeto es golpeado por

una fuerza que produce una aceleración de  $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$  (*unidades de longitud*)/(*unidades de tiempo*)<sup>2</sup>, y después de ese instante no lo vuelve a afectar ninguna otra fuerza, entonces este objeto viajará en línea recta y a una rapidez constante de  $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$  (*unidades de longitud*)/(*unidades de tiempo*), lo que a su vez significa que en una unidad de tiempo recorrerá una distancia de  $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$  (*unidades de longitud*). Dado que en nuestro caso el disco  $D$  estará sujeto por su centro, para obtener el número de revoluciones (o giros) que éste realizará en una unidad de tiempo, bastará con dividir la distancia que recorrería en línea recta ( $\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$ ) por su perímetro ( $2\pi r$ ) de tal forma que el número

$$\frac{\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}}{2\pi r}$$

será una medida de la rotación producida por la fuerza  $\hat{F}$  sobre el disco  $D$  y su signo determinará la orientación en la que rota, en donde (como debe de ser) dicha rotación está medida en (*número de revoluciones (o giros)*)/(*unidades de tiempo*).

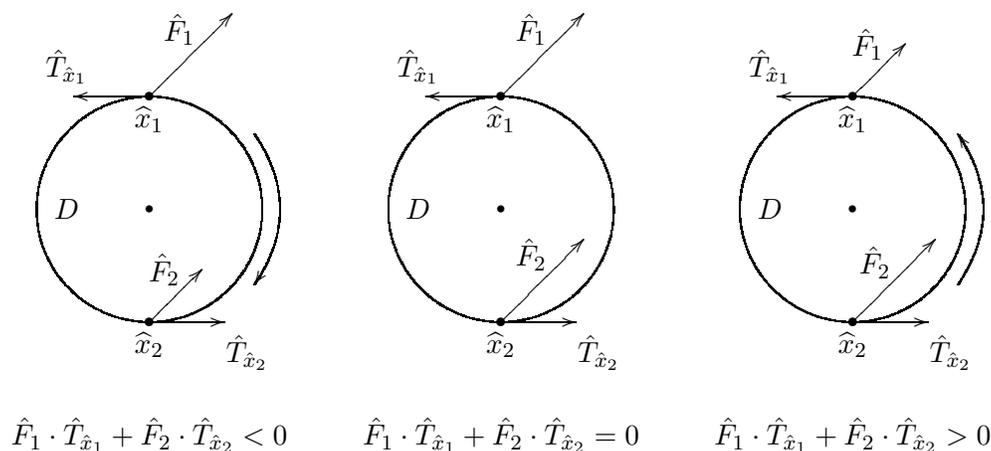


Figura 3.23: La fuerza “neta” ejercida sobre el disco  $D$  por las fuerzas  $\hat{F}_1$  y  $\hat{F}_2$  aplicadas (simultáneamente) en los puntos  $\hat{x}_1$  y  $\hat{x}_2$  (respectivamente), está “bien medida” con el número  $\hat{F}_1 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_1} + \hat{F}_2 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_2}$

Si ahora tomamos un número finito de puntos  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$  en  $\Gamma$  y suponemos que en cada uno de ellos actúa una fuerza  $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$ , respectivamente, el lector estará de acuerdo en que la fuerza neta ejercida sobre el disco  $D$  estará bien medida con el número

$$\hat{F}_1 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_1} + \dots + \hat{F}_k \cdot \hat{T}_{\hat{x}_k}$$

(hay muchas formas sencillas de tomar puntos  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k$  en  $\Gamma$ , y fuerzas  $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_k$  que “experimentalmente” confirmarían esta afirmación (ver figura 3.23)), de tal manera que la magnitud del movimiento de rotación producido por dichas fuerzas estará dado por

$$\frac{\hat{F}_1 \cdot \hat{T}_{\hat{x}_1} + \dots + \hat{F}_k \cdot \hat{T}_{\hat{x}_k}}{2\pi r}$$

Ahora el siguiente paso es suponer que tenemos todo un campo de fuerzas que actúa en cada punto de la circunferencia  $\Gamma$  y el primer problema que tenemos que resolver es el de calcular la fuerza neta ejercida sobre el disco  $D$  por dicho campo de fuerzas. Desafortunadamente, y a diferencia del caso finito, no estamos en condiciones de calcular dicha fuerza. Lo que si podemos calcular, incluso

de manera muy sencilla y echando mano de uno de los conceptos que hemos definido en este mismo capítulo, es la fuerza promedio ejercida por el campo que actúa sobre la circunferencia  $\Gamma$ .

Supongamos que el campo de fuerzas está representado por una función continua  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $D \subset U$ . Asociado a este campo, definimos el campo escalar  $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera: para cada  $\hat{x} \in \Gamma$ , hacemos

$$f(\hat{x}) = F(\hat{x}) \cdot \hat{T}_{\hat{x}}$$

en donde  $\hat{T}_{\hat{x}}$  es el vector unitario tangente a  $\Gamma$  en  $\hat{x}$  que apunta en la “dirección de recorrido” contrario al movimiento de las manecillas del reloj. De acuerdo con lo que discutimos párrafos arriba,  $f$  es justo la función tal que, para cada  $\hat{x} \in \Gamma$ ,  $f(\hat{x})$  nos asocia la fuerza neta ejercida sobre el disco  $D$  al aplicar la fuerza  $F(\hat{x})$ .

Ahora, si tomamos la parametrización de  $\Gamma$ ,  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sin(t)) + \hat{x}_0$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, entonces la función  $f \circ \gamma : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  asocia a cada valor de  $t$  el valor de la fuerza ejercida por el campo  $F$  en el punto  $\gamma(t)$  ( $f(\gamma(t))$ ), y como sabemos que el valor promedio de esta función está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) dt}{2\pi - 0} &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) r dt \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

entonces tenemos que la fuerza promedio (por unidad de distancia) ejercida por el campo  $F$  sobre la circunferencia  $\Gamma$ , que denotaremos por  $F_p$ , estará dada por la integral de línea del campo escalar  $f$  sobre la circunferencia  $\Gamma$ , dividida por la longitud de  $\Gamma$ . Es decir,

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|}{2\pi r} \\ &= \frac{\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|}{l(\Gamma)} \end{aligned}$$

Si volvemos a escribir explícitamente la definición de esta integral, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \|d\gamma\| &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( F(\gamma(t)) \cdot \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \right) \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \end{aligned}$$

de tal forma que la fuerza promedio  $F_p$  también se puede calcular como

$$\begin{aligned} F_p &= \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{2\pi r} \\ &= \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{l(\Gamma)} \end{aligned}$$

(observe que esta expresión es consistente en términos de unidades).

Hagamos un ejemplo para ilustrar lo anterior.

**Ejemplo 3.23** Considere el campo  $F(x, y) = (-xy, xy)$ . ¿Cuál es la fuerza promedio ejercida por el campo  $F$  sobre un disco  $D$  de radio  $r > 0$  con centro en el punto  $\hat{x}_0 = (x_0, y_0)$ ?

*Solución.* En este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-(r \sin(t) + y_0)(r \cos(t) + x_0), (r \sin(t) + y_0)(r \cos(t) + x_0)) \cdot (-r \sin(t), r \cos(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (r^2 \sin(t) \cos(t) + x_0 r \sin(t) + y_0 r \cos(t) + x_0 y_0) r \sin(t) dt \\ &\quad + \int_0^{2\pi} (r^2 \sin(t) \cos(t) + x_0 r \sin(t) + y_0 r \cos(t) + x_0 y_0) r \cos(t) dt \\ &= x_0 r^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) dt + y_0 r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt \\ &= \pi r^2 (x_0 + y_0) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$F_p = \frac{r}{2}(x_0 + y_0)$$

Observe que, si tomamos  $(x_0, y_0) = (2, 0)$  y  $r = 1$  entonces  $F_p = 1$ , mientras que si  $(x_0, y_0) = (-2, 0)$  y  $r = 1$  entonces  $F_p = -1$ .

Ya que hemos calculado la fuerza promedio ejercida por el campo  $F$  sobre el disco  $D$ , estamos en condiciones de calcular la rotación promedio producida sobre dicho disco, la cual denotaremos por  $Rot_r F(\hat{x}_0)$ . Como hicimos en el caso en el que sólo actuaban un número finito de fuerzas, el número

$$\begin{aligned} Rot_r F(\hat{x}_0) &= \frac{F_p}{2\pi r} \\ &= \frac{(\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma / 2\pi r)}{2\pi r} \\ &= \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{(2\pi r)^2} \end{aligned}$$

será entonces una medida de la rotación promedio producida por el campo  $F$ , en donde dicho número indicará la cantidad de revoluciones (o giros) realizadas por unidad de tiempo.

Una vez que hemos llegado hasta aquí, lo que sigue es hacerse la siguiente pregunta: ¿existe una manera de medir la rotación producida por el campo  $F$  en el punto  $\hat{x}_0$ ? Es posible que esta pregunta cause en un principio cierto desconcierto y resulte poco intuitiva, pero ¿no es cierto acaso que esta idea tiene tanto sentido como la de calcular la velocidad de un objeto en un instante?

Con el fin de responder a esta pregunta, y como el lector seguramente ya se imaginará, si el

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{(2\pi r)^2} \quad (3.16)$$

existe, a ese valor límite lo podemos interpretar como la rotación producida por el campo  $F$  en el punto  $\hat{x}_0$ .

Obsérvese que la rotación promedio  $Rot_r F(\hat{x}_0)$  se puede escribir como

$$\begin{aligned} Rot_r F(\hat{x}_0) &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)} \right) \end{aligned}$$

y que la existencia del límite 3.16 es equivalente a la existencia del límite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)}$$

Dado que, salvo por una constante, el valor del límite anterior se puede interpretar como la rotación producida por el campo  $F$  en el punto  $\hat{x}_0$ , cuando exista dicho límite lo llamaremos *el rotacional de  $F$  en  $\hat{x}_0$* , y lo denotaremos por  $Rot F(\hat{x}_0)$ . Es decir

$$Rot F(\hat{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)}$$

Más adelante mostraremos que la elección de discos centrados en  $\hat{x}_0$  es irrelevante para la definición de este concepto y que hay otra forma de hacerlo. Sin embargo, por ahora así lo manejaremos en la siguiente

**Definición 3.24 (provisional)** Sean,  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  continua en la región  $U$ ,  $\hat{x}_0 \in U$ ,  $D \subset U$  el disco de radio  $r > 0$  con centro en  $\hat{x}_0$ , y  $\Gamma = Fr(D) = \partial D$ . Decimos que  $F$  produce rotación en el punto  $\hat{x}_0$  si existe

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)} \quad (3.17)$$

en donde  $\gamma$  es la parametrización de  $\Gamma$  definida como  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \sen(t)) + \hat{x}_0$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , que la recorre en el sentido contrario a las manecillas del reloj. A este valor límite le llamaremos *el rotacional de  $F$  en  $\hat{x}_0$*  y lo denotaremos por  $Rot F(\hat{x}_0)$ , es decir

$$\begin{aligned} Rot F(\hat{x}_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\text{área}(D)} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \end{aligned}$$

Si tomamos la función  $F(x, y) = (-xy, xy)$  del ejemplo 3.23 y el resultado que obtuvimos ahí, se tiene que al calcular el límite 3.17 para este caso, obtenemos que

$$\text{Rot } F(x, y) = x + y$$

para toda  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Esta forma rápida y simple de calcular el rotacional de un campo no es algo que sólo suceda para este ejemplo. El resultado que vamos a dar a continuación justo lo que prueba es que si un campo  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es de clase  $C^1$  en su dominio, entonces el  $\text{Rot } F$  tiene una expresión sencilla en términos de  $P$  y de  $Q$ .

**Proposición 3.25** *Sea  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en la región  $U$ . Entonces*

$$\begin{aligned} \text{Rot } F(\hat{x}) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \end{aligned}$$

para toda  $\hat{x} \in U$ .

**Dem.** Para empezar recordemos que, como  $F$  es un campo de clase  $C^1$  en su dominio, dado  $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ , por el Teorema de Taylor sabemos que

$$P(x, y) = P(\hat{x}_0) + \nabla P(\hat{x}_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + R_P(x, y)$$

y

$$Q(x, y) = Q(\hat{x}_0) + \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) + R_Q(x, y)$$

para toda  $(x, y) \in B_r(\hat{x}_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x - x_0, y - y_0)\| < r\} \subset U$ , y en donde  $R_P$  y  $R_Q$  son tales que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_P(x, y)}{\|(x, y) - \hat{x}_0\|} = 0 = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R_Q(x, y)}{\|(x, y) - \hat{x}_0\|} \quad (3.18)$$

Ahora, si  $\gamma(t) = (r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (P((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0), Q((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0)) \cdot (-r \text{sen}(t), r \cos(t)) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} r \text{sen}(t) P((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0) dt + \int_0^{2\pi} r \cos(t) Q((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0) dt \end{aligned}$$

Analizaremos por separado cada una de estas dos últimas integrales. Para la primera, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} r \text{sen}(t) P((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0) dt = \int_0^{2\pi} r \text{sen}(t) [P(\hat{x}_0) + \nabla P(\hat{x}_0) \cdot (r \cos(t), r \text{sen}(t)) + R_P(\gamma(t))] dt$$

$$\begin{aligned}
&= rP(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \text{sen}(t)dt + r^2 \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos(t) \text{sen}(t)dt + \\
&r^2 \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \text{sen}^2(t)dt + r \int_0^{2\pi} R_P(\gamma(t)) \text{sen}(t)dt \\
&= \pi r^2 \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + r \int_0^{2\pi} R_P(\gamma(t)) \text{sen}(t)dt
\end{aligned}$$

y para la segunda

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} r \cos(t)Q((r \cos(t), r \text{sen}(t)) + \hat{x}_0)dt &= \int_0^{2\pi} r \cos(t) [Q(\hat{x}_0) + \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot (r \cos(t), r \text{sen}(t)) + R_Q(\gamma(t))] dt \\
&= rQ(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos(t)dt + r^2 \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt + \\
&r^2 \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) \int_0^{2\pi} \text{sen}(t) \cos(t)dt + r \int_0^{2\pi} R_Q(\gamma(t)) \cos(t)dt \\
&= \pi r^2 \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) + r \int_0^{2\pi} R_Q(\gamma(t)) \cos(t)dt
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{r} \text{sen}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{r} \cos(t)dt \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \text{sen}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \cos(t)dt
\end{aligned}$$

de tal forma que, como

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \text{sen}(t)dt = 0 = \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \cos(t)dt$$

(lo cual es una consecuencia casi directa de 3.18), tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{Rot } F(\hat{x}_0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma}{\pi r^2} \\
&= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_P(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \text{sen}(t)dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R_Q(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \hat{x}_0\|} \cos(t)dt \right) \\
&= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0)
\end{aligned}$$



Lo más interesante del resultado anterior es que la identidad

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x})$$

se sigue cumpliendo aun y cuando el rotacional no se calcule con base en discos centrados en  $\hat{x}$ . Lo siguiente que vamos a mostrar es que si  $\text{Rot } F(\hat{x})$  lo definimos ahora en términos de cuadrados con centro en  $\hat{x}$ , entonces la identidad anterior sigue siendo válida cuando  $F$  es nuevamente una función de clase  $C^1$ .

**Proposición 3.26** Sean,  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en la región  $U$ , y  $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in U$ . Dado  $r > 0$  tal que  $R_r = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - r, y_0 + r] \subset U$ , hacemos  $\Gamma_r = \partial R_r = Fr(R_r)$  (la frontera de  $R_r$ ) y tomamos  $\gamma_r$  una parametrización que la recorra una vez y en sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 3.24). Entonces

$$\text{Rot } F(\hat{x}_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)}$$

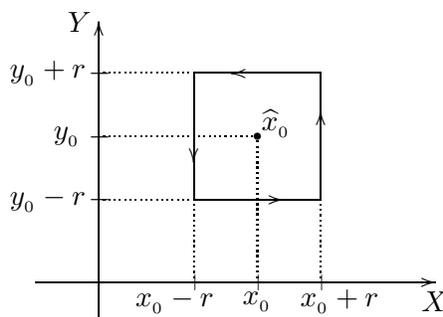


Figura 3.24: El cuadrado  $R_r$  de la proposición 3.26

**Dem.** Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r &= \int_{-r}^r F(x_0 + t, y_0 - r) \cdot (1, 0) dt + \int_{-r}^r F(x_0 + r, y_0 + t) \cdot (0, 1) dt \\ &\quad - \int_{-r}^r F(x_0 + t, y_0 + r) \cdot (1, 0) dt - \int_{-r}^r F(x_0 - r, y_0 + t) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_{-r}^r [Q(x_0 + r, y_0 + t) - Q(x_0 - r, y_0 + t)] dt - \int_{-r}^r [P(x_0 + t, y_0 + r) - P(x_0 + t, y_0 - r)] dt \end{aligned}$$

de tal forma que, por el Teorema del Valor Promedio, existen  $\xi_r, \eta_r \in [-r, r]$  tales que

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r = 2r (Q(x_0 + r, y_0 + \xi_r) - Q(x_0 - r, y_0 + \xi_r)) - 2r (P(x_0 + \eta_r, y_0 + r) - P(x_0 + \eta_r, y_0 - r)) \tag{3.19}$$

y por el Teorema del Valor Medio existen  $\xi'_r, \eta'_r \in (-r, r)$  tales que

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r = (2r)(2r) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + \xi'_r, y_0 + \xi_r) - (2r)(2r) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + \eta_r, y_0 + \eta'_r)$$

Por lo tanto, como  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}$  son funciones continuas y  $\xi'_r, \xi_r, \eta_r, \eta'_r \rightarrow 0$  si  $r \rightarrow 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)} &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{(2r)(2r) \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + \xi'_r, y_0 + \xi_r)}{4r^2} - \frac{(2r)(2r) \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + \eta_r, y_0 + \eta'_r)}{4r^2} \right) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + \xi'_r, y_0 + \xi_r) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + \eta_r, y_0 + \eta'_r) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) \\ &= \text{Rot } F(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

Sin duda las dos últimas proposiciones nos conducen a replantear la definición de rotacional que dimos anteriormente. Todo parece indicar que la definición más adecuada es la siguiente.

**Definición 3.27** Sea  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial P}{\partial y}$  y  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  existen para toda  $\hat{x}$  en la región  $U$ . Definimos el rotacional de  $F$  en  $\hat{x} \in U$ , que denotamos por  $\text{Rot } F(\hat{x})$ , como

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x})$$

Como es de suponerse, esta nueva operación definida para las funciones (o campos) de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  se lleva bien con la suma y multiplicación por un escalar de este tipo de funciones, lo cual establecemos en la siguiente proposición y cuya prueba se deja al lector.

**Proposición 3.28** Sean,  $F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Si  $\text{Rot } F(\hat{x})$  y  $\text{Rot } G(\hat{x})$  existen para toda  $\hat{x} \in U$  entonces  $\text{Rot}(F + G)(\hat{x})$  existe para toda  $\hat{x} \in U$  y además

$$\text{Rot}(\alpha F + \beta G)(\hat{x}) = \alpha \text{Rot } F(\hat{x}) + \beta \text{Rot } G(\hat{x})$$

### 3.5.1 El teorema de Green

Lo importante de todo el trabajo que realizamos antes de llegar a la definición 3.27 es que ahora sabemos que si  $F = (P, Q)$  es un campo de clase  $C^1$  en su dominio, entonces  $\text{Rot } F(\hat{x})$  se puede ver como un límite (o dos, para ser más exactos). De hecho, la conclusión de la proposición 3.26 nos será de gran utilidad para deducir uno de los teoremas más importantes de este capítulo: el Teorema de Green<sup>4</sup>.

Antes de entrar en materia, es necesario definir con precisión ese tipo de curva que, esencialmente (es decir, “topológicamente”), “es como” una circunferencia.

**Definición 3.29** Sea  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  una curva suave por pedazos. Decimos que  $\Gamma$  es una curva cerrada simple (suave por pedazos) si existe  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  parametrización de  $\Gamma$  tal que  $\gamma$  es cerrada ( $\gamma(a) = \gamma(b)$ ) e inyectiva en  $(a, b)$  (o en  $[a, b)$ ).

<sup>4</sup>George Green (1793-1841) matemático autodidacta inglés (su famoso teorema lo publicó en 1828), quien ingresó como estudiante a la universidad de Cambridge a la edad de 40 años.

Son ejemplos de curvas cerradas simples, el perímetro de un triángulo, el de un cuadrilátero (o en general, el perímetro de cualquier figura poligonal, que no se autointerseca), elipses, etc. (ver figura 3.25).

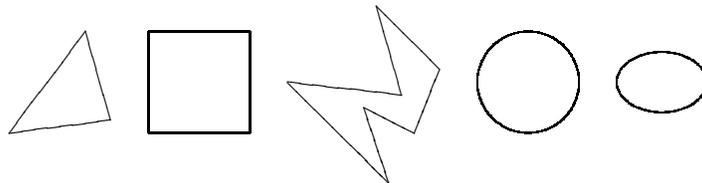


Figura 3.25: Curvas cerradas simples

Una vez establecido este concepto, procedemos a deducir el Teorema de Green. Supongamos que tenemos un campo  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en su dominio, y  $\Omega \subset U$  un conjunto Jordan-medible tal que  $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$  es una curva cerrada simple. Dado que  $F$  es de clase  $C^1$  entonces  $\text{Rot } F = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$  es una función continua en  $\Omega$  y por lo tanto integrable sobre este conjunto. De esta forma, sabemos que

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F \approx \sum_{i=1}^k \text{Rot } F(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) = \sum_{i=1}^k \text{Rot } F(\hat{\xi}_i) \cdot \text{área}(R_i)$$

en donde  $\hat{\xi}_i \in R_i$  y los  $R_i$  son los subrectángulos inducidos por una partición  $\mathcal{P}$  de algún rectángulo  $R$  que contiene al conjunto  $\Omega$  y tales que  $R_i \cap \Omega \neq \emptyset$  (ver figura 3.26). De hecho, como podemos suponer que tanto  $R$  como los  $R_i$  son cuadrados, si tomamos cada  $\hat{\xi}_i$  como el centro de  $R_i$ , por la proposición 3.26 tenemos que

$$\text{Rot } F(\hat{\xi}_i) \cdot \text{área}(R_i) \approx \int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i$$

en donde  $\Gamma_i$  es el perímetro de  $R_i$  y  $\gamma_i$  es una parametrización de éste que lo recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Por tanto

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F \approx \sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i$$

y esta aproximación será mejor en la medida de que  $\mathcal{P}$  sea una partición muy fina.

Ahora obsérvese que, dado que cada una de las integrales  $\int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i$  se puede descomponer como la suma de cuatro integrales (sobre cada uno de los lados del cuadrado  $R_i$ ), si  $R_i$  y  $R_j$  son dos cuadrados adyacentes, entonces en la suma

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i + \int_{\Gamma_j} F \cdot d\gamma_j$$

se cancela justo la integral sobre el lado común a ambos cuadrados de tal forma que esta suma es igual a la integral de  $F$  sobre el perímetro del rectángulo  $R_i \cup R_j$ , recorrido en el sentido contrario a las manecillas del reloj (ver figura 3.27).

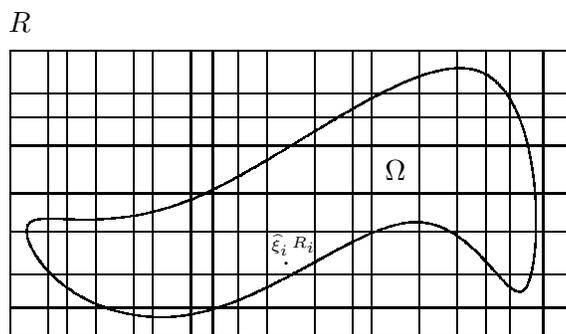


Figura 3.26: Los  $R_i$  son los subrectángulos inducidos por una partición  $\mathcal{P}$  de algún rectángulo  $R$  que contiene al conjunto  $\Omega$  y tales que  $R_i \cap \Omega \neq \emptyset$

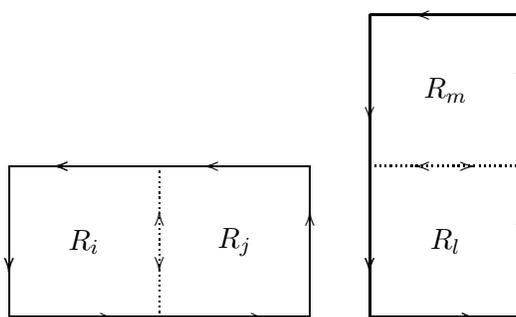


Figura 3.27: Las integrales sobre el lado común de dos subrectángulos adyacentes  $R_i$  y  $R_j$  se cancelan ya que se recorre en sentidos opuestos

Si este proceso de “cancelación” de integrales sobre lados adyacentes lo hacemos para todos los  $R_i$ , tenemos que

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i = \int_{\tilde{\Gamma}} F \cdot d\tilde{\gamma}$$

en donde  $\tilde{\Gamma}$  es una curva poligonal de lados paralelos a los ejes y  $\tilde{\gamma}$  es una parametrización de ésta que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver figura 3.28).

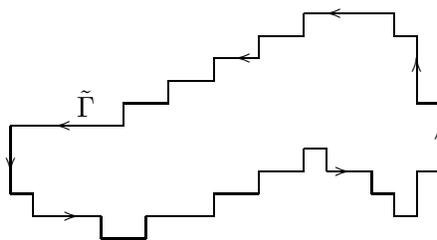


Figura 3.28: La curva  $\tilde{\Gamma}$

Lo mejor de todo esto es que, si los cuadrados  $R_i$  son muy pequeños (es decir, la partición  $\mathcal{P}$  es

muy fina) entonces  $\tilde{\Gamma} \approx \Gamma = \partial\Omega$  y por lo tanto

$$\int_{\tilde{\Gamma}} F \cdot d\tilde{\gamma} \approx \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

en donde  $\gamma$  es una parametrización de  $\Gamma = \partial\Omega$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj (ver figura 3.29).

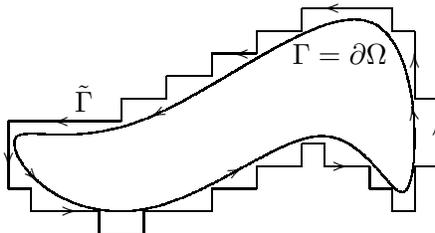


Figura 3.29: Las curvas  $\tilde{\Gamma}$  y  $\Gamma = \partial\Omega$  se “parecen”

Todas estas identidades y aproximaciones sugieren que

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

¡y esto es justo lo que asegura el Teorema de Green!

Formularemos el Teorema de Green en los mismos términos en que acabamos de deducirlo, aun cuando la prueba sólo la haremos para cierto tipo de regiones  $\Omega$ .

**Teorema 3.30 (de Green)** Sean,  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en  $U$ , y  $\Omega \subset U$  un conjunto Jordan-medible tal que  $\Gamma = \partial\Omega = \text{Fr}(\Omega)$  es una curva cerrada simple y  $\Omega \cup \Gamma \subset U$ . Entonces

$$\int_{\Omega} \text{Rot } F = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

donde  $\gamma$  es una parametrización de  $\Gamma$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

**Dem.** Haremos esta prueba para el caso en que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  sea una región tipo I y tipo II, simultáneamente. Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} \end{aligned}$$

analizaremos cada una de estas integrales por separado.

Dado que  $\Omega$  es una región tipo I, sabemos que existen  $\alpha, \beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas tales que

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} &= \int_a^b \left( \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b (P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x))) dx\end{aligned}$$

Por otra parte, nótese que  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + (-\gamma_3) + (-\gamma_4)$ , con  $\gamma_1, \gamma_3 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas como  $\gamma_1(x) = (x, \alpha(x))$ ,  $\gamma_3(x) = (x, \beta(x))$ , y  $\gamma_2(x) = (b, x)$  con  $x \in [\alpha(b), \beta(b)]$ ,  $\gamma_4(x) = (a, x)$  con  $x \in [\alpha(a), \beta(a)]$ , es una parametrización de  $\Gamma = \partial\Omega$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, de tal forma que si consideramos el campo  $(P, 0)$ , tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma = \partial\Omega} (P, 0) \cdot d\gamma &= \int_{\Gamma_1} (P, 0) \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} (P, 0) \cdot d\gamma_2 - \int_{\Gamma_3} (P, 0) \cdot d\gamma_3 - \int_{\Gamma_4} (P, 0) \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_a^b (P(x, \alpha(x)), 0) \cdot (1, \alpha'(x)) dx + \int_{\alpha(b)}^{\beta(b)} (P(b, x), 0) \cdot (0, 1) dx \\ &\quad - \int_a^b (P(x, \beta(x)), 0) \cdot (1, \beta'(x)) dx - \int_{\alpha(a)}^{\beta(a)} (P(a, x), 0) \cdot (0, 1) dx \\ &= \int_a^b P(x, \alpha(x)) dx - \int_a^b P(x, \beta(x)) dx \\ &= - \int_a^b (P(x, \beta(x)) - P(x, \alpha(x))) dx \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}\end{aligned}$$

donde  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  son los cuatro subarcs en que se subdivide a  $\Gamma = \partial\Omega$  y que están parametrizados por  $\gamma_1, \gamma_2, -\gamma_3$  y  $-\gamma_4$ , respectivamente (ver figura 3.30).

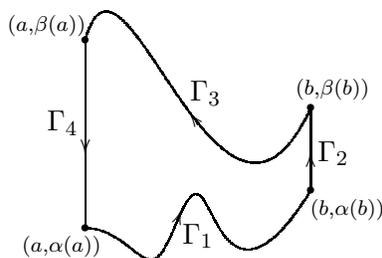


Figura 3.30:  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  son los cuatro subarcs en que se subdivide a  $\Gamma = \partial\Omega$

Si ahora usamos el hecho de que  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  también es una región tipo II, por un procedimiento análogo al anterior se prueba que

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} (0, Q) \cdot d\gamma = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} (0, Q) \cdot d\gamma + \int_{\Gamma=\partial\Omega} (P, 0) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} ((0, Q) + (P, 0)) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} (P, Q) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma \end{aligned}$$

con lo cual termina la prueba. ■

El lector no debería de quedar muy a disgusto por la suposición que se hizo acerca de  $\Omega$  en la prueba anterior. Esta no es una suposición muy restrictiva, sobre todo si se toma en cuenta que justo las regiones de tipo I y tipo II son aquellas para las cuales realmente se saben calcular integrales.

Por otra parte, también vale la pena destacar cierta analogía entre el Teorema Fundamental del Cálculo y el Teorema de Green. En efecto, si recordamos la definición provisional que dimos del rotacional de un campo  $F$ , dicho concepto se puede interpretar como una cierta “derivada”, de tal forma que integrar esta “derivada” sobre una región  $\Omega$  ¡se reduce a “evaluar” (de cierta forma) la función original  $F$  sobre el borde (o frontera)  $\Gamma = \partial\Omega$  de la región! (el Teorema Fundamental del Cálculo clásico también se puede ver de esta forma).

Dado que el Teorema de Green relaciona una integral de línea de una función de valores vectoriales con una integral de Riemann de una función de valores reales (ambas en el plano), este teorema se suele usar para sustituir el cálculo de alguna de estas integrales en términos de la otra. El siguiente ejemplo muestra cómo se hace esto para el campo definido en el ejemplo 3.19, resultado que por cierto nos será muy útil cuando retomemos el problema de los campos conservativos.

**Ejemplo 3.31** Sea  $F = (P, Q) : U = \mathbb{R}^2 \setminus (0, 0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido como

$$\begin{aligned} F(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)) \\ &= \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \end{aligned}$$

y  $\Omega \subset U$  una región tal que  $\Gamma = Fr(\Omega) = \partial\Omega$  es una curva cerrada simple y  $(0,0) \notin \Omega \cup \Gamma$ . Calcule

$$\int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma$$

en donde  $\gamma$  es una parametrización de  $\Gamma$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

*Solución.* Como se mostró anteriormente, para este campo  $F$  se tiene que

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$$

para toda  $(x,y) \in U$ , de tal forma que  $\text{Rot } F \equiv 0$  en la región  $U$ . Dado que la región  $\Omega$  y  $F$  satisfacen las condiciones del teorema de Green, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma=\partial\Omega} F \cdot d\gamma &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Obsérvese que en particular este resultado es válido si  $\Gamma$  es cualquier circunferencia, o el perímetro de cualquier rectángulo, siempre y cuando el  $(0,0)$  no quede “encerrado” por  $\Gamma$ .

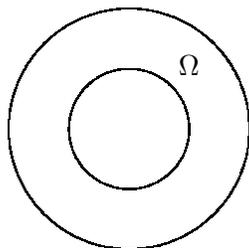


Figura 3.31: La frontera o “borde” de la región  $\Omega$  está formada por dos circunferencias

El Teorema de Green se puede extender a regiones  $\Omega$  cuya frontera esté formada por más de una curva cerrada simple, como sería el caso de un anillo (ver figura 3.31). Para deducir el tipo de identidad que se obtiene en este caso, podemos recurrir al mismo procedimiento que seguimos antes: si a la región  $\Omega$  la “metemos” dentro de un cuadrado  $R$  y a éste lo subdividimos (o lo particionamos) en cuadrados muy pequeños, haciendo las mismas aproximaciones, sustituciones y cancelaciones que en el caso anterior, llegaremos a la conclusión de que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \cdots + \int_{\Gamma_k} F \cdot d\gamma_k \end{aligned}$$

en donde  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  son las curvas cerradas simples tales que  $Fr(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ , con  $\Gamma_0$  “la más exterior” (o que “rodea” al resto) y  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$  parametrizaciones de éstas, respectivamente, todas ellas recorriéndolas una vez,  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  en el sentido de las manecillas del reloj y  $\gamma_0$  en el contrario (ver figura 3.32).

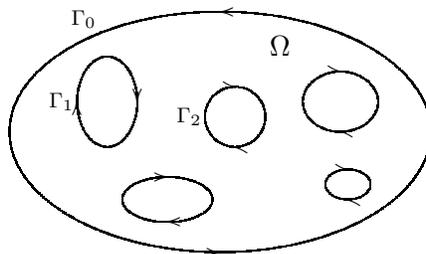


Figura 3.32: Ejemplo de región  $\Omega$  sobre la que se aplica la versión general del Teorema de Green

Aun cuando formularemos esta versión más general del teorema de Green, no estamos en condiciones de dar una prueba “rigurosa” de ella. Sería necesario precisar algunos conceptos, como el de que  $\Gamma_0$  es la curva “más exterior” (o que “rodea” al resto), lo cual escapa a los objetivos de este texto.

**Teorema 3.32 (de Green (versión general))** Sean,  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en  $U$ , y  $\Omega \subset U$  un conjunto Jordan-medible tal que  $Fr(\Omega) = \partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ , con  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$  curvas cerradas simples y  $\Gamma_0$  “la más exterior” (o que “rodea” al resto). Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Rot } F &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} F \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma_0} F \cdot d\gamma_0 + \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \dots + \int_{\Gamma_k} F \cdot d\gamma_k \end{aligned}$$

donde  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k$  son parametrizaciones de  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ , todas ellas recorriéndolas una vez,  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  en el sentido de las manecillas del reloj y  $\gamma_0$  en el contrario.

De hecho, en la mayoría de los problemas en los que se puede aplicar la versión anterior del teorema de Green, también se pueden resolver adaptándolos a una aplicación de la versión más sencilla. El siguiente ejemplo, además de ilustrar lo anterior, también muestra en qué tipo de situaciones suele ser útil este teorema.

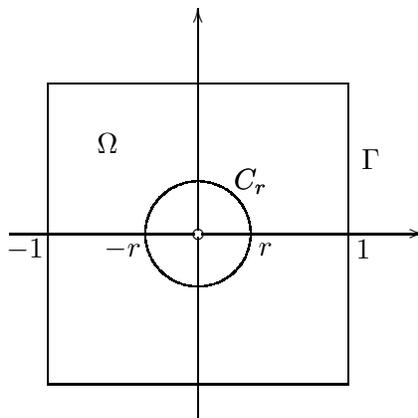
**Ejemplo 3.33** Calcule la integral  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$  donde

$$F(x, y) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

y  $\Gamma$  es el perímetro del cuadrado  $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$  recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

*Solución.* Lo primero que hay que decir es que, si bien intentar calcular directamente la integral de línea no es una tarea imposible, sí puede resultar bastante laboriosa. Por otra parte, la primera versión del teorema de Green no se puede aplicar en este caso puesto que  $R$  (ni ningún otro conjunto que tenga como frontera a  $\Gamma$ ) está contenido en el dominio de  $F$ , es decir,  $R \not\subset U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

El camino que seguiremos será el siguiente: tomamos  $\Omega = R \setminus B_r((0, 0))$  con  $0 < r < 1$  de tal forma que  $\Omega \subset U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $\partial\Omega = Fr(\Omega) = \Gamma \cup C_r$  donde  $C_r$  es la circunferencia de radio  $r$  con

Figura 3.33: La región  $\Omega$  del ejemplo 3.33

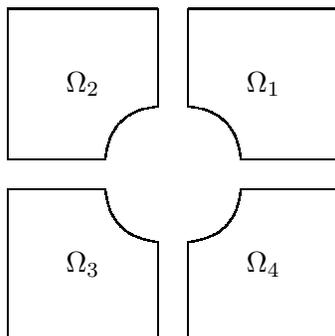
centro en el  $(0,0)$  (ver figura 3.33). Dado que en este caso se tiene que  $\text{Rot } F(x,y) = 0$  para toda  $(x,y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ , si  $\gamma_r$  es una parametrización de  $C_r$  que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, por la versión más general del teorema de Green tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \text{Rot } F \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

como se calculó en el ejemplo 3.19.

Figura 3.34: Una manera de subdividir la región  $\Omega$  del ejemplo 3.33 para después aplicar (en cada pedazo) la versión más sencilla del Teorema de Green

Si no quisiéramos echar mano de la versión más general del teorema de Green, observe que la región  $\Omega$  se puede subdividir en cuatro regiones  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  y  $\Omega_4$ , las que se obtienen de intersectar a  $\Omega$

con cada uno de los cuadrantes (que por cierto, cada una de estas regiones es de tipo I y tipo II, simultáneamente) (ver figura 3.34). Dado que  $\text{Rot } F(x, y) = 0$  para toda  $(x, y) \in U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , por el teorema de Green (la primera versión) tenemos que

$$\int_{\Gamma_i} F \cdot d\gamma_i = 0$$

en donde  $\Gamma_i = \partial\Omega_i$  y  $\gamma_i$  es una parametrización que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, para  $i = 1, 2, 3$  y 4. Si ahora observamos que en cada segmento que sea común a dos de estas curvas  $\Gamma_i$  y  $\Gamma_j$ , en las correspondientes integrales dicho segmento es recorrido en sentidos contrarios (ver figura 3.35), concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} F \cdot d\gamma_3 + \int_{\Gamma_4} F \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma - \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{C_r} F \cdot d\gamma_r \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

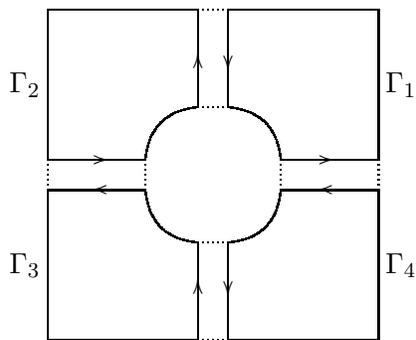


Figura 3.35: Las curvas  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  y  $\Gamma_4$  del ejemplo 3.33

Como se muestra en el ejemplo anterior, la versión más general del teorema de Green suele ser útil para sustituir el cálculo de una integral de línea por otra(s) más sencilla(s) de realizar.

Otra consecuencia importante del teorema de Green es que, en el caso de un campo  $F$  de clase  $C^1$ , el rotacional de  $F$  en un punto  $\hat{x}$  ( $\text{Rot } F(\hat{x})$ ) se puede ver como un límite, y no sólo para circunferencias o cuadrados centrados en  $\hat{x}$  (como se hizo al inicio de esta sección) sino para regiones más generales. En la siguiente proposición establecemos este hecho y sólo es necesario recordar que, si  $A \subset \mathbb{R}^2$  es un conjunto acotado, entonces  $\text{diam}(A) = \sup \{\|\hat{x} - \hat{y}\| \mid \hat{x}, \hat{y} \in A\}$ .

**Proposición 3.34** Sean,  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en  $U$ ,  $\hat{x} \in U$  y  $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$  una familia de subconjuntos de  $U$ , Jordan-medibles, cerrados y acotados, y tales que:  $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon =$

$Fr(\Omega_\varepsilon)$  es una curva cerrada simple,  $\hat{x} \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$  para toda  $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$ . Entonces

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

donde  $\gamma_\varepsilon$  es una parametrización de  $\Gamma_\varepsilon$  que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

**Dem.** De acuerdo con el teorema de Green, sabemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon &= \int_{\Omega_\varepsilon} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot m(\Omega_\varepsilon) \\ &= \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \cdot \text{área}(\Omega_\varepsilon) \end{aligned}$$

para alguna  $\hat{\xi}_\varepsilon \in \Omega_\varepsilon$  (Teorema del Valor Promedio). Como  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  y  $\frac{\partial P}{\partial y}$  son continuas y  $\hat{\xi}_\varepsilon \rightarrow \hat{x}$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ya que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$  y  $\hat{x} \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$  para toda  $0 < \varepsilon < c$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{\xi}_\varepsilon) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{\xi}_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \\ &= \text{Rot } F(\hat{x}) \end{aligned}$$

que es lo que se deseaba demostrar. ■

### 3.5.2 El rotacional en coordenadas polares

Una de las ventajas de poder usar una gama amplia de regiones para ver al rotacional de un campo  $F$  (en un punto  $\hat{x}$ ) como un límite, es que podremos deducir cómo se calcula este valor en el caso en que el campo  $F$  esté expresado en otros sistemas coordenados. Lo siguiente que haremos es encontrar una expresión para  $\text{Rot } F(\hat{x})$  suponiendo que  $F$  está dado en términos de coordenadas polares.

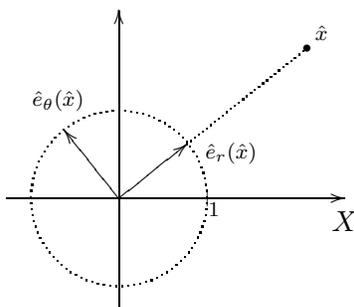


Figura 3.36: El sistema cartesiano formado por los vectores  $\hat{e}_r(\hat{x})$  y  $\hat{e}_\theta(\hat{x})$  asociado al punto  $\hat{x}$

Antes de hacer cualquier cosa, es necesario aclarar lo que significa que un campo  $F$  esté dado en términos de coordenadas polares. A un punto  $\hat{x}$  en el dominio de  $F$  lo representaremos por una pareja de números  $(r, \theta)$  que denotarán las coordenadas polares de  $\hat{x}$  en un cierto sistema polar  $r\theta$ . Al valor de  $F$  en  $\hat{x}$  (el vector  $F(\hat{x})$ ) lo representaremos por una pareja de números  $(F_r(\hat{x}), F_\theta(\hat{x}))$  que denotarán las coordenadas del vector  $F(\hat{x})$  en el sistema cartesiano formado por los vectores  $\hat{e}_r(\hat{x})$  y  $\hat{e}_\theta(\hat{x})$ , en donde  $\hat{e}_r(\hat{x})$  es un vector unitario en la dirección de  $\hat{x}$  (por lo que será necesario suponer que  $\hat{x} \neq \hat{0}$ ) y  $\hat{e}_\theta(\hat{x})$  es el vector que se obtiene al girar  $\hat{e}_r(\hat{x})$  un ángulo de noventa grados en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj (ver figura 3.36). De esta forma, se tiene que

$$F(\hat{x}) = F_r(\hat{x})\hat{e}_r(\hat{x}) + F_\theta(\hat{x})\hat{e}_\theta(\hat{x})$$

o

$$F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_r(\hat{x}) = F_r(\hat{x}) \quad \text{y} \quad F(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x}) = F_\theta(\hat{x}) \quad (3.20)$$

Es importante destacar que en el sistema cartesiano  $XY$  asociado al sistema polar  $r\theta$  (aquel cuyo eje real positivo coincide con el eje polar) el vector  $\hat{e}_r(\hat{x})$  tiene coordenadas  $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$  y el vector  $\hat{e}_\theta(\hat{x})$  coordenadas  $(-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$  (ver figura 3.37). Dado que el punto  $\hat{x}$  está representado por sus coordenadas polares  $(r, \theta)$ ,  $F_r$  y  $F_\theta$  son funciones (de valores reales) de las variables  $r$  y  $\theta$ .

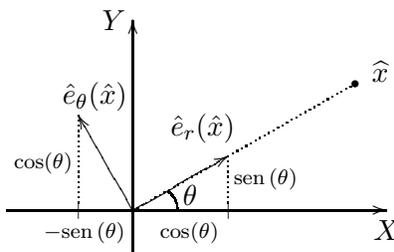


Figura 3.37: Las coordenadas de los vectores  $\hat{e}_r(\hat{x})$  y  $\hat{e}_\theta(\hat{x})$  en el sistema cartesiano  $XY$  asociado están dadas por  $(\cos(\theta), \text{sen}(\theta))$  y  $(-\text{sen}(\theta), \cos(\theta))$ , respectivamente

Por cierto que, suponer que un campo que está dado en términos de coordenadas polares cumple con estas características, no es una ocurrencia o un mero capricho. Estas características están justificadas en el siguiente hecho. Los campos vectoriales más comunes son aquellos que se obtienen como el gradiente de una función  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora, si esta función está dada en términos de las coordenadas polares  $(r, \theta)$  de  $\hat{x}$ , ¿cómo obtenemos una expresión para el campo  $F(\hat{x}) = \nabla\varphi(\hat{x})$ ?

Dada la función  $\varphi$ , las derivadas que podemos calcular en cada punto  $\hat{x} \in U$  son precisamente  $\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\hat{x})$  y  $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}(\hat{x})$ , por lo que vale la pena recordar qué relación tienen con el  $\nabla\varphi(\hat{x})$ .

De la definición de  $\frac{\partial\varphi}{\partial r}(\hat{x})$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial r}(\hat{x}) &= \frac{\partial\varphi}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(r+h, \theta) - \varphi(r, \theta)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(\hat{x} + h\hat{e}_r(\hat{x})) - \varphi(\hat{x})}{h} \\ &= D_{\hat{e}_r(\hat{x})}\varphi(\hat{x}) \\ &= \nabla\varphi(\hat{x}) \cdot \hat{e}_r(\hat{x}) \end{aligned}$$

donde  $D_{\hat{e}_r(\hat{x})}\varphi(\hat{x})$  representa la derivada direccional de  $\varphi$  en  $\hat{x}$  en la dirección del vector  $\hat{e}_r(\hat{x})$ .

Por otra parte, si consideramos la función  $g(h) = (r \cos(\theta + h), r \sin(\theta + h))$  (o  $g(h) = (r, \theta + h)$  si la expresamos en coordenadas polares) y la componemos con la función  $\varphi$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ g)'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\varphi \circ g)(0+h) - (\varphi \circ g)(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(g(h)) - \varphi(g(0))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(r, \theta + h) - \varphi(r, \theta)}{h} \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) \end{aligned}$$

de tal forma que, por la regla de la cadena obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) &= (\varphi \circ g)'(0) \\ &= \nabla \varphi(g(0)) \cdot g'(0) \\ &= \nabla \varphi(\hat{x}) \cdot (-r \sin(\theta), r \cos(\theta)) \\ &= \nabla \varphi(\hat{x}) \cdot (r \hat{e}_\theta(\hat{x})) \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) = \nabla \varphi(\hat{x}) \cdot \hat{e}_\theta(\hat{x})$$

Por tanto

$$\begin{aligned} F(\hat{x}) &= \nabla \varphi(\hat{x}) \\ &= \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r}(\hat{x}) \right) \hat{e}_r(\hat{x}) + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(\hat{x}) \right) \hat{e}_\theta(\hat{x}) \end{aligned}$$

Esto prueba que, dada  $\varphi$ , lo que podemos calcular en cada punto  $\hat{x} \in U$  son justo las coordenadas del  $\nabla \varphi(\hat{x})$  en el sistema coordenado cartesiano formado por los vectores  $\hat{e}_r(\hat{x})$  y  $\hat{e}_\theta(\hat{x})$ , y esto es lo que justifica la forma en que supondremos que están dados los campos vectoriales en coordenadas polares.

Una vez aclarado lo anterior, procederemos a calcular  $\text{Rot } F(\hat{x})$  para un campo  $F = (F_r, F_\theta) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  que está dado en términos de coordenadas polares. Sea  $\hat{x}_0 \in U$  tal que sus coordenadas polares son  $(r_0, \theta_0)$ . Dado  $\varepsilon > 0$  definimos

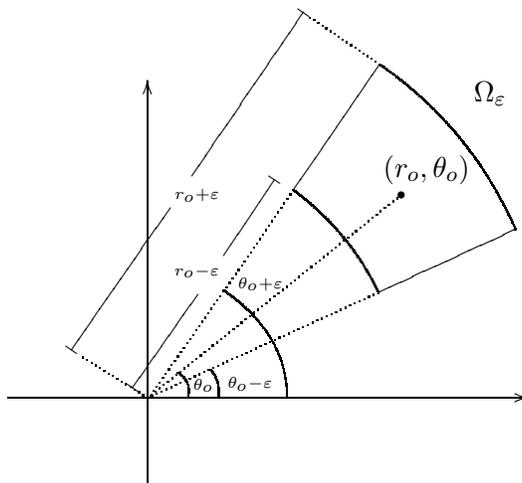
$$\Omega_\varepsilon = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r_0 - \varepsilon \leq r \leq r_0 + \varepsilon, \theta_0 - \varepsilon \leq \theta \leq \theta_0 + \varepsilon\}$$

en donde  $(r, \theta)$  representa coordenadas polares (ver figura 3.38). Observe que  $\Omega_\varepsilon$  cumple con las condiciones de la proposición 3.34 (y que además siempre se puede descomponer en una unión finita de regiones que son tipo I y tipo II, simultáneamente), por lo que podemos asegurar que

$$\text{Rot } F(\hat{x}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

Para calcular  $\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon$ , subdividimos a la curva  $\Gamma_\varepsilon$  en los segmentos  $\Gamma_1, \Gamma_3$  y en los subarcos  $\Gamma_2, \Gamma_4$  y los parametrizamos por

$$\gamma_1(t) = (t \cos(\theta_0 - \varepsilon), t \sin(\theta_0 - \varepsilon)) \quad \text{con } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$


 Figura 3.38: La región  $\Omega_\varepsilon$ 

$$\gamma_2(t) = ((r_0 + \varepsilon) \cos(t), (r_0 + \varepsilon) \sin(t)) \quad \text{con } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$$

$$\gamma_3(t) = (t \cos(\theta_0 + \varepsilon), t \sin(\theta_0 + \varepsilon)) \quad \text{con } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$

$$\gamma_4(t) = ((r_0 - \varepsilon) \cos(t), (r_0 - \varepsilon) \sin(t)) \quad \text{con } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$$

respectivamente, de modo que

$$\gamma_1'(t) = (\cos(\theta_0 - \varepsilon), \sin(\theta_0 - \varepsilon)) = \hat{e}_r(\gamma_1(t)) \quad \text{para toda } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$

$$\gamma_2'(t) = (-(r_0 + \varepsilon) \sin(t), (r_0 + \varepsilon) \cos(t)) = (r_0 + \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_2(t)) \quad \text{para toda } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$$

$$\gamma_3'(t) = (\cos(\theta_0 + \varepsilon), \sin(\theta_0 + \varepsilon)) = \hat{e}_r(\gamma_3(t)) \quad \text{para toda } t \in [r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon]$$

$$\gamma_4'(t) = (-(r_0 - \varepsilon) \sin(t), (r_0 - \varepsilon) \cos(t)) = (r_0 - \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_4(t)) \quad \text{para toda } t \in [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$$

Por tanto, si hacemos  $\gamma_\varepsilon = \gamma_1 + \gamma_2 + (-\gamma_3) + (-\gamma_4)$  tenemos que

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon \\ &= \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma_2 - \int_{\Gamma_3} F \cdot d\gamma_3 - \int_{\Gamma_4} F \cdot d\gamma_4 \\ &= \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_1(t)) \cdot \gamma_1'(t) dt + \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_2(t)) \cdot \gamma_2'(t) dt - \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_3(t)) \cdot \gamma_3'(t) dt - \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_4(t)) \cdot \gamma_4'(t) dt \\ &= \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_1(t)) \cdot \hat{e}_r(\gamma_1(t)) dt + \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_2(t)) \cdot ((r_0 + \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_2(t))) dt - \int_{r_0 - \varepsilon}^{r_0 + \varepsilon} F(\gamma_3(t)) \cdot \hat{e}_r(\gamma_3(t)) dt \\ &\quad - \int_{\theta_0 - \varepsilon}^{\theta_0 + \varepsilon} F(\gamma_4(t)) \cdot ((r_0 - \varepsilon) \hat{e}_\theta(\gamma_4(t))) dt \end{aligned}$$

Ahora, si usamos las identidades 3.20, escribimos a los puntos  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$ ,  $\gamma_3(t)$ ,  $\gamma_4(t)$  en términos de sus coordenadas polares (es decir,  $\gamma_1(t) = (t, \theta_0 - \varepsilon)$ ,  $\gamma_2(t) = (r_0 + \varepsilon, t)$ ,  $\gamma_3(t) = (t, \theta_0 + \varepsilon)$  y

$\gamma_4(t) = (r_0 - \varepsilon, t)$  (<sup>5</sup>), y llamamos  $g$  a la función de las variables polares  $(r, \theta)$  definida como  $g(r, \theta) = rF_\theta(r, \theta)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon &= - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} (F_r(\gamma_3(t)) - F_r(\gamma_1(t))) dt + \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} ((r_0 + \varepsilon)F_\theta(\gamma_2(t)) - (r_0 - \varepsilon)F_\theta(\gamma_4(t))) dt \\ &= - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} (F_r(t, \theta_0 + \varepsilon) - F_r(t, \theta_0 - \varepsilon)) dt + \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} ((r_0 + \varepsilon)F_\theta(r_0 + \varepsilon, t) - (r_0 - \varepsilon)F_\theta(r_0 - \varepsilon, t)) dt \\ &= - \int_{r_0-\varepsilon}^{r_0+\varepsilon} (F_r(t, \theta_0 + \varepsilon) - F_r(t, \theta_0 - \varepsilon)) dt + \int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon} (g(r_0 + \varepsilon, t) - g(r_0 - \varepsilon, t)) dt \end{aligned}$$

Así, por el Teorema del Valor Promedio, existen  $\theta_\varepsilon \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$  y  $r_\varepsilon \in (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$  tales que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon = -2\varepsilon(F_r(r_\varepsilon, \theta_0 + \varepsilon) - F_r(r_\varepsilon, \theta_0 - \varepsilon)) + 2\varepsilon(g(r_0 + \varepsilon, \theta_\varepsilon) - g(r_0 - \varepsilon, \theta_\varepsilon))$$

y por el Teorema del Valor Medio, existen  $\theta'_\varepsilon \in (\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon)$  y  $r'_\varepsilon \in (r_0 - \varepsilon, r_0 + \varepsilon)$  tales que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon = -(2\varepsilon)(2\varepsilon)\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon) + (2\varepsilon)(2\varepsilon)\frac{\partial g}{\partial r}(r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$$

de modo que, como  $\frac{\partial F_r}{\partial \theta}$  y  $\frac{\partial g}{\partial r}$  son continuas y  $(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon), (r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \rightarrow (r_0, \theta_0)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Rot } F(r_0, \theta_0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} \tag{3.21} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon(r_0 + \varepsilon)^2 - \varepsilon(r_0 - \varepsilon)^2} \left( -(2\varepsilon)(2\varepsilon)\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon) + (2\varepsilon)(2\varepsilon)\frac{\partial g}{\partial r}(r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{r_0} \left( -\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_\varepsilon, \theta'_\varepsilon) + \frac{\partial g}{\partial r}(r'_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \right) \\ &= \frac{1}{r_0} \left( -\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) + \frac{\partial g}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right) \\ &= \frac{1}{r_0} \left( -\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) + \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}(r_0, \theta_0) \right) \\ &= \frac{\partial F_\theta}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{1}{r_0}F_\theta(r_0, \theta_0) - \frac{1}{r_0}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \end{aligned}$$

Aun cuando los cálculos que acabamos de hacer fueron un poco más extensos que los que hicimos en la prueba de la proposición 3.26 (ahora fuimos más específicos con las parametrizaciones que

<sup>5</sup>Sin duda hacer esto se puede ver como un abuso de notación puesto que párrafos arriba se escribió que estos mismos puntos  $\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t), \gamma_4(t)$  eran iguales a otras parejas de números. Esto se puede “resolver” si justo los pensamos como puntos del plano. En general, si  $\hat{x}$  es un punto del plano y establecemos un sistema coordenado cartesiano  $XY$  (en el que, por cierto, el origen no está en  $\hat{x}$ ), el punto  $\hat{x}$  se puede designar por dos parejas de números asociadas al mismo sistema coordenado  $XY$ ; una correspondiente a las coordenadas cartesianas (digamos  $(x, y)$ ) y otra a las coordenadas polares (digamos  $(r, \theta)$ ). De esta forma, escribir que  $\hat{x} = (x, y)$  ó  $\hat{x} = (r, \theta)$  no debiera causar confusión, siempre y cuando se aclare de qué coordenadas estamos hablando.

usamos), seguramente el lector se ha percatado de la similitud que hay entre ellos. De hecho vale la pena resaltar que, mientras en la proposición 3.26 usamos los rectángulos  $R_r$  acotados por las rectas cuyas ecuaciones cartesianas están dadas por  $x = x_0 - r$ ,  $x = x_0 + r$ ,  $y = y_0 - r$  y  $y = y_0 + r$ , en lo que acabamos de hacer usamos las regiones  $\Omega_\varepsilon$  acotadas por las curvas cuyas ecuaciones polares están dadas por  $r = r_0 - \varepsilon$ ,  $r = r_0 + \varepsilon$ ,  $\theta = \theta_0 - \varepsilon$  y  $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ . ¿Está clara la analogía?

Antes de pasar al último tema de esta sección, veremos un ejemplo de cómo se usa el cálculo que acabamos de hacer.

**Ejemplo 3.35** Sea  $F : U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido en coordenadas polares como  $F(r, \theta) = (f(r), 1/r)$ , con  $f : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ . Calcular  $\text{Rot } F(r_0, \theta_0)$  para todo  $(r_0, \theta_0) \in U$ .

*Solución.* En este caso tenemos que  $F_r(r, \theta) = f(r)$  y  $F_\theta(r, \theta) = 1/r$ , de tal forma que, de acuerdo a lo que obtuvimos en 3.21, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Rot } F(r_0, \theta_0) &= \frac{\partial F_\theta}{\partial r}(r_0, \theta_0) + \frac{1}{r_0} F_\theta(r_0, \theta_0) - \frac{1}{r_0} \frac{\partial F_r}{\partial \theta}(r_0, \theta_0) \\ &= -\frac{1}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \cdot \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

¡Si  $f \equiv 0$ , compare con el campo del ejemplo 3.19!

### 3.6 La divergencia en el plano

Concluimos esta sección con la definición del concepto de divergencia de un campo  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , concepto que motivaremos a partir del siguiente problema. Supongamos ahora que  $F$  representa al campo de velocidades de un fluido en un cierto instante; es decir, si  $\hat{x} \in U$  es un punto por el cual pasa el fluido, entonces  $F(\hat{x})$  representará la velocidad con la que “viaja el fluido” (o una “molécula” o porción muy pequeña de éste) en ese punto (y en ese instante).

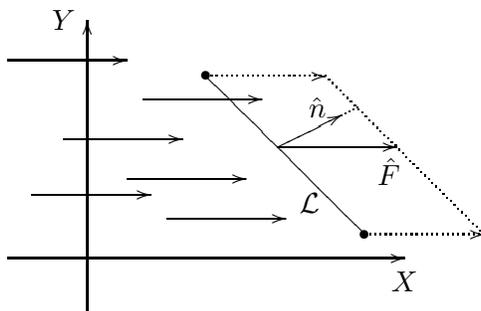


Figura 3.39: Si el fluido tiene una velocidad constante  $\hat{F}$ , la zona “cubierta” por éste al pasar durante una unidad de tiempo a través de un segmento  $\mathcal{L}$ , tiene la forma de un paralelogramo cuya área está dada por  $(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{longitud}(\mathcal{L})$

Empecemos por suponer también que  $F$  es constante, es decir, que  $F(\hat{x}) = \hat{F}$  para toda  $\hat{x}$ . Ahora, si colocamos un segmento de recta  $\mathcal{L}$  por donde pasa el fluido y elegimos un vector  $\hat{n}$  que apunte en una dirección normal (de las dos posibles) a  $\mathcal{L}$ , nuestro primer problema será encontrar una forma de medir qué tanto se “expandirá” el fluido a través de  $\mathcal{L}$  en la dirección de  $\hat{n}$  en una unidad de tiempo. Sin duda una muy buena manera de medir esta “expansión” es por medio del

área de la zona “cubierta” por el fluido después de que se le deja “fluir” a través del segmento  $\mathcal{L}$  durante una unidad de tiempo. Bajo el supuesto que estamos haciendo de que nuestro fluido tiene una velocidad constante, es “intuitivamente” claro que la zona “cubierta” en este caso por el fluido coincide con un paralelogramo, como se muestra en la figura 3.39.

Si el vector  $\hat{F}$  “apunta” hacia el mismo “lado” que  $\hat{n}$ , sabemos que el área de este paralelogramo está dada por  $(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{longitud}(\mathcal{L})$ , en donde  $\hat{F} \cdot \hat{n}$  nos da la altura de dicho paralelogramo. De hecho, este último número también se puede interpretar como una medida de qué tanto “cruza el vector  $\hat{F}$  al segmento  $\mathcal{L}$ ”. Nótese que, si  $\hat{F}$  tiene una dirección muy parecida a la del segmento  $\mathcal{L}$ , en cuyo caso nuestra intuición nos dice que el vector  $\hat{F}$  lo “cruza poco”, justo este número es pequeño, siendo igual a cero cuando  $\hat{F}$  es paralelo a  $\mathcal{L}$ , lo que concuerda con la noción intuitiva de que en esa posición  $\hat{F}$  no “cruza” a  $\mathcal{L}$ . Por lo que se refiere al signo de  $\hat{F} \cdot \hat{n}$ , éste también proporciona información importante puesto que nos indica hacia qué lado cruza  $\hat{F}$  a  $\mathcal{L}$ : hacia el lado en que apunta  $\hat{n}$ , si es positivo, y hacia el lado contrario al que apunta  $\hat{n}$ , si es negativo.

De esta forma, resulta entonces razonable decir que el número

$$(\hat{F} \cdot \hat{n}) \cdot \text{longitud}(\mathcal{L}) \quad (3.22)$$

nos da la medida (en términos de un área) de qué tanto se “expande” el fluido a través de  $\mathcal{L}$  en una unidad de tiempo, y que esta “expansión” es en la dirección en la que apunta  $\hat{n}$  si el número es positivo, o en la dirección contraria a la que apunta  $\hat{n}$ , si es negativo<sup>6</sup>.

Una vez resuelto este problema, pasamos al siguiente. Sea  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una función que representa el campo de velocidades de un fluido en un instante dado, y  $\Gamma \subset U$  una curva suave. Nuestro problema ahora es encontrar una forma de medir qué tanto se “expandirá” el fluido a través de  $\Gamma$  (¡y en qué dirección!) en una cierta unidad de tiempo, si durante dicho lapso de tiempo conserva la misma velocidad que tiene en ese instante dado.

Tomamos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$ ; si denotamos por  $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$  al vector que se obtiene de girar noventa grados en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj al vector  $\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}$  (es decir, si  $\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1}$  tiene coordenadas  $(x, y)$  entonces  $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$  tiene coordenadas  $(y, -x)$ ) el número

$$\left( F(\hat{\xi}_i) \cdot \frac{(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp}{\|(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp\|} \right) \|(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})\| = F(\hat{\xi}_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$$

(con  $\hat{\xi}_i$  un punto en el subarco  $\Gamma_i$  de  $\Gamma$  que une a los puntos  $\hat{P}_{i-1}$  y  $\hat{P}_i$ ) es una aproximación a la “expansión” del fluido a través del subarco  $\Gamma_i$  en la dirección del vector  $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$  (ver figura 3.40), por lo que

$$\sum_{i=1}^k F(\hat{\xi}_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp \quad (3.23)$$

será una aproximación a la “expansión neta” del fluido a través de toda la curva  $\Gamma$  en la dirección determinada por los vectores  $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$ .

---

<sup>6</sup>Nótese que, si lo que quisiéramos calcular fuera la “cantidad de fluido” que cruzaría a través de  $\mathcal{L}$  en esa unidad de tiempo, habría que multiplicar a este número por la densidad de masa del fluido. En este sentido, el número dado en 3.22 sólo es una medida de qué tanto se “expande” nuestro fluido a través de  $\mathcal{L}$  en la dirección del vector  $\hat{n}$ .

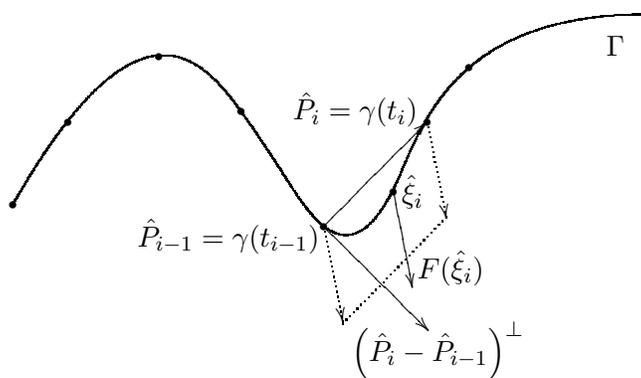


Figura 3.40: Si  $\hat{\xi}_i$  es un punto en el subarco de  $\Gamma$  que une a los puntos  $\hat{P}_{i-1}$  y  $\hat{P}_i$ , una aproximación a la “expansión” del fluido (descrito por el campo  $F$ ) a través de dicho subarco en la dirección del vector  $(\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$  está dada por  $F(\hat{\xi}_i) \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_{i-1})^\perp$

Ahora, si  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización de  $\Gamma$  que la recorre una vez, y  $\mathcal{P} = \{t_0, \dots, t_k\}$  es una partición de  $[a, b]$  que se corresponde con los puntos  $\hat{P}_0, \dots, \hat{P}_k \in \Gamma$  entonces la suma 3.23 se puede escribir como

$$\sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))^\perp$$

en donde  $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$  es tal que  $\gamma(\xi_i) = \hat{\xi}_i$  para cada  $i = 1, \dots, k$ .

Como en ocasiones anteriores, si la partición  $\mathcal{P}$  es muy fina, además de que esta suma será una mejor aproximación a la “expansión neta” del fluido a través de toda la curva  $\Gamma$  en “la dirección determinada por los vectores  $(\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))^\perp$ ”, se tiene que  $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \approx \gamma'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$  (para cada  $i = 1, \dots, k$ ) y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}))^\perp &\approx \sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}))^\perp \\ &= \sum_{i=1}^k F(\gamma(\xi_i)) \cdot (\gamma'(\xi_i))^\perp (t_i - t_{i-1}) \\ &\approx \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))^\perp dt \end{aligned}$$

Por estas aproximaciones, podemos concluir que esta integral será una buena forma de medir qué tanto se “expande” un fluido cuyo campo de velocidades está descrito por  $F$  a través de la curva  $\Gamma$  en “la dirección determinada por los vectores  $(\gamma'(t))^\perp$ ”, los que por cierto, son normales a  $\Gamma$ .

Antes de continuar con nuestro problema, estableceremos una notación específica para esta última integral. En general, si  $\Gamma$  es una curva suave por pedazos y  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  una parametrización de  $\Gamma$ , denotaremos por  $\int_\Gamma F \cdot (d\gamma)^\perp$  a la integral  $\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))^\perp dt$ , es decir

$$\int_\Gamma F \cdot (d\gamma)^\perp = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot (\gamma'(t))^\perp dt$$

en donde recuérdese que  $(x, y)^\perp = (y, -x)$ . Como vimos, esta integral se puede interpretar como una medida de la “expansión” producida por el campo  $F$  a través de  $\Gamma$  en “la dirección determinada por los vectores normales a  $\Gamma$  inducidos por la parametrización  $\gamma$ ,  $(\gamma'(t))^\perp$ ”.

Vale la pena hacer notar que, si  $F = (P, Q)$  y  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  entonces

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp &= \int_{\Gamma} (P, Q) \cdot (d\gamma)^\perp \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t))^\perp dt \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t)), Q(\gamma(t))) \cdot (\gamma'_2(t), -\gamma'_1(t)) dt \\ &= \int_a^b (-Q(\gamma(t)), P(\gamma(t))) \cdot (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) dt \\ &= \int_{\Gamma} (-Q, P) \cdot d\gamma \\ &= \int_{\Gamma} (-F)^\perp \cdot d\gamma \end{aligned}$$

Una vez resuelto este problema, pasamos al siguiente. Sean  $\hat{x}_0 \in U$  y  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ; la pregunta ahora es: ¿existe una manera de medir que tanto se tiende a “expandir” alrededor de  $\hat{x}_0$  (en un instante dado) un fluido cuyo campo de velocidades está descrito por  $F$ ?

Con el fin de responder a esta pregunta, tomemos  $\Gamma_r$  ( $r > 0$ ) la circunferencia de radio  $r$  con centro en  $\hat{x}_0$  y  $\gamma_r$  una parametrización de  $\Gamma_r$  que la recorre una vez y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (ver figura 3.41). Obsérvese que en este caso, los vectores  $(\gamma'_r(t))^\perp$  siempre apuntan hacia “afuera” de la circunferencia  $\Gamma_r$ , de tal forma que el signo de la integral  $\int_{\Gamma_r} F \cdot (d\gamma_r)^\perp$  tiene la siguiente interpretación: si es positivo, significa que la “expansión hacia afuera” de la circunferencia fue mayor que la “expansión hacia adentro”, mientras que si es negativo, significa que la “expansión hacia adentro” de la circunferencia fue mayor que la “expansión hacia afuera”.

Una vez aclarado lo anterior, tenemos entonces que la integral  $\int_{\Gamma_r} F \cdot (d\gamma_r)^\perp$  es una medida de la “expansión” (dada en términos de un área) producida por el campo de velocidades  $F$  a través de la circunferencia  $\Gamma_r$ , de tal forma que el cociente

$$\frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot (d\gamma_r)^\perp}{\pi r^2} \quad (3.24)$$

se puede interpretar como la “expansión” promedio producida por  $F$  a través del disco de radio  $r$  con centro en  $\hat{x}_0$ . Como seguramente el lector ya sospecha, si el cociente de arriba tiene límite cuando  $r \rightarrow 0$ , a este valor límite se le podrá considerar como la “expansión” producida por  $F$  en el punto  $\hat{x}_0$ .

Dado que

$$\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp = \int_{\Gamma} (-F)^\perp \cdot d\gamma$$

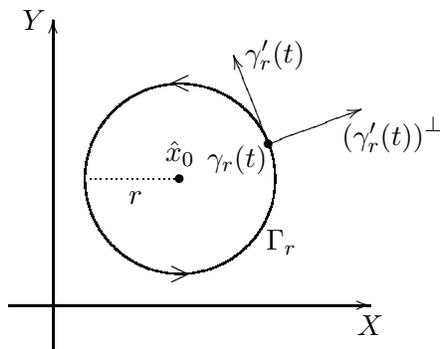


Figura 3.41: Si  $\Gamma_r$  es la circunferencia de radio  $r$  con centro en  $\hat{x}_0$  y  $\gamma_r$  una parametrización que la recorre una vez y en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, los vectores  $(\gamma'_r(t))^\perp$  siempre apuntan hacia “afuera” de la circunferencia  $\Gamma_r$

para cualquier curva suave por pedazos  $\Gamma$ , y que a estas alturas contamos con herramientas tan importantes (y potentes) como el Teorema de Green, es fácil mostrar que si la función  $F = (P, Q)$  que describe al campo de velocidades es de clase  $C^1$  (en su dominio  $U$ ) entonces el cociente 3.24 siempre tiene límite. Más aún, en la siguiente proposición mostraremos que dicho cociente tiene límite incluso para regiones más generales que los discos con centro en el punto  $\hat{x}_0$ .

**Proposición 3.36** Sean,  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en  $U$ ,  $\hat{x}_0 \in U$  y  $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$  una familia de regiones contenidas en  $U$ , Jordan-medibles, cerradas y acotadas, y tales que:  $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon = Fr(\Omega_\varepsilon)$  es una curva cerrada simple,  $\hat{x}_0 \in \text{int}(\Omega_\varepsilon)$  para toda  $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$ . Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

existe y además

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0)$$

**Dem.** Dado que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp = \int_{\Gamma_\varepsilon} (-F)^\perp \cdot d\gamma_\varepsilon$$

y que el campo  $(-F)^\perp$  también es de clase  $C^1$  en  $U$ , por la proposición 3.34 se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma_\varepsilon)^\perp}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} (-F)^\perp \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} \\ &= \text{Rot}((-F)^\perp)(\hat{x}_0) \\ &= \text{Rot}(-Q, P)(\hat{x}_0) \\ &= \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

■

Como es de suponerse, la proposición anterior nos da la pauta para definir el concepto de *divergencia* de un campo  $F = (P, Q)$ .

**Definición 3.37** Sea  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\frac{\partial P}{\partial x}$  y  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  existen para toda  $\hat{x}$  en la región  $U$ . Definimos la divergencia de  $F$  en  $\hat{x} \in U$ , que denotamos por  $\operatorname{div} F(\hat{x})$ , como

$$\operatorname{div} F(\hat{x}) = \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x})$$

Aun cuando el concepto de divergencia no lo definimos como un límite (ni siquiera provisionalmente, tal como sucedió en el caso del rotacional), es importante hacer notar que cuando  $F = (P, Q)$  sea de clase  $C^1$  en su dominio, la  $\operatorname{div} F(\hat{x})$  sí se puede ver como un límite, el cual tiene una interpretación muy específica. De hecho, la proposición anterior se puede reformular en términos de este concepto de la siguiente manera:

**Proposición 3.38** Sean,  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en  $U$ ,  $\hat{x}_0 \in U$  y  $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$  una familia de regiones contenidas en  $U$ , Jordan-medibles, cerradas y acotadas, y tales que:  $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon = Fr(\Omega_\varepsilon)$  es una curva cerrada simple,  $\hat{x}_0 \in \operatorname{int}(\Omega_\varepsilon)$  para toda  $0 < \varepsilon < c \in \mathbb{R}$  y  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$ . Entonces

$$\operatorname{div} F(\hat{x}_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot (d\gamma)^\perp}{\operatorname{área}(\Omega_\varepsilon)}$$

La identidad que se dio párrafos arriba, en la que se establece que si  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp = \int_{\Gamma} (-F)^\perp \cdot d\gamma$$

es la base sobre la cual se deduce la estrecha relación que hay entre la divergencia del campo  $F = (P, Q)$  y el rotacional del campo  $(-F)^\perp = (-Q, P)$ , relación que por cierto ya usamos en la prueba de la proposición 3.36 y que de acuerdo con nuestra notación se escribe como

$$\operatorname{div}(P, Q)(\hat{x}) = \operatorname{Rot}(-Q, P)(\hat{x})$$

para toda  $\hat{x} \in U$ .

Aunque la identidad anterior no se da para el mismo campo (lo cual es muy importante tenerlo siempre muy presente), y que físicamente los conceptos de divergencia y rotacional no son lo mismo, desde un punto de vista puramente matemático sí da lugar a que, para cualquier resultado que sea válido para el rotacional, exista uno casi igual para la divergencia. Tan es así, que el Teorema de Green se podría reformular usando el concepto de  $\operatorname{div} F$  y la integral  $\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^\perp$  (lo que se deja como un problema para el lector) y a esta sección se le pudo haber titulado “Divergencia y rotacional en el plano”. Es por esta razón que ya no tenemos mucho más que agregar con relación al concepto de divergencia.

Sin embargo, las cosas serán diferentes en el espacio. Ambos conceptos se van a generalizar para campos de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  y mientras que para estos campos la divergencia seguirá siendo una cantidad escalar, el rotacional de uno de ellos ya no se definirá por medio de un sólo número. Afortunadamente para definir el concepto de rotacional para campos de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  no hace falta más que el concepto de integral de línea de funciones de valores vectoriales que hemos desarrollado en este capítulo, por lo que procederemos a hacerlo en la siguiente sección. Para definir la divergencia de campos de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  habrá que esperar el desarrollo del concepto de integral de superficie, lo que haremos en el siguiente capítulo.

### 3.7 El rotacional en el espacio

Motivaremos el concepto de rotacional para un campo  $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  planteando el mismo problema que para el caso de  $\mathbb{R}^2$  sólo que con una condición adicional.

Sea  $\hat{x}_0 \in U$  y  $D_r \subset U$  un disco (infinitamente delgado, es decir “sin volumen”) de radio  $r > 0$  cuyo centro está “sujeto” en el punto  $\hat{x}_0$ . Si una fuerza  $\hat{F}$  golpea a este disco en un punto  $\hat{x}$  de su borde  $\Gamma_r$  (una circunferencia de radio  $r$  con centro en  $\hat{x}_0$ ) el movimiento producido sobre el disco  $D_r$  puede ser muy difícil de describir (¡y mucho más de medir!). Por esta razón, vamos a suponer adicionalmente que el disco  $D_r$  se encuentra confinado en un plano  $P$  del cual no puede salirse. A este plano  $P$  lo describiremos por medio de un vector (unitario) normal a él que denotaremos por  $\hat{n}$  (ver figura 3.42).

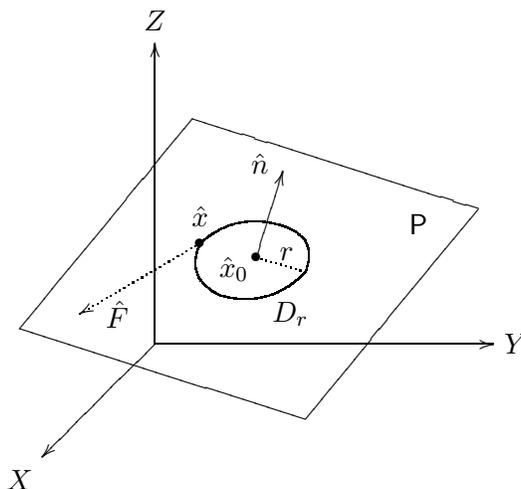


Figura 3.42: Una fuerza  $\hat{F}$  golpea en el punto  $\hat{x}$  que pertenece al borde de la circunferencia  $D_r$  (de radio  $r$  y centro en  $\hat{x}_0$ ) la cual se encuentra confinada al plano  $P$  (que pasa por  $\hat{x}_0$  y tiene vector normal  $\hat{n}$ )

En esta situación, es claro que el efecto producido sobre el disco  $D_r$  por una fuerza  $\hat{F}$  que lo golpea en un punto  $\hat{x}$  de su borde  $\Gamma_r$  sólo puede ser el de girar (dentro de  $P$ ) o permanecer inmóvil (sin duda en este caso hay muchas más posiciones de la fuerza  $\hat{F}$  para las que no se produce ningún movimiento). Como hicimos en la sección anterior, es fácil convencerse de que el número

$$\frac{\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}}}{2\pi r} \tag{3.25}$$

en donde  $\hat{T}_{\hat{x}}$  es un vector tangente (unitario) a  $\Gamma_r$  en  $\hat{x}$  y contenido en el plano  $P$ , es una buena forma de medir la rotación producida por la fuerza  $\hat{F}$  sobre el disco  $D_r$ .

Con respecto al número dado en 3.25 hace falta hacer una precisión en cuanto a la forma de interpretar su signo. Nótese que el giro de un disco contenido en un plano  $P$  del espacio no tiene una “dirección” preestablecida y que la determinación de la “dirección” de este giro depende desde cuál de los dos “lados” (aquellos en que queda subdividido el espacio por el plano  $P$ ) lo observemos (ver figura 3.43).

Afortunadamente esta situación se puede resolver con el mismo vector  $\hat{n}$  que usamos para determinar al plano  $P$  puesto que dicho vector “apunta” hacia uno de estos dos lados. En efecto, si establecemos que  $\hat{T}_{\hat{x}}$  es el vector tangente (unitario) a  $\Gamma_r$  en  $\hat{x}$  (y contenido en el plano  $P$ ) que apunta

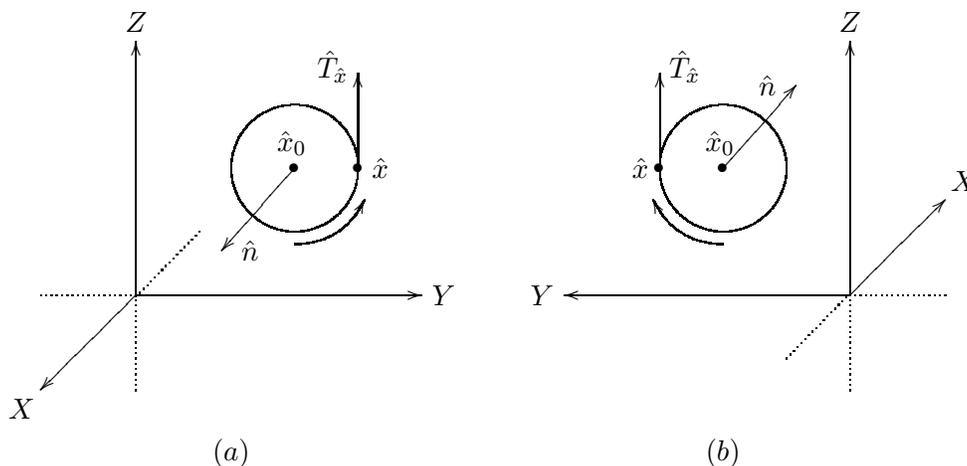


Figura 3.43: (a) Si se observa una circunferencia en el plano  $YZ$  desde el “lado” al que “apunta” el vector  $\hat{n}$  (parte positiva del eje  $X$ ), el vector tangente  $\hat{T}_{\hat{x}}$  “apunta” en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj; (b) si se observa desde el “lado” contrario al que “apunta” el vector  $\hat{n}$  (parte negativa del eje  $X$ ), el mismo vector tangente  $\hat{T}_{\hat{x}}$  “apunta” en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj

en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el “lado” al que apunta el vector  $\hat{n}$  (ver figura 3.43 (a)), entonces podremos asegurar que: si  $(\hat{F} \cdot \hat{T}_{\hat{x}})/2\pi r$  es positivo, se tiene que  $D_r$  gira en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, y si es negativo, entonces  $D_r$  gira en la dirección del movimiento de las manecillas del reloj, en ambos casos, cuando se le ve desde el “lado” al que apunta el vector  $\hat{n}$ .

Como en el caso de  $\mathbb{R}^2$ , si ahora  $F$  representa a un campo de fuerzas que actúa sobre el disco  $D_r$ , el número dado por

$$\frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{2\pi r}$$

será el adecuado para medir la fuerza promedio ejercida por el campo  $F$  sobre el disco  $D_r$ , de tal forma que al número

$$\frac{\left(\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r / 2\pi r\right)}{2\pi r} = \frac{1}{4\pi} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(D_r)}$$

se le puede interpretar como la rotación promedio producida sobre el disco  $D_r$ , debida a la acción del campo  $F$ .

Con base en lo anterior, estamos en condiciones de dar la siguiente

**Definición 3.39** Sean,  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  continua en la región  $U$ ,  $\hat{x}_0 \in U$ ,  $P \subset \mathbb{R}^3$  un plano tal que  $\hat{x}_0 \in P$ ,  $D_r \subset P$  el disco de radio  $r > 0$  con centro en  $\hat{x}_0$ ,  $\Gamma_r$  la curva perímetro (o borde) de  $D_r$  y  $\gamma_r$  una parametrización de  $\Gamma_r$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj cuando se le ve desde  $\hat{n}$ , un vector (unitario) normal a  $P$ . Si

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(D_r)} \quad (3.26)$$

existe, definimos la rotación (con referencia al vector  $\hat{n}$ ) producida por el campo  $F$  sobre el plano

$P$  en el punto  $\hat{x}_0$ , que denotamos por  $Rot_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$ , como

$$Rot_{\hat{n}}F(\hat{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(D_r)}$$

Lo siguiente que habría que hacer sería mostrar que el límite de 3.26 siempre existe si  $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una función de clase  $C^1$  en su dominio, y encontrar su valor. Esta tarea se dejará como un problema para el lector, y lo que aquí haremos será mostrar que ese límite también existe si en lugar de tomar los discos  $D_r$ , tomamos rectángulos  $R_r \subset P$  centrados en  $\hat{x}_0$  (ver figura 3.44). Como en el caso de  $\mathbb{R}^2$ , lo que se espera es que ambos límites sean iguales y que su valor se pueda expresar en términos de  $F = (P, Q, R)$ ,  $\hat{x}_0$  y  $\hat{n}$ .

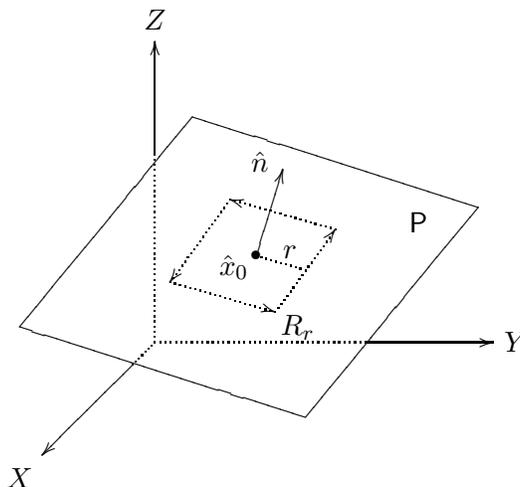


Figura 3.44: Un rectángulo  $R_r$  centrado en el punto  $\hat{x}_0$  y contenido en el plano  $P$

Antes de formular la proposición que contiene este resultado, necesitamos hacer algunos preparativos.

Denotemos por  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a una rotación del espacio con la propiedad de que

$$\begin{aligned} L(\hat{e}_3) &= L(0, 0, 1) \\ &= \hat{n} \end{aligned}$$

Si esta rotación está representada (en la base canónica) por la matriz

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

tendremos entonces que los vectores  $L(\hat{e}_1) = L(1, 0, 0) = (a_{11}, a_{21}, a_{31})$ ,  $L(\hat{e}_2) = L(0, 1, 0) = (a_{12}, a_{22}, a_{32})$  y  $L(\hat{e}_3) = L(0, 0, 1) = (a_{13}, a_{23}, a_{33})$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , lo que significa que

$$\sum_{l=1}^3 a_{li}a_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{para } i, j = 1, 2, 3$$

y

$$\hat{n} = L(\hat{e}_3) \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
&= L(\hat{e}_1) \times L(\hat{e}_2) \\
&= (a_{11}, a_{21}, a_{31}) \times (a_{12}, a_{22}, a_{32}) \\
&= (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}, a_{31}a_{12} - a_{11}a_{32}, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})
\end{aligned}$$

Dado que  $\{L(x, y, 0) + \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbf{P}$  entonces el conjunto

$$R_r = \{L(x, y, 0) + \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in [-r, r]\} \quad (3.28)$$

es un rectángulo contenido en  $\mathbf{P}$  y centrado en el punto  $\hat{x}_0$ . Al borde (o perímetro) de  $R_r$  lo denotamos por  $\Gamma_r$  y lo subdividimos en los cuatro segmentos  $\Gamma_{r,1}, \Gamma_{r,2}, \Gamma_{r,3}$ , y  $\Gamma_{r,4}$  a los cuales parametrizamos por las funciones

$$\begin{aligned}
\gamma_{r,1}(t) &= L(r, t, 0) + \hat{x}_0 \\
\gamma_{r,2}(t) &= L(t, r, 0) + \hat{x}_0 \\
\gamma_{r,3}(t) &= L(-r, t, 0) + \hat{x}_0 \\
\gamma_{r,4}(t) &= L(t, -r, 0) + \hat{x}_0
\end{aligned} \quad (3.29)$$

tomando  $t \in [-r, r]$  para todas ellas.

Nótese que la parametrización  $\gamma_r = \gamma_{r,1} + (-\gamma_{r,2}) + (-\gamma_{r,3}) + \gamma_{r,4}$  recorre a la curva  $\Gamma_r$  en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, cuando a ésta se le mira desde el lado en que apunta el vector  $\hat{n}$ , y que además, por la regla de la cadena se tiene que

$$\begin{aligned}
\gamma'_{r,1}(t) &= DL(r, t, 0) \cdot (0, 1, 0)^t = M \cdot (0, 1, 0)^t = L(\hat{e}_2) \\
\gamma'_{r,2}(t) &= DL(t, r, 0) \cdot (1, 0, 0)^t = M \cdot (1, 0, 0)^t = L(\hat{e}_1) \\
\gamma'_{r,3}(t) &= DL(-r, t, 0) \cdot (0, 1, 0)^t = M \cdot (0, 1, 0)^t = L(\hat{e}_2) \\
\gamma'_{r,4}(t) &= DL(t, -r, 0) \cdot (1, 0, 0)^t = M \cdot (1, 0, 0)^t = L(\hat{e}_1)
\end{aligned}$$

Finalmente, enunciemos un lema que nos permitirá simplificar sustancialmente la prueba de la proposición que vamos a formular. En este lema y la proposición que le sigue, supondremos que  $r > 0$  es tal que el rectángulo  $R_r$  (definido en 3.28) está contenido en  $U$ .

**Lema 3.40** *Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^1$  en  $U$ . Si  $c, d \in [-r, r]$  entonces existen  $\xi, \eta \in [-r, r]$  tales que*

$$f(L(r, c, 0) + \hat{x}_0) - f(L(-r, c, 0) + \hat{x}_0) = 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1)$$

y

$$f(L(d, r, 0) + \hat{x}_0) - f(L(d, -r, 0) + \hat{x}_0) = 2r \nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2)$$

**Dem.** Definimos  $h, g : [-r, r] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $h(t) = f(L(t, c, 0) + \hat{x}_0)$  y  $g(t) = f(L(d, t, 0) + \hat{x}_0)$ . Por el Teorema del Valor Medio sabemos que existe  $\xi, \eta \in [-r, r]$  tales que

$$\begin{aligned}
f(L(r, c, 0) + \hat{x}_0) - f(L(-r, c, 0) + \hat{x}_0) &= h(r) - h(-r) \\
&= 2rh'(\xi) \\
&= 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot (DL(\xi, c, 0) \cdot (1, 0, 0)^t) \\
&= 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot (M \cdot (1, 0, 0)^t) \\
&= 2r \nabla f(L(\xi, c, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 f(L(d, r, 0) + \hat{x}_0) - f(L(d, -r, 0) + \hat{x}_0) &= g(r) - g(-r) \\
 &= 2rg'(\eta) \\
 &= 2r\nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot (DL(d, \eta, 0) \cdot (0, 1, 0)^t) \\
 &= 2r\nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot (M \cdot (0, 1, 0)^t) \\
 &= 2r\nabla f(L(d, \eta, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2)
 \end{aligned}$$

■

Una vez hecho todo lo anterior, formulamos la proposición que anunciamos.

**Proposición 3.41** Sean,  $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una función de clase  $C^1$  en  $U$ , y  $\hat{x}_0 \in U$ . Si tomamos  $R_r, \Gamma_r$  y  $\gamma_r$  como se definieron en los párrafos anteriores, entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)}$$

existe.

**Dem.** Usando las parametrizaciones dadas por 3.29 tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r &= \int_{\Gamma_{r,1}} F \cdot d\gamma_{r,1} - \int_{\Gamma_{r,2}} F \cdot d\gamma_{r,2} - \int_{\Gamma_{r,3}} F \cdot d\gamma_{r,3} + \int_{\Gamma_{r,4}} F \cdot d\gamma_{r,4} \\
 &= \int_{-r}^r F(\gamma_{r,1}(t)) \cdot \gamma'_{r,1}(t) dt - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,2}(t)) \cdot \gamma'_{r,2}(t) dt \\
 &\quad - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,3}(t)) \cdot \gamma'_{r,3}(t) dt + \int_{-r}^r F(\gamma_{r,4}(t)) \cdot \gamma'_{r,4}(t) dt \\
 &= \int_{-r}^r F(\gamma_{r,1}(t)) \cdot L(\hat{e}_2) dt - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,2}(t)) \cdot L(\hat{e}_1) dt \\
 &\quad - \int_{-r}^r F(\gamma_{r,3}(t)) \cdot L(\hat{e}_2) dt + \int_{-r}^r F(\gamma_{r,4}(t)) \cdot L(\hat{e}_1) dt \\
 &= \int_{-r}^r [F(\gamma_{r,1}(t)) - F(\gamma_{r,3}(t))] \cdot L(\hat{e}_2) dt - \int_{-r}^r [F(\gamma_{r,2}(t)) - F(\gamma_{r,4}(t))] \cdot L(\hat{e}_1) dt
 \end{aligned}$$

Dado que las funciones que aparecen en estas integrales son continuas, por el Teorema del Valor Promedio sabemos que existen  $\xi_r, \eta_r \in [-r, r]$  tales que

$$\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r = 2r ([F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r))] \cdot L(\hat{e}_2)) - 2r ([F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r))] \cdot L(\hat{e}_1))$$

Por otra parte, como

$$\gamma_{r,1}(\xi_r) = L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0 \quad \text{y} \quad \gamma_{r,3}(\xi_r) = L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0$$

por el lema anterior (3.40) aplicado a cada una de las coordenadas del vector  $F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r))$ , sabemos que existen  $\xi_r^P, \xi_r^Q$  y  $\xi_r^R \in [-r, r]$  tales que

$$\begin{aligned} P(L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) - P(L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla P(L(\xi_r^P, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \\ Q(L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) - Q(L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla Q(L(\xi_r^Q, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \\ R(L(r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) - R(L(-r, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla R(L(\xi_r^R, \xi_r, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1) \end{aligned}$$

y por la misma razón, dado que

$$\gamma_{r,2}(\eta_r) = L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0 \quad \text{y} \quad \gamma_{r,4}(\eta_r) = L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0$$

para cada una de las coordenadas del vector  $F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r))$  existen  $\eta_r^P, \eta_r^Q$  y  $\eta_r^R \in [-r, r]$  tales que

$$\begin{aligned} P(L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0) - P(L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla P(L(\eta_r, \eta_r^P, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \\ Q(L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0) - Q(L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla Q(L(\eta_r, \eta_r^Q, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \\ R(L(\eta_r, r, 0) + \hat{x}_0) - R(L(\eta_r, -r, 0) + \hat{x}_0) &= 2r \nabla R(L(\eta_r, \eta_r^R, 0) + \hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2) \end{aligned}$$

Si ahora observamos que  $\xi_r, \eta_r, \xi_r^P, \xi_r^Q, \xi_r^R, \eta_r^P, \eta_r^Q$  y  $\eta_r^R \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$  y que  $L(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ , como las funciones  $P, Q$  y  $R$  son de clase  $C^1$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r ([F(\gamma_{r,1}(\xi_r)) - F(\gamma_{r,3}(\xi_r))] \cdot L(\hat{e}_2))}{\text{área}(R_r)} &= (\nabla P(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1), \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1), \nabla R(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_1)) \cdot L(\hat{e}_2) \\ &= a_{12}a_{11} \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{12}a_{21} \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{12}a_{31} \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ & a_{22}a_{11} \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{22}a_{21} \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{22}a_{31} \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ & a_{32}a_{11} \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{32}a_{21} \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{32}a_{31} \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r ([F(\gamma_{r,2}(\eta_r)) - F(\gamma_{r,4}(\eta_r))] \cdot L(\hat{e}_1))}{\text{área}(R_r)} &= (\nabla P(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2), \nabla Q(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2), \nabla R(\hat{x}_0) \cdot L(\hat{e}_2)) \cdot L(\hat{e}_1) \\ &= a_{11}a_{12} \frac{\partial P}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{11}a_{22} \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{11}a_{32} \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ & a_{21}a_{12} \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{21}a_{22} \frac{\partial Q}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{21}a_{32} \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0) + \\ & a_{31}a_{12} \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) + a_{31}a_{22} \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) + a_{31}a_{32} \frac{\partial R}{\partial z}(\hat{x}_0) \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)} &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0) \right) (a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) + \left( \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0) \right) (a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}) \\ &+ \left( \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot (L(\hat{e}_1) \times L(\hat{e}_2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot L(\hat{e}_3) \\
 &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot \hat{n}
 \end{aligned}$$

■

Aun cuando esta prueba estuvo un poco laboriosa, la identidad

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_r} F \cdot d\gamma_r}{\text{área}(R_r)} = \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot \hat{n} \quad (3.30)$$

bien valió la pena todo ese trabajo. Más adelante (en el próximo capítulo) probaremos que si  $\{\Omega_\varepsilon\}_{0 < \varepsilon < c}$  es una familia de superficies (no necesariamente contenidas en un plano) tales que para toda  $0 < \varepsilon < c$  se satisface que:

1.  $\hat{x}_0 \in \Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$
2. el vector (unitario) normal a  $\Omega_\varepsilon$  en el punto  $\hat{x}_0$  siempre es  $\hat{n}$
3.  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diam}(\Omega_\varepsilon) = 0$
4. el borde  $\Gamma_\varepsilon$  de  $\Omega_\varepsilon$  (es decir,  $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_\varepsilon$ ) es una curva cerrada simple, y
5.  $\gamma_\varepsilon$  es una parametrización de  $\Gamma_\varepsilon$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se le ve desde el lado en que apunta el vector  $\hat{n}$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} F \cdot d\gamma_\varepsilon}{\text{área}(\Omega_\varepsilon)} = \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right) \cdot \hat{n}$$

(ver figura 3.45).

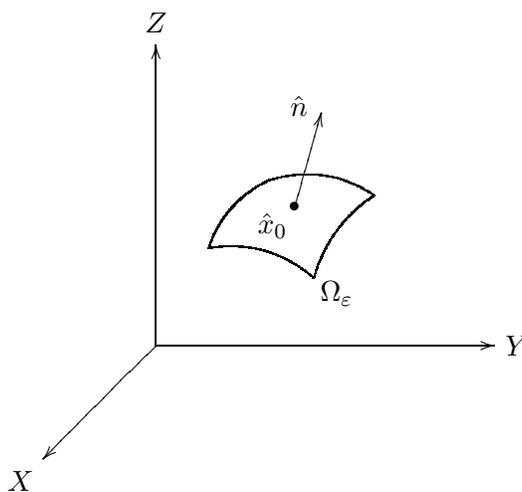


Figura 3.45: Una superficie  $\Omega_\varepsilon$  tal que  $\hat{x}_0 \in \Omega_\varepsilon \setminus \partial\Omega_\varepsilon$  y el vector (unitario) normal a  $\Omega_\varepsilon$  en el punto  $\hat{x}_0$  es  $\hat{n}$

Por esta razón, el vector

$$\left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}_0) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}_0), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}_0) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}_0), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}_0) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}_0) \right)$$

ocupa un papel muy relevante en el problema de determinar la rotación promedio producida por un campo  $F$ , motivo por el cual se le nombra y se le denota de una manera específica en la siguiente

**Definición 3.42** Sea  $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}$  y  $\frac{\partial R}{\partial y}$  existen para toda  $\hat{x} \in U$ . Definimos el rotacional de  $F$  en  $\hat{x}$ , al cual se denotará por  $\mathbf{Rot}F(\hat{x})$ , como el vector

$$\left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \right)$$

es decir

$$\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{x}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{x}), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{x}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{x}), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) \right)$$

Análogamente a lo que sucede en el caso de campos de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , esta nueva operación definida para campos de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  también se lleva bien con la aritmética básica de este tipo de funciones, como lo formulamos en la siguiente

**Proposición 3.43** Sean  $F, G : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tales que  $\mathbf{Rot}F(\hat{x})$  y  $\mathbf{Rot}G(\hat{x})$  existen para toda  $\hat{x} \in U$ .

1. si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  entonces  $\mathbf{Rot}(\alpha F + \beta G)(\hat{x}) = \alpha \mathbf{Rot}F(\hat{x}) + \beta \mathbf{Rot}G(\hat{x})$  para toda  $\hat{x} \in U$
2. si  $f : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^1$  entonces  $\mathbf{Rot}(fF)(\hat{x}) = f(\hat{x})\mathbf{Rot}F(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x}) \times F(\hat{x})$  para toda  $\hat{x} \in U$

Como es de suponerse, la prueba de esta proposición se deja al lector.

Cuando definimos el concepto de rotación puntual (promedio) producida por un campo  $F$  en un plano (definido en 3.39), mencionamos que dicha rotación puntual siempre existe si  $F$  es un campo de clase  $C^1$ . De hecho, con base en la definición anterior podemos formular el siguiente resultado.

**Proposición 3.44** Si  $F = (P, Q, R) : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una función de clase  $C^1$  en  $U$ , y  $\hat{x}_0 \in U$ , entonces

$$\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0) = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0) \cdot \hat{n}) \quad (3.31)$$

**Dem.** Se deja al lector (ver problema 33). ■

La identidad 3.31 nos permite dar una interpretación muy interesante del rotacional de un campo  $F$  de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ . En términos sencillos, lo que nos dice dicha identidad es que el vector rotacional de un campo  $F$  en un punto  $\hat{x}_0$ , es decir  $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$ , nos indica cuál es el plano sobre el cual el campo  $F$  produce la máxima rotación puntual (promedio). Esto significa que, si tomamos un plano que contenga al punto  $\hat{x}_0$  y sobre de éste colocamos una pequeña circunferencia  $C$  con centro en  $\hat{x}_0$  (¡de “esas” que no tienen volumen!), entonces la rotación promedio producida por el campo  $F$  sobre la circunferencia  $C$  alcanzará su máximo valor (y girará en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj), justo cuando se tome el plano que es perpendicular al vector  $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$  (ver figura 3.46). Seguramente el lector recordará que esta es una propiedad muy similar a la del vector gradiente de una función  $f$  en un punto  $\hat{x}_0$  ( $\nabla f(\hat{x}_0)$ ) que nos indica cuál es la dirección, a partir de  $\hat{x}_0$ , en la que la función alcanza su máxima razón de cambio.

A continuación daremos un ejemplo en el que, además de mostrar cómo se calcula la rotación puntual (promedio), veremos que también se confirma la interpretación anterior.

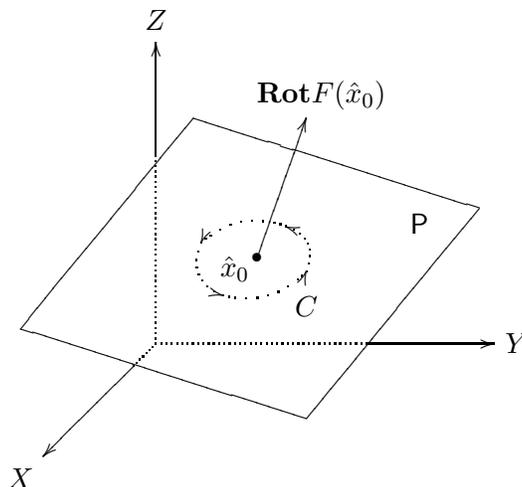


Figura 3.46: Si tomamos un plano  $P$  que contenga al punto  $\hat{x}_0$  y sobre de éste colocamos una pequeña circunferencia  $C$  con centro en  $\hat{x}_0$ , entonces la rotación promedio producida por el campo  $F$  sobre la circunferencia  $C$  alcanzará su máximo valor (y girará en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) justo cuando se tome el plano que es perpendicular al vector  $\mathbf{Rot}F(\hat{x}_0)$

**Ejemplo 3.45** Considere el campo  $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$ . Calcule la rotación producida por el campo  $F$  en el punto  $(0, 0, 0)$  sobre el plano perpendicular a un vector unitario  $\hat{n}$ , arbitrario.

*Solución.* Lo primero que hay que observar en este ejemplo es que el campo  $F$  representa un campo de fuerzas que siempre actúa paralelamente al plano  $XY$ , de tal forma que es de esperarse que la máxima rotación puntual (promedio) en  $(0, 0, 0) = \hat{0}$  (o en cualquier otro punto) la produzca en el plano  $XY$  (o en uno paralelo a éste). De acuerdo con la definición 3.42

$$\begin{aligned} \mathbf{Rot}F(0, 0, 0) &= \left( \frac{\partial R}{\partial y}(\hat{0}) - \frac{\partial Q}{\partial z}(\hat{0}), \frac{\partial P}{\partial z}(\hat{0}) - \frac{\partial R}{\partial x}(\hat{0}), \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{0}) - \frac{\partial P}{\partial y}(\hat{0}) \right) \\ &= (0 - 0, 0 - 0, 1 - (-1)) \\ &= (0, 0, 2) \end{aligned}$$

de modo que, por la identidad 3.31 se tiene que

$$\mathit{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{0}) = \frac{1}{4\pi} ((0, 0, 2) \cdot \hat{n})$$

Como se puede observar, este número alcanza su máximo valor justo cuando  $\hat{n} = (0, 0, 1)$  lo cual confirma lo que esperábamos.

Terminamos esta sección con un par de observaciones. La primera tiene que ver con la rotación puntual (promedio) producida por un campo  $F$  en un punto  $\hat{x}_0$  contenido en un plano  $P$ . Como se recordará, la conveniencia de usar a un vector unitario  $\hat{n}$  no sólo estaba en el hecho de que con éste determinábamos al plano  $P$ , sino que además a través de  $\hat{n}$  podíamos establecer la dirección de la rotación producida por  $F$ . De esta forma, aún cuando los vectores  $\hat{n}$  y  $-\hat{n}$  determinan al mismo plano  $P$ , si  $\mathit{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$  es un número positivo (en cuyo caso sabemos que desde el lado en el que apunta el vector  $\hat{n}$ , la rotación producida por  $F$  se ve en el sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) se debiera tener que  $\mathit{Rot}_{-\hat{n}}F(\hat{x}_0)$  es un número negativo (desde  $-\hat{n}$  el mismo

movimiento de rotación se ve en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj); y por la misma razón, si  $\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$  es un número negativo,  $\text{Rot}_{-\hat{n}}F(\hat{x}_0)$  tiene que ser un número positivo. Observe que la identidad 3.31 confirma esta observación puesto que de ella se deduce que

$$\text{Rot}_{-\hat{n}}F(\hat{x}_0) = -\text{Rot}_{\hat{n}}F(\hat{x}_0)$$

Finalmente, aún cuando la expresión para el vector  $\mathbf{Rot}F$  parece un poco elaborada, nótese que ésta se puede recordar fácilmente si notamos lo siguiente: su primera coordenada

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}$$

se puede pensar como el rotacional del campo (de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ )  $(Q, R)$  considerando, a  $Q$  y  $R$  sólo como funciones de las variables  $y$  y  $z$ . Es decir, para obtener la primera coordenada de  $\mathbf{Rot}F$  basta con “eliminar” la primera coordenada de  $F$  (en este caso la función  $P$ ) y la primera variable (en este caso  $x$ ) y calcular  $\text{Rot}(Q, R)$  en términos de las variables  $y$  y  $z$ . Para la segunda coordenada de  $\mathbf{Rot}F$  siga un procedimiento similar: elimine la segunda coordenada de  $F$  (en este caso  $Q$ ), al campo que le queda  $(P, R)$  considérela sólo como función de las variables  $x$  y  $z$  (“elimine la segunda variable”) y después calcule

$$\begin{aligned} -\text{Rot}(P(x, z), R(x, z)) &= -\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento “elimine” la tercera función coordenada de  $F$  y la tercera variable, y calcule

$$\text{Rot}(P(x, y), Q(x, y)) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

para obtener la tercera coordenada de  $\mathbf{Rot}F$ . En resumen, observe que se cumple la siguiente identidad

$$\mathbf{Rot}F = (\text{Rot}(Q(\cdot, y, z), R(\cdot, y, z)), -\text{Rot}(P(x, \cdot, z), R(x, \cdot, z)), \text{Rot}(P(x, y, \cdot), Q(x, y, \cdot)))$$

### 3.8 Campos conservativos (segunda parte)

Si bien es cierto que el concepto de rotacional, y los teoremas asociados a éste (como el Teorema de Green) son muy importantes por sí mismos, también es cierto que juegan un papel muy relevante en el tema de los campos conservativos. En la sección 3.4 probamos la proposición 3.21 la cual se podría reformular para campos de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  o de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  usando el concepto de rotacional, de la siguiente forma:

**Proposición 3.46** Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  en  $U$ , con  $n = 2$  ó  $n = 3$ . Si  $F$  es un campo conservativo en  $U$  entonces  $\text{Rot}F(\hat{x}) = 0$  (si  $n = 2$ ) o  $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = (0, 0, 0)$  (si  $n = 3$ ) para toda  $\hat{x} \in U$ .

Como vimos en esa misma sección, el campo

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) \tag{3.32}$$

$$= \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

definido en  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , es un campo que no es conservativo (ejemplo 3.19) y satisface que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

para toda  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , lo que significa que el  $\text{Rot } F(x, y) = 0$  en ese mismo dominio y por lo tanto este campo es un contraejemplo para el recíproco de la proposición anterior.

De hecho, básicamente con este mismo ejemplo de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  podemos construir uno que cumpla con el mismo propósito de mostrar que este recíproco tampoco es cierto para campos de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ . Considere

$$\begin{aligned} G(x, y, z) &= (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)) \\ &= \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, 0 \right) \end{aligned} \tag{3.33}$$

el cual está definido para  $(x, y, z) \in U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3 \setminus \{eje Z\}$ . Es fácil ver que  $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = (0, 0, 0)$  para toda  $(x, y, z) \in U$  y sin embargo tampoco es un campo conservativo (¡si  $G$  fuera un campo conservativo  $F$  también lo sería!).

Como dijimos al final de la sección 3.4, el problema con la validez del recíproco de cualquiera de estas dos proposiciones (la 3.21 y la 3.46) tiene que ver con la geometría del dominio del campo en cuestión y la clave de la solución nos la da el Teorema de Green.

Consideremos  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en su dominio y tal que  $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$  para toda  $(x, y) \in U$ . De acuerdo con el teorema 3.18 basta que la integral de  $F$  sobre cualquier curva cerrada  $\Gamma$  contenida en  $U$  sea cero, para que podamos concluir que  $F$  es un campo conservativo en  $U$ . De hecho, por el problema 19 sería suficiente que esta afirmación fuera cierta para cualquier curva  $\Gamma \subset U$  cerrada y poligonal, con lados paralelos a los ejes, e incluso con el agregado de que  $\Gamma$  fuera simple (si una de estas curvas  $\Gamma$  no es cerrada simple, ¡se puede descomponer en una suma finita de curvas de este tipo!).

Ahora, si la región  $U$  fuera tal que cualquiera de estas curvas cerradas simples y poligonales  $\Gamma \subset U$  se pudiera ver como el borde (o la frontera) de un conjunto Jordan-medible  $\Omega$  contenido en  $U$ , por el Teorema de Green concluiríamos que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \\ &= \int_{\Omega} \text{Rot } F \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todas estas curvas y, por el problema 19, ¡ $F$  sería un campo conservativo!

Esta argumentación es tan convincente, que cuando menos para campos de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , podemos formular un resultado como el siguiente:

**Proposición 3.47** *Sea  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de clase  $C^1$  en su dominio y tal que  $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$  para toda  $(x, y) \in U$ . Si  $U$  es tal que para cualquier curva cerrada simple y poligonal  $\Gamma \subset U$  existe una región Jordan-medible  $\Omega$  contenida en  $U$  tal que  $\Gamma = \partial\Omega = \text{Fr}(\Omega)$  entonces  $F$  es un campo conservativo en  $U$ .*

**Dem.** Se deja al lector ■

Dado que el campo definido en 3.32 ya sabemos que no es conservativo en su dominio  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , debe de haber una parte de las hipótesis de la proposición anterior que no se cumple en este ejemplo, y justo la parte que no se cumple es la que se refiere al dominio  $U$ . En efecto, si se toma la curva cerrada simple y poligonal  $\Gamma$  contenida en  $U$ , formada por el cuadrado con vértices en los puntos  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  y  $(1, -1)$ , observe que ¡no existe ningún conjunto Jordan-medible (y por lo tanto acotado)  $\Omega$  contenido en  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tal que  $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ ! (ver figura 3.47).

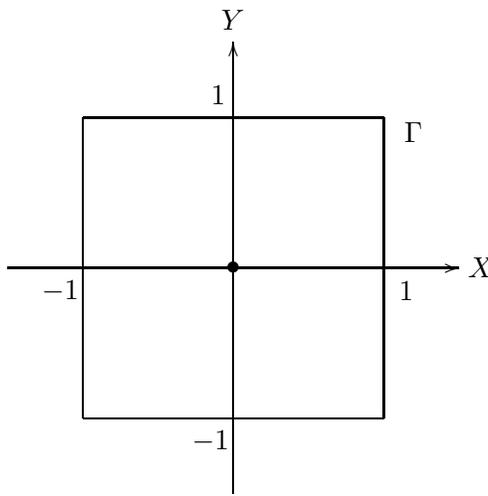


Figura 3.47: Si hacemos  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y  $\Gamma$  la curva cerrada simple contenida en  $U$  que está formada por el cuadrado con vértices en los puntos  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  y  $(1, -1)$ , observe que ¡no existe ningún conjunto Jordan-medible (y por lo tanto acotado)  $\Omega$  contenido en  $U$  tal que  $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$ !

Desafortunadamente, la condición que le impusimos al dominio  $U \subset \mathbb{R}^2$  en la proposición anterior no se puede generalizar a otras dimensiones (además de que tampoco contamos en otras dimensiones con un resultado “equivalente” al Teorema de Green (¡por ahora!)). Sin embargo, existe otra manera de formular esta propiedad.

Observe que la región  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  tiene un “hoyo” en el  $(0, 0)$  y este “hoyo” es el que impide que esta región  $U$  satisfaga la condición de la proposición anterior. Una manera de decir que una región  $U \subset \mathbb{R}^2$  no tiene “hoyos”, es justo usando curvas cerradas simples contenidas en  $U$  de la siguiente manera: si una región  $U$  no tiene “hoyos” entonces cualquier curva cerrada simple  $\Gamma \subset U$  se puede “contraer” a un punto de  $U$  sin “salirnos” de  $U$  (ver figura 3.48) (lo que por cierto no sucede en el caso de la región  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ya que cualquier curva cerrada simple que “rodee” al origen no se puede “contraer” a un punto sin pasar por el origen (que no está en  $U$ )).

Lo mejor de este método para determinar si una región tiene “hoyos”, es que se puede aplicar a regiones contenidas en cualquier  $\mathbb{R}^n$ . De hecho, observe que el dominio del campo  $G$  (de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$ ) definido en 3.33 es  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$  y esta región sí tiene un “hoyo”, puesto que cualquier curva cerrada simple que rodee al eje  $Z$  no se puede “contraer” a un punto sin pasar por dicho eje (ver figura 3.49). Aún cuando se satisface que  $\mathbf{Rot}G(\hat{x}) = (0, 0, 0)$  para toda  $(x, y, z) \in U$ , todo parece indicar que este “hoyo” de  $U$  es la razón principal por la que  $G$  no es un campo conservativo en  $U$ .

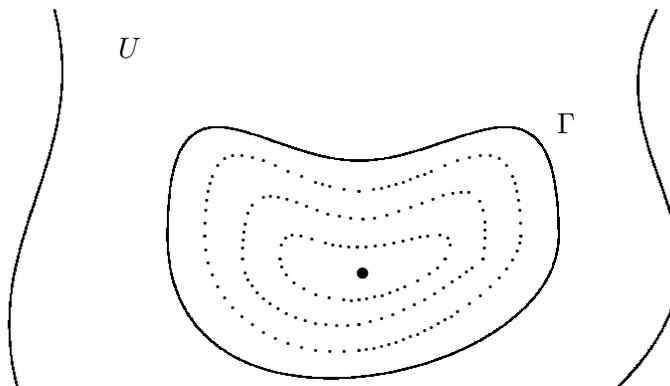


Figura 3.48: Una región  $U \subset \mathbb{R}^2$  no tiene “hoyos” si cualquier curva cerrada simple  $\Gamma \subset U$  se puede “contraer” a un punto de  $U$  sin “salirnos” de  $U$

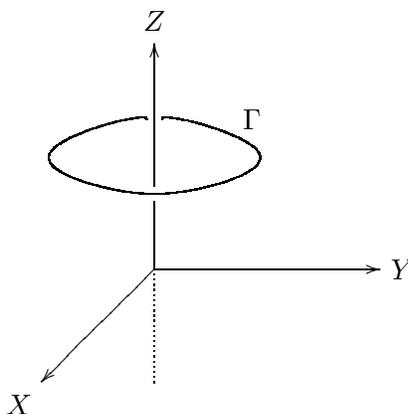


Figura 3.49: La región  $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\text{eje } Z\}$  sí tiene un “hoyo” puesto que cualquier curva cerrada simple que rodee al eje  $Z$  no se puede “contraer” a un punto sin pasar por dicho eje

Formalizar de manera rigurosa lo que significa que una curva cerrada simple  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$  se pueda “contraer” a un punto, es algo que escapa a los objetivos de este texto. Simplemente mencionaremos que a las regiones  $U \subset \mathbb{R}^n$  que tengan la propiedad de que cualquier curva cerrada simple  $\Gamma \subset U$  se puede contraer a un punto de  $U$ , sin salirse de  $U$  (que geoméricamente significa que  $U$  no tiene “hoyos”<sup>7</sup>), se les conoce con el nombre de regiones *simplemente conexas* y que el teorema más general que se puede probar con relación a los campos conservativos y estas regiones, dice lo siguiente:

**Teorema 3.48** Sea  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  en  $U$ , con  $U$  una región simplemente conexa. Si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda  $\hat{x} \in U$  y para toda  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  ( $i \neq j$ ) entonces  $F$  es un campo conservativo en  $U$ .

<sup>7</sup>Existe una manera “más topológica” de decir que una región  $U \subset \mathbb{R}^n$  no tiene “hoyos”. Se dice que  $U \subset \mathbb{R}^n$  no tiene “hoyos” si cada vez que  $U = A \cup B$ , con  $A$  y  $B$  abiertos conexos, se tiene que  $A \cap B$  es conexo. En topología general, a lo conjuntos que tienen esta propiedad se les conoce con el nombre de conjuntos unicoherentes.

Aun y cuando no contamos con todo lo necesario para probar este teorema, no hay por qué desanimarse. Afortunadamente existe una clase (muy grande) de regiones en  $\mathbb{R}^n$ , cuya definición es muy sencilla y para las cuales se puede probar un teorema completamente análogo al anterior.

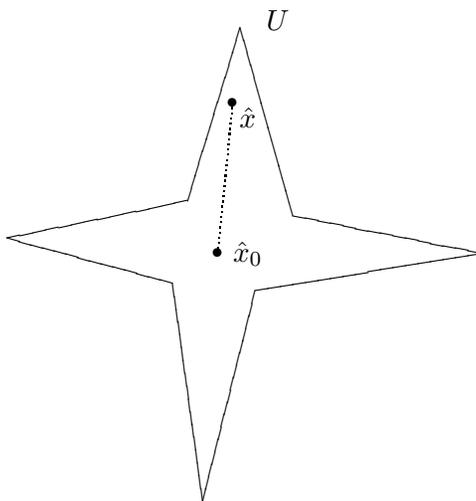


Figura 3.50: Una región  $U \subset \mathbb{R}^2$  con forma de estrella o estrellada

Estas regiones están inspiradas en aquellos conjuntos  $U$  del plano que tienen forma de estrella y que una de sus principales características es que al menos existe un punto  $\hat{x}_0 \in U$  con la propiedad de que el segmento de recta que lo une con cualquier otro punto  $\hat{x} \in U$  se queda totalmente contenido en  $U$  (ver figura 3.50). Por esta razón se les conoce con el nombre de *regiones en forma de estrella* o *regiones estrelladas*. A continuación damos la definición formal de este tipo de regiones para cualquier  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.49** Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  una región. Decimos que  $U$  tiene forma de estrella o que  $U$  es una región estrellada, si existe  $\hat{x}_0 \in U$  tal que para cada  $\hat{x} \in U$  el segmento de recta que une a  $\hat{x}_0$  con  $\hat{x}$ , y que denotamos por  $[\hat{x}_0, \hat{x}]$ , está contenido en  $U$ . Es decir, si

$$[\hat{x}_0, \hat{x}] = \{\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$$

para toda  $\hat{x} \in U$ . En este caso diremos que  $U$  es estrellada con respecto a  $\hat{x}_0$ .

Un ejemplo de región estrellada (¡aunque no lo parezca!), es el siguiente.

**Ejemplo 3.50** Sea  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$ . Pruebe que  $U$  es una región estrellada.

*Solución.* Hacemos  $\hat{x}_0 = (1, 0) \in U$  y sea  $\hat{x} = (x, y) \in U$  arbitrario. Entonces

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0, \hat{x}] &= \{\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0) \mid t \in [0, 1]\} \\ &= \{(1 + t(x - 1), ty) \mid t \in [0, 1]\} \end{aligned}$$

y distinguimos dos casos. Si  $y = 0$  entonces  $0 < x$  y por lo tanto  $1 + t(x - 1) = (1 - t) + tx > 0$  para toda  $t \in [0, 1]$  de modo que  $\{(1 + t(x - 1), 0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$ . Si  $y \neq 0$  entonces  $ty \neq 0$  para toda  $t \in (0, 1]$  y por lo tanto

$$(1 + t(x - 1), ty) \notin \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$$

para toda  $t \in [0, 1]$  por lo que también en este caso se satisface que

$$[\hat{x}_0, \hat{x}] = \{\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0) \mid t \in [0, 1]\} \subset U$$

Por lo tanto  $U$  es una región estrellada (ver figura 3.51).

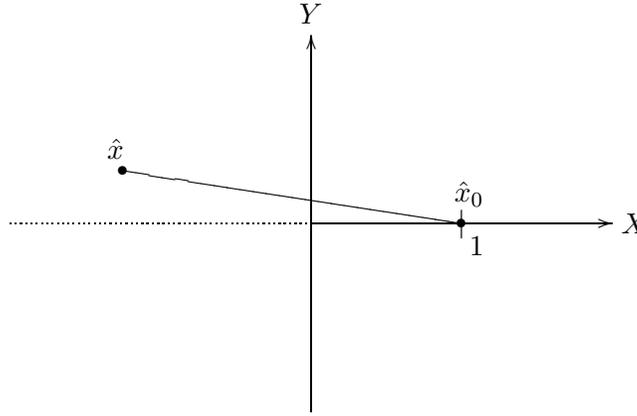


Figura 3.51: La región  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$  es estrellada

Como mencionamos párrafos arriba, el siguiente teorema sí que lo podemos probar.

**Teorema 3.51** Sea  $F = (F_1, \dots, F_n) : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  en  $U$ , con  $U$  una región estrellada. Si

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x})$$

para toda  $\hat{x} \in U$  y para toda  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  ( $i \neq j$ ) entonces  $F$  es un campo conservativo en  $U$ .

**Dem.** Dado que  $U$  es una región estrellada, existe  $\hat{x}_0 = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in U$  tal que  $[\hat{x}_0, \hat{x}] \subset U$  para toda  $\hat{x} \in U$ . Ahora, definimos  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera: para cada  $\hat{x} \in U$ , definimos

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{x}) &= \int_{\Gamma=[\hat{x}_0, \hat{x}]} F \cdot d\gamma \\ &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 F(\hat{x}_0 + t(\hat{x} - \hat{x}_0)) \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0) dt \end{aligned}$$

Observe que  $\varphi$  está bien definida puesto que la curva  $\Gamma = [\hat{x}_0, \hat{x}] \subset U$  sobre la cual se integra a  $F$  está únicamente determinada.

Ahora probaremos que, para cada  $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ , se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) = F_i(\hat{x})$$

para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Por el teorema 2.7 del capítulo dos (en su versión más general) y la regla de la cadena, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \int_0^1 F_1(\hat{x}_0(1-t) + t\hat{x}) (x_1 - x_1^{(0)}) dt + \dots + \int_0^1 F_i(\hat{x}_0(1-t) + t\hat{x}) (x_i - x_i^{(0)}) dt + \right. \\
&\quad \left. \dots + \int_0^1 F_n(\hat{x}_0(1-t) + t\hat{x}) (x_n - x_n^{(0)}) dt \right) \\
&= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ F_1 \left( x_1^{(0)}(1-t) + tx_1, \dots, x_i^{(0)}(1-t) + tx_i, \dots, x_n^{(0)}(1-t) + tx_n \right) \right] (x_1 - x_1^{(0)}) dt \\
&\quad + \dots + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ F_i \left( x_1^{(0)}(1-t) + tx_1, \dots, x_i^{(0)}(1-t) + tx_i, \dots, x_n^{(0)}(1-t) + tx_n \right) (x_i - x_i^{(0)}) \right] dt \\
&\quad + \dots + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ F_n \left( x_1^{(0)}(1-t) + tx_1, \dots, x_i^{(0)}(1-t) + tx_i, \dots, x_n^{(0)}(1-t) + tx_n \right) \right] (x_n - x_n^{(0)}) dt \\
&= \int_0^1 t \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_1 - x_1^{(0)}) dt + \dots + \int_0^1 \left( t \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_i - x_i^{(0)}) + F_i(\gamma(t)) \right) dt \\
&\quad + \dots + \int_0^1 t \frac{\partial F_n}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_n - x_n^{(0)}) dt
\end{aligned}$$

y como

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\hat{x}) = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{x})$$

para toda  $\hat{x} \in U$  y toda  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $j \neq i$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\hat{x}) &= \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_1}(\gamma(t)) (x_1 - x_1^{(0)}) dt + \dots + \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(\gamma(t)) (x_i - x_i^{(0)}) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt \\
&\quad + \dots + \int_0^1 t \frac{\partial F_i}{\partial x_n}(\gamma(t)) (x_n - x_n^{(0)}) dt \\
&= \int_0^1 t \nabla F_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt \\
&= \int_0^1 t (F_i \circ \gamma)'(t) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt \\
&= t (F_i \circ \gamma)(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 (F_i \circ \gamma)(t) dt + \int_0^1 F_i(\gamma(t)) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= F_i(\gamma(1)) \\ &= F_i(\hat{x}) \end{aligned}$$

■

Concluimos este capítulo con un ejemplo de cómo aplicar el teorema anterior, y lo haremos con un campo que hemos usado con mucha frecuencia en las últimas secciones.

**Ejemplo 3.52** *Muestre que el campo*

$$F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

es un campo conservativo en la región  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0\}$  y encuentre una función  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\nabla\varphi(\hat{x}) = F(\hat{x})$  para toda  $\hat{x} \in U$ .

*Solución.* En virtud de que la región  $U$  es estrellada (3.50) y que  $\text{Rot } F(\hat{x}) = 0$ , es decir, que

$$\frac{\partial P}{\partial y}(\hat{x}) = \frac{\partial Q}{\partial x}(\hat{x})$$

para toda  $\hat{x} \in U$ , por el teorema anterior sabemos que  $F$  es un campo conservativo en  $U$ . Aún cuando no vamos a obtener una función  $\varphi$  siguiendo la construcción que se dio en la prueba de dicho teorema, se tiene que la función

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \arctan(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0, y < 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & \text{si } x < 0, y > 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & \text{si } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

cumple con la propiedad que se desea, cuya verificación se deja como un problema para el lector.

### 3.9 Problemas

1. Sea  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave por pedazos. Pruebe que  $\gamma$  es continua en  $[a, b]$ .
2. (Teorema Fundamental del Cálculo para funciones suaves por pedazos) Sea  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función suave por pedazos. Pruebe que

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$$

3. Pruebe que, si  $\gamma$  y  $\delta$  son suaves por pedazos, entonces  $\gamma + \delta$  es suave por pedazos.

4. Considere las funciones  $\gamma_1(t) = (t, 0)$ ,  $\gamma_2(t) = (1, t)$ ,  $\gamma_3(t) = (1 - t, 1)$  y  $\gamma_4(t) = (0, 1 - t)$ , con  $t \in [0, 1]$  para todas ellas. Pruebe que

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$$

donde  $\gamma$  es la función suave por pedazos definida en el ejemplo 3.2. (Observe que, siendo estrictos, habría que escribir que  $\gamma = ((\gamma_1 + \gamma_2) + \gamma_3) + \gamma_4$ , pero lo dejaremos así para no complicar la notación).

5. Sea  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función suave por pedazos y  $\alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow [a, b] \subset \mathbb{R}$  suprayectiva en  $[a, b]$ , y de clase  $C^1$  en  $[c, d]$ .
- Muestre con un ejemplo que la función  $\gamma \circ \alpha : [c, d] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  no siempre resulta ser suave por pedazos.
  - Sea  $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$  tal que  $\gamma$  tiene derivada continua (de clase  $C^1$ ) en cada subintervalo  $[t_{i-1}, t_i]$  (para  $i = 1, \dots, k$ ). Pruebe que, si el conjunto  $\{x \in [c, d] \mid \alpha(x) \in \mathcal{P}\}$  es finito entonces  $\gamma \circ \alpha$  es suave por pedazos.
  - Pruebe las afirmaciones que aparecen en la definición 3.4.

6. Pruebe la proposición 3.8.

7. En cada uno de los siguientes problemas calcule  $\int_{\Gamma} f \|d\gamma\|$ , donde:

- $\Gamma$  es el triángulo de vértices  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ ;  $\gamma$  es una parametrización que la recorre en este orden y  $f(x, y, z) = x + y + z$ .
- $\Gamma$  es el segmento de la parábola  $y = \frac{x^2}{4}$  entre los puntos  $(0, 0)$  y  $(4, 4)$  y  $f(x, y) = x - y^2$ .
- $\Gamma$  es la parte de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  que está en el cuadrante superior derecho;  $\gamma$  es una parametrización que la recorre en el sentido de las manecillas del reloj y  $f(x, y) = xy \left( \frac{b^2}{a^2} x^2 + \frac{a^2}{b^2} y^2 \right)$ .
- $\Gamma$  es la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $y + z = 1$ ;  $\gamma$  es una parametrización que la recorre en el sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando la vemos desde el origen, y  $f(x, y, z) = xz + yz + xy$ .

8. Calcule el área de la superficie del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  que está entre los planos  $z = 0$  y  $z = x + y + 2$ .

9. Deduzca cuáles son las coordenadas del centro de masa de un alambre que tiene la forma de una curva  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  (suave por pedazos) y que tiene una función de densidad  $\rho(x, y)$ .

10. Un alambre tiene la forma de la circunferencia  $x^2 + y^2 = a^2$  y una densidad según la función  $\rho(x, y) = |x| + \frac{a}{\pi}$ . Calcule:

i) la masa del alambre

ii) su centro de masa

11. Pruebe las proposiciones 3.14 y 3.15.

12. Sean  $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada continua, tales que  $f(a) = g(a)$ ,  $f(b) = g(b)$  y  $g(x) < f(x)$  para toda  $x \in (a, b)$ . Sea  $\Gamma$  la curva formada por las gráficas de  $f$  y  $g$ . Si  $\gamma$  es una parametrización de  $\Gamma$ , que la recorre una sola vez en el sentido contrario al de las manecillas del reloj, pruebe que las integrales

$$\int_{\Gamma} (0, x) \cdot d\gamma \quad \text{y} \quad \int_{\Gamma} (-y, 0) \cdot d\gamma$$

calculan el área de la región acotada por  $\Gamma$ .

13. Sea  $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrización de una curva  $\Gamma \subset U$  y supóngase que  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un campo vectorial tal que, en cada punto  $\gamma(t) \in \Gamma$ ,  $F(\gamma(t))$  está en la misma dirección que el vector  $\gamma'(t)$ . Pruebe que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma} \|F\| \|d\gamma\|$$

14. Pruebe que

$$\left| \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma \right| \leq M \cdot l(\Gamma)$$

donde  $M = \max\{\|F(\hat{x})\| \mid \hat{x} \in \Gamma\}$  y  $l(\Gamma)$  es la longitud de arco de  $\Gamma$ .

15. Una partícula se mueve a lo largo de la curva  $\Gamma$  parametrizada por  $\gamma(t) = (\sin(t), \cos(t), t)$ , ( $t \geq 0$ ). Durante todo su recorrido actúa sobre ella un campo de fuerzas dado por  $F(x, y, z) = (y-1, z, x)$ . Si la partícula abandona la curva por su tangente en el instante  $t = \pi/2$ , calcule el trabajo realizado por el campo  $F$  sobre la trayectoria seguida por la partícula en los intervalos de tiempo  $[0, \pi/2]$  y  $[\pi/2, \pi]$ .

16. En cada uno de los siguientes incisos calcule  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ , donde:

- (a)  $F(x, y, z) = (y, -x, z)$  y  $\Gamma$  es la intersección del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  y el plano  $y + z = 1$ . La parametrización  $\gamma$  debe ser tal, que vista desde el origen, recorre a  $\Gamma$  en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.
- (b)  $F(x, y, z) = (y, (1-x)y, y^2z)$  y  $\Gamma$  es la intersección del hemisferio superior de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  y el cilindro  $(x-1)^2 + y^2 = 1$ . La parametrización  $\gamma$  debe ser tal que, vista desde el origen, recorre a  $\Gamma$  en el sentido de las manecillas del reloj.

17. Sean  $f, g : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas;

- (a) pruebe que el campo  $F : (a, b) \times (a, b) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definido como  $F(x, y) = (f(x), g(y))$  es conservativo en su dominio. Calcule una función gradiente para  $F$ .
- (b) si  $0 \leq a$ , pruebe que el campo  $F = (F_1, \dots, F_n) : U = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid a < \|\hat{x}\|^2 < b\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde cada función coordenada  $F_i$  está definida como  $F_i(\hat{x}) = x_i f(\|\hat{x}\|^2)$ , es conservativo en su dominio. Si  $h$  es una primitiva de  $f$ , calcule una función gradiente para  $F$  en términos de  $h$ .

18. Pruebe que, si  $U \subset \mathbb{R}^n$  es un abierto conexo (una región), entonces cualquier par de puntos en  $U$  se puede unir por una curva poligonal formada por segmentos paralelos a alguno de los ejes coordenados.
19. Pruebe que el teorema 3.18 sigue siendo cierto si se supone que todas las curvas que ahí se mencionan, son curvas poligonales y de lados paralelos a los ejes.
20. Sean,  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en la región  $U$ , y  $F = \nabla\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Pruebe que, si  $\hat{x}_0, \hat{x}_1 \in U$  pertenecen al mismo conjunto de nivel de  $\varphi$  entonces

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = 0$$

para cualquier parametrización  $\gamma$  de  $\Gamma \subset U$  que empieza en  $\hat{x}_0$  y termina en  $\hat{x}_1$ .

21. Pruebe la proposición 3.21.
22. Dé cuando menos dos argumentos distintos para demostrar que los siguientes campos no son conservativos en su dominio:
- (a)  $F(x, y) = (y + x \cos(y), x + y \sin(x))$   
 (b)  $F(x, y, z) = (2xy - z^2, y^2 + x \cos(z), x^2z)$

23. Calcule la integral de línea  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$  donde  $F(x, y) = (x^2 + xy, y^2 + x^2)$  y  $\Gamma$  es:

- (a) cualquier círculo con centro en el origen  
 (b) el cuadrado  $|x| + |y| = 1$   
 (c) cualquier triángulo con vértices  $(-a, 1), (a, 1)$  y  $(0, b)$ ,  $a \neq 0$  y  $b < 0$   
 (d) ¿ $F$  es un campo conservativo en su dominio? Justifique su respuesta

24. Sea  $F(x, y) = (-y, x)$ . Pruebe que, si  $\Gamma$  es una curva cerrada simple parametrizada en el sentido contrario al de las manecillas del reloj por  $\gamma$ , y  $D$  es la región acotada por  $\Gamma$ , entonces

$$A(D) = \text{área de } D = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$$

25. Calcule la integral de línea  $\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma$ , donde:

- (a)  $F(x, y) = (2xy, x^2y)$  y  $\Gamma$  es la elipse  $4x^2 + y^2 = 4$  recorrida en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.  
 (b)  $F(x, y) = (3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3)$  y  $\Gamma$  es el círculo unitario con centro en el origen recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.  
 (c)

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}, \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} \right)$$

$(x, y) \neq (0, -1)$  y  $\Gamma$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 4$  recorrido en el sentido de las manecillas del reloj.

(d)

$$F(x, y) = \left( \frac{-(y-1)}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{-y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

$(x, y) \neq (0, 1), (-1, 0)$  y  $\Gamma$  es el círculo  $x^2 + y^2 = 6$  recorrido en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.

26. Sea

$$F(x, y) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

Calcule  $\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^{\perp}$ , donde  $\Gamma$  es una curva cerrada simple contenida en  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  y recorrida en sentido positivo (hay dos casos).

27. Sean  $F = (P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  y  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en la región  $U$ . Pruebe que:

(a)

$$\text{Rot}(fF) = f \text{Rot} F + \nabla f \cdot F^{\perp}$$

(b) si  $\Omega \subset U$  es un conjunto Jordan-medible tal que  $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$  es una curva cerrada simple y  $\Omega \cup \Gamma \subset U$  entonces

$$\int_{\Omega} f \text{Rot} F = \int_{\Gamma = \partial\Omega} (fF) \cdot d\gamma - \int_{\Omega} \nabla f \cdot F^{\perp}$$

en donde  $\gamma$  es una parametrización de  $\Gamma$  que la recorre (una vez) en el sentido contrario a las manecillas del reloj (esta identidad se puede interpretar como una *fórmula de integración por partes*<sup>8</sup>).

28. Sea  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en la región  $U$ . Si  $\Omega = \{\hat{x} \in U \mid f(\hat{x}) \neq 0\}$  es un conjunto Jordan-medible tal que  $\Gamma = \partial\Omega = Fr(\Omega)$  es una curva cerrada simple y  $\Omega \cup \Gamma \subset U$ , pruebe que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 = \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial y}$$

(sugerencia: aplique el inciso (b) del problema 27, usando un campo  $F$  “adecuado” en cada caso).

29. Sea  $F = (F_r, F_{\theta})$  un campo vectorial definido en  $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , dado en términos de coordenadas polares (ver página 151 para recordar lo que significa esto). Calcule el  $\text{Rot} F(\hat{x})$  a partir de su expresión en coordenadas cartesianas.

30. Sea  $F = (F_r, F_{\theta})$  un campo vectorial definido en  $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , dado en términos de coordenadas polares. Si  $\Gamma$  es una curva contenida en  $U$  y  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una parametrización de  $\Gamma$  tal que la pareja  $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  representa coordenadas polares del punto  $\gamma(t)$  para cada  $t \in [a, b]$ , encuentre una expresión para calcular  $\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$ .

31. Reformule (y pruebe) el Teorema de Green en términos de la  $\text{div} F$  y la integral  $\int_{\Gamma} F \cdot (d\gamma)^{\perp}$ .

32. Sea  $F = (F_r, F_{\theta})$  un campo vectorial definido en  $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , dado en términos de coordenadas polares. Encuentre una expresión para  $\text{div} F(\hat{x})$ .

<sup>8</sup>Fórmula sugerida por “Carlitos” Prieto López

33. Pruebe la proposición 3.44 (*sugerencia*: use la misma rotación  $L$  que se usó en la prueba de la proposición 3.41 para parametrizar el borde del disco  $D_r$  y después proceda como en la demostración de la proposición 3.25. Esta prueba es laboriosa pero no difícil. ¡Vale la pena hacerla!).
34. Determine si cada uno de los siguientes campos es conservativo en su dominio (en caso afirmativo, calcule una función gradiente). Pruebe su respuesta.
- (a)  $F(x, y) = (x^2 + 2xy, x^2 + y)$
  - (b)  $F(x, y) = (y^3/(x^2 + y^2)^{3/2}, x^3/(x^2 + y^2)^{3/2})$
  - (c)  $F(x, y, z) = (3e^z + 2xy, x^2 + z \operatorname{sen}(y), 3xe^z - \cos(y))$
  - (d)  $F(x, y, z) = (x/(x^2 + y^2 + z^2), y/(x^2 + y^2 + z^2), z/(x^2 + y^2 + z^2))$ . Diga si este campo es conservativo en  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$ . Pruebe su respuesta.
35. Para cada uno de los siguientes campos, determine cuál es el plano sobre el que produce la máxima rotación promedio en el origen:
- (a)  $F(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$
  - (b)  $F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$
  - (c)  $F(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$
  - (d)  $F(x, y, z) = (y, z, x)$

36. Pruebe, además de las identidades de la proposición 3.43, la siguiente identidad

$$\mathbf{Rot}(F \times G)(\hat{x}) = F(\hat{x}) \times \mathbf{Rot}G(\hat{x}) + \mathbf{Rot}F(\hat{x}) \times G(\hat{x})$$

37. Sea  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  en la región  $U$ , con  $n = 2$  ó  $n = 3$ . Si  $\operatorname{Rot} F(\hat{x}) = 0$  (si  $n = 2$ ) o  $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = (0, 0, 0)$  (si  $n = 3$ ) para toda  $\hat{x} \in U$  pruebe que para cada  $\hat{x} \in U$  existe  $r > 0$  tal que  $F$  es un campo conservativo en  $B_r(\hat{x})$  (lo que significa que todo campo de rotacional cero es, localmente, un campo conservativo).
38. Sean,  $U \subset \mathbb{R}^n$  una región,  $\hat{x}_0 \in U$  y  $\tilde{U} = \{\hat{x} - \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in U\}$ . Pruebe que  $\tilde{U}$  es estrellada con respecto a  $\hat{0}$  (el origen) sí y sólo si  $U$  es estrellada con respecto a  $\hat{x}_0$ .
39. Sean  $F, G : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  funciones de clase  $C^1$  en la región estrellada  $U$ , con  $n = 2$  ó  $n = 3$ . Si  $\operatorname{Rot} F(\hat{x}) = \operatorname{Rot} G(\hat{x})$  (si  $n = 2$ ) o  $\mathbf{Rot}F(\hat{x}) = \mathbf{Rot}G(\hat{x})$  (si  $n = 3$ ) para toda  $\hat{x} \in U$  pruebe que existe  $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en  $U$  tal que  $F(\hat{x}) = G(\hat{x}) + \nabla\varphi(\hat{x})$  para toda  $\hat{x} \in U$  (lo que significa que, si dos campos tienen el mismo rotacional en una región estrellada  $U$  entonces difieren por un campo conservativo en  $U$ ). ¿Esta afirmación sigue siendo cierta si  $U$  no es una región estrellada (¡ni simplemente conexa!)? Pruebe su respuesta.
40. Demuestre que el campo  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , dado por:

$$F(x, y, z, w) = (4wxy + 3yz, 2wx^2 + 3xz, 3xy + 3w^2z^2, 2yx^2 + 2wz^3)$$

es conservativo y calcule una función gradiente para  $F$ .