Capítulo 3

La derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$

Con este breve capítulo damos inicio al estudio del concepto de derivación para funciones de varias variables, pero a diferencia del capítulo anterior, empezaremos haciéndolo sólo para el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

Como también mencionamos anteriormente, dado que lo importante de las funciones de este tipo es su imagen, éstas suelen ser útiles para describir "objetos geométricos" a los que (bajo ciertas condiciones) nos referiremos como "*curvas*"; o para describir el "movimiento" de un objeto, razón por la cual a estas funciones también las conoceremos con el nombre de "*trayectorias*". Justo a partir de estos dos "usos" es que "motivaremos" su concepto de derivada, pero previamente daremos algunos ejemplos de ambas formas de usarlas.

3.1 Geometría y movimiento

Aun cuando a estas alturas el lector posiblemente no conozca una definición precisa de lo que significa la palabra "*curva*" (definición que precisaremos más adelante), cualquiera que ésta fuera debiera de abarcar a "objetos geométricos" tan conocidos como las rectas y las *cónicas* en el plano. A falta de tal definición y a manera de ejemplo, por ahora sólo nos limitaremos a mostrar que, entre otros muchos "objetos geométricos", las rectas y las cónicas se pueden obtener como la imagen de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Tal es el caso de las rectas en el plano ($\mathbb{R}^2$), las cuales podemos pensar en general como un conjunto definido de la siguiente forma:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\},$$

en donde $a^2 + b^2 > 0$.

Una forma muy sencilla de ver a R como la imagen de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, consiste en observar que, como $a^2 + b^2 > 0$, entonces $a \neq 0$ o $b \neq 0$, de modo que si suponemos que sucede lo primero, entonces para cualquier $(x, y) \in R$ se tiene que

$$x = \frac{-c - by}{a}. \tag{3.1}$$

Por tanto, a la pareja (x, y) la podemos escribir como

$$\left(\frac{-c - by}{a}, y\right),$$

es decir, la podemos escribir en términos de una sola variable (o de un sólo *parámetro*, que es el témino que se suele usar en este contexto). Basados en lo anterior, es fácil comprobar que si consideramos la función[1] $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = \left(\frac{-c - bt}{a}, t\right),$$

se tiene que $\gamma(\mathbb{R}) = R$.

[1]Es común que se usen letras griegas para nombrar a las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

En efecto, nótese que para toda $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\begin{aligned} a\left(\frac{-c-bt}{a}\right)+bt+c &= (-c-bt)+bt+c \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo cual concluimos que $\gamma(\mathbb{R}) \subset R$. Por otra parte, si $(x,y) \in R$, por la identidad 3.1 tenemos que bastará tomar $t = y$ para que se cumpla que

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= \left(\frac{-c-by}{a}, y\right) \\ &= (x,y), \end{aligned}$$

con lo que concluimos que $R \subset \gamma(\mathbb{R})$ y por lo tanto que, $\gamma(\mathbb{R}) = R$.

Aunque laborioso (pero no difícil), también se puede probar que la circunferencia con centro en el origen (de un sistema coordenado cartesiano dado) de radio $r > 0$ dada por

$$C_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

se puede obtener como la imagen de la función $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t)).$$

O que la elipse $E \subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$

se puede obtener como la imagen de la función $\gamma : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (a\cos(t), b\,\mathrm{sen}(t)).$$

O que la parábola $P \subset \mathbb{R}^2$ dada por

$$P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

se puede obtener como la imagen de la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\gamma(t) = (t, t^2).$$

Aun cuando todavía no tenemos todo lo necesario para definir lo que significa que un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ sea *una curva*, con base en estos ejemplos ya podemos definir lo que significa que una de estas funciones *parametrice* a un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$.

En general, si $C \subset \mathbb{R}^n$ es tal que coincide con la imagen de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, diremos que dicha función es *una parametrización* de C.

Definición 3.1 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Si existe $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma(I) = C$ decimos que γ es una parametrización de C. En este caso diremos que las identidades*

$$\begin{array}{rcl} x_1 &=& \gamma_1(t) \\ x_2 &=& \gamma_2(t) \\ &\vdots& \\ x_n &=& \gamma_n(t) \end{array}$$

son unas ecuaciones paramétricas de C.

Con relación a la definición anterior, es importante llamar la atención sobre el hecho de que a la función γ no se le pide ninguna *propiedad*. Identificar los subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ para los cuales existe una parametrización es sin duda un problema interesante (y tal vez no muy difícil), pero que está fuera de los objetivos de este texto. De hecho, hablando de propiedades de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, hemos definido ya lo que significa que una de estas funciones sea continua, y sin duda otra pregunta interesante sería la siguiente: ¿qué subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tienen una parametrización que sea continua? Este es un problema mucho mas interesante (¡y difícil!) que el anterior, y a los deseosos en saber algo al respecto les recomendamos investigar acerca de las llamadas *curvas de Peano*[2].

Como seguramente el lector ya habrá notado, más que responder estas preguntas, el objetivo de este texto está centrado en desarrollar las propiedades que pueden tener este tipo de funciones, entre la cuales se encuentra la de la derivabilidad.

Con respecto a la misma definición 3.1, también vale la pena destacar el uso que se hace del artículo "*una*". En efecto, nótese que si $I \subset \mathbb{R}$ y γ son como en dicha definición, y se tiene que $\alpha : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $\alpha(J) = I$, entonces $\tilde{\gamma} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ definida como $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha$ es tal que $\tilde{\gamma}(J) = C$ y por tanto $\tilde{\gamma}$ será "*otra*" parametrización de C. Es decir, si un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ tiene una parametrización, entonces con base en ella podemos obtener más parametrizaciones del mismo conjunto. Por esta misma razón, lo más adecuado es decir que

$$x = r\cos(t)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(t)$$

para $t \in [0, 2\pi)$, son "*unas*" ecuaciones paramétricas de la circunferencia de radio $r > 0$ con centro en el origen, y que

$$x = r\,\mathrm{sen}(2\pi t)$$
$$y = r\cos(2\pi t)$$

para $t \in [0, 1)$, son "*otras*" ecuaciones paramétricas de la misma circunferencia.

Otro tipo de "objeto geométrico" que se puede obtener como la imagen de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ es uno con el cual el lector debe estar muy familiarizado: la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. En efecto, si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabemos que la gráfica de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como

$$G_f := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\right\}$$

y es muy fácil comprobar que la función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, f(t))$ es una parametrización de G_f.

Seguramente el lector estará de acuerdo en que la observación anterior incrementa sustancialmente la cantidad de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ que podemos describir como la imagen de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$. Ahora sabemos que subconjuntos como las gráficas de la funciones $f(x) = |x|$ o $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ se pueden obtener de esta forma (ver figura 3.1).

Concluimos esta breve sección mostrando cómo las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ resultan ser una herramienta adecuada para describir el "camino" o "trayectoria" seguido por un objeto. Para ello, recurriremos a un conocido ejemplo que justamente se puede plantear en estos términos.

Suponga que se tiene una rueda, la cual vamos a rodar (sin resbalar) sobre una superficie plana y en línea recta, y sobre dicha rueda hacemos una marca. Nuestro objetivo es encontrar una función que nos proporcione la posición (una vez establecido un sistema cartesiano de referencia) de dicha marca, conforme la rueda va girando. Para ello, simplificaremos el problema sustituyendo la rueda por una circunferencia de radio $r > 0$, y a la marca por un punto P de dicha circunferencia. Supondremos que la posición "inicial" de la circunferencia es tal que su centro C se encuentra en el punto de coordenadas $(0, r)$ y que las correspondientes al punto P están dadas por $(0, 2r)$ (ver figura 3.2 (a)). También supondremos que la circunferencia rueda hacia la derecha, en la dirección positiva del eje X.

Una cuestión muy importante en este tipo de problemas es la elección de la variable (o parámetro, que es el término que se suele usar en estos casos) en términos de la cual queremos expresar la posición del punto

[2]Giuseppe Peano (Spinetta, 27 de agosto de 1858 – Turín, 20 de abril de 1932) fue un matemático, lógico y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números.

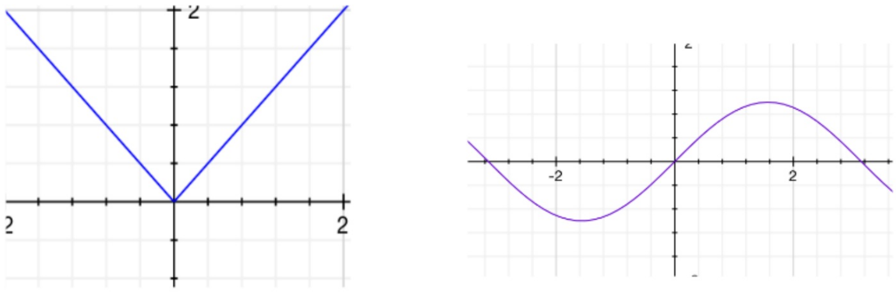
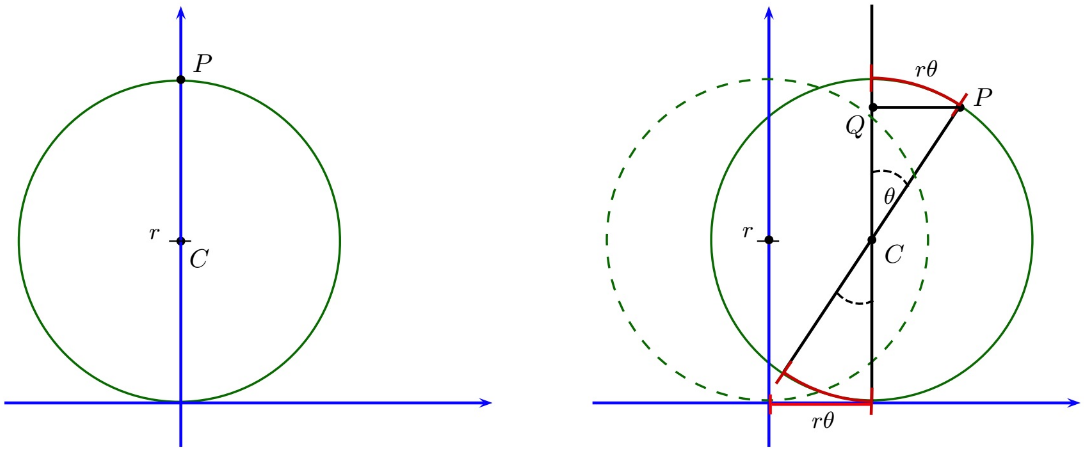


Figura 3.1: Las gráficas de la funciones $f(x) = |x|$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ se pueden obtener como la imagen de una función $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$.

que nos interesa. Esta elección depende en general del problema que se esté tratando (lo que significa que no existen "reglas" para su elección).

En el caso que nos ocupa, una vez que la circunferencia haya rodado una cierta distancia (que supondremos fue pequeña), el punto P, cuyo movimiento nos interesa describir, ocupará una nueva posición; las coordenadas de esta nueva posición las vamos a determinar usando el ángulo formado por la semirecta (paralela al eje Y) que parte del centro de la circuferencia (en dirección hacia arriba), y el segmento de recta que une al centro C con el punto P, ángulo que denotaremos por la letra θ y que de acuerdo a la observación que hicimos antes, jugará el papel de parámetro (ver figura 3.2 (b)).



(a) (b)

Figura 3.2: Deducción de una parametrización de la cicloide.

Lo primero que haremos será encontrar las nuevas coordenadas del centro C de la circunferencia desplazada. Para ello es importante hacer notar que la distancia recorrida por dicho centro, dado que la circunferencia rueda sin resbalar, coincide con la longitud del arco subtendido por el ángulo opuesto a θ, la cual está dada por $r\theta$. De esta forma, las coordenadas del centro C son $(r\theta, r)$.

Si ahora observamos que para obtener las coordenadas del punto P, basta con tomar las de punto C y sumarle la longitud de los correspondientes catetos del triángulo rectángulo formado por los puntos C, P y Q (ver figura 3.2 (b)), concluimos que las nuevas coordenadas de P están dadas por $(r\theta + r\operatorname{sen}(\theta), r + r\cos(\theta))$. Por tanto, la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ definida como

$$\gamma(\theta) = r(\theta + \operatorname{sen}(\theta), 1 + \cos(\theta))$$

describe el movimiento del punto P en términos del ángulo θ. En la figura 3.3 se muestra la imagen de esta función para $\theta \in [0, 2\pi]$ y representa a la "trayectoria" seguida por el punto P cuando la circunferencia ha realizado una vuelta completa, "trayectoria" conocida con el nombre de *cicloide*.

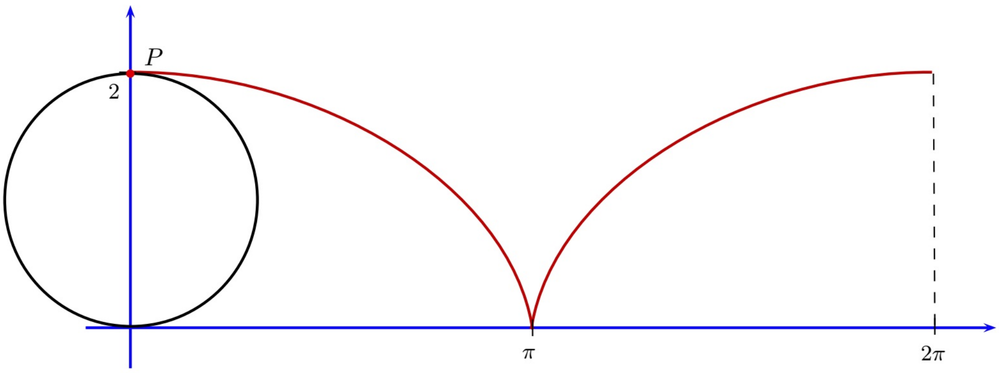


Figura 3.3: Trayectoria seguida por el punto P cuando la circunferencia (de radio 1) ha realizado una vuelta completa, trayectoria conocida con el nombre de cicloide.

Existen una buena cantidad de interesantes “trayectorias” definidas de manera análoga, pero desafortunadamente no está entre los objetivos de este libro profundizar en este tipo de ejemplos[3]. Nuestro objetivo principal en este capítulo es introducir el concepto de derivada para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, y lo motivaremos a partir del uso de éstas en la geométría y en la física, razón por la cual analizamos sólo estos pocos ejemplos.

3.2 La derivada

Dada una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ con la cual “describimos” a un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$, si éste tiene el aspecto de una “línea doblada” (como por ejemplo una cónica), nos vamos a plantear el problema de encontrar la “recta tangente” a C en un punto $\hat{x}_0$.

Si $t_0 \in I$ es tal que $\gamma(t_0) = \hat{x}_0$ y $t \in I$ es “cercano” a t_0, ver a la diferencia

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) \tag{3.2}$$

como una “flecha” nos da la oportunidad de obtener la recta que pasa por $\hat{x}_0$ y que sigue la dirección determinada por $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ (ver problema 3) suponiendo, por supuesto, que esta flecha no es el vector $\hat{0}$.

Como se muestra en la figura 3.4, esta recta es secante a la curva C y en la medida de que t esté más “cercano” a t_0, dicha secante se verá cada vez más como una tangente.

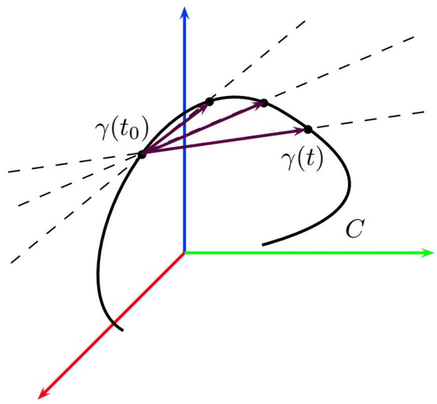


Figura 3.4: Si el vector $\gamma(t) - \gamma(t_0)$ no es el vector $\hat{0}$, la recta cuya dirección está determinada por éste y que pasa por el punto $\gamma(t_0)$, es una recta secante a la curva C que “tiende” a ser tangente (en $\gamma(t_0)$) si t tiende a t_0.

[3]Para el lector interesado en conocer más ejemplos de este tipo, le recomendamos visitar el sitio de internet: www-history.mcs.st-and.ac.uk/Curves/Curves.html

La construcción anterior estaría muy bien si no fuera por el hecho de que la diferencia 3.2 se parecerá cada vez más al vector $\hat{0}$ en la medida de que t esté más "cercano" a t_0 (sobre todo si γ es una función continua, lo que seguramente sucederá en la mayoría de los casos que sean de nuestro interés), con lo cual perdemos toda oportunidad de definir una recta.

La "solución" que daremos a este problema será que, en lugar de considerar al vector 3.2, vamos a considerar al vector dado por la expresión

$$\frac{1}{t-t_0}(\gamma(t)-\gamma(t_0)) = \frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}, \tag{3.3}$$

con el cual, si no es el vector $\hat{0}$, podemos seguir construyendo rectas secantes a C.

Una razón por la cual vamos a considerar al vector 3.3 es que éste no sólo nos sigue proporcionando información de cuál es la "dirección que tiende" a ser tangente al conjunto C en el punto $\hat{x}_0$, sino que además su norma nos da información sobre la razón de cambio (con respecto a la distancia entre t y t_0) de la distancia entre los puntos $\gamma(t)$ y $\gamma(t_0)$.

Más adelante, cuando veamos a γ como una función que describe el movimiento de un objeto, también veremos que el vector 3.3 es la forma más adecuada de medir la "velocidad promedio" de dicho objeto y, en última instancia, veremos cómo este vector se relaciona de manera muy "adecuada" con el concepto de derivada para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, justo del tipo que son las funciones coordenadas de γ.

Como seguramente el lector ya intuye, lo siguiente que haremos será fijarnos en el

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}.$$

En caso de que éste exista (y que no sea el vector $\hat{0}$, lo que no siempre podemos asegurar), si a dicho límite lo denotamos (casualmente) por $\gamma'(t_0)$, sin duda que la recta definida paramétricamente por la expresión

$$\gamma(t_0)+t\gamma'(t_0)$$

con $t\in\mathbb{R}$, es una recta que tiene el aspecto y las características adecuadas para ser llamada "la recta tangente" a C en el punto $\hat{x}_0=\gamma(t_0)$.

Con base en la discusión anterior, damos las siguientes definiciones.

Definición 3.2 *Sea $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, con I un intervalo. Dado $t_0\in I$, decimos que γ es derivable en t_0 si*

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}$$

existe. Este límite lo denotamos por $\gamma'(t_0)$ y lo llamamos la derivada de γ en t_0. Es decir,

$$\gamma'(t_0):=\lim_{t\to t_0}\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}.$$

Observación 3.3 *En virtud de que restringimos la definición anterior a funciones cuyo dominio es un intervalo, es importante señalar que en caso de que $t_0\in I$ fuera un "extremo" de I, el límite que se deberá tomar será el correspondiente límite lateral, cuya definición fue dada por el lector en el problema 31 del capítulo 2.*

Definición 3.4 *Sea $C\subset\mathbb{R}^n$ y $\hat{x}_0\in C$. Si $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ es una parametrización de C tal que $\gamma(t_0)=\hat{x}_0$ para alguna $t_0\in I$ y $\gamma'(t_0)\neq\hat{0}$, decimos que la recta definida (paramétricamente) como*

$$R(t):=\gamma(t_0)+t\gamma'(t_0)$$

es la recta tangente a C en $\hat{x}_0$.

Con relación a esta última definión, es necesario hacer algunas observaciones importantes. La primera de ellas es que, aun cuando el "aspecto" geométrico del conjunto C en el punto $\hat{x}_0$ nos de la impresión de que existe la recta tangente, esto no significa que con cualquier parametrización de C sea posible "calcularla". Esto se debe fundamentalmente al hecho de que, a pesar de que exista una parametrización $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ de C tal que $\gamma(t_0)=\hat{x}_0$ y γ sea derivable en t_0, nada nos garantiza que se satisfaga la condición de que $\gamma'(t_0)\neq\hat{0}$. En el siguiente ejemplo mostramos un conjunto y dos parametrizaciones de éste que ilustran las dos posibilidades en el cálculo de la recta tangente.

Ejemplo 3.5 *Sea $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Considere las siguientes parametrizaciones de C.*

1. *Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por*
$$\gamma(t) = (t, t^2).$$
Como el lector fácilmente puede comprobar, γ es una parametriazación de C. En particular en el punto $\gamma(0) = (0, 0)$ se tiene que
$$\begin{aligned}\gamma'(0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} \\ &= \lim_{t\to 0}(1, t) \\ &= (1, 0),\end{aligned}$$
de tal forma que la recta
$$\begin{aligned}l(t) &= \gamma(0) + t\gamma'(0) \\ &= (0, 0) + t(1, 0) \\ &= (t, 0),\end{aligned}$$
que no es más que el eje X, es tangente a C en el punto $(0, 0)$.

2. *Sea $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por*
$$\tilde{\gamma}(t) = (t^3, t^6).$$
Como en el caso anterior, también es fácil comprobar que $\tilde{\gamma}$ es una parametrización de C y que $\tilde{\gamma}(0) = (0, 0)$. Por otra parte, se tiene que
$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)}{t - 0} &= \lim_{t\to 0}(t^2, t^5) \\ &= (0, 0),\end{aligned}$$
de modo que $\tilde{\gamma}'(0) = (0, 0)$ y por lo tanto la parametrización $\tilde{\gamma}$ no proporciona un vector que permita construir la recta tangente a C en el $(0, 0)$.

Otra observación importante es que la existencia misma de $\gamma'(t_0)$ no tiene mucho que ver con el "aspecto geométrico" que tenga el conjunto C en el punto $\hat{x}_0 = \gamma(t_0)$. A diferencia de lo que sucedía con el "aspecto geométrico" de la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ cuando ésta era derivable en un punto, si el conjunto C tiene un "pico" en $\hat{x}_0$, esto no significa que $\gamma'(t_0)$ no exista, como el lector puede comprobar fácilmente en el caso de la cicloide (figura 3.3), la cual tiene un "pico" en el punto $(\pi, 0) = \gamma(\pi)$ a pesar de que $\gamma'(\pi)$ sí existe (lo que se deduce de un resultado que probaremos más adelante).

Otra ilustración de este mismo hecho lo tenemos con la gráfica de la función valor absoluto, como lo veremos en el siguiente

Ejemplo 3.6 *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la gráfica de la función $f(x) = |x|$; es decir, $C = \{(x, |x|) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$. Considere las siguientes parametrizaciones de C.*

1. *Sea $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por*
$$\gamma(t) = (t, |t|).$$
Nótese que para esta parametrización de C (la más "común"), no existe $\gamma'(0)$ pues por una parte
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(t, t) = (1, 1),$$
mientras que
$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0} = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(t, -t) = (1, -1),$$

de tal forma que, por el problema 31 del capítulo 2*,*

$$\gamma'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{t - 0}$$

no existe.

2. *Sea ahora* $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2) & \text{si } t \leq 0 \\ \\ (t^2, t^2) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

También es fácil ver que esta es una parametrización de C*. Nótese que ahora*

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} \frac{\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)}{t - 0} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(t^2, t^2) \\ &= \lim_{t\to 0^+} (t, t) \\ &= (0, 0) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^-} \frac{\tilde{\gamma}(t) - \tilde{\gamma}(0)}{t - 0} &= \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}(-t^2, t^2) \\ &= \lim_{t\to 0^-} (-t, t) \\ &= (0, 0), \end{aligned}$$

de tal forma que, por el mismo problema 31 del capítulo 2*, se tiene que* $\tilde{\gamma}'(0)$ *sí existe y es igual al vector* $(0, 0)$*.*

Con base en los ejemplos anteriores se concluye que, si $C \subset \mathbb{R}^2$ es un conjunto que se puede parametrizar por una función γ y $\gamma'(t)$ existe, si este vector es diferente del vector $\hat{0}$, sólo entonces se podrá asegurar que C es un conjunto que no tiene un "pico" en el punto $\gamma(t)$ (en cuyo caso, por razones obvias, diremos que el conjunto C es "suave" en el punto $\gamma(t)$). Y si $\gamma'(t) = \hat{0}$, entonces no podemos asegurar nada sobre el aspecto geométrico de C en el punto $\gamma(t)$.

Para concluir con las observaciones relacionadas con la definición de recta tangente que hemos dado, es importante recordar que este es un concepto que el lector ya conoce para cierto tipo de conjuntos en $\mathbb{R}^2$, específicamente, aquellos que se obtienen como la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Por otra parte, como vimos en la primera sección de este capítulo, si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sabemos que la gráfica de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ definido como

$$G_f := \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I\right\}$$

y que la función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (t, f(t))$ es una parametrización de G_f.

En el problema 8 de este capítulo, el lector probará que, si la función f es derivable en $t_0 \in I$, entonces la parametrización γ también es derivable en t_0 y además, que la recta tangente dada en la definición 3.4 no es más que una forma paramétrica de la recta tangente que le fue definida en su primer curso de cálculo diferencial.

De la observación anterior se concluye que la definición de recta tangente dada en la definción 3.4 "amplía" a la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ para los cuales ahora tenemos definido este concepto.

Lo que haremos a continuación será dar un ejemplo de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que no se puede ver (completo) como la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (aunque en el capítulo 5 probaremos un importante resultado que nos asegura que algunas partes de éste sí se pueden ver de esa forma), pero que sí se puede parametrizar. Por lo tanto, con base en la definición 3.4, podremos calcular su recta tangente en algunos de sus puntos.

Adicional a lo anterior, en este ejemplo también mostraremos cómo se puede encontrar la parametrización de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que está definido a través de coordenadas polares.

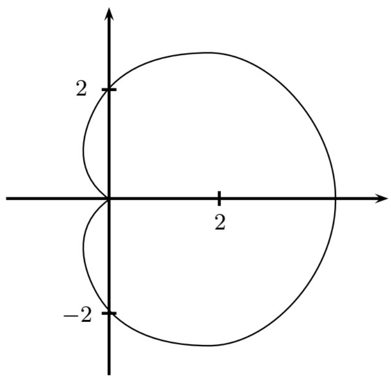


Figura 3.5: La curva cardioide cuya ecuación polar está dada por $r = 2(1 + cos(\theta))$.

Ejemplo 3.7 *Sea* $C = \left\{\hat{x} = (r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, r = 2(1 + \cos(\theta))\right\}$, *en donde la pareja* (r, θ) *representa coordenadas polares del punto* $\hat{x}$. *Este conjunto es conocido como la curva* cardioide *(ver figura 3.5).*

Lo primero que haremos será calcular una parametrización de C. *Dado que este conjunto está descrito en términos de coordenadas polares, y que las operaciones de suma y producto por un escalar de vectores (operaciones que es necesario realizar para el cálculo de la derivada de una parametrización) no se pueden expresar en forma sencilla en este tipo de coordenadas, lo primero que haremos será describir a los elementos de* C *en términos de coordenadas cartesianas.*

De esta forma, aplicando las ecuaciones de cambio de coordenadas vistas en el capítulo 1, tendremos que, si (x, y) *representan las coordenadas cartesianas de* $\hat{x} \in C$, *entonces*

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ &= 2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y &= r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ &= 2(1 + \cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Es decir,

$$C = \left\{(2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta), 2(1 + \cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\},$$

de modo que si definimos $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ *como*

$$\gamma(\theta) = (2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta), 2(1 + \cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta)),$$

γ *será una parametrización de* C *expresada en términos de las coordenadas cartesianas de sus elementos.*

Ahora que ya contamos con una parametrización de C, *para calcular la derivada de ésta, haremos uso del primer resultado que formularemos en la siguiente sección (proposición 3.8), lo que sin lugar a dudas constituye un pequeño y breve abuso, que esperamos el lector disculpe.*

Con base en este resultado, tendremos que

$$\begin{aligned} \gamma'(\theta) &= (-2\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) - 2(1 + \cos(\theta))\,\mathrm{sen}(\theta), -2\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta) + 2(1 + \cos(\theta))\cos(\theta)) \\ &= \left(-2\,\mathrm{sen}(\theta) - 4\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta), 2\cos(\theta) + 2\left(\cos^2(\theta) - \mathrm{sen}^2(\theta)\right)\right) \\ &= (-2\,\mathrm{sen}(\theta) - 2\,\mathrm{sen}(2\theta), 2\cos(\theta) + 2\cos(2\theta)), \end{aligned}$$

de donde podemos concluir que, por ejemplo, la recta tangente a la cardioide en el punto $\gamma(\pi/2) = (0, 2)$ *es la recta parametrizada por*

$$\begin{aligned} \gamma(\pi/2) + t\gamma'(\pi/2) &= (0, 2) + t\,(-2, -2) \\ &= (-2t, -2t + 2), \end{aligned}$$

es decir, la recta cuya ecuación cartesiana es $y = x + 2$. Análogamente, la recta tangente a la cardioide en el punto $\gamma(3\pi/2) = (0, -2)$ es la recta parametrizada por

$$\begin{aligned}\gamma(3\pi/2) + t\gamma'(3\pi/2) &= (0, -2) + t\,(2, -2)\\ &= (-2t, 2t - 2)\,,\end{aligned}$$

es decir, la recta cuya ecuación cartesiana es $y = -x - 2$.

Concluimos esta sección mencionando otra interpretación del concepto de derivada que hemos introducido.

Supongamos que utilizamos una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ para describir el movimiento de un objeto. En este caso, el parámetro (o la variable) t del cual depende la función γ representará al tiempo, de tal forma que para un valor específico $t_0 \in I$, $\gamma(t_0)$ representará su posición en este instante. Sin duda el lector estará de acuerdo en que si, $t \in I$ es otro instante muy cercano a t_0, entonces el vector

$$\frac{1}{t - t_0}(\gamma(t) - \gamma(t_0)) = \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

contiene información muy valiosa del movimiento descrito por γ cerca del instante t_0.

En efecto, este vector nos da información de hacia "dónde" se está moviendo nuestro objeto (a partir de su posición en el tiempo t_0), y su norma nos da un promedio de la "rapidez" con la que se está moviendo cerca del instante t_0.

En virtud de lo anterior, se suele decir que este vector representa la "*velocidad promedio*" de nuestro objeto durante el intervalo de tiempo comprendido entre t_0 y t.

Como seguramente el lector ya está imaginando, si

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

existe, dicho valor límite (que también es un vector) se puede interpretar como la velocidad de nuestro objeto en el instante t_0, o como se suele decir, *la velocidad instantánea* de nuestro objeto, en el instante t_0.

3.3 Propiedades de la derivada

Como hicimos en el caso de los conceptos de límite y continuidad, lo siguiente que haremos será mostrar la estrecha relación que existe entre la derivada de una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y sus funciones coordenadas $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ (en un sistema de referencia dado), las cuales serán funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y para las que ya conocemos el concepto de derivada.

Como seguramente el lector ya intuye, la derivabilidad de la función γ es una condición necesaria y suficiente de la derivabilidad de sus funciones coordenadas, resultado que dejamos plasmado en la siguiente

Proposición 3.8 *Sea $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I$. La función γ es derivable en t_0 si y sólo si cada función coordenada γ_i es derivable en t_0, para $i \in \{1, \dots, n\}$. En ambos casos se tiene que*

$$\gamma'(t_0) = (\gamma_1'(t_0), \dots, \gamma_n'(t_0)).$$

La prueba de esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 2.30 del capítulo 2 y se deja al lector.

Lo siguiente que haremos será mostrar la relación que existe entre el concepto de derivada y las operaciones aritméticas entre funciones de este tipo. Con base en la proposición anterior, los correspondientes resultados de derivación para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y la proposición 2.33 del capítulo 2, la prueba de estas propiedades es inmediata y también se deja al lector.

Proposición 3.9 *Sean $\gamma, \tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ y $h : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si las funciones γ, $\tilde{\gamma}$ y h son derivables en t_0, entonces:*

1. *$\gamma + \tilde{\gamma}$ es derivable en t_0 y además*

$$(\gamma + \tilde{\gamma})'(t_0) = \gamma'(t_0) + \tilde{\gamma}'(t_0)$$

2. *$h\gamma$ es derivable en t_0 y además*

$$(h\gamma)'(t_0) = h'(t_0)\gamma(t_0) + h(t_0)\gamma'(t_0)$$

En particular, si h es la función constante c, entonces

$$(c\gamma)'(t_0) = c\gamma'(t_0)$$

3. *$\gamma \cdot \tilde{\gamma} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en t_0 y además*

$$(\gamma \cdot \tilde{\gamma})'(t_0) = \gamma'(t_0) \cdot \tilde{\gamma}(t_0) + \gamma(t_0) \cdot \tilde{\gamma}'(t_0)$$

4. *si $n = 3$, $\gamma \times \tilde{\gamma}$ es derivable en t_0 y además*

$$(\gamma \times \tilde{\gamma})'(t_0) = \gamma'(t_0) \times \tilde{\gamma}(t_0) + \gamma(t_0) \times \tilde{\gamma}'(t_0).$$

Otras operaciones que podemos realizar con una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, son la composición por la izquierda con una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y por la derecha con una función de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$.

Dado que habrá que esperar hasta los capítulos 3 y 4 para contar con un concepto de derivada para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ (con $n > 1$) y que hasta este momento sólo sabemos cómo derivar funciones de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}$ cuando $m = 1$, por ahora nos vamos a conformar con formular un resultado (¡la primera *regla de la cadena* de este texto!) que establece condiciones para que la composición (por la derecha) de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ con otra de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ sea derivable, y una fórmula para calcular su derivada.

Proposición 3.10 *Sean $J \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $h : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t_0 \in I$ y $x_0 \in J$ tales que $h(J) \subset I$ y $h(x_0) = t_0$. Si h es derivable en x_0 y γ es derivable en t_0, entonces $\gamma \circ h$ es derivable en x_0 y además*

$$\begin{aligned}(\gamma \circ h)'(x_0) &= \gamma'(h(x_0))h'(x_0)\\ &= \gamma'(t_0)h'(x_0).\end{aligned}$$

Si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, entonces $\gamma \circ h = (\gamma_1 \circ h, \ldots, \gamma_n \circ h)$, de modo que la prueba de esta proposición también es una consecuencia inmediata de la proposición 3.8 y de la regla de la cadena para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, por lo que se deja al lector.

La prueba también se puede hacer sin recurrir a las funciones coordenadas y a la proposición 3.8, imitando la prueba para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, lo que se pide hacer en el problema 6 de este capítulo.

En cuanto a la fórmula para calcular $(\gamma \circ h)'(x_0)$, es importante mencionar que, aun cuando para escribir la multiplicación de un escalar por un vector siempre hemos puesto primero al escalar, en esta ocasión lo hemos escrito después del vector con la idea de conservar la forma en que se suele expresar la regla de la cadena.

Como en el caso de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, la derivabilidad de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ en un punto t_0 implica la continuidad de ésta en dicho punto. Como es de esperarse, esto también es una consecuencia inmediata de la proposición 3.8 y del correspondiente resultado para el caso real, lo que dejamos expresado en la siguiente

Proposición 3.11 *Sean $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I$. Si γ es derivable en t_0, entonces γ es continua en t_0.*

Aun cuando ya mencionamos que la prueba de esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 3.8 y del correspondiente resultado para el caso real, ésta también se puede hacer imitando la prueba que se hace en este caso observando que

$$\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

para todo $t \neq t_0$, de modo que

$$\lim_{t \to t_0}(\gamma(t) - \gamma(t_0)) = \lim_{t \to t_0}(t - t_0)\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}$$

$$= (0)\gamma'(t_0)$$
$$= \hat{0},$$

de donde concluimos que γ es continua en t_0.

Sin duda, el resultado más importante relacionado con el concepto de derivada de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es el Teorema del Valor Medio. Lamentablemente este teorema no se puede generalizar a funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ y los siguientes ejemplos ilustran tan desafortunado hecho.

Ejemplo 3.12 *Considere las siguientes funciones:*

1. $\gamma : [-1, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$\gamma(t) = \begin{cases} (-t^2, t^2) & si\ -1 \leq t \leq 0 \\ \\ (t^2, t^2) & si\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Nótese que

$$\gamma'(t) = \begin{cases} 2t(-1, 1) & si\ -1 \leq t < 0 \\ \\ (0, 0) & si\ t = 0 \\ \\ 2t(1, 1) & si\ 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

de modo que no existe $\xi \in (-1, 1)$ *para el cual se satisfaga que*

$$\gamma(1) - \gamma(-1) = (1 - (-1))\gamma'(\xi)$$
$$= 2\gamma'(\xi),$$

puesto que el vector $\gamma(1) - \gamma(-1) = (1, 1) - (-1, 1) = (2, 0)$ *no es un múltiplo escalar de* $\gamma'(t)$ *para ningún valor de* $t \in (-1, 1)$ *(figura 3.6 (a)).*

2. $\tilde{\gamma} : [0, 1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *dada por* $\tilde{\gamma}(t) = (\cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t)$. *Entonces*

$$\tilde{\gamma}'(t) = (-2\pi \operatorname{sen}(2\pi t), 2\pi \cos(2\pi t), 1),$$

de modo que no existe $\xi \in (0, 1)$ *tal que*

$$\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (2\pi - 0)\tilde{\gamma}'(\xi)$$
$$= (-4\pi \operatorname{sen}(\xi), 4\pi \cos(\xi), 2\pi),$$

puesto que $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = (0, 0, 1)$ *y* $2\pi \neq 1$. *De hecho, dado que para ningún valor de* t *las funciones* $\operatorname{sen}(2\pi t)$ *y* $\cos(2\pi t)$ *son simultáneamente cero (recuerde que* $\operatorname{sen}^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t) = 1$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$*), el vector* $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$ *nunca es "paralelo" (o múltiplo escalar) de* $\tilde{\gamma}'(t)$ *para ningún valor de* t *(figura 3.6 (b)).*

No obstante los ejemplos anteriores, se puede formular una cierta "versión" parecida al Teorema de Valor Medio (sólo para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$) que se puede probar justamente como una consecuencia del Teorema del Valor Medio Generalizado de Cauchy para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y que se deja como problema al lector (problema 13).

Concluiremos esta sección introduciendo el concepto de derivada de orden superior para una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. De forma análoga a lo que sucede en el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, si una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es derivable para cada t del intervalo $J \subset I$, entonces la función $\gamma' : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que a cada $t \in J$ asocia la derivada de γ en t, es decir $t \mapsto \gamma'(t)$ es nuevamente una función de $J \subset \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.

Si esta función también resulta ser derivable en cada punto de J, se define entonces la segunda derivada de γ, que denotamos por γ'' o por $\gamma^{(2)}$, como la función $\gamma'' : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\gamma''(t) := (\gamma')'(t)$$

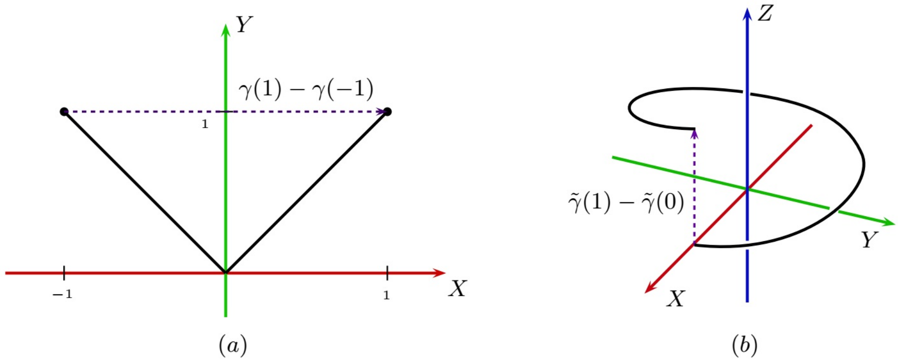


Figura 3.6: El teorema del Valor Medio no se puede generalizar a funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$. Como lo muestran estos ejemplos, los vectores $\gamma(1)-\gamma(-1)$ y $\tilde{\gamma}(1)-\tilde{\gamma}(0)$ no son paralelos a la derivada de γ y $\tilde{\gamma}$, respectivamente, evaluada en algún punto intermedio.

$$:= \lim_{h\to 0}\frac{\gamma'(t+h)-\gamma'(t)}{h}$$

para cada $t\in J$.

Siguiendo este procedimiento, en general podemos dar de manera inductiva la siguiente

Definición 3.13 *Sean $\gamma : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ derivable para cada t del intervalo $J\subset I$, y $n\in\mathbb{N}$. Si $\gamma^{(1)}(t) := \gamma'(t)$ y $\gamma^{(n)}$ está definida y es derivable para cada $t\in J$, definimos (inductivamente) la $n+1$ derivada de γ en t, que denotamos por $\gamma^{(n+1)}(t)$, como*

$$\begin{aligned}\gamma^{(n+1)}(t) &:= (\gamma^{(n)})'(t)\\ &:= \lim_{h\to 0}\frac{\gamma^{(n)}(t+h)-\gamma^{(n)}(t)}{h}\end{aligned}$$

para cada $t\in J$.

En las siguientes secciones daremos las posibles interpretaciones que se le pueden dar a las derivadas de orden superior, dependiendo del contexto en el que se esté trabajando.

3.4 Derivada y geometría

Una vez que ya contamos con el concepto de derivada para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, tenemos todo lo necesario para definir el concepto de *curva*, el cual constituye uno de los usos más importantes de este tipo de funciones.

Definición 3.14 *Sea $C\subset\mathbb{R}^n$. Decimos que C es una curva si existe $\gamma : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ derivable en el intervalo I tal que $\gamma(I)=C$. Si además $\gamma'(t)\neq\hat{0}$ para toda $t\in I$ decimos que C es una curva suave (o regular). Como ya se mencionó en la definición 3.1, decimos que γ es una parametrización de C.*

Si γ es una función derivable que parametriza a un conjunto C, además de proporcionarnos una forma de encontrar una ecuación (parámetrica) de su recta tangente en $\gamma(t)$ (si $\gamma'(t)\neq\hat{0}$), la derivada de γ nos puede ser útil para "resolver" el siguiente problema geométrico: apoyados en la idea intuitiva que tengamos de lo que es (¡o debiera de ser!) la "longitud" de C, ¿cómo calcular ésta "longitud"?

Para abordar este problema, vamos a suponer que la curva se puede parametrizar por una función $\gamma : [a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, la cual es derivable en el intervalo $[a,b]$ y que además es inyectiva.

Es intuitivamente claro que si elegimos un número finito de puntos en C, digamos $\hat{x}_0,\ldots,\hat{x}_k$, de tal forma que $\hat{x}_0$ y que $\hat{x}_k$ sean sus "extremos" y que $\hat{x}_{i-1}$ y $\hat{x}_i$ sean "consecutivos" para $i\in\{1,\ldots,k\}$, entonces la suma

$$\sum_{i=1}^{k}\|\hat{x}_i-\hat{x}_{i-1}\|$$

es una aproximación a la "longitud" de C, y que esta aproximación será mejor en la medida de que tomemos más (y muy bien distribuidos) puntos en C (ver figura 3.7).

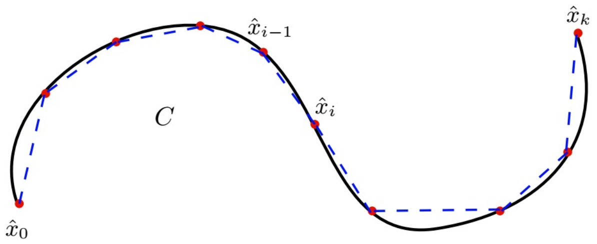


Figura 3.7: La suma de las distancias entre los puntos consecutivos $\hat{x}_{i-1}$ y $\hat{x}_i$ es una muy buena aproximación a la "longitud" de C.

De la suposición de que γ parametriza a la curva C y que γ es inyectiva, al conjunto de puntos $\{\hat{x}_0, \dots, \hat{x}_k\}$ le corresponde una partición $\mathcal{P}=\{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que $\hat{x}_i = \gamma(t_i)$ para $i \in \{1, \dots, k\}$. De esta forma, tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{k} \|\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\| = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

y la suma de la derecha será una buena aproximación a la "longitud" de C si $\mathcal{P}$ es una partición muy "fina" del intervalo $[a, b]$. Ahora lo que haremos será analizar más de cerca cómo se puede expresar cada vector $\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})$.

Aun cuando ya mostramos que el Teorema del Valor Medio no se cumple en general para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$, lo que sí podemos asegurar es que, si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, aplicando el Teorema del Valor Medio (para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) a cada una de estas funciones coordenadas, entonces para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se sabe que existe $\xi_i^{(j)} \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que

$$\gamma_j(t_i) - \gamma_j(t_{i-1}) = \gamma_j'\left(\xi_i^{(j)}\right)(t_i - t_{i-1})$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) &= (\gamma_1(t_i) - \gamma_1(t_{i-1}), \dots, \gamma_n(t_i) - \gamma_n(t_{i-1})) \\
&= \left(\gamma_1'\left(\xi_i^{(1)}\right)(t_i - t_{i-1}), \dots, \gamma_n'\left(\xi_i^{(n)}\right)(t_i - t_{i-1})\right) \\
&= \left(\gamma_1'\left(\xi_i^{(1)}\right), \dots, \gamma_n'\left(\xi_i^{(n)}\right)\right)(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

Si ahora suponemos también que cada función coordenada γ_j' es continua (lo que es equivalente a que γ' sea continua) en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el vector

$$\left(\gamma_1'\left(\xi_i^{(1)}\right), \dots, \gamma_n'\left(\xi_i^{(n)}\right)\right)$$

se "parecerá" a $\gamma'(\xi_i)$ para cualquier $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ (y este "parecido" será mucho mejor nuevamente cuando la partición $\mathcal{P}$ sea una partición muy "fina" del intervalo $[a, b]$) de tal forma que

$$\begin{aligned}
\|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| &= \left\|\left(\gamma_1'\left(\xi_i^{(1)}\right), \dots, \gamma_n'\left(\xi_i^{(n)}\right)\right)(t_i - t_{i-1})\right\| \\
&\approx \|\gamma'(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\| \\
&= \|\gamma'(\xi_i)\|(t_i - t_{i-1}).
\end{aligned}$$

En virtud de lo anterior, si la suma

$$\sum_{i=1}^{k} \|\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1}\|$$

es una buena "aproximación" a la longitud de C en la medida de que la partición $\mathcal{P}$ sea una partición cada vez más "fina" del intervalo $[a, b]$, entonces con la suma

$$\sum_{i=1}^{k} \|\gamma'(\xi_i)\| (t_i - t_{i-1})$$

sucederá lo mismo, y lo relevante de la conclusión anterior es que esta última suma tiene la pecularidad de ser una suma de Riemann correspondiente a la función $f(t) = \|\gamma'(t)\|$ (para $t \in [a, b]$), por lo que dicha suma se "aproxima" a la integral

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt \tag{3.4}$$

y esta aproximación será mejor justo cuando ¡$\mathcal{P}$ sea una partición muy "fina" del intervalo $[a, b]$!

Resumiendo la discusión anterior (¡y todas las aproximaciones que ahí aparecen!), todo parece indicar que, si $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva que se puede parametrizar por una función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, la cual es derivable en el intervalo $[a, b]$, inyectiva y además $\gamma' : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es continua, entonces su "longitud" deberá estar dada por la integral 3.4. Con el fin de "reforzar" esta conclusión, mostraremos en el siguiente ejemplo que esto sucede así, calculando la integral anterior con una curva (y una parametrización de ella) para la cual ya conocemos su longitud.

Ejemplo 3.15 *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la circunferencia de radio $r > 0$ con centro en un punto $\hat{x}_0 = (x_0, y_0)$.*

Mostraremos que, si tomamos la parametrización de C dada por la función

$$\gamma(t) = (r\cos(t) + x_0, r\,\mathrm{sen}(t) + y_0)$$

con $t \in [0, 2\pi]$, y calculamos la integral dada en 3.4, dicha integral vale $2\pi r$, que como sabemos desde hace mucho tiempo, es el perímetro de la cincunferencia C.

En efecto, nótese que $\gamma'(t) = (-r\,\mathrm{sen}(t), r\cos(t))$ de modo que

$$\|\gamma'(t)\| = r$$

para toda $t \in [0, 2\pi]$ y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt &= \int_0^{2\pi} r dt \\ &= 2\pi r. \end{aligned}$$

Como mencionamos al inicio de toda esta discusión, la realidad es que a estas alturas no contamos (salvo por algunos casos específicos) con una definición de "longitud" de una curva, y justo lo que estamos a punto de hacer es llenar ese vacío.

En realidad definiremos (aprovechando que la integral 3.4 sólo depende de la función γ) lo que llamaremos la "longitud asociada a esta parametrización". Cuando γ cumpla con ciertas condiciones (como por ejemplo, que sea inyectiva, salvo tal vez por un número finito de puntos de su dominio) podremos interpretar dicha "longitud asociada" como "*la* longitud" de la curva que está parametrizada por γ.

Todo ello lo recogemos en la siguiente

Definición 3.16 *Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $\|\gamma'(t)\|$ es integrable en $[a, b]$. Definimos la longitud de γ (que denotamos por $l(\gamma)$) como*

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Si γ es una función inyectiva en $[a,b]$, salvo quizás por un número finito de puntos, y $C = \gamma([a,b])$, entonces el número $l(\gamma)$ dado en la definición anterior se puede interpretar como "la longitud" de C. De hecho, con base en esta idea de "longitud", podemos definir una función $\alpha : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha(t) = \int\limits_a^t \|\gamma'(u)\|\, du,$$

cuyo valor en $t \in [a,b]$ también se puede interpretar como "la longitud del subarco" de C dado por $\gamma([a,t])$.

Si además de la inyectividad de γ en "casi" todo su dominio, tenemos que $\|\gamma'(t)\|$ es una función continua de t (lo que se satisface si γ' es continua en $[a,b]$), por el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que α será una función derivable y que

$$\alpha'(t) = \|\gamma'(t)\| \geq 0,$$

lo que significa que α siempre resulta ser una función no decreciente en el intervalo $[a,b]$ cuya imagen es el intervalo $[0, l(\gamma)]$.

Lo interesante de esta función α es que, si además $\gamma'(t) \neq \hat{0}$ para toda $t \in [a,b]$ (es decir que $C = \gamma([a,b])$ es una curva suave (o regular)), entonces

$$\alpha'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0,$$

de modo que en este caso α es una función estrictamente creciente en el intervalo $[a,b]$, y por tanto su función inversa $\alpha^{-1} : [0, l(\gamma)] \subset \mathbb{R} \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ existe, la cual, dado que α' es continua y $\alpha'(t) \neq 0$ para toda $t \in [a,b]$, por el Teorema de la Función Inversa (para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), también es derivable.

Lo importante de la discusión anterior es que, si $C = \gamma([a,b])$ es una curva suave (o regular), entonces a través de la función α^{-1} podemos obtener otra parametrización de C, dada por

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \alpha^{-1} : [0, l(\gamma)] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n,$$

la cual resulta tener propiedades muy relevantes.

A este tipo de parametrización de C se le conoce con el nombre de *parametrización por longitud de arco* (para el caso de la parametrización $\tilde{\gamma}$ este nombre es muy adecuado puesto que su parámetro $s = \alpha(t) \in [0, l(\gamma)]$ es justo la longitud del subarco $\gamma([a,t])$) de C), y la última parte de esta sección la dedicaremos a mostrar algunas de sus características.

Antes de hacer esto, es importante llamar la atención sobre la forma en que construimos la parametrización $\tilde{\gamma}$ a partir de la parametrización original γ, que es un caso particular de una relación más general que puede haber entre dos parametrizaciones de una misma curva C. Esta relación da lugar al concepto de *reparametrización*, el cual definiremos antes de estudiar las propiedades específicas de la parametrización (o reparametrización) por longitud de arco.

Definición 3.17 *Sean $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización (derivable) de C. Decimos que $\tilde{\gamma} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, una función derivable, es una reparametrización de γ si existe $\alpha : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, tal que $\alpha(J) = I$ y $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \alpha)(s)$ para toda $s \in J$. Si $\alpha'(s) \geq 0$ para toda $s \in J$, decimos que $\tilde{\gamma}$ preserva la orientación de γ, y si $\alpha'(s) \leq 0$ para toda $s \in J$, decimos que $\tilde{\gamma}$ invierte la orientación de γ.*

Dada una parametrización $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$, una reparametrización de γ que siempre se puede construir es la que se obtiene a partir de la función $\alpha : [a,b] \to [a,b]$ dada por $\alpha(t) = a+b-t$. Como $\alpha(a) = b$ y $\alpha(b) = a$, la función $\gamma \circ \alpha$ tiene la propiedad de que $(\gamma \circ \alpha)(a) = \gamma(b)$ y $(\gamma \circ \alpha)(b) = \gamma(a)$, es decir, $\gamma \circ \alpha$ parametriza al conjunto C con la particularidad de que su punto inicial $(\gamma \circ \alpha)(a)$ es el punto final $\gamma(b)$ de γ, y su punto final $(\gamma \circ \alpha)(b)$ es el punto inicial $\gamma(a)$ de γ (ver figura 3.8), razón por la cual a esta reparametrización se le suele denotar por $-\gamma$.

Por todo lo anterior, y dado que

$$\begin{aligned}(-\gamma)'(t) &= (\gamma \circ \alpha)'(t) \\ &= \gamma'(\alpha(t))\alpha'(t) \\ &= -\gamma'(a+b-t),\end{aligned}$$

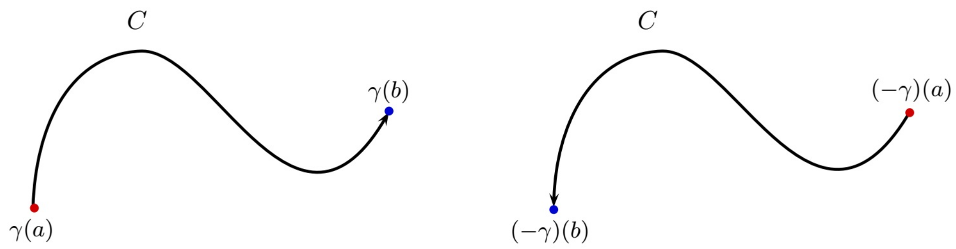


Figura 3.8: Las parametrizaciones γ y $-\gamma$ de la misma curva C.

se tiene que $-\gamma$ recorre a C en la dirección contraria en que la recorre γ.

Como se mostró en los párrafos previos a la definición 3.17, y a diferencia de la reparametrización $-\gamma$, la reparametrización por longitud de arco $\tilde{\gamma}$ sólo se puede obtener si $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva suave y $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de C tal que $\gamma'(t)$ es continua y diferente de $\hat{0}$ para toda $t \in [a,b]$.

Sin duda una propiedad muy característica de la reparametrización por longitud de arco $\tilde{\gamma}$ de una curva suave C, es la referente a la rapidez con que la "recorre". En efecto, como se puede observar en la reparametrización $\tilde{\gamma}$ que se obtiene a partir de una parametrización γ definida sobre un intervalo $[a,b]$, $\tilde{\gamma}$ queda definida sobre el intervalo $[0, l(\gamma)]$ de tal manera que su parámetro s "varía" dentro de un intervalo que tiene la misma longitud que la curva C. De esta forma, pareciera que para "recorrer" a esta curva, a la parametrización $\tilde{\gamma}$ le bastaría con "recorrer" una "unidad de distancia" sobre C por cada "unidad de distancia" que "recorra" el parámetro s, lo que en términos de rapidez, significa que ésta última tendría que valer 1. Esta propiedad, que efectivamente tiene la reparametrización $\tilde{\gamma}$, servirá más adelante para definir lo que significa en general que una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ esté parametrizada por longitud de arco.

Definición 3.18 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización (derivable) de C. Decimos que γ es una parametrización por longitud de arco de C si $\|\gamma'(t)\| = 1$ para toda $t \in I$.*

De la definición anterior se desprende inmediatamente que si $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva que posee una parametrización por longitud de arco, entonces C es una curva suave (o regular).

Lo que a continuación haremos será mostrar que una curva suave (o regular) $C \subset \mathbb{R}^n$ que tiene una parametrización $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ que además de ser derivable, tiene derivada continua, tiene una parametrización por longitud de arco. La forma en que construiremos esta parametrización es básicamente la misma que usamos para contruir la reparametrización $\tilde{\gamma}$ en los párrafos anteriores.

Proposición 3.19 *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ una curva suave. Si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de C tal que $\gamma'(t)$ es continua y diferente de $\hat{0}$ para toda $t \in I$, entonces C tiene una parametrización por longitud de arco.*

Demostración. Sea $t_0 \in I$ un punto fijo; definimos $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha(t) = \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du. \tag{3.5}$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que α es derivable y que además

$$\alpha'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

para toda $t \in I$. De esta forma, dado que $\alpha'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$ (además de ser continua), por el Teorema de la Función Inversa (para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$), sabemos que α es invertible y que su inversa α^{-1}, que está definida sobre el intervalo $\alpha(I)$, también es derivable.

Definimos $\tilde{\gamma} : \alpha(I) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como $\tilde{\gamma}(s) = (\gamma \circ \alpha^{-1})(s)$ para cada $s \in \alpha(I)$. Claramente $\tilde{\gamma}$ es una parametrización de C (puesto que es una reparametrización de γ), y por la regla de la cadena probada en la proposición 3.10, tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(s) &= (\gamma \circ \alpha^{-1})'(s)\\ &= \gamma'(\alpha^{-1}(s))(\alpha^{-1})'(s)\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(s) &= \gamma'(\alpha^{-1}(s))(\alpha^{-1})'(s)\\ &= \gamma'(\alpha^{-1}(s))\frac{1}{\alpha'(\alpha^{-1}(s))}\\ &= \gamma'(\alpha^{-1}(s))\frac{1}{\|\gamma'(\alpha^{-1}(s))\|},\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$$

para cada $s \in \alpha(I)$. ■

Con relación a la construcción de la parametrización por longitud de arco $\tilde{\gamma}$ que se da en la prueba de la proposición anterior, es importante hacer la siguiente observación. Desde un punto de vista teórico, la construcción es impecable; sin embargo (y para ser sinceros), desde un punto de vista práctico, obtener una expresión explícita para $\tilde{\gamma}$ puede resultar ser una tarea muy difícil (y en algunos casos ¡imposible!). Esta dificultad (o imposibilidad) está relacionada con el hecho de que en la construcción de $\tilde{\gamma}$ está involucrada la obtención de la inversa de la función α dada por la identidad 3.5, lo que no siempre se puede hacer de manera explícita.

Para no contribuir con una posible causa de depresión de los amables lectores de este texto, daremos un ejemplo en el que sí es posible calcular $\tilde{\gamma}$.

Ejemplo 3.20 *Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la curva parametrizada por la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$\gamma(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$$

(ver figura 3.9).

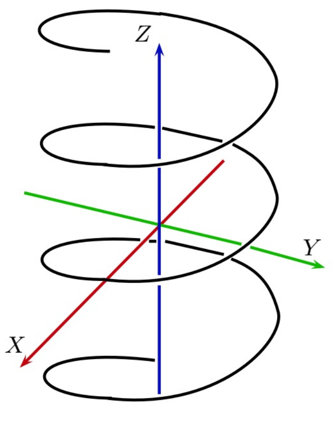


Figura 3.9: La curva (hélice) del ejemplo 3.20.

Calcularemos, con base en γ, una parametrización por longitud de arco de C. Definimos $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$\alpha(t) = \int_0^t \|\gamma'(u)\|\, du$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \sqrt{2} du \\
&= \sqrt{2}t.
\end{aligned}
$$

Entonces, despejando la variable t de la ecuación

$$
\begin{aligned}
s &= \alpha(t) \\
&= \sqrt{2}t
\end{aligned}
$$

obtenemos que

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{s}{\sqrt{2}} \\
&= \alpha^{-1}(s),
\end{aligned}
$$

de tal forma que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\gamma}(s) &= (\gamma \circ \alpha^{-1})(s) \\
&= \gamma(\alpha^{-1}(s)) \\
&= \gamma(s/\sqrt{2}) \\
&= (\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

para $s \in \mathbb{R}$.

Una vez que ya hemos definido lo que es una parametrización por longitud de arco (y mostrado cómo y cuándo podemos obtener una de éstas), lo que haremos a continuación será mostrar la forma en que se puede usar para definir algunas características geométricas de las curvas.

Dado que la característica principal de una parametrización por longitud de arco γ de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$, es que su rapidez es constante 1 (es decir, $\|\gamma'(s)\| = 1$), si podemos calcular la derivada de γ' (es decir γ''), la información que ésta nos proporciona sólo está relacionada con el cambio de dirección de γ' o con la forma en que se "dobla" la curva C.

De manera más precisa, y dado que por el problema 11 ya sabemos que $\gamma''(s)$ siempre es perpendicular a $\gamma'(s)$, la manera en que (valga la redundancia) se "*curva*" la curva C, deberá estar contenida en la norma de $\gamma''(s)$. Que este número tiene esta información puede comprobarse calculándolo para una circunferencia de radio r, en cuyo caso, además de depender de r, deberá ser el mismo en cualquier punto de ésta.

Ejemplo 3.21 *Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ la circunferencia de radio $r > 0$ con centro en el origen y $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco de C dada por*

$$\gamma(s) = \left(r \cos\left(\frac{s}{r}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) \right).$$

Entonces tenemos que

$$\gamma'(s) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right) \right)$$

y

$$\gamma''(s) = \left(-\frac{1}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right) \right),$$

de modo que

$$\|\gamma''(s)\| = \frac{1}{r}$$

para toda $s \in \mathbb{R}$.

Además de confirmar nuestras sospechas, el ejemplo anterior ilustra un hecho geométrico muy intuitivo: si el radio r de una circunferencia es muy grande, ésta está menos curvada, y si el radio es muy pequeño, entonces la circunferencia está muy curvada. Ambos hechos se ven reflejados en el número $\|\gamma''(s)\|$, puesto que en el primer caso éste es más cercano a 0, mientras que en el segundo caso es muy grande. Con base en estos razonamientos y en el ejemplo anterior, damos la siguiente

Definición 3.22 *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma''(s)$ existe para cada $s \in I$. Definimos la curvatura de C en el punto $\gamma(s) \in C$, que denotamos por $k(s)$, como*

$$k(s) := \|\gamma''(s)\|.$$

Como ya habíamos mencionado, si γ es una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$, los vectores $\gamma'(s)$ y $\gamma''(s)$ son perpendiculares, y dado que $\gamma'(s)$ es tangente a C (además de tener norma 1), entonces se dice que $\gamma''(s)$ "apunta" en la dirección normal a la curva C (que es la dirección en la que ésta se "curva"). Con base en estas observaciones, establecemos las siguientes definiciones y notaciones.

Definición 3.23 *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\gamma''(s)$ existe para toda $s \in I$.*

1. *Definimos el vector tangente unitario a C en $\gamma(s)$ (determinado por γ), el cual denotamos por $T(s)$, como*

$$T(s) := \gamma'(s).$$

2. *Si $\gamma''(s) \neq \hat{0}$, definimos el vector normal unitario a C en $\gamma(s)$, el cual denotamos por $N(s)$, como*

$$N(s) := \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|}.$$

3. *Si $\gamma''(s) \neq \hat{0}$, definimos el plano osculador a C en $\gamma(s)$, el cual denotamos por Π_s, como el plano generado por lo vectores $T(s)$ y $N(s)$ que contiene al punto $\gamma(s)$. Es decir*

$$\Pi_s := \{\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma(s) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

4. *Si $\gamma''(s) \neq \hat{0}$, definimos la circunferencia osculadora a C en $\gamma(s)$, a la cual denotamos por C_s, como la circunferencia contenida en el plano osculador con centro en el punto*

$$\gamma(s) + \frac{1}{k(s)}N(s).$$

llamado centro de curvatura, y radio

$$\frac{1}{k(s)},$$

A este último número lo llamaremos el radio de curvatura de la curva C en $\gamma(s)$.

5. *Si $C \subset \mathbb{R}^3$ y $\gamma''(s) \neq \hat{0}$, definimos el vector binormal unitario a C en $\gamma(s)$, al cual denotamos por $B(s)$, como*

$$B(s) := T(s) \times N(s).$$

No podemos dejar de mencionar que en las dos definiciones anteriores haría falta mostrar que los conceptos ahí plasmados (salvo por los vectores tangente y binormal unitarios), son todos independientes de la parametrización por longitud de arco que se esté usando. Aunque probar esto no es muy difícil, hacerlo sí resultaría bastante laborioso y por lo mismo escapa a los objetivos de este texto.

Para ilustrar todos los "objetos" asociados a una curva suave dados en la definición anterior, damos el siguiente

Ejemplo 3.24 *Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la "hélice" del ejemplo 3.20 y su parametrización por longitud de arco*

$$\gamma(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})$$

que ahí calculamos.

Tenemos entonces que:

1. *el vector tangente unitario $T(s)$ está dado por*

$$\begin{aligned} T(s) &= \gamma'(s) \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(s/\sqrt{2}), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

2. *la curvatura $k(s)$ está dada por*

$$\begin{aligned} k(s) &= \|\gamma''(s)\| \\ &= \left\|\left(-\frac{1}{2}\cos(s/\sqrt{2}), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), 0\right)\right\| \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3. *el vector normal unitario $N(s)$ está dado por*

$$\begin{aligned} N(s) &= \frac{\gamma''(s)}{\|\gamma''(s)\|} \\ &= \left(-\cos(s/\sqrt{2}), -\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), 0\right) \end{aligned}$$

4. *el plano osculador Π_s, expresado en forma "paramétrica", está dado*

$$\begin{aligned} \Pi_s &= \{\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma(s) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \qquad (3.6) \\ &= \left\{1/\sqrt{2}\left(-\alpha\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}) + \sqrt{2}(1-\beta)\cos(s/\sqrt{2}), \alpha\cos(s/\sqrt{2}) + \sqrt{2}(1-\beta)\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), \alpha + s\right)\right. \\ &\left.\mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}. \end{aligned}$$

Como Π_s está generado por los vectores $T(s)$ y $N(s)$, aprovechando que estamos en $\mathbb{R}^3$, podemos recurrir al vector binormal para obtener un vector normal a Π_s y con éste calcular su ecuación cartesiana. De esta forma, dado que

$$\begin{aligned} B(s) &= T(s) \times N(s) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1\right) \end{aligned}$$

y que Π_s contiene al punto $\gamma(s)$, su ecuación cartesiana estará dada por

$$\left(\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1\right) \cdot ((x,y,z) - (\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2})) = 0,$$

la cual queda expresada como

$$\operatorname{sen}(s/\sqrt{2})x - \cos(s/\sqrt{2})y + z = \frac{s}{\sqrt{2}}$$

y que, como es de esperarse, es satisfecha por las ternas dadas en la identidad 3.6.

5. *finalmente, el centro de la circunferencia osculadora C_s está dado por*

$$\begin{aligned}\gamma(s)+\frac{1}{k(s)}N(s) &= (\cos(s/\sqrt{2}),\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}),s/\sqrt{2})+\frac{1}{1/2}\left(-\cos(s/\sqrt{2}),-\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}),0\right)\\ &= \left(-\cos(s/\sqrt{2}),-\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}),s/\sqrt{2}\right),\end{aligned}$$

de modo que, como dicha circunferencia está contenida en el plano generado por los vectores $T(s)$ y $N(s)$, y su radio es $1/k(s)=2$, una expresión paramétrica para C_s estaría dada por

$$\gamma(s)+2N(s)+2\cos(\theta)T(s)+2\operatorname{sen}(\theta)N(s)$$

con $\theta\in[0,2\pi]$.

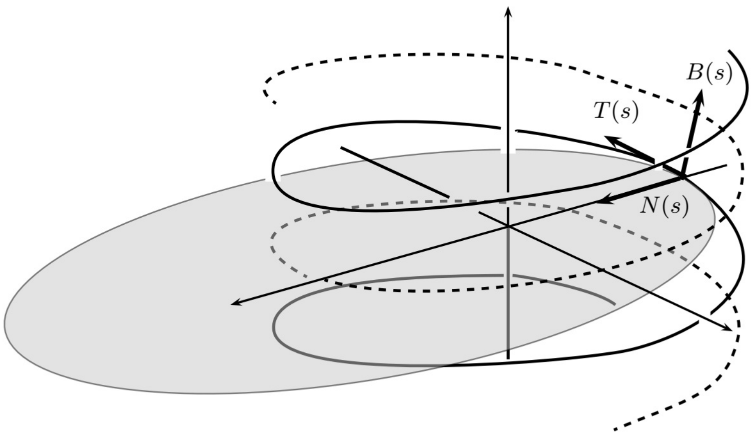


Figura 3.10: La curva hélice y algunos de sus "objetos" calculados en el ejemplo 3.24, incluyendo su evoluta.

En la figura 3.10 se muestran algunos de los "objetos" que calculamos en el ejemplo anterior, incluyendo la curva determinada por los centros de curvatura de C, la cual recibe el nombre de *evoluta* de la curva C y que en este caso es nuevamente una hélice.

Una primera consecuencia interesante (e inmediata) de las definiciones 3.22 y 3.23, es la relación existente entre los vectores $T'(s)$ y $N(s)$, la cual dejamos plasmada en la siguiente proposición y cuya prueba dejamos al lector.

Proposición 3.25 *Sea $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $C\subset\mathbb{R}^n$. Si $\gamma''(s)$ existe y es diferente de $\hat{0}$, entonces*

$$T'(s)=k(s)N(s).$$

De forma análoga a la proposición anterior, cuando nuestra curva C está contenida en $\mathbb{R}^3$ se tiene que el vector $B'(s)$ es un múltiplo escalar del vector $N(s)$, afirmación que probamos en la siguiente proposición y con base en la cual introducimos el concepto de *torsión* para curvas suaves contenidas en $\mathbb{R}^3$.

Proposición 3.26 *Sea $\gamma: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $C\subset\mathbb{R}^3$. Si para $s\in I$ se tiene que $B'(s)$ existe, entonces $B'(s)$ es un múltiplo escalar de $N(s)$.*

Demostración. Dado que

$$\begin{aligned}\|B(s)\| &= \|T(s)\times N(s)\|\\ &= \|T(s)\|\,\|N(s)\|\operatorname{sen}(\pi/2)\\ &= 1,\end{aligned}$$

por el problema 11 de este capítulo sabemos que $B'(s)$ es perpendicular a $B(s)$, es decir $B(s) \cdot B'(s) = 0$.

Por otra parte, de la definición de $B(s)$, el inciso 4 de la proposición 3.9 y la identidad de la proposición 3.25, tenemos que

$$\begin{aligned} B'(s) &= T'(s) \times N(s) + T(s) \times N'(s) \\ &= k(s)(N(s) \times N(s)) + T(s) \times N'(s) \\ &= T(s) \times N'(s), \end{aligned}$$

de modo que $B'(s)$ también es perpendicular a $T(s)$, es decir $T(s) \cdot B'(s) = 0$.

Por tanto, dado que la terna $\{T(s), N(s), B(s)\}$ es una base (ortonormal) de $\mathbb{R}^3$, entonces existen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$B'(s) = \alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma B(s),$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= T(s) \cdot B'(s) \\ &= T(s) \cdot (\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma B(s)) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 0 &= B(s) \cdot B'(s) \\ &= B(s) \cdot (\alpha T(s) + \beta N(s) + \gamma B(s)) \\ &= \gamma \end{aligned}$$

y por lo tanto, que

$$B'(s) = \beta N(s),$$

que es lo deseábamos demostrar. ■

Como habíamos mencionado, con base en la afirmación de la proposición anterior definimos el concepto de *torsión* para curvas suaves contenidas en $\mathbb{R}^3$, que desde un punto de vista geométrico, se interpreta como una medida de "qué tanto se tuerce una curva" (y consecuentemente "qué tanto tiende a salirse de un plano", a diferencia de lo que sucede con la curvatura, que puede "curvarse" sin salirse de éste).

Definición 3.27 *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva suave $C \subset \mathbb{R}^3$. Si para $s \in I$ se tiene que $B'(s)$ existe, definimos la torsión de la curva C en el punto $\gamma(s)$, que denotamos por $\tau(s)$, como el número real tal que*

$$B'(s) = -\tau(s)N(s).$$

El uso del signo negativo en la definición anterior no tiene ningún significado específico y obedece sólo a razones de caracter histórico (al parecer, ¡así se usó desde que se introdujo!).

Para ilustrar este concepto, calcularemos la torsión de la hélice del ejemplo 3.24 aprovechando los cálculos que ahí mismo hicimos.

Ejemplo 3.28 *Sea $C \subset \mathbb{R}^3$ la "hélice" del ejemplo 3.24 y su parametrización por longitud de arco*

$$\gamma(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2}).$$

De ese mismo ejemplo sabemos que

$$N(s) = \left(-\cos(s/\sqrt{2}), -\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), 0\right)$$

y

$$B(s) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), -\cos(s/\sqrt{2}), 1\right),$$

de modo que

$$B'(s) = \frac{1}{2}\left(\cos(s/\sqrt{2}), \operatorname{sen}(s/\sqrt{2}), 0\right)$$

y por tanto, tenemos que

$$\tau(s) = \frac{1}{2}$$

para toda $s \in \mathbb{R}$.

Para concluir esta sección y completar las expresiones dadas en la proposición 3.25 y la definición 3.27, daremos una expresión del vector $N'(s)$ para el caso de curvas suaves en $\mathbb{R}^3$. Como hemos venido mencionando, los vectores $\{T(s), N(s), B(s)\}$ forman una base (ortonormal) de $\mathbb{R}^3$ y por esta simple razón el vector $N'(s)$ siempre se puede expresar como una combinación lineal de éstos.

Lo más interesante es que en realidad el vector $N'(s)$ sólo se escribe como combinación lineal de los vectores $T(s)$ y $B(s)$, y que los coeficientes de esta combinación lineal están dados por $-k(s)$ y $\tau(s)$, respectivamente. Este hecho es lo que probaremos en la siguiente

Proposición 3.29 *Sea* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *una parametrización por longitud de arco de una curva suave* $C \subset \mathbb{R}^3$. *Si para* $s \in I$ *se tiene que* $N'(s)$ *existe, entonces*

$$N'(s) = -k(s)T(s) + \tau(s)B(s).$$

Demostración. De la definición del vector $B(s)$, y de acuerdo con la “regla de la mano derecha” del producto vectorial, sabemos que

$$N(s) = B(s) \times T(s)$$

y por la regla de derivación del producto vectorial (inciso (4) de la proposición 3.9), tenemos que

$$N'(s) = B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s),$$

de modo que, sustituyendo las identidades de la proposición 3.25 y la definición 3.27, obtenemos que

$$\begin{aligned}
N'(s) &= B'(s) \times T(s) + B(s) \times T'(s) \\
&= (-\tau(s)N(s)) \times T(s) + B(s) \times (k(s)N(s)) \\
&= -k(s)(N(s) \times B(s)) + \tau(s)(T(s) \times N(s)) \\
&= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s).
\end{aligned}$$

■

Las identidades

$$\begin{aligned}
T'(s) &= k(s)N(s) \\
N'(s) &= -k(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\
B'(s) &= -\tau(s)N(s)
\end{aligned}$$

son conocidas como las *Fórmulas de Frenet-Serret*[4] y tienen importantes aplicaciones en la cinemática.

[4] Jean Frédéric Frenet (Périgueux, Francia, 7 de febrero de 1816 - Périgueux, Francia, 12 de junio de 1900), fue un famoso matemático francés que introdujo la Teoría de Curvas junto a Joseph Serret.

Joseph Alfred Serret (París, Francia, 30 de agosto de 1819 - Versalles, Francia, 2 de marzo de 1885), más conocido como Joseph Serret, fue un matemático francés famoso por desarrollar junto a Jean Frenet la Teoría de Curvas.

(Fuente: Wikipedia)

3.5 Derivada y movimiento

Para concluir este capítulo, mostraremos algunas conclusiones importantes que se pueden obtener cuando a una función $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se le interpreta como una forma de describir el movimiento de un objeto. Como ya habíamos mencionado anteriormente, bajo esta interpretación se tiene entonces que $\gamma'(t)$ y $\gamma''(t)$ representan la velocidad y la aceleración de dicho objeto, y $r(t) = \|\gamma'(t)\|$ su rapidez, todas ellas al tiempo t.

Un primer resultado importante que abordaremos es aquél que nos dice cuáles son las "componentes" de la aceleración en dos direcciones básicas del movimiento descrito por γ: la dirección "tangente" y la dirección "normal" a este movimiento.

Como vimos en las secciones anteriores, la dirección "tangente" nos la proporciona el vector $\gamma'(t)$ de tal forma que, si hacemos (bajo el supuesto de que $\gamma'(t) \neq \hat{0}$ para toda $t \in I$)

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \qquad (3.7) \\ &= \frac{\gamma'(t)}{r(t)}, \end{aligned}$$

entonces $T(t)$ es un vector en la dirección "tangente" cuya norma es constante uno, y por el problema 11 tendremos que $T'(t)$ es perpendicular a $T(t)$ de modo que $T'(t)$ nos proporcionará la dirección "normal" al movimiento.

De esta forma, si $T'(t) \neq \hat{0}$, hacemos

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}$$

y bajo todos los supuestos anteriores, lo que mostraremos en la siguiente proposición será la forma explícita en que $\gamma''(t)$ se expresa como combinación (lineal) de los vectores $T(t)$ y $N(t)$.

Proposición 3.30 *Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(t)$ existe para toda $t \in I$. Si $T'(t) \neq \hat{0}$, entonces*

$$\gamma''(t) = r'(t)T(t) + r^2(t)k(t)N(t), \qquad (3.8)$$

en donde $k(t)$ es la curvatura (de la curva descrita por γ) en el punto $\gamma(t)$.

Demostración. Por la identidad 3.7, tenemos que

$$\gamma'(t) = r(t)T(t),$$

de tal forma que, usando la regla de derivación del inciso 2 de la proposición 3.9, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma''(t) &= r'(t)T(t) + r(t)T'(t) \\ &= r'(t)T(t) + r(t)\,\|T'(t)\|\,\frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \\ &= r'(t)T(t) + r(t)\,\|T'(t)\|\,N(t) \end{aligned}$$

y por el inciso (a) del problema 32, tenemos que

$$\gamma''(t) = r'(t)T(t) + r^2(t)k(t)N(t).$$

■

La identidad 3.8 amerita algunos comentarios. El primero de ellos es que si la rapidez de un objeto es constante, entonces $r'(t) = 0$ y por lo tanto la magnitud de la componente tangencial de su aceleración es cero, lo que significa que ésta última actúa sólo en la dirección normal al movimiento, hecho que ya habíamos mencionado cuando tratamos con parametrizaciones por longitud de arco y el tema de la curvatura.

El segundo comentario es acerca de la magnitud de la componente normal de la aceleración, la cual es igual al cuadrado de la rapidez del objeto, multiplicado por la curvatura de la curva que éste describe.

Seguramente el lector ya se ha dado cuenta de que esto explica por qué un automóvil se vuelca cuando se toma una curva muy "cerrada" (curvatura grande) a una rapidez también muy grande.

Lo siguiente que haremos será mostrar un par de propiedades que deben satisfacer aquellos objetos (como por ejemplo un planeta o un cometa) que se mueven bajo la influencia de la gravedad de un objeto de masa muy grande (como por ejemplo una estrella). Para ello, primero recordaremos la *Ley de la Gravitación Universal* formulada por Newton, en la que se establece cuál es la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 separados por una distancia r.

Ley de la Gravitación Universal

La magnitud F de la fuerza ejercida entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que están separados por una distancia r es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia, es decir, que

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

La fuerza $\hat{F}$ (cuya magnitud es F) ejercida entre ambos cuerpos actúa en la dirección de la línea que los une. El número G es conocido como la constante de la Gravitación Universal.

Nótese que, si el centro de masa de cada uno de los cuerpos de masa m_1 y m_2 está ubicado en el punto $\hat{x}_1$ y $\hat{x}_2$ respectivamente, y suponemos que $m_2 > m_1$, entonces la fuerza de atracción $\hat{F}$ que ejerce el objeto de masa m_2 sobre el objeto de masa m_1 estará dada por

$$\hat{F} = G\frac{m_1 m_2}{\|\hat{x}_2 - \hat{x}_1\|^3}(\hat{x}_2 - \hat{x}_1). \tag{3.9}$$

Otra ley de la física de la que también echaremos mano, es la *Segunda ley del movimiento* (igualmente formulada por Newton) la cual establece que, si un objeto de masa m se mueve debido a la acción de un campo de fuerzas (en el caso que analizaremos, el campo de fuerzas gravitatorias determinadas por una estrella (o sol) de masa M), entonces la fuerza ejercida sobre el objeto (en la posición que éste tenga en cada instante t de su movimiento) también se puede obtener multiplicando la masa del objeto por su aceleración en dicho instante. Es decir, si $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es la función que nos asocia la posición del objeto (de su centro de masa, para ser más exactos) en cada instante t, y denotamos por $\hat{F}(\gamma(t))$ la fuerza ejercida sobre éste en la posición $\gamma(t)$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{F}(\gamma(t)) &= ma(t)\\ &= m\gamma''(t).\end{aligned}$$

Lo que probaremos en la siguiente proposición será que, si un objeto se mueve bajo la acción de un campo de fuerzas como el que describimos anteriormente, entonces dicho movimiento necesariamente se tiene que llevar a cabo sobre un plano (fijo). Este hecho es importante para probar la *Primera Ley de Kepler*, la cual establece que la órbita (o curva) descrita por el objeto es una elipse[5].

Proposición 3.31 *Si un objeto de masa m se mueve debido a la acción de un campo de fuerzas gravitatorias (determinadas por otro objeto de masa M que está fijo), entonces el movimiento del primer objeto se lleva a cabo sobre un plano fijo (al que también pertenece el objeto de masa M).*

Demostración. Fijemos un sistema cartesiano cuyo origen se encuentre en el centro de masa del objeto de masa M, y sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la función que nos asocia la posición del centro de masa del objeto de masa m en cada instante t. Mostraremos que el producto vectorial

$$\gamma(t) \times \gamma'(t)$$

[5] Para los interesados en la prueba de las leyes de Kepler, se puede consultar en [3].

no depende de t, es decir, que es un vector constante $\hat{c}$, de donde el movimiento descrito por γ se llevará a cabo en el plano que es perpendicular a este vector. Para ello, derivaremos este producto y mostraremos que dicha derivada es el vector $\hat{0}$ para toda $t \in I$.

Primero notemos que, por la Ley de Gravitación Universal y de acuerdo con la identidad 3.9, dado que el origen de nuestro sistema coordenado está ubicado en el centro de masa del segundo objeto, la fuerza ejercida por éste en cada posición $\gamma(t)$ está dada por

$$\hat{F}(\gamma(t)) = -G\frac{mM}{\|\gamma(t)\|^3}\gamma(t).$$

Por otra parte, y de acuerdo con la segunda ley del movimiento, tenemos que

$$\hat{F}(\gamma(t)) = m\gamma''(t),$$

de tal forma que de estas dos identidades, concluimos que $\gamma(t)$ y $\gamma''(t)$ son vectores paralelos y por tanto que

$$\gamma(t) \times \gamma''(t) = \hat{0}$$

para toda $t \in I$.

Ahora, derivando el producto vectorial $(\gamma \times \gamma')(t) = \gamma(t) \times \gamma'(t)$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\gamma \times \gamma')'(t) &= \gamma'(t) \times \gamma'(t) + \gamma(t) \times \gamma''(t)\\ &= \hat{0}\end{aligned}$$

lo que significa que

$$\gamma(t) \times \gamma'(t) = \hat{c} \tag{3.10}$$

para toda $t \in I$. ■

Para concluir esta breve sección, y como una continuación del análisis del movimiento de nuestro objeto de masa m (debido a la acción del campo gravitatorio de un segundo objeto de masa M), desarrollaremos todo lo indispensable para probar lo que se conoce como la *Segunda Ley de Kepler*. Para ello, y dando por cierto que dicho movimiento se realiza en un plano, vamos a establecer un sistema cartesiano XYZ de tal forma que la curva descrita por el objeto esté contenida en el plano XY. Daremos también como un hecho que la trayectoria seguida es una curva cerrada que "rodea" al origen (de hecho, una elipse, como mencionamos párrafos arriba).

Lo importante de los supuestos anteriores es que, si recurrimos a las coordenadas polares (ρ, θ) para describir la posición del objeto, y escribimos a su coordenada ρ como una función del ángulo θ (es decir que $\rho = f(\theta)$), entonces el área A encerrada por la curva descrita y dos semirectas con ángulos θ_1 y θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$) (ver figura 3.11), está dada por la expresión

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)d\theta.$$

Con base en lo anterior, podemos formular la *Segunda Ley de Kepler* en los siguientes términos: si $\theta(t)$ es la función que nos da el ángulo θ del vector de posición al tiempo t, y

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta} f^2(u)du \tag{3.11}$$

es la función del ángulo θ que nos da el área "barrida" a partir de un ángulo fijo θ_0, entonces la función $(A \circ \theta)(t) = A(\theta(t))$ tiene razón de cambio constante, es decir, que $(A \circ \theta)'(t)$ es constante. Dicho de manera menos técnica, esto significa que "el vector de posición de nuestro objeto "barre" áreas iguales en tiempos iguales".

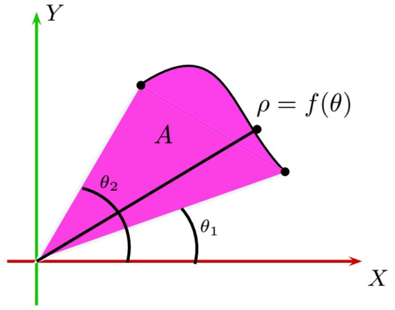


Figura 3.11: La región A encerrada por la curva descrita por sus coordenadas polares (ρ, θ), en donde $\rho = f(\theta)$, y las semirrectas con ángulos θ_1 y θ_2 ($\theta_1 < \theta_2$).

Proposición 3.32 *Si un objeto de masa m se mueve debido a la acción de un campo de fuerzas gravitatorias (determinadas por otro objeto de masa M), entonces el movimiento del objeto de masa m satisface la Segunda Ley de Kepler, es decir, el vector de posición del objeto "barre" áreas iguales en tiempos iguales.*

Demostración. Sean $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la función que asigna la posición del objeto (de masa m) al tiempo t (y cuyo movimiento se realiza en el plano XY), $\theta(t)$ la función que nos da el ángulo del vector de posición $\gamma(t)$, y $f(\theta)$ la función que determina la coordenada ρ del vector de posición en términos del ángulo θ.

Si ahora definimos
$$\tilde{u}(\theta) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), 0),$$
tendremos que $\gamma(t)$ (en coordenadas cartesianas) estará dada por
$$\gamma(t) = f(\theta(t))\tilde{u}(\theta(t)),$$
de modo que
$$\gamma'(t) = f(\theta(t))\tilde{u}'(\theta(t))\theta'(t) + f'(\theta(t))\theta'(t)\tilde{u}(\theta(t)).$$

Si ahora sustituimos las dos últimas identidades en la expresión 3.10, tenemos que
$$\begin{aligned}
\hat{c} &= \gamma(t) \times \gamma'(t) \\
&= (f(\theta(t))\tilde{u}(\theta(t))) \times (f(\theta(t))\tilde{u}'(\theta(t))\theta'(t) + f'(\theta(t))\theta'(t)\tilde{u}(\theta(t))) \\
&= (f(\theta(t))\tilde{u}(\theta(t))) \times (f(\theta(t))\tilde{u}'(\theta(t))\theta'(t)) + (f(\theta(t))\tilde{u}(\theta(t))) \times (f'(\theta(t))\theta'(t)\tilde{u}(\theta(t))) \\
&= f^2(\theta(t))\theta'(t)(\tilde{u}(\theta(t)) \times \tilde{u}'(\theta(t)))
\end{aligned}$$
y por tanto, dado que
$$\begin{aligned}
\tilde{u}(\theta(t)) \times \tilde{u}'(\theta(t))) &= (\cos(\theta(t)), \operatorname{sen}(\theta(t)), 0) \times (-\operatorname{sen}(\theta(t)), \cos(\theta(t)), 0) \\
&= (0, 0, 1)
\end{aligned}$$
para toda t, deducimos que
$$\begin{aligned}
\|\hat{c}\| &= \left\| f^2(\theta(t))\theta'(t)(\tilde{u}(\theta(t)) \times \tilde{u}'(\theta(t))) \right\| \\
&= f^2(\theta(t))\theta'(t) \left\| \tilde{u}(\theta(t)) \times \tilde{u}'(\theta(t)) \right\| \\
&= f^2(\theta(t))\theta'(t),
\end{aligned}$$
de donde obtenemos que
$$\theta'(t) = \frac{\|\hat{c}\|}{f^2(\theta(t))}.$$

Por otra parte, por la regla de la cadena (para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) y el Teorema Fundamental del Cálculo, concluimos que
$$(A \circ \theta)'(t) = A'(\theta(t))\theta'(t)$$

$$= \left(\frac{1}{2}f^2(\theta(t))\right)\left(\frac{\|\hat{c}\|}{f^2(\theta(t))}\right)$$
$$= \frac{\|\hat{c}\|}{2}.$$

es decir, que $(A \circ \theta)'(t)$ es constante. ■

Si la fuerza $\hat{F}$ que se ejerce sobre el objeto en la posición $\gamma(t)$ no es de tipo gravitatorio, sino que es de la forma $\hat{F}(\gamma(t)) = \alpha(t)\gamma(t)$ (donde $\alpha(t)$ es un escalar que depende de t), las dos últimas proposiciones se siguen cumpliendo. Se dice que estos campos son de tipo "*central*". Dejamos como un problema al lector realizar las pruebas correspondientes.

3.6 Problemas

1. Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ la recta cuya ecuación cartesiana es $ax + by + c = 0$ (con $a^2 + b^2 > 0$). Muestre que:

   (a) si $\hat{x}_0 = (x_0, y_0)$ y $\hat{x}_1 = (x_1, y_1)$ son dos puntos diferentes que pertenecen a R, entonces la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$\gamma(t) = \hat{x}_0 + t(\hat{x}_1 - \hat{x}_0)$$
   es una parametrización de R.

   (b) si $\hat{x}_0 \in R$ y $\hat{u} = (u_1, u_2) \neq \hat{0}$ es un vector paralelo a la recta R (es decir, que $au_1 + bu_2 = 0$), entonces la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por
   $$\gamma(t) = \hat{x}_0 + t\hat{u}$$
   es una parametrización de R.

2. Sea $R \subset \mathbb{R}^3$ la recta determinada por la intersección de los planos $ax+by+cz+d = 0$ y $\tilde{a}x+\tilde{b}y+\tilde{c}z+\tilde{d} = 0$. Muestre que:

   (a) si $\hat{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y $\hat{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ son dos puntos diferentes que pertenecen a R, entonces la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
   $$\gamma(t) = \hat{x}_0 + t(\hat{x}_1 - \hat{x}_0)$$
   es una parametrización de R.

   (b) si $\hat{x}_0 \in R$ y $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \hat{0}$ es un vector paralelo a la recta R (es decir, que $au_1+bu_2+cu_3 = 0$ y $\tilde{a}u_1 + \tilde{b}u_2 + \tilde{c}u_3 = 0$), entonces la función $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por
   $$\gamma(t) = \hat{x}_0 + t\hat{u}$$
   es una parametrización de R.

3. Sean $\hat{x}_0, \hat{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ dos puntos diferentes y $\hat{u} \neq \hat{0} \in \mathbb{R}^n$, con $n > 3$.

   (a) ¿cómo se define, por medio de ecuaciones cartesianas, a la recta que pasa por los puntos $\hat{x}_0$ y $\hat{x}_1$?

   (b) ¿cómo se define, por medio de ecuaciones cartesianas, a la recta en la dirección del vector $\hat{u}$ que pasa por el punto $\hat{x}_0$?

   (c) ¿cómo definiría, sin usar ecuaciones cartesianas, a la recta que pasa por los puntos $\hat{x}_0$ y $\hat{x}_1$, y a la recta que pasa por el punto $\hat{x}_0$ que está en la dirección determinada por el vector $\hat{u}$? (los dos problemas anteriores le pueden dar una pista).

4. Sobre la parte exterior de una circunferencia fija de radio a rueda (sin resbalar) otra circunferencia de radio b. Encuentre una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ que describa el movimiento de un punto que se encuentre en la circunferencia exterior.

5. Pruebe la proposición 3.9 usando los resultados que se indican en el texto, y después sin usar la proposición 3.8.

6. Pruebe la proposición 3.10 sin usar funciones coordenadas ni la proposición 3.8.

7. Muestre que la curva descrita por la función $\gamma(t) = (\operatorname{sen}(2t), 2\operatorname{sen}^2(t), 2\cos(t))$ $(t \in \mathbb{R})$ pertenece a una esfera con centro en el origen. Calcule su rapidez y muestre que la proyección en el plano XY de su velocidad tiene norma constante.

8. Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $\gamma(t) = (t, f(t))$ parametrización de la gráfica de f (G_f). Pruebe que:

   (a) si f es derivable en $t_0 \in I$, entonces la parametrización γ también es derivable en t_0 y además $\gamma'(t_0) = (1, f'(t_0))$

   (b) la recta tangente a G_f en el punto $(t_0, f(t_0))$ es una parametrización de la misma recta (tangente) dada por la ecuación $y = f'(t_0)(x - t_0) + f(t_0)$.

9. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

   (a) la función γ es derivable en t_0

   (b) existe un vector $\hat{l} \in \mathbb{R}^n$ tal que

   $$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + (t - t_0)\,\hat{l})}{t - t_0} = \hat{0}$$

   (interprete geométricamente este límite)

   (c) existe una función lineal $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ tal que

   $$\lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - (\gamma(t_0) + L\,(t - t_0))}{t - t_0} = \hat{0}$$

   (identifique geométricamente al conjunto $\{\gamma(t_0) + L\,(t - t_0) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$).

   Muestre que, de la equivalencia entre los incisos (a) y (b) se concluye que $\hat{l} = \gamma'(t_0)$, de la equivalencia entre los incisos (b) y (c) que $L(1) = \hat{l}$, y de la equivalencia entre los incisos (c) y (a) que $\gamma'(t_0) = L(1)$.

10. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\hat{x}\| = \|\hat{y}\| = 1$ y $\hat{x} \neq \hat{y}$. Encuentre una función $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ derivable tal que $\gamma(a) = \hat{x}$, $\gamma(b) = \hat{y}$ y $\|\gamma(t)\| = 1$ para toda $t \in [a, b]$ (*sugerencia*: use el problema 10 del capítulo 1).

11. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivable. Pruebe que: $\|\gamma(t)\|$ es constante si y sólo si $\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ para toda $t \in I$. Interprete geométricamente.

12. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ derivable y $r(t) = \|\gamma(t)\|$. Si $r(t_0)$ es un máximo o mínimo local de r, pruebe que $\gamma(t_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$. Interprete geométricamente.

13. Sea $\gamma = (f, g) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) tal que $\gamma'(t) \neq \hat{0}$ para toda $t \in (a, b)$. Pruebe que existen $\xi \in (a, b)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

    $$\gamma(b) - \gamma(a) = \lambda \gamma'(\xi).$$

14. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b). Pruebe que existe $\xi \in (a, b)$ tal que

    $$\|\gamma(b) - \gamma(a)\|^2 = (b - a)\gamma'(\xi) \cdot (\gamma(b) - \gamma(a)).$$

15. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

    (a) Pruebe que si existen $\hat{x}_0, \hat{u} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(t) = \hat{x}_0 + t\hat{u}$ para toda $t \in I$, entonces $\|\gamma'(t)\|$ es constante.

(b) Muestre con un ejemplo que el recíproco de la afirmación del inciso anterior es falsa.

(c) Si existen $\hat{x}_0, \hat{u} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(t) = \hat{x}_0 + t\hat{u}$ para toda $t \in I$, pruebe que $\gamma''(t) = \hat{0}$ para toda $t \in I$.

(d) Si $\gamma''(t) = \hat{0}$ para toda $t \in I$, pruebe que existen $\hat{x}_0, \hat{u} \in \mathbb{R}^n$ tales que $\gamma(t) = \hat{x}_0 + t\hat{u}$ para toda $t \in I$.

(e) Dé un ejemplo en el que la función γ parametrice una recta y para la cual se satisfaga que $\gamma''(t) \neq \hat{0}$ para toda $t \in I$.

Interprete las afirmaciones de los incisos anteriores partiendo del hecho de que γ describe el movimiento de un objeto.

16. Dada $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua, con $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, defina

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \left(\int_a^b \gamma_1(t)dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)dt\right).$$

Pruebe que:

(a) si $\hat{c} = (c_1 \ldots, c_n)$ es un vector constante, entonces $\int_a^b \hat{c} \cdot \gamma(t)dt = \hat{c} \cdot \int_a^b \gamma(t)dt$

(b)

$$\left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\| \leq \int_a^b \|\gamma(t)\|\, dt$$

(*sugerencia*: argumente por qué se satisface que

$$\gamma(u) \cdot \left(\int_a^b \gamma(t)dt\right) \leq \|\gamma(u)\| \left\| \int_a^b \gamma(t)dt \right\|$$

para toda $u \in [a, b]$; integre con respecto de u y use la identidad del primer inciso)

(c) si γ tiene derivada continua, entonces $\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = l(\gamma)$. Interprete geométricamente.

17. Considere las funciones $\gamma(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, \pi/2]$, y $\sigma(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)$, $u \in [0, 1]$. Pruebe que γ es una reparametrización de σ.

18. Sea $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Muestre que $l(\gamma) = b - a$.

(b) Muestre un ejemplo en el que *la longitud* de C no coincida con la longitud determinada por γ (es decir, $l(\gamma)$).

19. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que si C está contenida en una recta, entonces $k(s) = 0$ para toda $s \in I$. ¿Esta afirmación contradice lo que se pide ejemplificar en el inciso (e) del problema 15? Justifique su respuesta.

20. Pruebe el recíproco del problema anterior. Es decir, si $C \subset \mathbb{R}^n$ es una curva suave y $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización por longitud de arco de C tal que $k(s) = 0$ para toda $s \in I$, entonces C está contenida en una recta.

21. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$. Si $T(s)$ es el vector tangente unitario y $\theta(s, h)$ representa el ángulo formado por los vectores $T(s)$ y $T(s+h)$, pruebe que

$$k(s) = \lim_{h \to 0} \left| \frac{\theta(s, h)}{h} \right|$$

(*sugerencia*: use la ley de los cosenos).

22. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Si $B(s)$ es el vector binormal unitario y $\theta(s,h)$ representa el ángulo formado por $B(s)$ y $B(s+h)$, pruebe que

$$\tau(s) = \pm \lim_{h\to 0} \left| \frac{\theta(s,h)}{h} \right|.$$

23. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Si $\gamma''(s) \neq \hat{0}$ para toda $s \in I$, pruebe que:

$$\tau(s) = \frac{[\gamma'(s) \times \gamma''(s)] \cdot \gamma'''(s)}{\|\gamma''(s)\|^2}.$$

24. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Pruebe que:

$$\|N'(s)\|^2 = (k(s))^2 + (\tau(s))^2$$

para toda $s \in I$.

25. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Pruebe que, si C está contenida en un plano, entonces $\gamma'(s)$ está en un plano para toda $s \in I$. ¿Es cierto lo recíproco? Pruebe su respuesta.

26. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Pruebe que $\tau(s) = 0$ para toda $s \in I$ si y sólo si C está contenida en un plano.

27. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Pruebe que, si la curvatura $k(s)$ es constante (distinta de cero) y $\tau(s) = 0$ para toda $s \in I$, entonces la curva descrita por γ es (o está contenida en) una circunferencia (*sugerencia*: pruebe que el centro de curvatura en $\gamma(s)$ es el mismo para toda $s \in I$ usando la expresión para $N'(s)$ probada en la proposición 3.29).

28. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^3$. Pruebe que, si para cada $s \in I$ la recta normal a C dada por $\gamma(s) + tN(s)$, $t \in \mathbb{R}$, pasa por un punto fijo $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, entonces C está contenida en una circunferencia con centro en $\hat{x}_0$ (*sugerencia*: use el problema 27).

29. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^2$. Pruebe que si la curvatura $k(s)$ es constante (distinta de cero) en cada punto $\gamma(s)$, entonces la curva descrita por γ es (o está contenida en) una circunferencia (*sugerencia*: use el problema 27).

30. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una parametrización por longitud de arco de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$. Dado $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo, definimos $\tilde{\gamma} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, con $J = \{s \in \mathbb{R} \mid t_0 - s \in I\}$, como $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t_0 - s)$. Pruebe que:

    (a) $\tilde{\gamma}$ es una parametrización por longitud de arco de C

    (b) si $T(s), \tilde{T}(s), N(s), \tilde{N}(s), k(s)$ y $\tilde{k}(s)$ son los vectores tangente unitario, normal unitario y la curvatura, correspondientes a las parametrizaciones γ y $\tilde{\gamma}$ respectivamente, entonces

    $$i)\ \tilde{T}(s) = -T(t_0 - s) \qquad ii)\ \tilde{N}(s) = N(t_0 - s) \qquad iii)\ \tilde{k}(s) = k(t_0 - s)$$

    para cada $s \in J$

    (c) si $n = 3$ y $B(s), \tilde{B}(s), \tau(s)$ y $\tilde{\tau}(s)$ son los vectores binormal unitario y la torsión, correspondientes a las parametrizaciones γ y $\tilde{\gamma}$ respectivamente, entonces

    $$i)\ \tilde{B}(s) = -B(t_0 - s) \qquad ii)\ \tilde{\tau}(s) = \tau(t_0 - s)$$

    para cada $s \in J$

    (d) si $n = 3$, se satisfacen las fórmulas de Frenet-Serret escribiendo sus elementos en términos de $\tilde{\gamma}$.

31. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva suave $C \subset \mathbb{R}^3$. Definimos $\tilde{T}(t) = \gamma'(t)/\left\|\gamma'(t)\right\|$ y, bajo el supuesto de que $\tilde{T}'(t) \neq \hat{0}$ para toda $t \in I$, hacemos $\tilde{N}(t) = \tilde{T}'(t)/\left\|\tilde{T}'(t)\right\|$ y $\tilde{B}(t) = \tilde{T}(t) \times \tilde{N}(t)$. Si $\tilde{\gamma}$ es la parametrización por longitud de arco de C que se construye en la proposición 3.19, y $T(s)$, $N(s)$ y $B(s)$ son los vectores determinados por $\tilde{\gamma}$ de acuerdo con la definición 3.23, pruebe que: $\tilde{T}(t) = T(\alpha(t)) = (T \circ \alpha)(t)$; $\tilde{N}(t) = N(\alpha(t)) = (N \circ \alpha)(t)$ y $\tilde{B}(t) = B(\alpha(t)) = (B \circ \alpha)(t)$, en donde α es la función de longitud de arco definida en la proposición 3.19.

32. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva suave $C \subset \mathbb{R}^3$. Sean $\tilde{\gamma}$, α, $\tilde{T}(t)$, $\tilde{N}(t)$ y $\tilde{B}(t)$ como en el problema 31. Pruebe que:

    (a) si $\tilde{k}(t) = \left\|\tilde{T}'(t)\right\|$, entonces $k(\alpha(t)) = \tilde{k}(t)/\left\|\gamma'(t)\right\|$ (donde $k(\alpha(t)) = \left\|\tilde{\gamma}''(\alpha(t))\right\|$ es la curvatura de C para $s = \alpha(t)$, de acuerdo con la definición 3.22)

    (b) $\tilde{B}'(t) \cdot \tilde{B}(t) = 0 = \tilde{B}'(t) \cdot \tilde{T}(t)$

    (c) $\tilde{B}'(t)$ es un múltiplo escalar de $\tilde{N}(t)$

    (d) si denotamos por $-\tilde{\tau}(t)$ al número (del inciso anterior) tal que $\tilde{B}'(t) = -\tilde{\tau}(t)\tilde{N}(t)$, pruebe que $\tau(\alpha(t)) = \tilde{\tau}(t)/\left\|\gamma'(t)\right\|$ (donde $\tau(\alpha(t))$ es la torsión de C para $s = \alpha(t)$, de acuerdo con la definición 3.27)

    (e) $\tilde{N}'(t) = -\tilde{k}(t)\tilde{T}(t) + \tilde{\tau}(t)\tilde{B}(t)$.

33. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva suave. Pruebe que la curvatura k en cada punto $\gamma(t)$ está dada por:

$$\frac{\left(\left\|\gamma'(t)\right\|^2 \left\|\gamma''(t)\right\|^2 - (\gamma'(t) \cdot \gamma''(t))^2\right)^{1/2}}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3}.$$

34. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva suave tal que $\gamma''(t) \neq \hat{0}$ para toda $t \in I$. Pruebe que la curvatura k y la torsión τ en cada punto $\gamma(t)$ están dadas por:

$$i)\ k = \frac{\left\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right\|}{\left\|\gamma'(t)\right\|^3} \qquad ii)\ \tau = \frac{[\gamma'(t) \times \gamma''(t)] \cdot \gamma'''(t)}{\left\|\gamma'(t) \times \gamma''(t)\right\|^2}.$$

35. Sea $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una curva suave. Pruebe que si la curvatura k es constante (distinta de cero) y la torsión τ es cero en cada punto $\gamma(t)$, entonces la curva descrita por γ es (o está contenida en) una circunferencia.

36. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable. Pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ de la gráfica de f está dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{\left[1 + (f'(x))^2\right]^{3/2}}.$$

37. Sea $\gamma(t) = (a\cos(\omega t), a\,\mathrm{sen}(\omega t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$.

    (a) Calcule la parametrización por longitud de arco de esta curva.

    (b) Calcule los vectores $T(s), N(s)$ y $B(s)$ en cada punto de esta curva.

    (c) Calcule la curvatura, el radio de curvatura y la torsión en cada punto de esta curva.

38. Un objeto gira (en el sentido de las manecillas del reloj) sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio R con rapidez constante v. Si el objeto se desprende de la circunferencia en el punto $(-R/\sqrt{2}, R/\sqrt{2})$, ¿en qué punto y en cuánto tiempo intersecta al eje Y? ¿Cuál debería ser la rapidez del objeto sobre la circunferencia para que alcance el mismo punto en la mitad del tiempo?

39. Un ratón se mueve con rapidez constante v sobre una circunferencia de radio R y un gato, también con rapidez constante v, persigue al ratón (empezando desde el centro de la circunferencia) de tal forma que el ratón, el gato y el centro de la circunferencia siempre son coliniales. ¿Alcanza el gato al ratón? ¿en qué punto? ¿en qué tiempo?

40. La posición (en $\mathbb{R}^3$) de un objeto de masa m está dada por la función $\gamma(t)$. Suponga que la fuerza $\hat{F}$ que se ejerce sobre el objeto en la posición $\gamma(t)$ (la cual produce su movimiento) es tal que $\hat{F}(\gamma(t)) = \alpha(t)\gamma(t)$ (donde $\alpha(t)$ es un escalar que depende de t). Pruebe que:

    (a) el objeto se mueve sobre un plano (*sugerencia*: considere el producto $\gamma(t) \times \gamma'(t)$ y use la segunda ley de Newton),

    (b) suponiendo que la curva descrita es cerrada, pruebe que el movimiento del objeto satisface la Segunda Ley de Kepler (*sugerencia*: proceda como en la prueba de la proposición 3.32).