

Capítulo 2

Calculando integrales

Si bien es cierto que por el material expuesto en el capítulo 1 sabemos cómo se define la integral de una función de varias variables con valores reales, también es cierto que hasta ahora no contamos con herramientas sencillas que nos permitan calcular, salvo en casos muy específicos, el valor de este tipo de integrales.

Pues bien, la intención de este capítulo es la de desarrollar dichas herramientas, las cuales están basadas fundamentalmente en dos resultados: el Teorema de Fubini¹ y el Teorema de Cambio de Variable.

2.1 Integrales iteradas

Como se recordará, para el caso de una función f definida sobre un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$ en \mathbb{R}^2 , y de valores positivos, la integral de f sobre R se puede interpretar geoméricamente como el volumen de la región que se encuentra “por arriba” del rectángulo R y “por abajo” de la gráfica de la función f . Y tratándose del cálculo de volúmenes, seguramente el lector alguna vez habrá escuchado hablar del principio de Cavalieri², aunque en realidad aquí haremos referencia *al método* de Cavalieri para el cálculo de volúmenes.

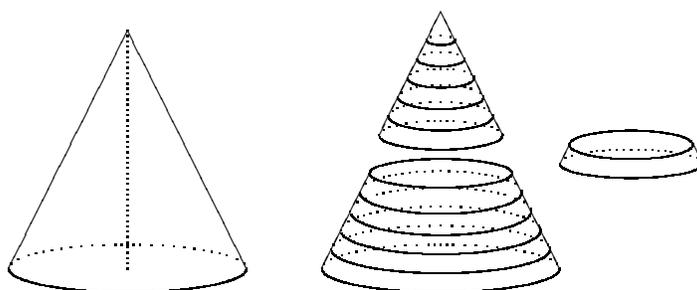


Figura 2.1: El método de Cavalieri para aproximar el volumen de un objeto consiste en: “rebanar” el objeto; después, para cada rebanada, calcular el área de alguna de sus “caras” (o de alguna “cara intermedia”), multiplicarla por el “grosor” de dicha rebanada (obteniendo así un volumen) y finalmente sumar todos estos volúmenes

¹Guido Fubini, matemático italiano (1879-1943)

²Bonaventura Cavalieri (1598-1647), matemático italiano discípulo de Galileo, cuyo principio establece que, si existe una manera de colocar dos objetos sobre una base de tal forma que al realizar cortes en ambos objetos con planos paralelos a dicha base, el área de las dos figuras que se forman en cada plano, son iguales, entonces sus volúmenes son iguales.

En términos generales, dicho método consiste en “rebanar” nuestro objeto; después, para cada rebanada, calcular el área de alguna de sus “caras” (o de alguna “cara intermedia”), multiplicarla por el “grosor” de dicha rebanada (obteniendo así un volumen) y finalmente sumar todos estos volúmenes (ver figura 2.1). Como seguramente el lector se habrá percatado, este método no es más que una forma pintoresca de describir la construcción de lo que ahora llamamos sumas de Riemann de una cierta función, que en este caso sería aquella que asigna el área de las “caras” de cualquier “rebanada” o corte que hagamos, y de cuya disponibilidad depende el éxito del método de Cavalieri.

Pues bien, para el caso en \mathbb{R}^2 que nos ocupa, resulta que sí hay formas de cortar nuestra región de tal manera que sí podemos tener la función que nos asigna el área de la figura que se obtiene en cada corte. De hecho, podemos hacer los cortes de dos formas diferentes y en ambas es posible obtener dicha función. Observe que, si cortamos nuestra región por un plano paralelo al plano YZ a la “altura” del punto $x_0 \in [a, b]$ del eje X , la figura que se obtiene es justo la misma que obtenemos al considerar aquella que está por debajo de la gráfica de la función $f_{x_0} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ (ver figura 2.2). De esta forma, el área de la figura correspondiente al corte realizado a la altura x_0 , que denotaremos por $\alpha(x_0)$, coincide con ser

$$\begin{aligned}\alpha(x_0) &= \int_c^d f_{x_0}(y) dy \\ &= \int_c^d f(x_0, y) dy\end{aligned}$$

Nótese que α es una función definida sobre el intervalo $[a, b]$ y es justo una función que es útil para aplicar el método de Cavalieri.

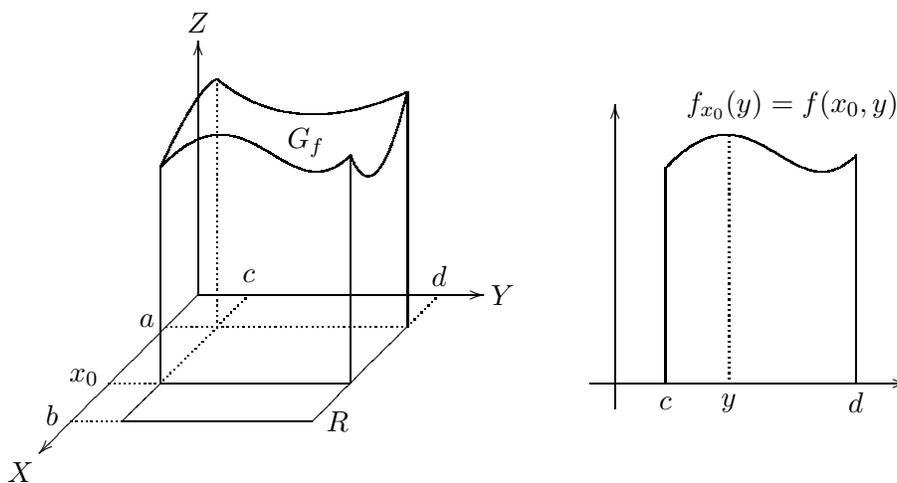


Figura 2.2: Si a la región que se encuentra “por arriba” del rectángulo R y “por abajo” de la gráfica de la función f (G_f), la “cortamos” por un plano paralelo al plano YZ a la “altura” del punto $x_0 \in [a, b]$ del eje X , la figura que se obtiene es justo la misma que obtenemos al considerar aquella que está por debajo de la gráfica de la función $f_{x_0} : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$

También podemos hacer cortes con planos paralelos al plano XZ ; así, si cortamos a la altura del punto $y_0 \in [c, d]$ del eje Y , la figura que se obtiene coincide con la que está por debajo de la

gráfica de la función $f_{y_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$, de tal forma que el área de la figura obtenida con este corte (ver figura 2.3), que denotaremos por $\beta(y_0)$, estará dada por

$$\begin{aligned}\beta(y_0) &= \int_a^b f_{y_0}(x) dx \\ &= \int_a^b f(x, y_0) dx\end{aligned}$$

En este caso, β es una función definida sobre el intervalo $[c, d]$ y con ella también podemos aplicar el método de Cavalieri.

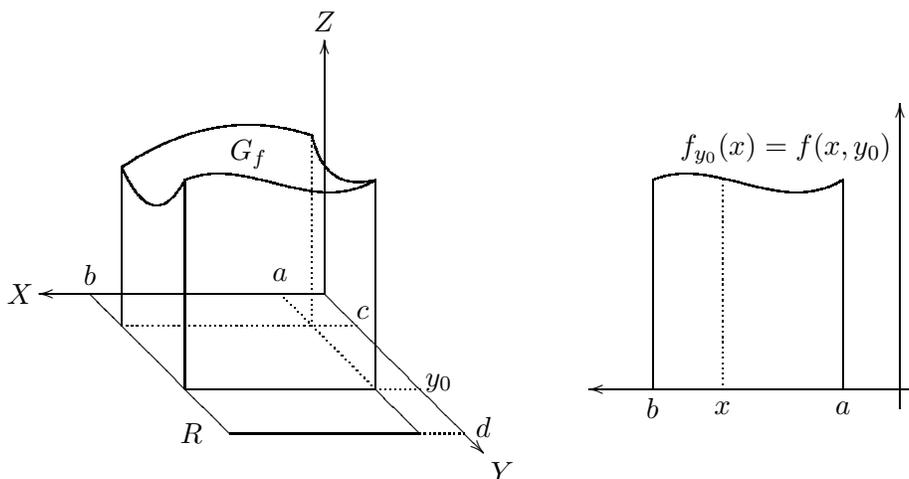


Figura 2.3: También podemos hacer cortes con planos paralelos al plano XZ . Si cortamos a la altura del punto $y_0 \in [c, d]$ del eje Y , la figura que se obtiene coincide con la que está por debajo de la gráfica de la función $f_{y_0} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$

Si todo lo dicho anteriormente está bien (que sí lo estará, salvo por uno que otro “pequeño ajuste”), el volumen de la región que describimos al principio, y que “geoméricamente” es lo que representa la integral de f sobre R ($\int_R f$), deberá estar dado por

$$\begin{aligned}\int_R f &= \int_a^b \alpha(x) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx\end{aligned}$$

o por

$$\begin{aligned}\int_R f &= \int_c^d \beta(y) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy\end{aligned}$$

Las integrales que aparecen en el segundo renglón de cada una de las identidades anteriores, se llaman integrales iteradas, se calculan de “adentro hacia afuera”, y de la misma forma que en el caso de la derivación parcial, en cada paso, las variables diferentes a la variable de integración, se consideran como constantes.

Es importante destacar que las identidades anteriores nos proporcionan dos métodos para calcular la integral de f sobre R , y además ambos métodos nos dan el mismo resultado. El teorema de Fubini es famoso por esta propiedad, y ésta se resume diciendo que podemos integrar en el orden que queramos. Si bien esto es cierto (bajo ciertas hipótesis), es sólo una parte. La otra, es justo la que establece que la integral de una función de varias variables se puede integrar por medio de integraciones iteradas.

Una vez que hemos llegado hasta aquí, es necesario precisar algunas cuestiones. La primera de ellas tiene que ver con las funciones α y β que definimos párrafos arriba. Y la pregunta es: ¿ α y β están definidas para todo $x \in [a, b]$ y para toda $y \in [c, d]$, respectivamente? Y bueno, si sólo sabemos que la función original f es integrable sobre R , entonces la respuesta es: no. Y un ejemplo que prueba esta afirmación nos lo proporciona la función del ejercicio 9 del capítulo anterior.

Ejemplo 2.1 Recordemos que esta función está definida como

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ o } y \text{ es irracional, } 0 \leq x, y \leq 1 \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } y = \frac{p}{q} \text{ con } (m, n) \text{ y } (p, q) \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Observemos que, si $x_0 \in [0, 1]$ es irracional, entonces $f_{x_0}(y) = f(x_0, y) = 0$ para toda $y \in [0, 1]$ en cuyo caso la correspondiente función α sí está definida para este punto, y además

$$\begin{aligned} \alpha(x_0) &= \int_0^1 f_{x_0}(y) dy \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, si $x_0 \in [0, 1]$ es racional, con $x_0 = m_0/n_0$, entonces

$$f_{x_0}(y) = f(x_0, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n_0} + \frac{1}{q} & \text{si } y = \frac{p}{q} \text{ con } p \text{ y } q \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Es fácil comprobar para esta función que su integral inferior $\int_0^1 f_{x_0}(y) dy = 0$ y que su integral superior $\int_0^1 f_{x_0}(y) dy = 1/n_0$, lo que significa que no es integrable en el intervalo $[0, 1]$ y que por lo tanto la función α no está definida para estos valores de x . El lector puede verificar que se da una situación análoga para la función β .

El ejemplo anterior no deberá rompernos el corazón puesto que para una clase muy grande de funciones (las continuas) no tendremos ningún problema en definir a las ya famosas funciones α y β de los párrafos anteriores, lo cual se deduce fácilmente del problema 1. Y aún menos descorazonador nos resultará dicho ejemplo, si observamos que, si bien no es posible definir las funciones α y β puesto que las integrales $\int_0^1 f_x(y) dy$ y $\int_0^1 f_y(x) dx$ no existen para todo $x \in [0, 1]$ y/o todo $y \in [0, 1]$, de las que sí podemos estar seguros que sí existen, son las integrales inferiores y superiores de las mismas funciones f_x y f_y . Es decir, sin importar qué valores $x \in [0, 1]$ y $y \in [0, 1]$ escojamos, los

números $\int_0^1 f_x(y)dy$, $\int_0^{-1} f_x(y)dy$, $\int_0^1 f_y(x)dx$ y $\int_0^{-1} f_y(x)dx$ siempre existen. Así, dado $x \in [0, 1]$ le podemos asociar dos números, que ahora denotaremos por $\phi(x)$ y $\Phi(x)$, de la siguiente forma

$$\phi(x) = \int_{-0}^1 f_x(y)dy = \int_{-0}^1 f(x, y)dy = 0 \quad \text{para toda } x \in [0, 1]$$

y

$$\Phi(x) = \int_0^{-1} f_x(y)dy = \int_0^{-1} f(x, y)dy = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es irracional} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

Y lo mejor de todo esto es que este par de funciones $\phi(x)$ y $\Phi(x)$ ($x \in [0, 1]$) que obtenemos de esta manera, ¡son integrables! con la propiedad de que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi(x)dx &= 0 \\ &= \int_R f \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(x)dx &= 0 \\ &= \int_R f \end{aligned}$$

Por supuesto que también se cumple lo mismo si para cada $y \in [0, 1]$, definimos las funciones

$$\psi(y) = \int_{-0}^1 f_y(x)dx = \int_{-0}^1 f(x, y)dx = 0 \quad \text{para toda } y \in [0, 1]$$

y

$$\Psi(y) = \int_0^{-1} f_y(x)dx = \int_0^{-1} f(x, y)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } y \text{ es irracional} \\ \frac{1}{q} & \text{si } y = \frac{p}{q} \end{cases}$$

que también resultarán integrables, con la propiedad de que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(y)dy &= 0 \\ &= \int_R f \end{aligned}$$

y

$$\int_0^1 \Psi(y) dy = 0$$

$$= \int_R f$$

Lo que vamos hacer a continuación es mostrar que estas propiedades no son exclusivas de la función del ejemplo 2.1. Más aun, veremos que las ideas que están detrás del método descrito párrafos arriba para calcular el volumen de una figura que se puede expresar como la integral de una función definida sobre un rectángulo en \mathbb{R}^2 , se pueden extender a funciones que son integrables sobre rectángulos en \mathbb{R}^n . Hay varias formas de hacer esto, y la que expondremos aquí nos permitirá mostrar que, bajo ciertas condiciones, el cálculo de este tipo de integrales se puede reducir al cálculo de integrales iteradas.

La herramienta más importante para lograr todo esto nos la da el teorema de Fubini, del cual aquí daremos una de sus tantas versiones. Antes, simplemente recordaremos un resultado muy elemental acerca del ínfimo y el supremo de conjuntos acotados de números reales, que seguramente resultará muy familiar al lector, y que dice lo siguiente: si $A, B \subset \mathbb{R}$ son conjuntos no vacíos y acotados (superior e inferiormente) tales que $A \subset B$ entonces

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \tag{2.1}$$

Teorema 2.2 (de Fubini) Sean $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ un índice fijo, y $R^{i_0} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i_0-1}, b_{i_0-1}] \times [a_{i_0+1}, b_{i_0+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^{n-1}$. Para cada $\hat{y} = (x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \in R^{i_0}$ definimos:

1. $f_{\hat{y}} : [a_{i_0}, b_{i_0}] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f_{\hat{y}}(x) = f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

2. $\phi, \Phi : R^{i_0} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(\hat{y}) = \int_{-a_{i_0}}^{b_{i_0}} f_{\hat{y}}(x) dx$$

y

$$\Phi(\hat{y}) = \int_{a_{i_0}}^{b_{i_0}} f_{\hat{y}}(x) dx$$

Si f es integrable sobre R entonces ϕ y Φ son integrables sobre el rectángulo R^{i_0} y además

$$\int_{R^{i_0}} \phi = \int_R f = \int_{R^{i_0}} \Phi$$

Dem. Lo primero que hay que destacar es que las funciones ϕ y Φ definidas en el enunciado satisfacen que

$$\phi(\hat{y}) \leq \Phi(\hat{y})$$

para toda $\hat{y} \in R^{i_0}$.

Para continuar, estableceremos la notación que vamos a usar en esta demostración.

Si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ es una partición del rectángulo R , sabemos que cada \mathcal{P}_i es una partición del correspondiente intervalo $[a_i, b_i]$ ($i = 1, \dots, n$). Si $\mathcal{P}_{i_0} = \{a_{i_0} = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b_{i_0}\}$ y R_j (con $j = 1, \dots, m$) son los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{P}^{i_0} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_{i_0-1} \times \mathcal{P}_{i_0+1} \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ en el rectángulo R^{i_0} , entonces los subrectángulos de R inducidos por la partición \mathcal{P} (que serán $k \cdot m$) los denotaremos por R_{lj} , y que se puede interpretar como el que se obtiene de “insertar” el intervalo $[t_{l-1}, t_l]$ en la i_0 -coordenada del rectángulo R_j , para cada $l = 1, \dots, k$ y cada $j = 1, \dots, m$.

Para cada uno de estos mismos índices, llamamos

$$m_{lj}(f) = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_{lj}\} \quad \text{y} \quad M_{lj}(f) = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_{lj}\}$$

Si $\hat{y} \in R^{i_0}$ entonces

$$m_l(f_{\hat{y}}) = \inf\{f_{\hat{y}}(x) \mid x \in [t_{l-1}, t_l]\} \quad \text{y} \quad M_l(f_{\hat{y}}) = \sup\{f_{\hat{y}}(x) \mid x \in [t_{l-1}, t_l]\}$$

para cada $l \in \{1, \dots, k\}$.

Finalmente, para cada $j = 1, \dots, m$ denotamos como

$$m_j(\phi) = \inf\{\phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\} \quad \text{y} \quad M_j(\phi) = \sup\{\phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\}$$

para la función ϕ , y

$$m_j(\Phi) = \inf\{\Phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\} \quad \text{y} \quad M_j(\Phi) = \sup\{\Phi(\hat{y}) \mid \hat{y} \in R_j\}$$

para la función Φ .

Observe que, si $\hat{y} = (x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \in R_j$ se tiene que

$$\{f_{\hat{y}}(x) = f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \mid x \in [t_{l-1}, t_l]\} \subset \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_{lj}\}$$

de tal forma que por las desigualdades 2.1 tenemos que

$$m_{lj}(f) \leq m_l(f_{\hat{y}}) \leq M_l(f_{\hat{y}}) \leq M_{lj}(f)$$

para cada $l \in \{1, \dots, k\}$.

Ahora, si multiplicamos las desigualdades anteriores por $t_l - t_{l-1} > 0$, obtenemos que

$$m_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq M_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq M_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

de tal forma que sumando sobre las l 's, se tiene que

$$\sum_{l=1}^k m_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \sum_{l=1}^k m_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \sum_{l=1}^k M_l(f_{\hat{y}}) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \sum_{l=1}^k M_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

desigualdades que, usando la notación de sumas superiores y sumas inferiores, se escriben como

$$\sum_{l=1}^k m_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \underline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \overline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \sum_{l=1}^k M_{lj}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

Si ahora recordamos la definición de las funciones ϕ y Φ , podemos concluir que

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq \underline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \phi(\hat{y}) \leq \Phi(\hat{y}) \leq \overline{S}(f_{\hat{y}}, \mathcal{P}_{i_0}) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

para toda $\hat{y} \in R_j$. Esto prueba que los números de los extremos de estas desigualdades son cota inferior y superior (respectivamente) tanto de ϕ como de Φ en el subrectángulo R_j , y por lo tanto tendremos que

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\phi) \leq M_j(\phi) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

y

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\Phi) \leq M_j(\Phi) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

para cada $j = 1, \dots, m$. Ahora, si en ambos grupos de desigualdades multiplicamos por $m(R_j) > 0$, tenemos que

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\phi) \cdot m(R_j) \leq M_j(\phi) \cdot m(R_j) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

y

$$\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \leq m_j(\Phi) \cdot m(R_j) \leq M_j(\Phi) \cdot m(R_j) \leq \sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1})$$

de tal forma que si sumamos con respecto al índice j , se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) &\leq \sum_{j=1}^m m_j(\phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m M_j(\phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k m_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) &\leq \sum_{j=1}^m m_j(\Phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m M_j(\Phi) \cdot m(R_j) \\ &\leq \sum_{j=1}^m \left(\sum_{l=1}^k M_{l_j}(f) \cdot m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) \right) \end{aligned}$$

Ya que $m(R_j) \cdot (t_l - t_{l-1}) = m(R_{l_j})$, si usamos nuevamente la notación de sumas inferiores y superiores, concluimos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(\phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

y

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \underline{S}(\Phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(\Phi, \mathcal{P}^{i_0}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

Como podrá notar el lector, estas desigualdades son suficientes para probar que, si f es integrable sobre el rectángulo R , entonces las funciones ϕ y Φ son integrables sobre el rectángulo R^{i_0} y además

$$\int_{R^{i_0}} \phi = \int_R f = \int_{R^{i_0}} \Phi$$

■

Hay una manera más general de formular el teorema de Fubini (como se verá en el problema 2), pero la forma en que lo hemos hecho aquí tiene que ver con la manera más común en que suele aplicarse. Dejando un poco de lado el formalismo del lenguaje matemático, podemos leer este teorema de la siguiente manera; si de lo que se trata es de calcular la integral de una función $f(x_1, \dots, x_n)$ sobre un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$, síganse los siguientes pasos:

1. elija un índice $i_1 \in \{1, \dots, n\}$
2. integre a la función $f(x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_n)$ con respecto a la variable x_{i_1} sobre el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$ (lo que significa que debe tratar “como constantes” a las variables distintas de x_{i_1}). Si por desgracia la función $f(x_1, \dots, x_{i_1}, \dots, x_n)$ no es integrable con respecto a la variable x_{i_1} sobre el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$, no se preocupe, calcule la integral inferior o la integral superior de la misma función (con respecto a la misma variable). El resultado de lo anterior es una expresión (o una función) que sólo depende (a lo más) de las variables $x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_n$
3. el teorema de Fubini asegura que la función del inciso anterior es integrable sobre el rectángulo $R^{i_1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ (que se obtiene del rectángulo R “quitándole” el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$) por lo que se puede volver al paso uno eligiendo ahora un índice en $\{1, \dots, n\} \setminus \{i_1\}$

Los incisos anteriores tienen la intención de bosquejar el algoritmo que se debe seguir a fin de calcular la integral de una función de varias variables. Como se podrá notar, éstos nos dicen que la integral de una función sobre un rectángulo en \mathbb{R}^n se puede “reducir” a la integral de otra función sobre un rectángulo en \mathbb{R}^{n-1} , por lo que después de un número finito de pasos (a lo más n , que es el número máximo de variables) habremos terminado. Una particularidad que es importante destacar, y por la cual es más conocido el teorema de Fubini, es que el orden en que vayamos eligiendo los índices es totalmente arbitrario. Es decir, nosotros podemos ir eligiendo la variable de integración que más nos convenga en cada paso, lo cual, como veremos en algunos ejemplos, resulta muy conveniente. Esta propiedad se suele expresar diciendo que el teorema de Fubini nos permite intercambiar “el orden de integración” de la forma que queramos.

Todo esto queda resumido en el siguiente resultado, que es un corolario del teorema de Fubini. Con el fin de evitar la posibilidad de que las funciones que se mencionan en el inciso 2 no sean integrables, para este corolario vamos a suponer que la función que deseamos integrar es continua (ver el problema 1).

Corolario 2.3 Sea $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua en R , y sean $i_1, \dots, i_n \in \{1, \dots, n\}$ diferentes dos a dos (es decir, $\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$). Entonces

$$\int_R f = \int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\int_{a_{i_{n-1}}}^{b_{i_{n-1}}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_{i_1} \right) dx_{i_2} \right) \cdots \right) dx_{i_{n-1}} \right) dx_{i_n}$$

Dem. Como el lector seguramente lo sospechaba, esta prueba se hará por *inducción sobre el número de variables* y la iniciaremos desde $k = 2$. Este es el caso con el que se inició la discusión de esta sección, está directamente relacionado con el método de Cavalieri, y es una consecuencia directa del teorema de Fubini.

Supongamos ahora que el resultado es válido para cualquier función de n variables y continua sobre un rectángulo en \mathbb{R}^n .

Ahora, sea $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en R , y sean $i_1, \dots, i_{n+1} \in \{1, \dots, n+1\}$ diferentes dos a dos. Elegimos el índice i_1 y definimos $\phi : R' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i_1-1}, b_{i_1-1}] \times [a_{i_1+1}, b_{i_1+1}] \times \cdots \times [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) = \int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) dx$$

para cada $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) \in R'$. Nótese que ϕ está bien definida, pues f es continua en R ; entonces $f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1})$ es también una función continua de la variable $x \in [a_{i_1}, b_{i_1}]$, y por lo tanto integrable sobre el intervalo $[a_{i_1}, b_{i_1}]$. Así, por el teorema de Fubini sabemos que

$$\int_R f = \int_{R'} \phi$$

Por otra parte, tenemos que ϕ es una función de n variables indexadas por el conjunto $\{1, \dots, n+1\} \setminus \{i_1\} = \{i_2, \dots, i_{n+1}\}$, y por el segundo inciso del problema 1, sabemos que es continua en el rectángulo R' . Por lo tanto, por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{R'} \phi &= \int_{a_{i_{n+1}}}^{b_{i_{n+1}}} \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \phi(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, x_{n+1}) dx_{i_2} \right) dx_{i_3} \right) \cdots \right) dx_{i_n} \right) dx_{i_{n+1}} \\ &= \int_{a_{i_{n+1}}}^{b_{i_{n+1}}} \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \dots, x_{n+1}) dx \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_3} \right) \cdots \right) dx_{i_n} \right) dx_{i_{n+1}} \end{aligned}$$

de tal forma que, cambiando el nombre de la variable de integración x por x_{i_1} , obtenemos que

$$\int_R f = \int_{a_{i_{n+1}}}^{b_{i_{n+1}}} \left(\int_{a_{i_n}}^{b_{i_n}} \left(\cdots \left(\int_{a_{i_3}}^{b_{i_3}} \left(\int_{a_{i_2}}^{b_{i_2}} \left(\int_{a_{i_1}}^{b_{i_1}} f(x_1, \dots, x_{n+1}) dx_{i_1} \right) dx_{i_2} \right) dx_{i_3} \right) \cdots \right) dx_{i_n} \right) dx_{i_{n+1}}$$

concluyendo con esto la inducción. ■

Sin duda, una vez que hemos llegado hasta aquí, lo que sigue son algunos ejemplos de como aplicar el corolario anterior.

Ejemplo 2.4 1. calcular la integral $\int_R \text{sen}(x + y)$ donde $R = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

Solución. De acuerdo con el teorema de Fubini, sabemos que:

$$\begin{aligned} \int_R \text{sen}(x + y) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/2} \text{sen}(x + y) dx \right) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} -\cos(x + y) \Big|_0^{\pi/2} dy \\ &= \int_0^{\pi/2} (-\cos(\pi/2 + y) + \cos(y)) dy \\ &= -\text{sen}(\pi/2 + y) \Big|_0^{\pi/2} + \text{sen}(y) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= (-\text{sen}(\pi/2 + \pi/2) + \text{sen}(\pi/2 + 0)) + (\text{sen}(\pi/2) - \text{sen}(0)) \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. calcular la integral $\int_R x \cos(xy)$ donde $R = [0, \pi/2] \times [0, 1]$.

Solución. Nuevamente, por el teorema de Fubini sabemos que esta integral la podemos calcular de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_R x \cos(xy) &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 x \cos(xy) dy \right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}(xy) \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \text{sen}(x) dx \\ &= -\cos(x) \Big|_0^{\pi/2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Se deja al lector que calcule la misma integral usando el otro orden de integración, que de acuerdo con el teorema de Fubini, también se vale hacerlo así.

Si el lector hace la tarea del segundo inciso del ejemplo anterior, se podrá dar cuenta de las ventajas que se tienen al poder elegir el orden de integración.

2.2 Calculando integrales sobre otros conjuntos

Como seguramente se recordará, el concepto de integración lo extendimos a los conjuntos Jordan-medibles y por la forma en que lo hicimos, integrar una función definida sobre uno de estos conjuntos se reduce a integrar una cierta función sobre algún rectángulo que lo contenga. Hay un tipo de

conjuntos Jordan-medibles para los cuales todo esto resulta muy conveniente a la hora de calcular la integral de funciones definidas sobre ellos.

Este tipo de conjuntos es como el que se definió en el problema 33 del capítulo uno y un ejemplo, en \mathbb{R}^2 , es la región acotada entre la gráfica de dos funciones α, β (continuas) definidas sobre un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ que tienen la propiedad de que $\alpha(x) \leq \beta(x)$ para toda $x \in [a, b]$ (ver figura 2.4). Es decir, si consideramos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\} \quad (2.2)$$

por el problema antes mencionado sabemos que A es un conjunto Jordan-medible de tal forma que, si f es una función continua sobre A y $R \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo tal que $A \subset R$, entonces

$$\int_A f = \int_R f_A$$

En particular, podemos tomar $R = [a, b] \times [m, M]$ en donde m es el mínimo valor de α en $[a, b]$ y M es el máximo valor de β en $[a, b]$.

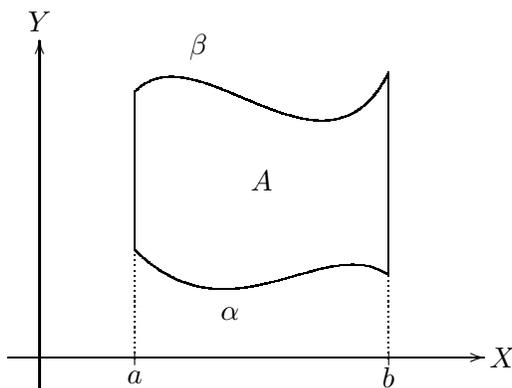


Figura 2.4: La región en \mathbb{R}^2 definida como $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b] \text{ y } \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ es un conjunto Jordan-medible

Así, dado que para cada $x \in [a, b]$ podemos estar seguros de que la función $(f_A)_x : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $(f_A)_x(y) = f_A(x, y)$ es integrable (a lo más es discontinua en un par de puntos), tendremos que

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_R f_A \\ &= \int_a^b \left(\int_m^M f_A(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_m^{\alpha(x)} f_A(x, y) dy + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_A(x, y) dy + \int_{\beta(x)}^M f_A(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_A(x, y) dy \right) dx \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

en donde $\int_m^{\alpha(x)} f_A(x, y) dy = \int_{\beta(x)}^M f_A(x, y) dy = 0$ dado que $f_A(x, y) = 0$ si $y \in [m, \alpha(x)) \cup (\beta(x), M]$. Es importante hacer notar que la forma en que está definido el conjunto A determina el orden en que se toman las variables de integración de esta integral iterada.

En \mathbb{R}^2 hay otra forma de construir un conjunto similar al definido en 2.2. Así como en ese caso se tiene que la coordenada y de cualquier punto en A (que tenga una coordenada $x \in [a, b]$) está entre el valor de dos funciones de x , ahora la coordenada x de cualquier punto (que tenga una coordenada $y \in [c, d]$) estará entre el valor de dos funciones de y . En términos más precisos, estamos hablando de un conjunto definido de la siguiente forma: si $\varphi, \psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas y tales que $\varphi(y) \leq \psi(y)$ para toda $y \in [c, d]$, consideramos

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d] \text{ y } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\} \quad (2.3)$$

La figura 2.5 ilustra un conjunto de este tipo.

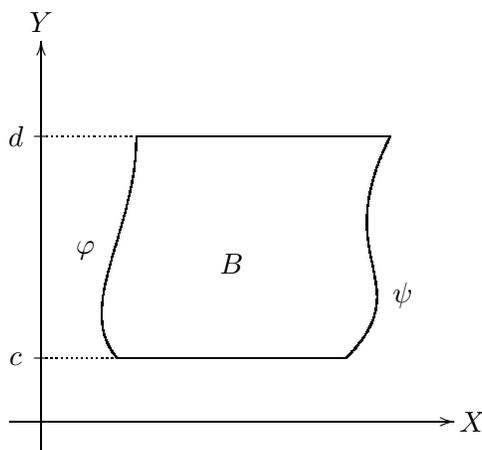


Figura 2.5: La región en \mathbb{R}^2 definida como $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [c, d] \text{ y } \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ también es un conjunto Jordan-medible

Procediendo como en el caso del conjunto A , es fácil deducir ahora que si f es una función continua sobre el conjunto Jordan-medible B , entonces

$$\begin{aligned} \int_B f &= \int_R f_B \\ &= \int_c^d \left(\int_{m'}^{M'} f_B(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_c^d \left(\int_{m'}^{\varphi(y)} f_B(x, y) dx + \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_B(x, y) dx + \int_{\psi(y)}^{M'} f_B(x, y) dx \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f_B(x, y) dx \right) dy \\
&= \int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy
\end{aligned}$$

tomando $R = [m', M'] \times [c, d]$ y en donde m' es el mínimo de φ en $[c, d]$ y M' es el máximo de ψ en $[c, d]$.

Vale la pena destacar que para las integrales iteradas que se obtuvieron para calcular la integral de una función continua f definida sobre conjuntos como los definidos en 2.2 y en 2.3, no tiene mucho sentido hablar del cambio en el orden de integración. Es decir, ni $\int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx$ es igual a $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ ni $\int_c^d \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy$ es igual a $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ porque, entre otras cosas, integrales iteradas como $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$ o $\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$ no tienen un significado preciso puesto que no nos conducen a algún resultado numérico específico (observe que en ambos casos las últimas integrales están evaluadas de $\alpha(x)$ a $\beta(x)$ o de $\varphi(y)$ a $\psi(y)$, respectivamente, ¡sin que quede claro cuál valor de x o de y habría que elegir!).

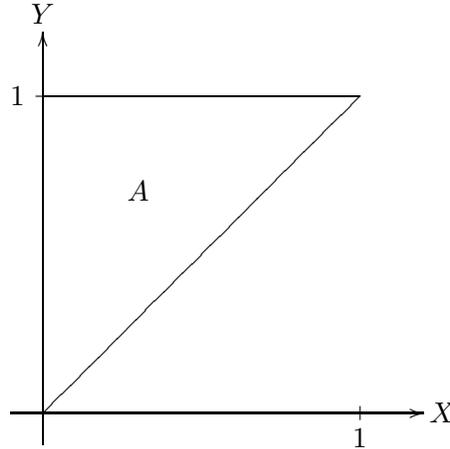
De aquí en adelante a los conjuntos definidos como en 2.2 y en 2.3 los llamaremos regiones (de \mathbb{R}^2) tipo I y tipo II, respectivamente. Aunque el tipo de la región determina el orden en que se toman las variables de integración, si un conjunto Jordan-medible (en \mathbb{R}^2) C se puede expresar como una región tipo I y como una región tipo II, entonces la integral de cualquier función continua definida sobre C se puede calcular por medio de integrales iteradas con los dos ordenes de integración posibles. El siguiente ejemplo ilustra esta situación.

Ejemplo 2.5 Calcular $\int_A f$ en donde $f(x, y) = x + y$ y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \leq y \leq 1\}$ (ver figura 2.6).

Solución. Como se podrá notar, A está descrito como una región tipo I, tomando $\alpha(x) = x$ y $\beta(x) \equiv 1$ (la función constante uno) para $x \in [0, 1]$. Por tanto, sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_A f &= \int_0^1 \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_x^1 (x + y) dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(x + y)^2 \Big|_x^1 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 ((x + 1)^2 - (x + x)^2) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 (-3x^2 + 2x + 1) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left(-x^3 \Big|_0^1 + x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_0^1 \right) \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Figura 2.6: La región A del ejemplo 2.5

Ahora, como A también se puede expresar de la forma $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 \text{ y } 0 \leq x \leq y\}$, es decir, como una región tipo II con $\varphi(y) \equiv 0$ y $\psi(y) = y$ para $y \in [0, 1]$, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
 \int_A f &= \int_0^1 \left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\int_0^y (x + y) dx \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} (x + y)^2 \Big|_0^y \right) dy \\
 &= \int_0^1 \frac{3}{2} y^2 dy \\
 &= \frac{1}{2} y^3 \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Este ejemplo no sólo ilustra que, si un conjunto es de ambos tipos, entonces la integral de una función continua sobre éste se puede expresar en términos de integrales iteradas correspondientes a los dos diferentes órdenes de integración posibles, sino que en algunos casos uno de ellos resulta más fácil de realizar que el otro o, como se verá en uno de los ejercicios de este capítulo, sólo con uno de ellos es posible calcular el valor de la integral.

Hasta ahora sólo hemos trabajado en \mathbb{R}^2 pero como seguramente el lector intuirá, todo esto se puede extender a cualquier \mathbb{R}^n . En \mathbb{R}^3 , por ejemplo, podemos considerar conjuntos como los siguientes:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ y } \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\} \\ E &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in B \text{ y } \lambda(x, z) \leq y \leq \mu(x, z)\} \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in C \text{ y } \eta(y, z) \leq x \leq \sigma(y, z)\} \end{aligned} \tag{2.4}$$

en donde A, B y C son regiones tipo I y/o tipo II en \mathbb{R}^2 , y $\gamma, \delta, \lambda, \mu, \eta$ y σ son funciones continuas (de valores reales) tales que $\gamma \leq \delta, \lambda \leq \mu$ y $\eta \leq \sigma$ sobre A, B y C , respectivamente. Las figuras 2.7 (a), y 2.7 (b) ilustran algunos ejemplos de este tipo de conjuntos.

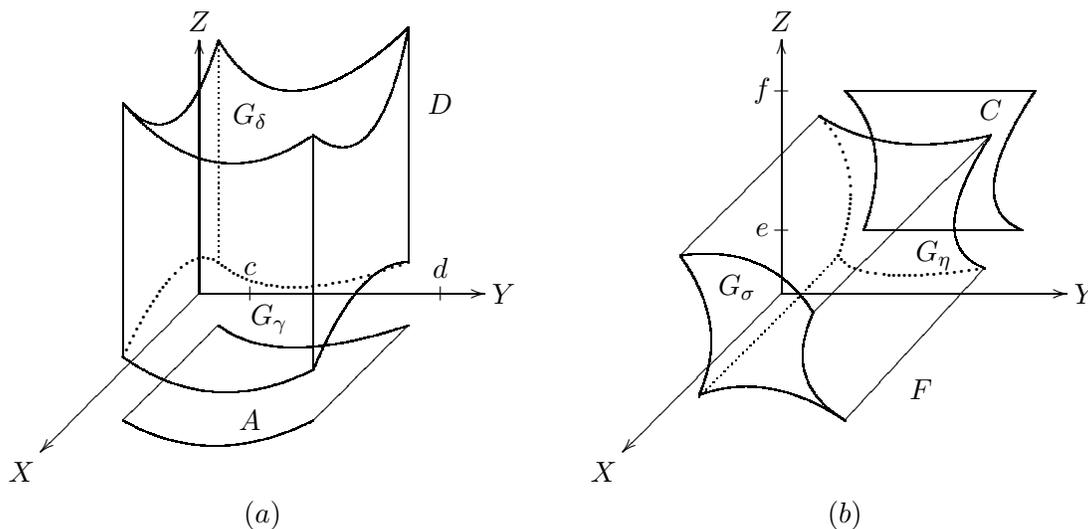


Figura 2.7: Ejemplos de conjunto tipo $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A \text{ y } \gamma(x, y) \leq z \leq \delta(x, y)\}$ y tipo $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in C \text{ y } \eta(y, z) \leq x \leq \sigma(y, z)\}$

Así, si f es una función continua definida sobre el conjunto D , sabemos que

$$\int_D f = \int_R f_D$$

en donde $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo que contiene a D . Si ahora suponemos que el conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que aparece en la descripción del conjunto D es una región tipo I, es decir de la forma 2.2, entonces podemos tomar $R = [a, b] \times [m, M] \times [m', M']$ en donde m es el mínimo valor de la función α en $[a, b]$, M es el máximo valor de la función β en $[a, b]$, m' es el mínimo valor de la función γ en A y M' es el máximo valor de la función δ en A . De esta forma, obtendremos que:

$$\begin{aligned} \int_D f &= \int_R f_D \\ &= \int_{[a,b] \times [m,M]} \left(\int_{m'}^{M'} f_D(x, y, z) dz \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \left(\int_m^M \left(\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f_D(x,y,z) dz \right) dy \right) dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(\int_{\gamma(x,y)}^{\delta(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dy \right) dx
\end{aligned}$$

Nuevamente vale la pena insistir en que el orden en que se toman las variables de integración en esta integral iterada, está determinado por la forma en que está descrito el conjunto D .

Se deja al lector escribir las integrales iteradas que se obtienen al integrar una función f sobre conjuntos como E o F . A los conjuntos descritos en 2.4, sin importar el tipo de región (en \mathbb{R}^2) que sean los conjuntos A, B y C que ahí aparecen, los llamaremos regiones (en \mathbb{R}^3) tipo I, tipo II y tipo III, respectivamente.

Como es de suponerse, daremos un ejemplo de cómo se calculan integrales de este tipo.

Ejemplo 2.6 Sea D la región acotada por el cono $z^2 = x^2 + y^2$ y los planos $z = 0, z = 1, x = 0, x = 1, y$ sea $f(x, y, z) = xz$. Calcule $\int_D f$.

Solución. En este caso, D es un ejemplo (en \mathbb{R}^3) de la clase de conjuntos que se pueden expresar como regiones de cualquiera de los tres tipos. Aquí lo describiremos como una región de tipo II. En efecto, tenemos que D se puede expresar como sigue:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq z, -\sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2} \right\}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_D f &= \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} xz dy \right) dx \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^z xz \left(y \Big|_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} \right) dx \right) dz \\
&= \int_0^1 \left(z \int_0^z 2x\sqrt{z^2-x^2} dx \right) dz \\
&= \int_0^1 z \left(-\frac{2}{3} (z^2-x^2)^{3/2} \Big|_0^z \right) dz \\
&= \frac{2}{3} \int_0^1 z^4 dz \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

En gran medida, el problema de calcular la integral de una función reside en identificar y expresar adecuadamente el conjunto sobre el cual se quiere integrar, como lo ilustran los ejemplos que hemos dado.

Terminaremos esta sección con un resultado muy útil y muy importante, en cuya demostración el teorema de Fubini juega un papel central.

Teorema 2.7 Sea $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $[a, b] \times [c, d]$. Definimos $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

Entonces g es derivable en $[c, d]$ y además

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

Dem. Primero notemos que para cada $(x, y) \in [a, b] \times [c, d]$, por el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$\int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt = f(x, y) - f(x, c)$$

de tal forma que

$$f(x, y) = \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt + f(x, c)$$

Por tanto

$$\begin{aligned} g(y) &= \int_a^b f(x, y) dx \\ &= \int_a^b \left(\int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dt + f(x, c) \right) dx \\ &= \int_c^y \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dx \right) dt + \int_a^b f(x, c) dx \end{aligned}$$

Nótese que es en el primer sumando de la última identidad en donde usamos el Teorema de Fubini, lo cual nos está permitido puesto que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a, b] \times [c, y]$ para toda $y \in [c, d]$. Por otra parte, usando nuevamente el hecho de que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en $[a, b] \times [c, d]$, y por lo tanto uniformemente continua ahí mismo, concluimos que $h(t) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) dx$ es una función continua de la variable t , de tal forma que por el primer Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que $\int_c^y h(t) dt$ es una función derivable con respecto de y . Como $\int_a^b f(x, c) dx$ es una constante, concluimos que g es derivable con respecto a y y además

$$\begin{aligned} g'(y) &= h(y) \\ &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \end{aligned}$$

que es lo que se quería demostrar. ■

De entre sus muchas aplicaciones, este último teorema nos proporciona una herramienta muy útil para resolver integrales, como se muestra en el siguiente

Ejemplo 2.8 Calcule la integral

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}^2(x) + a^2 \cos^2(x)) dx \quad (a \neq 0)$$

Solución. Definimos la función $f : (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x, y) = \ln(\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x))$ la cual es C^∞ en su dominio (y por lo tanto en cualquier rectángulo cerrado contenido ahí). De esta forma, si definimos $g : (0, \infty) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$g(y) = \int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)) dx$$

por el teorema anterior, sabemos que g es derivable y además

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial y} (\ln(\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x))) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{2y \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx \end{aligned}$$

De esta expresión se obtiene fácilmente que

$$\begin{aligned} g'(1) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x)} dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ahora, si $y \neq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^{\pi/2} \frac{2y \cos^2(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx \\ &= \frac{2y}{y^2 - 1} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} \right) dx \\ &= \frac{2y}{y^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx \right) \end{aligned}$$

Resolviendo la última integral (lo cual se puede lograr si hacemos el cambio de variable $u = \tan(x)$ ³) obtenemos que

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{2y}{y^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2y} \right) \\ &= \frac{\pi}{y + 1} \end{aligned}$$

para toda $y > 0$. De esta última identidad, junto con el hecho de que $g(1) = 0$, se tiene que

$$g(y) = \pi \ln \left(\frac{y + 1}{2} \right)$$

de modo que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2(x) + a^2 \cos^2(x)) dx = \pi \ln \left(\frac{a + 1}{2} \right)$$

2.3 El Teorema de Cambio de Variable

Sin duda el lector conoce un teorema que lleva el mismo nombre que el de esta sección. Se trata de un teorema para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} que es muy útil para resolver integrales indefinidas (de este mismo tipo de funciones), aunque también existe su versión para integrales definidas.

De acuerdo con este conocido teorema, si nuestro problema es resolver una integral indefinida de la forma

$$\int f(x) dx$$

escribimos a la variable x en función de otra variable t , es decir, $x = g(t)$ (de ahí el nombre de “cambio de variable”) lo que nos conduce a resolver la integral⁴

$$\int f(g(t))g'(t) dt$$

El criterio para elegir a la función g tiene que ver fundamentalmente con el hecho de que el nuevo integrando $f(g(t))g'(t)$ resulte más fácil de resolver. Si este es el caso y nos es más fácil encontrar una primitiva de $f(g(t))g'(t)$, digamos una $G(t)$, entonces se puede comprobar que la función $F(x) = G(g^{-1}(x))$ resulta ser una primitiva de $f(x)$ (esto es lo que nos asegura el Teorema de Cambio de Variable y sería muy adecuado que el lector comprobara esta afirmación).

³Con este cambio de variable, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x) + y^2 \cos^2(x)} dx &= \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2 + y^2} du \\ &= \frac{1}{y} \left(\arctan \left(\frac{u}{y} \right) \Big|_0^{\infty} \right) \\ &= \frac{\pi}{2y} \end{aligned}$$

⁴Si el lector no recuerda por qué cuando hacemos el cambio de variable $x = g(t)$ el nuevo integrando está dado por $f(g(t))g'(t)$, sólo considere que, si F es una primitiva de f , entonces usando la regla de la cadena podemos comprobar que $G = F \circ g$ es una primitiva de $(f \circ g)g'$

Si analizamos con más detenimiento todo lo hecho hasta aquí, concluimos que la función g tiene que ser una función derivable, con derivada continua (para garantizar la integrabilidad de $f(g(t))g'(t)$) y además invertible. En la práctica no solemos hacer mucho caso de estas condiciones y lo que realmente nos importa es que el cambio de variable “funcione”.

Seguramente no escapa a la atención del lector el hecho de que, en el concepto de integral para funciones de varias variables que se ha venido trabajando hasta ahora, no hemos mencionado nada parecido al concepto de “integral indefinida” (o, equivalentemente, al concepto de “primitiva”). Es por esta razón que esta formulación del Teorema de Cambio de Variable para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} no es muy útil a fin de guiarnos hacia su generalización para funciones de varias variables. Afortunadamente existe una formulación para integrales definidas y esa sí que nos será útil.

En el caso de integrales definidas, el Teorema de Cambio de Variable para funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} se escribe de la siguiente manera: si g es una función con derivada continua en $[c, d]$ y f es una función continua en $g([c, d])$ (la imagen bajo g del intervalo $[c, d]$) entonces

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt \quad (2.5)$$

Usando un lenguaje menos riguroso, esta igualdad se podría leer de la siguiente manera: si el intervalo sobre el cual se integra a una función f (digamos $[a, b]$) se puede ver como la imagen de otro intervalo (digamos $[c, d]$) bajo una cierta función g , entonces la integral de f sobre el intervalo $[a, b]$ es igual a la integral de la función $(f \circ g)g'$ sobre el intervalo $[c, d]$.

Esta forma de leer la identidad 2.5 (que no es muy precisa pero sí bastante ilustrativa) nos permite dar un primer paso hacia la generalización del Teorema de Cambio de Variable para funciones de varias variables, haciéndonos la siguiente pregunta: si queremos integrar una función f sobre un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^n$, y sabemos que este conjunto A se puede ver como la imagen bajo una cierta función g de otro conjunto Jordan-medible $B \subset \mathbb{R}^n$, es decir $A = g(B)$, ¿la integral de f sobre A es igual a la integral sobre B de alguna función que involucra a f y a g ?

Con el fin de encontrar una respuesta, es conveniente esbozar los argumentos que nos permiten convencernos de que la identidad 2.5 es cierta. Una manera de hacerlo es justo usando el concepto de primitiva (esta es la manera en que suele hacerse) pero como dicho concepto no lo conocemos para las funciones de varias variables, recurriremos a otro más elemental, el de las sumas de Riemann.

Aunque en la identidad 2.5 no es necesario que g sea una función inyectiva, con el fin de que nuestros argumentos sean más sostenibles, ahora supondremos que sí lo es. Sea $\mathcal{P} = \{x_0 < \dots < x_k\}$ una partición muy “fina” del intervalo que tiene como extremos a $g(c)$ y a $g(d)$ (y que denotaremos por $[a, b]$). En este caso, sabemos que las sumas de Riemann correspondientes a esta partición se aproxima mucho a la integral de $f(x)$ sobre el intervalo $[a, b]$, es decir

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^k f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (2.6)$$

para cualquier $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, k$).

Como estamos suponiendo que $[a, b] = g([c, d])$ entonces sabemos que existe una partición $\mathcal{Q} = \{t_0, \dots, t_k\}$ del intervalo $[c, d]$ tal que $x_i = g(t_i)$ para cada $i = 1, \dots, k$. Ahora, por el valiosísimo Teorema del Valor Medio sabemos que existe η_i entre t_{i-1} y t_i tal que

$$x_i - x_{i-1} = g(t_i) - g(t_{i-1})$$

$$= g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1})$$

(nuevamente para cada $i = 1, \dots, k$) de tal forma que, tomando en 2.6 la suma de Riemann correspondiente a los números $\xi_i = g(\eta_i)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx &\approx \sum_{i=1}^k f(g(\eta_i))(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k f(g(\eta_i))g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

Si se observa bien, esta última suma es una suma de Riemann de la función $f(g(t))g'(t)$ correspondiente a la partición \mathcal{Q} del intervalo $[c, d]$ de modo que

$$\sum_{i=1}^k f(g(\eta_i))g'(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) \approx \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

y por lo tanto

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx \approx \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$$

Si bien es cierto que los “argumentos” que acabamos de dar son imprecisos, también es cierto que nos sugieren un camino para encontrar una formulación del Teorema de Cambio de Variable para funciones de varias variables.

Procediendo como en los párrafos anteriores sabemos que, si R es un rectángulo que contiene a A , entonces

$$\int_A f = \int_R f_A$$

de tal forma que si \mathcal{P} es una partición muy “fina” del rectángulo R , entonces

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_R f_A \\ &\approx \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} f(\hat{\xi}_i) \cdot m(R_i) \end{aligned} \tag{2.7}$$

en donde los R_i son subrectángulos de R inducidos por \mathcal{P} y $\hat{\xi}_i \in R_i \cap A$.

A diferencia de la suma de Riemann que aparece en 2.6, en donde la medida del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ (a saber $x_i - x_{i-1}$) se puede expresar en términos de la medida del subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ (a saber $t_i - t_{i-1}$), gracias a que $g([t_{i-1}, t_i]) = [x_{i-1}, x_i]$ y al Teorema del Valor Medio, en la suma de Riemann que aparece en 2.7 no somos tan afortunados. De hecho, ya sería demasiado pedir que, si R' es un rectángulo que contiene a B , entonces existiera una partición \mathcal{Q} de R' tal que el número de subrectángulos inducidos por \mathcal{Q} en R' fuera el mismo que los que \mathcal{P} induce en R y además cada $R_i = g(R'_i)$ (en donde los R'_i serían los subrectángulos de R' inducidos por \mathcal{Q}).

Sin embargo nos queda otro recurso. Si consideramos el rectángulo R' y su partición \mathcal{Q} del párrafo anterior, y para cada subrectángulo R'_i que intersecta a B elegimos un $\hat{\eta}_i$ que esté en ambos

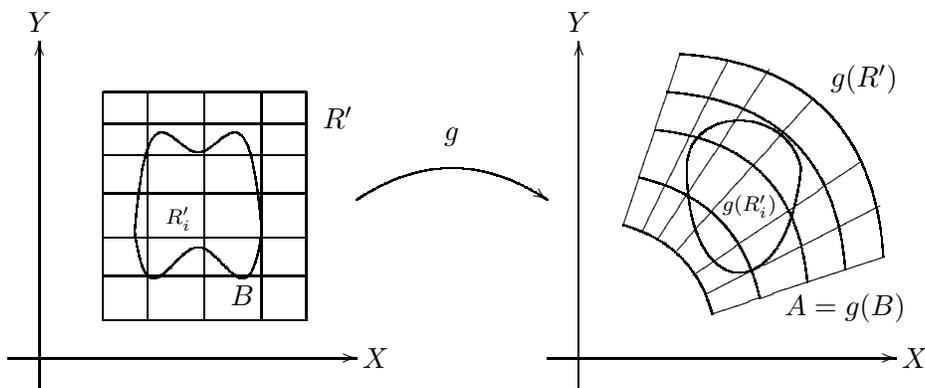


Figura 2.8: La imagen bajo la función g del conjunto Jordan-medible B , del rectángulo R' y del subrectángulo R'_i

conjuntos, es decir $\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B$, y nos fijamos en la imagen de R'_i bajo g , como se ilustra en la figura 2.8 para el caso de \mathbb{R}^2 , ¿que podemos esperar de sumas de la forma

$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i))?$$

Bueno, pues lo que nos gustaría es que estas sumas (que son una especie de sumas de Riemann un poco *sui géneris*) se aproximen a $\int_A f$ y que esta aproximación sea mejor en la medida de que \mathcal{Q} sea una partición más fina de R' . De hecho, también habría que asegurar que los conjuntos $g(R'_i)$ son Jordan-medibles y que su medida se pueda expresar (o aproximar) en términos de la medida de R'_i (y seguramente de algún otro factor que dependa de la función g).

Vale la pena escribir con detalle todos estos supuestos (o buenos deseos) que buscamos se cumplan:

1. g es tal que si R'_i es cualquier subrectángulo entonces $g(R'_i)$ es un conjunto Jordan-medible
2. existe una forma de expresar (o aproximar) la medida de $g(R'_i)$ ($m(g(R'_i))$) en términos de la medida de R'_i ($m(R'_i)$) y de la función g
3. si \mathcal{Q} es una partición muy “fina” de R' las sumas de la forma

$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i)) \quad (\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B)$$

se aproximan mucho a $\int_A f$, es decir

$$\int_A f \approx \sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i)) \quad (\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B) \quad (2.8)$$

Como se podrá notar, todas estas propiedades dependen esencialmente de la función g y parte de lo que haremos será buscar cuáles son las características de g que nos las puedan garantizar. Analizaremos lo planteado en el segundo inciso y dejaremos para después los otros dos.

En este problema, las funciones lineales vuelven a ser muy útiles. En efecto, si $R \subset \mathbb{R}^n$ es un rectángulo y g es una función afín (una función lineal seguida de una traslación) entonces $g(R)$ es

“casi” un rectángulo en \mathbb{R}^n , sólo que con algunos “ángulos” no rectos. Por ejemplo en \mathbb{R}^2 , $g(R)$ coincide con ser un paralelogramo y en \mathbb{R}^3 con un paralelepípedo “reclinado”, como se muestra en las figuras 2.9 y 2.10. De hecho, en este caso el problema de encontrar la medida de $g(R)$ en términos de la medida de R se resuelve fácilmente.

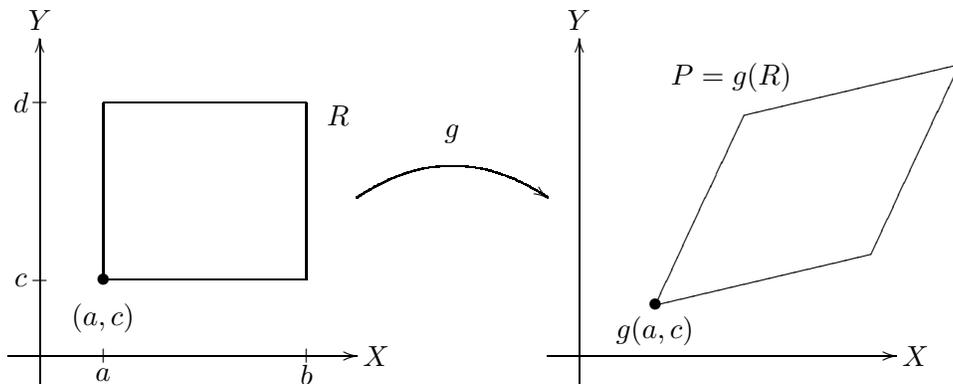


Figura 2.9: La imagen bajo una función afín g (de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2) de un rectángulo R es un paralelogramo P

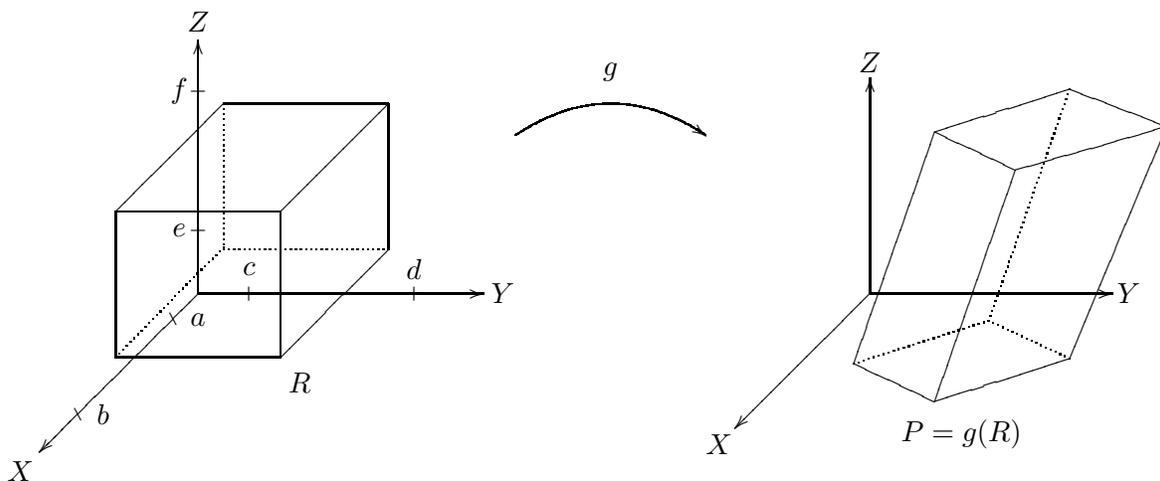


Figura 2.10: La imagen bajo una función afín g (de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3) de un rectángulo R es un paralelepípedo P

Como se recordará de los cursos de Geometría Analítica, si tomamos dos vectores (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en \mathbb{R}^2 , el área del paralelogramo P generado por estos dos vectores (y que es trasladado a cualquier punto (x_0, y_0)), está dada por:

$$\text{área}(P) = |x_1y_2 - x_2y_1| = \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \right| \tag{2.9}$$

Así, si g es una función lineal de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada es

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

y tomamos el rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$, entonces el paralelogramo $P = g(R)$ coincide con el paralelogramo generado por los vectores

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= (b-a)(\alpha, \gamma)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(x_2, y_2) &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d-c \end{pmatrix} \\ &= (d-c)(\beta, \delta)\end{aligned}$$

y que está trasladado al punto $g(a, c)$ (ver la figura 2.9) de tal forma que, usando 2.9, tenemos que

$$\begin{aligned}m(g(R)) &= \text{área}(P) \\ &= |\alpha\delta - \beta\gamma| \cdot (b-a) \cdot (d-c) \\ &= |\det(M)| \cdot \text{área}(R) \\ &= |\det(M)| \cdot m(R)\end{aligned}$$

Si ahora g es una función lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 representada por una matriz M (de 3×3), y $R \subset \mathbb{R}^3$ es un rectángulo, recurriendo otra vez a la Geometría Analítica podemos probar nuevamente que

$$m(g(R)) = |\det(M)| \cdot m(R) \quad (2.10)$$

¡Lo más interesante de todo esto es que la identidad 2.10 es válida en cualquier \mathbb{R}^n ! aunque, desafortunadamente, la Geometría Analítica ya no nos alcanza para probarla en el caso general.

Una vez que hemos analizado nuestro problema para el caso en que g sea una función lineal, es importante recordar que estamos trabajando con particiones muy “finas”, y por lo tanto con rectángulos muy pequeños. Por tal razón, si g es una función tal que en cada punto \hat{x} de su dominio existe su mejor aproximación lineal (es decir su derivada, que denotaremos por $Dg(\hat{x})$), y R es un rectángulo “muy pequeño”, parece muy razonable esperar que

$$m(g(R)) \approx m([Dg(\hat{\xi})](R)) = \left| \det(Dg(\hat{\xi})) \right| \cdot m(R) \quad (2.11)$$

en donde $\hat{\xi}$ es algún elemento de R .

Como se podrá notar, la aproximación a que nos conduce 2.11 es justo lo que estábamos buscando. Si ahora esta aproximación la aplicamos en 2.8, tendremos que

$$\begin{aligned}\int_A f &\approx \sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot m(g(R'_i)) \\ &\approx \sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot |\det(Dg(\hat{\eta}_i))| \cdot m(R'_i)\end{aligned} \quad (2.12)$$

en donde $\hat{\eta}_i \in R'_i \cap B$.

Si se observa con cuidado, la segunda suma que aparece en 2.12 ahora sí es una suma de Riemann, una de las asociadas a la función $(f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$ y correspondiente a la partición \mathcal{Q} de R' . En este sentido, si dicha partición es muy “fina” deberá ser cierto que

$$\sum_{R'_i \cap B \neq \emptyset} f(g(\hat{\eta}_i)) \cdot |\det(Dg(\hat{\eta}_i))| \cdot m(R'_i) \approx \int_B (f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$$

de tal forma que considerando la primera aproximación de 2.12 podemos intuir que

$$\int_A f \approx \int_B (f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$$

Esta última aproximación es la culminación de nuestra búsqueda. A partir de ella, y recogiendo todas las suposiciones que hicimos anteriormente (sobre todo las relacionadas con la función g), ahora estamos en condiciones de formular el Teorema de Cambio de Variable para funciones de varias variables de la siguiente manera:

Teorema 2.9 (de Cambio de Variable) Sean $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua en A , $g : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 en Ω y $B \subset \Omega$ Jordan-medible tal que $\bar{B} \subset \Omega$. Si:

1. g es inyectiva en $B \setminus C$, con $C \subset B$ un conjunto de medida de Jordan cero,
2. $\det(Dg(\hat{x})) \neq 0$ para toda $\hat{x} \in B \setminus D$, con $D \subset B$ un conjunto de medida de Jordan cero, y
3. $g(B) = A$

entonces A es Jordan-medible y además

$$\int_A f = \int_B (f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$$

Desafortunadamente la prueba de este teorema es muy elaborada y no se puede incluir en un texto como éste⁵, y esa es la razón por la que nos tomamos tanto trabajo para deducir su formulación. A cambio de la prueba, discutiremos detalladamente algunos ejemplos de funciones (o transformaciones) g que suelen usarse más comunmente en las aplicaciones de este teorema, tanto en \mathbb{R}^2 como en \mathbb{R}^3 . También es importante aclarar por qué en la formulación del teorema, además de pedir que g sea derivable, pedimos que dicha derivada sea continua. Esta hipótesis tiene dos razones de ser: una, que con ella garantizamos la integrabilidad de la función $(f \circ g) \cdot |\det(Dg)|$, y dos, que la aproximación

$$m(g(R)) \approx \left| \det(Dg(\hat{\xi})) \right| \cdot m(R)$$

para rectángulos pequeños R es una buena aproximación, no para alguna, sino para cualquier $\hat{\xi} \in R$. En cuanto a la hipótesis de que g sea “casi” inyectiva en B , esta es necesaria para evitar “duplicaciones” a la hora de obtener al conjunto A como “imagen” de B (bajo g) y, finalmente, la hipótesis de que $\det(Dg(\hat{x}))$ sea distinto de 0 para “casi” toda $\hat{x} \in B$, en realidad sólo se incluye para hacer mas “cómoda” la aplicación (¡y la prueba!) del teorema ya que el conjunto de puntos en los que $\det(Dg(\hat{x})) = 0$ (el conjunto de puntos críticos de g), “aporta muy poco” a la imagen de B bajo g (un resultado muy importante, el Teorema de Sard, asegura que la imagen de este conjunto es de medida de Lebesgue cero).

Concluimos estos comentarios mencionando cuál es la notación más común que se usa para el término $\det(Dg(\hat{\xi}))$. A este factor se le suele denotar simplemente por

$$Jg(\hat{\xi}) = \det(Dg(\hat{\xi}))$$

⁵Para los interesados en la prueba, ésta la pueden encontrar en: Rojas Sánchez, Alejandro Darío. *Prueba de algunos teoremas de Cálculo de varias variables*. Tesis para obtener el título de Matemático, Facultad de Ciencias, UNAM. 2011. O también en: Rojas Sánchez, Alejandro Darío. *Prueba de algunos teoremas de Cálculo de varias variables*. Vínculos Matemáticos, Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM. 2011.

y se le conoce como *el jacobiano* de g en $\hat{\xi}$, en correspondencia con el nombre con que se conoce a la matriz asociada a $Dg(\hat{\xi})$, a saber, *matriz jacobiana*.⁶

Antes de analizar los cambios de variable que se usan con más frecuencia, ilustraremos el uso del teorema que acabamos de formular a través del siguiente

Ejemplo 2.10 Calcule la integral de la función $f(x, y) = xy$ sobre el conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^2$, en donde A es la región contenida en el primer cuadrante y acotada por las hipérbolas $xy = 1$, $xy = 4$ y las rectas $4y = x$, $y = 4x$.

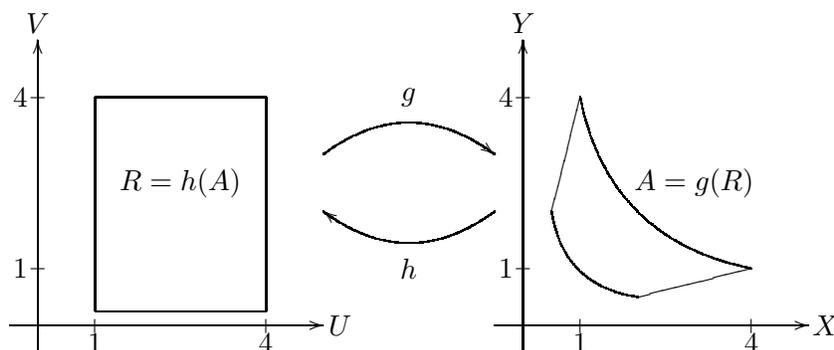


Figura 2.11: Las regiones del ejemplo 2.10

Solución. Dado que la intención de este ejemplo es ilustrar el uso del Teorema de Cambio de Variable, es necesario encontrar otro conjunto Jordan-medible B y una función g (de clase C^1) tal que $g(B) = A$. En este sentido, es importante hacer notar que las curvas que determinan al conjunto A , forman parte de las curvas de nivel de un par de funciones definidas de \mathbb{R}^2 (o de algún subconjunto de éste) en \mathbb{R} ; en efecto, obsérvese que, si hacemos $h_1(x, y) = xy$ y $h_2(x, y) = y/x$, entonces A se puede describir como el conjunto acotado por las curvas de nivel $h_1(x, y) = 1$, $h_1(x, y) = 4$, $h_2(x, y) = 1/4$ y $h_2(x, y) = 4$ (ver figura 2.11). De esta forma, si definimos la función

$$\begin{aligned} h(x, y) &= (h_1(x, y), h_2(x, y)) \\ &= (xy, y/x) \end{aligned}$$

se tiene que la imagen de A bajo esta función h es el rectángulo $R = [1, 4] \times [1/4, 4]$, es decir, $h(A) = R$. La relación que este hecho tiene con nuestro problema, es que si se pudiera encontrar la función inversa de h (a la que llamaremos g , por razones obvias), entonces g es tal que $g(R) = g(h(A)) = A$; es decir, g es una función como la que estamos buscando (y R sería el conjunto B , lo cual resulta muy conveniente). Calcular g en el ejemplo que nos ocupa no es una tarea difícil; si hacemos

$$\begin{aligned} u &= h_1(x, y) \\ &= xy \end{aligned}$$

y

$$v = h_2(x, y)$$

⁶Como el lector recordará, estos nombres son en honor del matemático alemán Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851)

$$= y/x$$

calcular la inversa de h se traduce en expresar a las variables x y y en términos de las variables u y v . En este ejemplo, se verifica fácilmente que, para $(u, v) \in R$,

$$y = \sqrt{uv}$$

$$x = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

lo que significa que la función $g = (g_1, g_2)$ que estamos buscando está dada por

$$g(u, v) = (g_1(u, v), g_2(u, v))$$

$$= \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv} \right)$$

Una vez hecho esto, ya contamos con todos los elementos necesarios para calcular la integral que se nos pide haciendo uso del Teorema de Cambio de Variable. Así, en virtud de este teorema, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{A=g(R)} f &= \int_R (f \circ g) \cdot |\det(Dg)| \\ &= \int_1^4 \left(\int_{1/4}^4 f(g(u, v)) |\det(Dg(u, v))| dv \right) du \\ &= \int_1^4 \left(\int_{1/4}^4 u \left| -\frac{1}{2v} \right| dv \right) du \\ &= \left(\int_1^4 u du \right) \left(\int_{1/4}^4 \frac{1}{2v} dv \right) \\ &= 15 \ln(2) \end{aligned}$$

Este ejemplo, además de ilustrar el uso del Teorema de Cambio de Variable, establece un método para calcular integrales sobre regiones que estén determinadas por cuatro curvas de nivel de un par de funciones (dos curvas por cada una de ellas), en el caso de \mathbb{R}^2 (o por seis superficies de nivel de tres funciones (dos superficies por cada una de ellas), en el caso de \mathbb{R}^3 , o en general, por $2n$ conjuntos de nivel de n funciones (dos conjuntos de nivel por cada una de ellas), en el caso de \mathbb{R}^n). La única dificultad que se puede encontrar con este método, es a la hora de calcular la inversa de la función que se construye a partir de aquellas que determinan a la región de integración.

2.4 Algunos cambios de variable

Las funciones o transformaciones que aparecen con más frecuencia en la aplicación del teorema de Cambio de Variable están inspiradas principalmente en los diferentes sistemas de coordenadas que pueden usarse tanto en el plano como en el espacio.

2.4.1 Cambio a coordenadas polares

En el caso del plano, además de las coordenadas cartesianas (o euclidianas) están las *coordenadas polares*. Como se recordará, una vez establecido un origen O , llamado polo, y una semirecta \mathcal{L} que parte de dicho punto, llamada eje polar, todo punto P en el plano (distinto de O) está determinado de manera única por los números r y θ : r , que corresponde a la distancia de P al polo O , y θ que corresponde a la medida del ángulo dirigido formado entre el eje polar y la semirecta que parte del origen y pasa por P (ver figura 2.12).

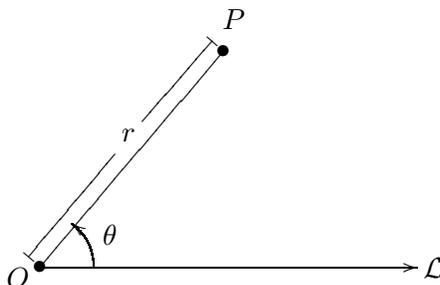


Figura 2.12: En el sistema polar determinado por el punto O (polo) y la semirecta \mathcal{L} (eje polar), el punto P tiene coordenadas (r, θ)

Con las coordenadas polares establecemos una correspondencia biunívoca entre todos los puntos del plano diferentes de O y las parejas de números (r, θ) en donde $0 < r < \infty$ y $0 \leq \theta < 2\pi$; o en forma más general, con el conjunto de parejas (r, θ) en donde $0 < r < \infty$ y $y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$ (o $y_0 < \theta \leq y_0 + 2\pi$) con $y_0 \in \mathbb{R}$, fijo⁷. Sin embargo, aun cuando usando coordenadas polares no necesitamos echar mano de todas las parejas de números reales (\mathbb{R}^2) para representar a los puntos del plano (a diferencia de las coordenadas cartesianas), cualquier pareja de números se puede “interpretar” como las coordenadas polares de un punto en el plano. Tal es el caso de la pareja $(0, 0)$ (o cualquiera de la forma $(0, y)$) que se puede interpretar como las coordenadas polares del punto O (u origen) y que de hecho así se conviene.

Para nuestros fines, lo más interesante es la relación que existe entre el sistema coordenado cartesiano y el sistema polar. Si establecemos un sistema cartesiano cuyo origen coincide con el polo, y la parte positiva del eje de las abscisas (o eje X) coincide con la semirecta \mathcal{L} (ver figura 2.13), sabemos que las coordenadas (x, y) de un punto P en este sistema cartesiano, se pueden obtener a partir de las coordenadas polares (r, θ) de este mismo punto, a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Como se podrá notar, estas ecuaciones definen una función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de las variables r y θ dada por

$$g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))$$

⁷Esto, en particular, significa que para un punto del plano hay una infinidad de parejas de números que representan sus coordenadas polares

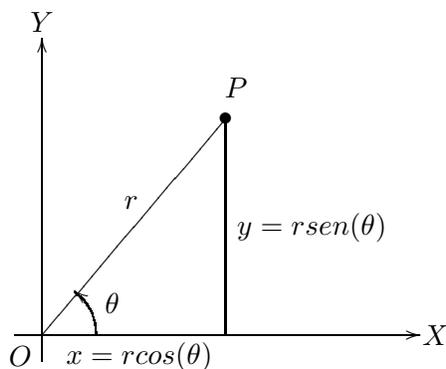


Figura 2.13: Las coordenadas (x, y) de un punto P en un sistema cartesiano cuyo origen coincide con el polo, la parte positiva del eje de las abscisas (o eje X) coincide con el eje polar, y cuyas coordenadas polares son (r, θ)

Esta función, además de ser todo lo derivable que se quiera (es C^∞), nos da un ejemplo de una función que transforma regiones rectangulares en regiones circulares. En efecto, si a las parejas (r, θ) y $(r \cos(\theta), r \text{ sen}(\theta))$ las interpretamos como coordenadas cartesianas (la primera en el sistema $r\theta$ y la segunda en el sistema XY), se puede ver que el rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ en el dominio de g se transforma en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; basta notar que los puntos de la forma (r, θ_0) con $0 \leq r \leq 1$ y θ_0 fijo, y que vistos en el sistema (cartesiano) $r\theta$ forman una línea horizontal de longitud 1 a la altura θ_0 , se transforman en la línea de longitud 1 que parte del origen y hace un ángulo θ_0 con el eje X (el radio de la circunferencia unitaria que está a un ángulo θ_0) (ver figura 2.14).

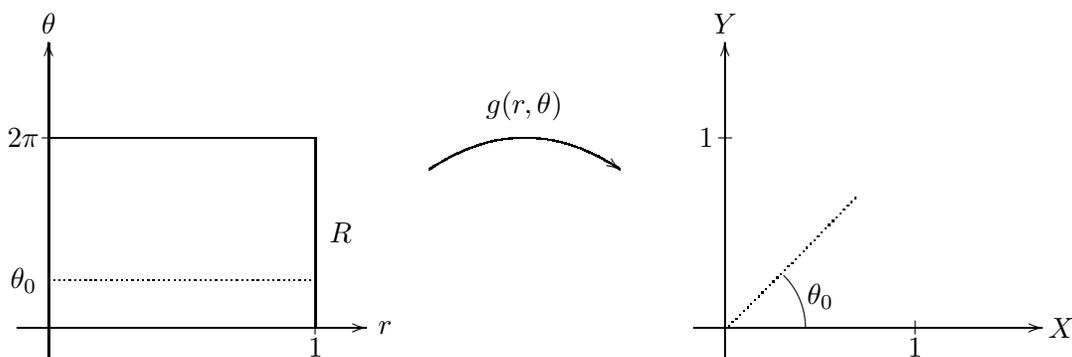


Figura 2.14: Los puntos de la forma (r, θ_0) con $0 \leq r \leq 1$ y θ_0 fijo, que vistos en el sistema (cartesiano) $r\theta$ forman una línea horizontal de longitud 1 a la altura θ_0 , bajo la función $g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \text{ sen}(\theta))$ se transforman en la línea de longitud 1 que parte del origen y hace un ángulo θ_0 con el eje X (el radio de la circunferencia unitaria que está a un ángulo θ_0)

Análogamente, los puntos de la forma (r_0, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y r_0 fijo, que en el dominio de g forman una línea vertical de longitud 2π y a distancia r_0 del “eje θ ”, se transforman en la circunferencia de radio r_0 con centro en el origen (ver figura 2.15).

Observe que, si el rectángulo R se “genera” por medio de líneas horizontales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de sus radios (¡como si se abriera un abanico!) (ver

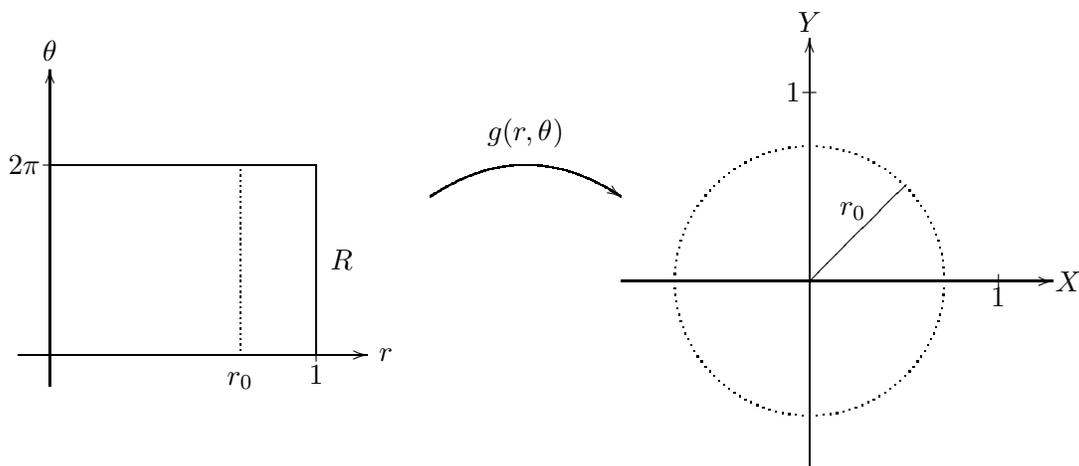


Figura 2.15: Los puntos de la forma (r_0, θ) con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y r_0 fijo, que vistos en el sistema (cartesiano) $r\theta$ forman una línea vertical de longitud 2π a distancia r_0 del eje Y , bajo la función $g(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sen(\theta))$ se transforman en la circunferencia de radio r_0 con centro en el origen

figura 2.16).

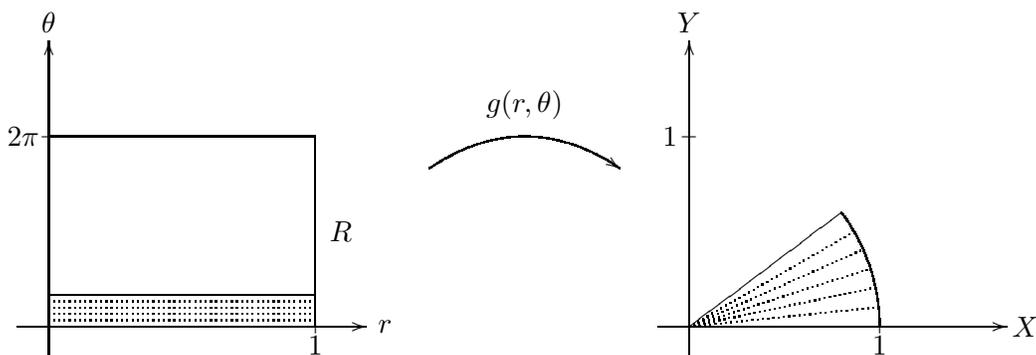


Figura 2.16: Si al rectángulo R lo “generamos” por medio de líneas horizontales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de sus radios (¡como si se abriera un abanico!)

Si por otra parte, ahora al rectángulo R lo “generamos” con líneas verticales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de circunferencias centradas en el origen y cuyo radio va creciendo (¡como cuando nos preparamos un delicioso hot cake!) (ver figura 2.17).

Antes de dar un ejemplo de cómo usar esta función para aplicar el Teorema del Cambio de Variable, conviene hacer un par de observaciones. En primer lugar nótese que, de las ecuaciones 2.13 se obtienen las identidades

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{ó} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.14)$$

y en segundo lugar, el jacobiano de esta función está dado por

$$Jg(r, \theta) = \det(Dg(r, \theta))$$

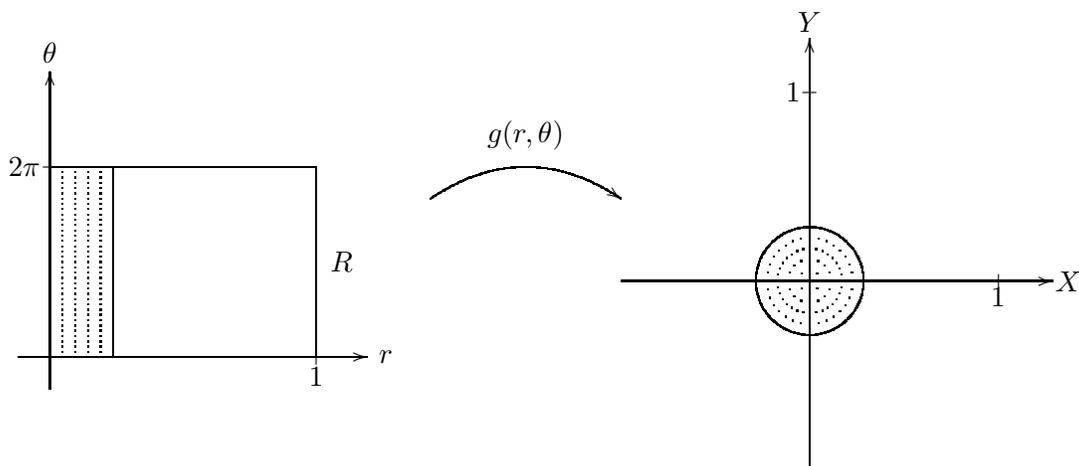


Figura 2.17: Si al rectángulo R lo “generamos” con líneas verticales, al aplicar la función g “generamos” al círculo unitario por medio de circunferencias centradas en el origen y cuyo radio va creciendo (¡como cuando nos preparamos un delicioso hot cake!)

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \\
 &= r
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2.11 Calcule la integral de la función $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ sobre el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Solución. Quizás lo primero que habría que señalar en este ejemplo es que, aun cuando la región A es de ambos tipos, no es posible calcular la integral de la función f sobre A , usando las técnicas desarrolladas en la sección anterior (el lector debería confirmar que esta afirmación es cierta). Recurrámos entonces al Teorema de Cambio de Variable.

Como se vió párrafos arriba, la región A coincide con ser la imagen, bajo la transformación de coordenadas polares $g(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta))$ (que es con este nombre como llamaremos de aquí en adelante a esta función), del rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi]$. Como dijimos antes, g es de clase C^1 y si la restringimos al subconjunto $(0, 1] \times (0, 2\pi]$ resulta ser inyectiva (es decir, g es inyectiva en R salvo por un conjunto de medida de Jordan cero). Así, tenemos que, por el Teorema de Cambio de Variable

$$\begin{aligned}
 \int_A f &= \int_R (f \circ g) \cdot |Jg| \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (f \circ g)(r, \theta) \cdot |Jg(r, \theta)| dr \right) d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot f(r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta)) dr \right) d\theta
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r \cdot e^{r^2} dr \right) d\theta \\
&= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r \cdot e^{r^2} dr \right) \\
&= \pi \cdot \int_0^1 2r \cdot e^{r^2} dr \\
&= \pi \cdot \left(e^{r^2} \Big|_0^1 \right) \\
&= \pi \cdot (e - 1)
\end{aligned}$$

En este ejemplo es importante mencionar que la decisión de recurrir a el cambio a coordenadas polares (que es lo que se suele decir cuando se usa esta transformación g) se debe no sólo al hecho de que la región original de integración es un círculo, sino que la función que se deseaba integrar también lo sugería. En efecto, cuando a la función $e^{x^2+y^2}$ se le aplica el cambio a coordenadas polares, obtenemos la función e^{r^2} , para la cual (como el lector debe saber) no es posible encontrar una primitiva en término de “funciones elementales”; sin embargo, como al aplicar el cambio de variable también debemos incluir el jacobiano de la transformación (que en este caso es r), nos queda el integrando $r \cdot e^{r^2}$, el cual, salvo por una constante (un 2) está “completo” (¡tiene una primitiva fácil de identificar!).

2.4.2 Cambio a coordenadas cilíndricas

La siguiente transformación que analizaremos está en el espacio y está inspirada en el sistema de *coordenadas cilíndricas*. Como seguramente es del conocimiento del lector, este sistema de coordenadas es en cierto modo una “combinación” de un sistema polar y un sistema cartesiano. Si fijamos un sistema cartesiano XYZ en el espacio y tomamos P un punto, que tenga coordenadas (x, y, z) , las coordenadas cilíndricas de P están dadas por las siguientes tres cantidades que determinan de manera única al punto: r y θ que serán las coordenadas polares del punto $(x, y, 0)$ (la proyección del punto P en el plano XY); es decir, r es la distancia entre el origen (del sistema XYZ) y el punto $(x, y, 0)$, y θ es el ángulo dirigido formado por la semirecta que parte del origen y pasa por $(x, y, 0)$, y la parte positiva del eje X . Finalmente, la última coordenada cilíndrica coincide con la última coordenada del sistema cartesiano XYZ , es decir “la altura” z . Así, decimos que (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas de P en el sistema cartesiano XYZ (ver figura 2.18).

De esta forma, los puntos del espacio que no pertenecen al eje Z (en el sistema XYZ) están en correspondencia biunívoca con el conjunto de ternas $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$, donde $0 < r < \infty$, $y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$ (o $y_0 < \theta \leq y_0 + 2\pi$) (con $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo) y $-\infty < z < \infty$, es decir con el conjunto $(0, \infty) \times [y_0, y_0 + 2\pi) \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^3$ (o con el conjunto $(0, \infty) \times (y_0, y_0 + 2\pi] \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^3$). Ahora, si recordamos que en el sistema polar cualquier pareja de la forma $(0, \theta)$ representa las coordenadas polares del origen, entonces para un punto arbitrario P del eje Z , cuyas coordenadas cartesianas sean $(0, 0, z)$, tendremos que las ternas de la forma $(0, \theta, z)$ representarán las coordenadas cilíndricas de P . Nuevamente, aunque para representar las coordenadas cilíndricas de los puntos del espacio no necesitamos todas las ternas de \mathbb{R}^3 , cualquiera de ellas se puede interpretar como las coordenadas de este tipo de algún punto del espacio.

Como en el caso de las coordenadas polares, para nosotros es de particular importancia la

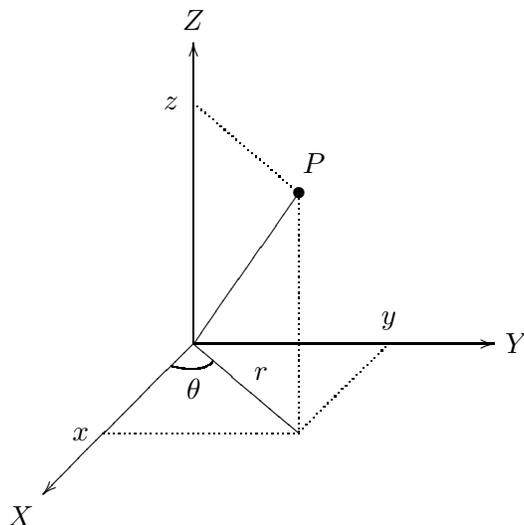


Figura 2.18: La terna (r, θ, z) representa a las coordenadas cilíndricas de P en el sistema cartesiano XYZ

relación que existe entre el sistema cartesiano XYZ y el sistema cilíndrico asociado con éste. De hecho, dada la relación tan estrecha entre estos dos sistemas, las ecuaciones que nos permiten obtener las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P del espacio en términos de sus correspondientes coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , son muy parecidas al caso polar, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta) \\ y &= r \operatorname{sen}(\theta) \\ z &= z \end{aligned}$$

(observe que la última de estas ecuaciones pareciera un poco absurda, pero no es más que una consecuencia de un abuso de notación; ¡estamos usando la misma letra para denotar la última coordenada en ambos sistemas!).

De nueva cuenta, estas ecuaciones nos permiten definir una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

$$g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z) \tag{2.15}$$

y las características, sobre todo geométricas, de esta función las describiremos a continuación.

Sin duda la función g definida en 2.15 tiene todas las propiedades de derivabilidad que queramos, así que nos concentraremos en sus propiedades geométricas. Para ello, analizaremos la forma en que transforma al rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, 1]$ (del sistema cartesiano $r\theta Z$). En particular, veremos cómo actúa la función g cuando una de sus variables permanece fija; esto, en términos de coordenadas cilíndricas, equivale a identificar los conjuntos de puntos del espacio que se obtienen al fijar cada una de estas coordenadas (que por lo general resultan ser superficies).

Obsérvese que si tomamos puntos de la forma $(r, \theta, 0)$, lo cual equivale a considerar la base del rectángulo R , la función g actúa de forma idéntica a la transformación polar, de tal manera que dichos puntos van a dar a el círculo unitario con centro en el origen y contenido en el plano XY . De forma más general, si consideramos puntos de la forma (r, θ, z_0) (con $z_0 \in [0, 1]$ fijo, y que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $r\theta$ a la altura z_0), dicho conjunto de puntos se transforma en un círculo unitario con centro en el punto $(0, 0, z_0)$ y contenido en el plano

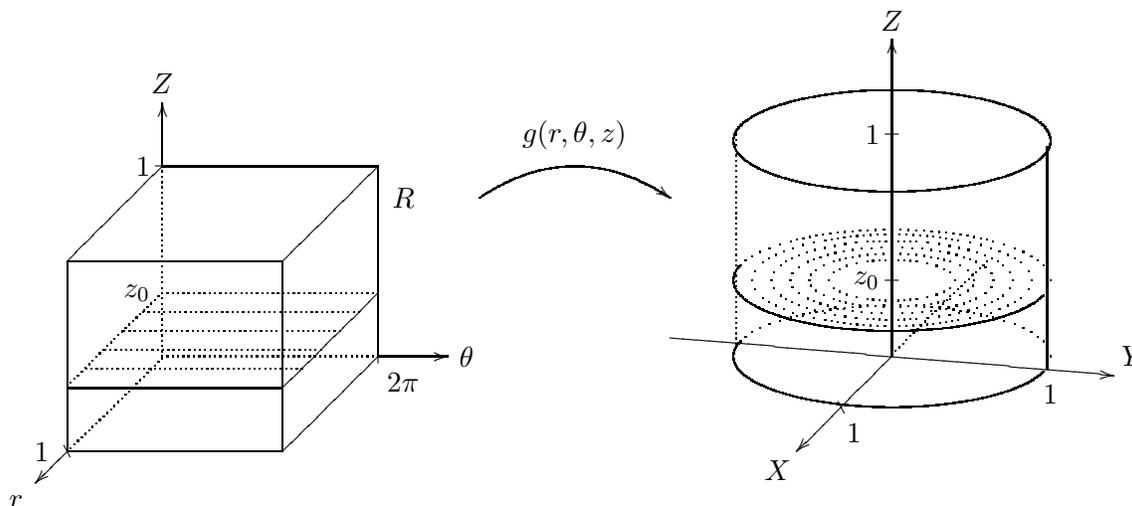


Figura 2.19: Si consideramos puntos de la forma $(r, \theta, z_0) \in R$ (con $z_0 \in [0, 1]$ fijo) y que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $r\theta$ a la altura z_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), z)$ en un círculo unitario con centro en el punto $(0, 0, z_0)$ y contenido en el plano $z = z_0$ (paralelo al plano XY)

$z = z_0$ (paralelo al plano XY) (ver figura 2.19). De esta forma, si “generamos” el rectángulo R con “rebanadas” paralelas al plano $r\theta$ entonces al aplicarles la transformación g obtenemos un cilindro de base circular de altura 1, “generado” por círculos unitarios.

Si ahora “rebanamos” al rectángulo R con planos paralelos al plano rZ , es decir, si consideramos ternas de la forma (r, θ_0, z) (con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo), al aplicarles la transformación g a dichos conjuntos obtenemos cuadrados de lado 1, perpendiculares al plano XY y “pegados” por uno de sus lados al eje Z (formando justo un ángulo θ_0 con el plano XZ) (ver figura 2.20). En este caso, si “generamos” el rectángulo R con “rebanadas” paralelas al plano rZ , al aplicarles la transformación g “generamos” el mismo cilindro sólo que ahora por medio de cuadrados que giran alrededor del eje Z .

Para terminar, consideremos “rebanadas” del rectángulo R paralelas al plano θZ , es decir, consideremos ternas de la forma (r_0, θ, z) (con $r_0 \in [0, 1]$ fijo). En este caso, la imagen bajo la función g de cada una de estas rebanadas resulta ser la superficie de un cilindro, justo de radio r_0 y perpendicular al plano XY (salvo cuando $r_0 = 0$, en cuyo caso se obtiene el segmento que va de 0 a 1 sobre el eje Z) (ver figura 2.21). Aquí, al generar al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano θZ , aplicando la función g generamos al cilindro a través de superficies cilíndricas cuyo eje está en el eje Z .

Vale la pena destacar que las identidades que aparecen en 2.14 también son válidas para las coordenadas cilíndricas, y que el jacobiano de esta transformación vale lo mismo que en el caso polar ya que

$$\begin{aligned} Jg(r, \theta, z) &= \det(Dg(r, \theta, z)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= r \end{aligned}$$

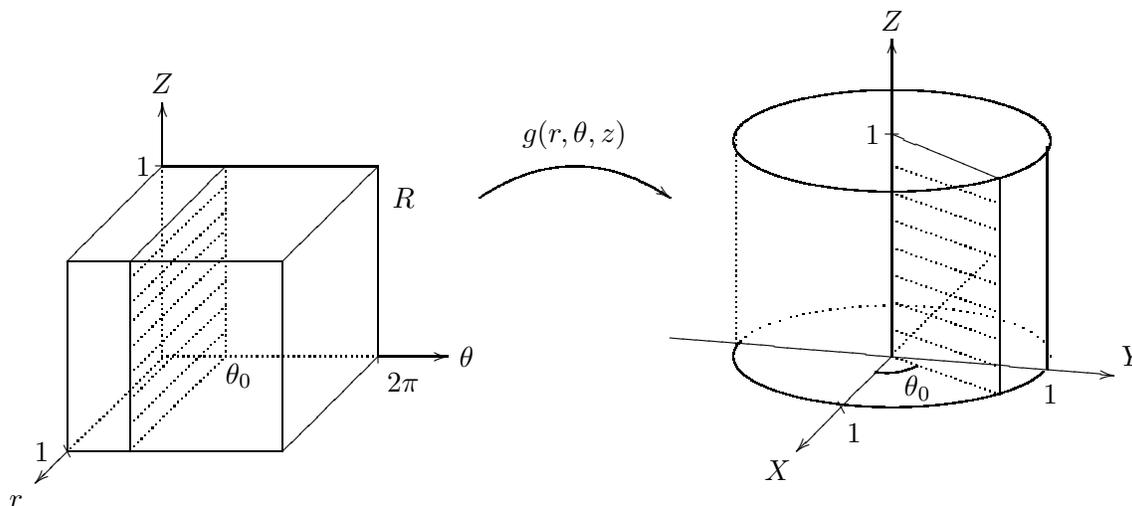


Figura 2.20: Si consideramos puntos de la forma $(r, \theta_0, z) \in R$ (con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano rZ a la altura θ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \sen(\theta), z)$ en un cuadrado de lado 1, perpendicular al plano XY y “pegado” por uno de sus lados al eje Z (formando justo un ángulo θ_0 con el plano XZ)

A continuación, damos un ejemplo de como usar esta transformación en el cálculo de una integral.

Ejemplo 2.12 Calcule la integral de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{z\sqrt{x^2 + y^2}}$ sobre el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$$

Solución. Obsérvese con atención que, aplicando la primera identidad de 2.14 a las desigualdades que intervienen en la definición del conjunto A , éstas se transforman en $0 \leq r^2 \leq 1$ (ó $0 \leq r \leq 1$) y $0 \leq z \leq r$. Cuando hacemos esto, en realidad lo que estamos haciendo es expresar al mismo conjunto A sólo que en términos de las coordenadas cilíndricas de sus puntos por lo que, si ahora hacemos $B = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r\}$, B resulta ser un conjunto (en el sistema cartesiano $r\theta z$) que al aplicarle la transformación de coordenadas cilíndricas g es tal que $g(B) = A$ (ver figura 2.22). Una vez hecho esto, que en algunos casos es la parte más importante, al aplicar el Teorema de Cambio de Variable, dado que B es una región en \mathbb{R}^3 de tipo I, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_B (f \circ g) \cdot |Jg| \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^r (f \circ g)(r, \theta, z) \cdot |Jg(r, \theta, z)| dz \right) dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(\int_0^r r \cdot f(r \cos(\theta), r \sen(\theta), z) dz \right) dr \right) d\theta \end{aligned}$$

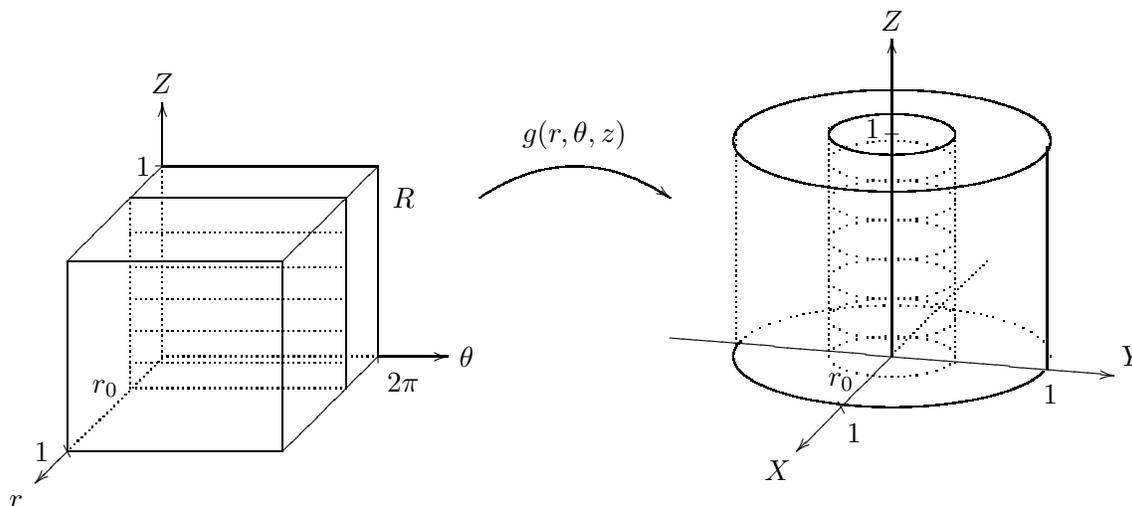


Figura 2.21: Si consideramos puntos de la forma $(r_0, \theta, z) \in R$ (con $r_0 \in [0, 1]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano θZ a la altura r_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(r, \theta, z) = (r \cos(\theta), r \operatorname{sen}(\theta), z)$ en la superficie de un cilindro, justo de radio r_0 y perpendicular al plano XY (salvo cuando $r_0 = 0$, en cuyo caso se obtiene el segmento que va de 0 a 1 sobre el eje Z)

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \left(r \cdot \int_0^r r \cdot e^{zr} dz \right) dr \right) d\theta \\
 &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^1 r \cdot \left(e^{zr} \Big|_0^r \right) dr \right) \\
 &= \pi \cdot \int_0^1 2r \cdot \left(e^{r^2} - 1 \right) dr \\
 &= \pi \cdot (e - 2)
 \end{aligned}$$

2.4.3 Cambio a coordenadas esféricas

Concluimos esta sección con la transformación asociada a las *coordenadas esféricas*. Como en el caso de las coordenadas cilíndricas, las coordenadas esféricas están asociadas a un sistema cartesiano. Es decir, dado un sistema cartesiano XYZ y un punto P del espacio, las coordenadas esféricas de P en este sistema están dadas por tres números: ρ la distancia de P al origen del sistema XYZ ; θ el ángulo dirigido formado por la parte positiva del eje X y la semirecta que parte del origen y pasa por el punto en que se proyecta el punto P sobre el plano XY (el mismo ángulo de las coordenadas cilíndricas); y φ el ángulo⁸ (no dirigido) que forman la parte positiva del eje Z y la semirecta que parte del origen y pasa por el punto P (ver figura 2.23). Así, son las ternas de la forma (ρ, θ, φ) , en

⁸En algunos textos, el segundo ángulo de las coordenadas esféricas se toma como el ángulo dirigido φ' formado por la semirecta que parte del origen y pasa por P , y el plano XY , y cuya relación con el ángulo definido en este texto es: $\varphi' = \pi/2 - \varphi$

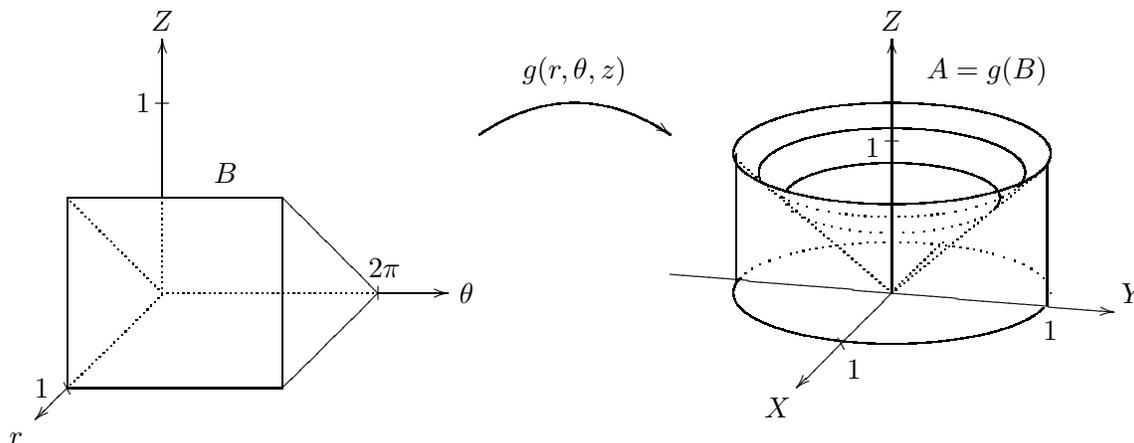


Figura 2.22: $B = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq z \leq r\}$ es un conjunto (en el sistema cartesiano $r\theta Z$) que al aplicarle la transformación de coordenadas cilíndricas g es tal que $g(B) = A$, en donde $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ es la región de integración del ejemplo 2.12

donde $0 \leq \rho < \infty, y_0 \leq \theta < y_0 + 2\pi$ (ó $y_0 < \theta \leq y_0 + 2\pi$) (con $y_0 \in \mathbb{R}$ fijo) y $0 \leq \varphi \leq \pi$. Como en el caso de los sistemas coordenados anteriores, aun cuando las coordenadas esféricas no necesitan de todas las ternas de números reales (\mathbb{R}^3), cualquier terna se puede ver como las coordenadas esféricas de un punto en el espacio.

Como antes, lo importante aquí es la relación entre las coordenadas cartesianas (x, y, z) de un punto P y sus correspondientes coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) . De la figura 2.23 se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z &= \rho \cos(\varphi) \end{aligned} \tag{2.16}$$

A partir de estas ecuaciones, como en los casos anteriores, podemos definir una función $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

$$g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi)) \tag{2.17}$$

la cual tiene, nuevamente, todas las propiedades de derivabilidad que se deseen.

En cuanto a la parte geométrica, mostraremos cuál es la imagen bajo g del rectángulo $R = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. Bajo la función g , las ternas de la forma $(\rho, \theta, \varphi_0)$ con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ fijo (ternas que se obtienen al “rebanar” al rectángulo R con un plano paralelo al plano $\rho\theta$, justo a la altura φ_0) van a dar a un cono cuyo eje es el eje Z ; esto se deduce del hecho de que, justo los puntos de un cono de este tipo, son puntos para los cuales su coordenada esférica φ es la misma (ver figura 2.24). Para $\varphi_0 = 0$ se obtiene el segmento que va de 0 a 1 sobre el eje Z y para $\varphi_0 = \pi$ el segmento que va de 0 a -1 (sobre el mismo eje). Así, si generamos al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano $\rho\theta$, al aplicarles la función g “generamos” la esfera unitaria (centrada en el origen) a través de conos.

Si ahora tomamos las ternas de la forma $(\rho, \theta_0, \varphi)$ con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo (ternas que se obtienen al “rebanar” al rectángulo R con un plano paralelo al plano $\rho\varphi$, a la altura θ_0), al aplicar la función g

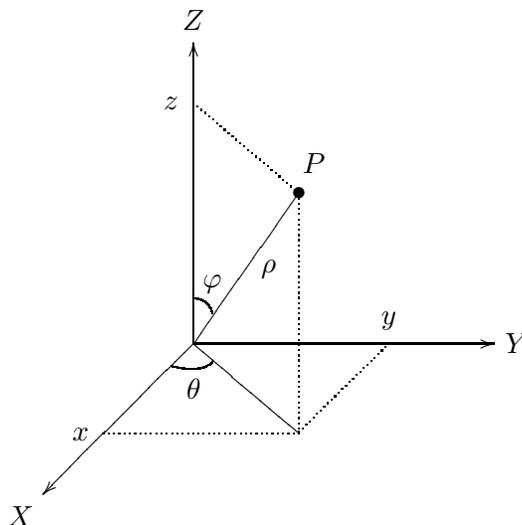


Figura 2.23: La terna (ρ, θ, φ) representa a las coordenadas esféricas de P en el sistema cartesiano XYZ

obtenemos el semicírculo unitario que está contenido en el plano que contiene al eje Z y que forma justo un ángulo (dirigido) θ_0 con la parte positiva del eje X (ver figura 2.25). En este caso, si generamos al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano $\rho\varphi$, al aplicarles la función g “generamos” la misma esfera sólo que ahora a través de semicírculos que giran alrededor del eje Z (¡como un abanico que gira!).

Finalmente, si tomamos las ternas de la forma $(\rho_0, \theta, \varphi)$ con $\rho_0 \in [0, 1]$ fijo (ternas que se obtienen al “rebanar” al rectángulo R con un plano paralelo al plano $\theta\varphi$, a la altura ρ_0), al aplicar la función g obtenemos la esfera de radio ρ_0 con centro en el origen (ver figura 2.26). Por tanto, si generamos al rectángulo R por medio de “rebanadas” paralelas al plano $\theta\varphi$, al aplicarles la función g “generamos” la misma esfera unitaria sólo que ahora a través de esferas centradas en el origen y cuyo radio “va creciendo”.

De las identidades 2.16 se deduce que:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{ó} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

y el jacobiano de la función g definida en 2.17 (que de aquí en adelante conoceremos como la transformación de coordenadas esféricas) está dado por:

$$\begin{aligned} Jg(\rho, \theta, \varphi) &= \det(Dg(\rho, \theta, \varphi)) \\ &= \det \begin{pmatrix} \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) & \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ \cos(\varphi) & 0 & -\rho \operatorname{sen}(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \cos(\varphi) \cdot (-\rho^2 \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\varphi)) - \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cdot (\rho \operatorname{sen}^2(\varphi)) \\ &= -\rho^2 \cdot \operatorname{sen}(\varphi) \end{aligned}$$

Como es de suponerse, terminamos esta sección con un ejemplo que muestra el uso de esta transformación.

Ejemplo 2.13 *Calcular el volumen de la región que está dentro de la esfera unitaria con centro en el origen, y fuera del cono determinado por la ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.*

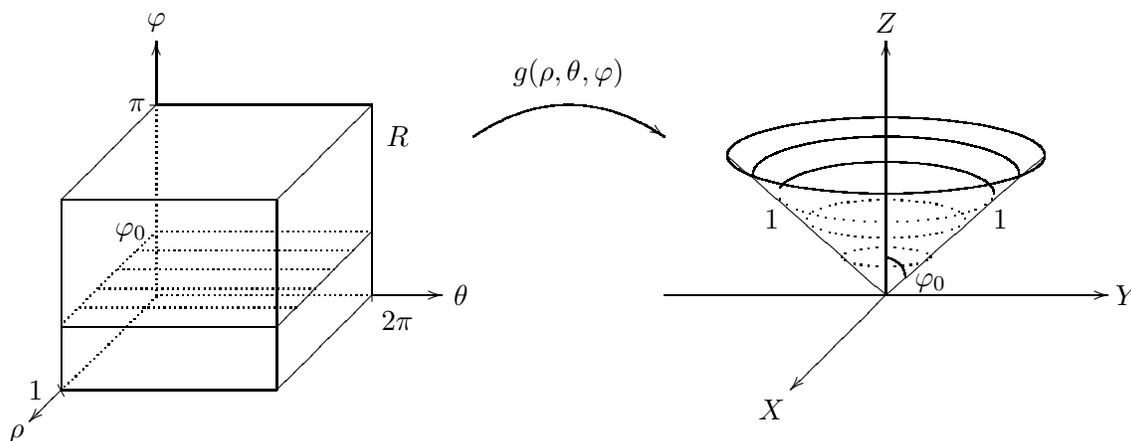


Figura 2.24: Si consideramos puntos de la forma $(\rho, \theta, \varphi_0) \in R$ (con $\varphi_0 \in (0, \pi)$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $\rho\theta$ a la altura φ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \text{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \text{sen}(\varphi) \text{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ en un cono cuyo eje es el eje Z y que tiene una “apertura” de un ángulo φ_0

En términos más precisos, se desea calcular el volumen de la región

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 \leq x^2 + y^2\}$$

Solución. Observese primero que, si tomamos

$$B = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3}{4}\pi \right\}$$

y g la transformación de coordenadas esféricas, entonces

$$g(B) = A$$

Por otra parte, sabemos que si $f \equiv 1$, entonces

$$\begin{aligned} V(A) &= m(A) \\ &= \int_A f \\ &= \int_B (f \circ g) |Jg| \\ &= \int_B |Jg| \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \rho^2 \cdot \text{sen}(\varphi) d\varphi \right) d\theta \right) d\rho \\ &= \left(\int_0^1 \rho^2 d\rho \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \text{sen}(\varphi) d\varphi \right) \end{aligned}$$

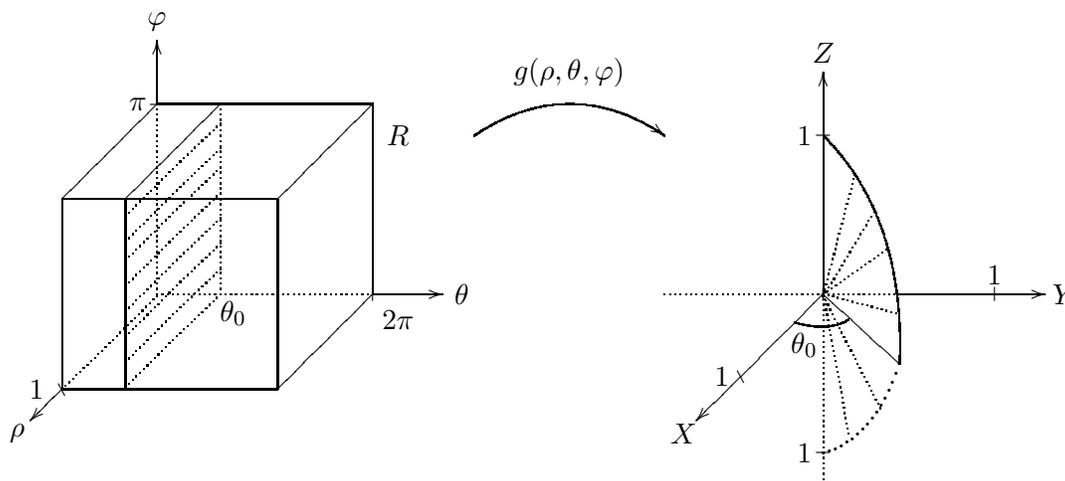


Figura 2.25: Si consideramos puntos de la forma $(\rho, \theta_0, \varphi) \in R$ (con $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $\rho\varphi$ a la altura θ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ en el semicírculo unitario que está contenido en el plano que contiene al eje Z y que forma justo un ángulo (dirigido) θ_0 con la parte positiva del eje X

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^1 \right) \cdot \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \cdot \left(-\cos(\varphi) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot \left(-\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) \right) \\
 &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

2.5 Masa y centro de masa

Iniciamos este texto planteando un problema: ¿cómo calcular la masa total de una lámina si disponemos de una función f que nos proporciona la densidad de masa en cada punto de ésta? Éste fue el problema a partir del cual iniciamos la discusión que finalmente nos condujo al concepto de integral de una función de varias variables (y de valores reales). Ahora sabemos que, si nuestra lámina tiene la forma de un rectángulo R , o de manera más general, coincide con la de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que resulta ser Jordan-medible, entonces la masa total de dicha lámina estará dada por

$$M(A) = \int_A f \quad (2.18)$$

De hecho, esto mismo lo podemos extender a objetos en el espacio (o en dimensiones más altas, si hace falta); en efecto, si tenemos un objeto en el espacio cuya forma coincide con la de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ el cual resulta ser Jordan-medible, y además contamos con una función que nos proporciona la densidad de masa del objeto en cada uno de sus puntos, entonces no dudamos en afirmar que la masa total del objeto se puede obtener por medio de la correspondiente integral.

En esta sección mostraremos otro ejemplo de cómo usar el concepto de integral que hemos desarrollado, para resolver un problema muy relacionado con el del cálculo de la masa total de un objeto.

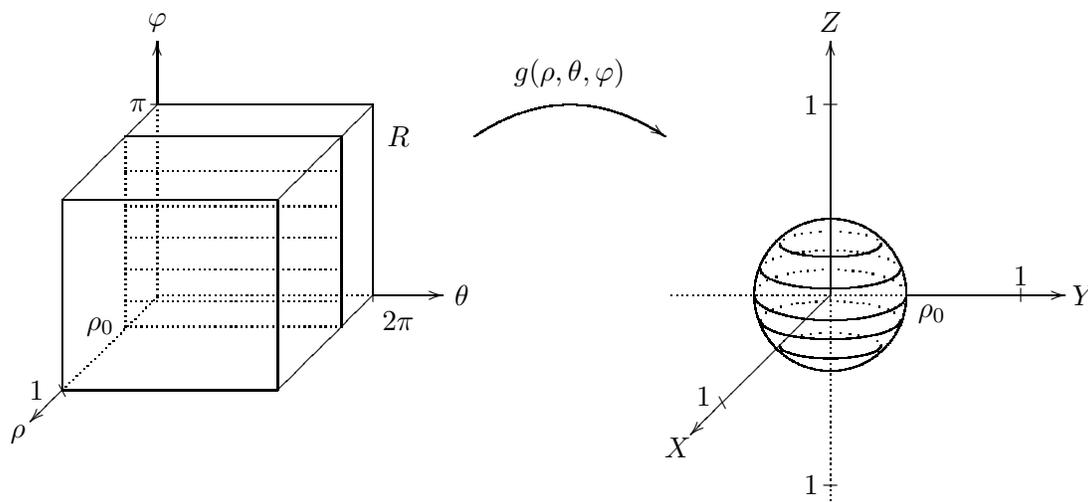


Figura 2.26: Si consideramos puntos de la forma $(\rho_0, \theta, \varphi) \in R$ (con $\rho_0 \in [0, 1]$ fijo), que equivale a tomar una “rebanada” del rectángulo R paralela al plano $\theta\varphi$ a la altura ρ_0 , dicho conjunto de puntos se transforma bajo la función $g(\rho, \theta, \varphi) = (\rho \text{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \text{sen}(\varphi) \text{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ en la esfera de radio ρ_0 con centro en el origen

Imaginemos que tenemos un alambre (cuya masa está distribuida de forma homogénea) que flota sobre un cierto líquido. Sobre éste, colocamos objetos de diferente peso (o, para ser más exactos, con diferente masa). La pregunta es: ¿desde qué punto del alambre debemos sostenerlo para que éste no se sumerja y además permanezca horizontal? (ver figura 2.27).

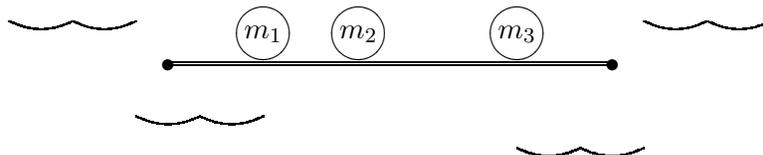


Figura 2.27: En un alambre que flota sobre algún líquido colocamos objetos de diferente masa

Si sostenemos el alambre por alguno de sus puntos, digamos P_1 , y en otro, digamos P_2 , colocamos un objeto de masa m , el efecto producido sobre el alambre dependerá de las posiciones relativas de P_1 y de P_2 . Si el punto P_2 está a la derecha de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la derecha (o girará en el sentido de las manecillas de reloj) y si el punto P_2 está a la izquierda de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la izquierda (o girará en el sentido contrario al de las manecillas de reloj). Si P_1 y P_2 coinciden, entonces el alambre permanecerá horizontal (o “equilibrado”). En los dos primeros casos, la “fuerza” con que gire el alambre dependerá de dos cosas: una, de la cantidad m de masa que hayamos colocado, y dos, de la distancia d entre los puntos P_1 y P_2 (ver figura 2.28).

Para simplificar nuestro análisis, vamos a suponer que empezamos sosteniendo el alambre por su punto medio, y que sobre el alambre colocamos una recta que representa a los números reales, haciendo coincidir el origen con dicho punto. Ya que elegimos este sistema de referencia, obsérvese que si la masa de magnitud m la colocamos en un cierto punto del alambre, y dicho punto coincide con el número real x (en cuyo caso diremos que la masa m está colocada en la posición x) entonces el número que se obtiene al multiplicar m y x , es decir $m \cdot x$, es una muy buena forma de medir el

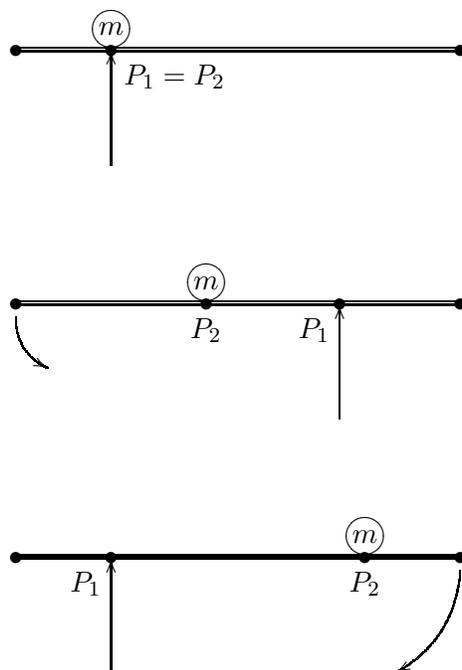


Figura 2.28: Si P_1 y P_2 coinciden, el alambre permanecerá horizontal (o “equilibrado”); si el punto P_2 está a la izquierda de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la izquierda (o girará en el sentido contrario al de las manecillas de reloj); y si el punto P_2 está a la derecha de P_1 , el alambre se sumergirá hacia la derecha (o girará en el sentido de las manecillas de reloj)

giro producido sobre el alambre, incluyendo su orientación, la cual quedará expresada en el signo de dicho número (ver figura 2.29).

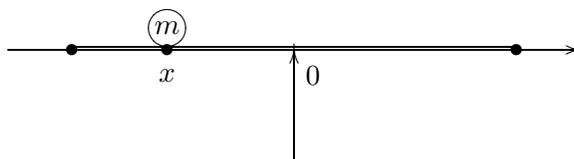


Figura 2.29: Sostenemos el alambre por su punto medio, y sobre el alambre colocamos una recta que representa a los números reales, haciendo coincidir el origen con dicho punto

Una vez establecida esta forma de medir el efecto producido sobre el alambre al colocarle una masa, veremos cómo usando esta medida podemos expresar el hecho de que el alambre está “equilibrado” o en posición horizontal. Se comprueba fácilmente que, si colocamos dos masas de la misma magnitud m , una en la posición x_1 y otra en la posición x_2 entonces la suma $m \cdot x_1 + m \cdot x_2 = m \cdot (x_1 + x_2)$ nos da un número que vuelve a reflejar el efecto producido sobre el alambre al colocar ambas masas. En efecto, si $x_1 + x_2 > 0$ entonces el alambre gira en el sentido de las manecillas del reloj, si $x_1 + x_2 < 0$ lo hace en el sentido contrario, y si $x_1 + x_2 = 0$ (lo que significa que las posiciones en que colocamos las masas de la misma magnitud son simétricas) entonces, como era de esperarse, el alambre no gira, es decir, está “equilibrado” (ver figura 2.30).

Otro caso que también es muy sencillo de verificar es el siguiente: si ahora colocamos dos masas m_1 y m_2 , no necesariamente de la misma magnitud, pero en posiciones x_1 y x_2 simétricas, es decir

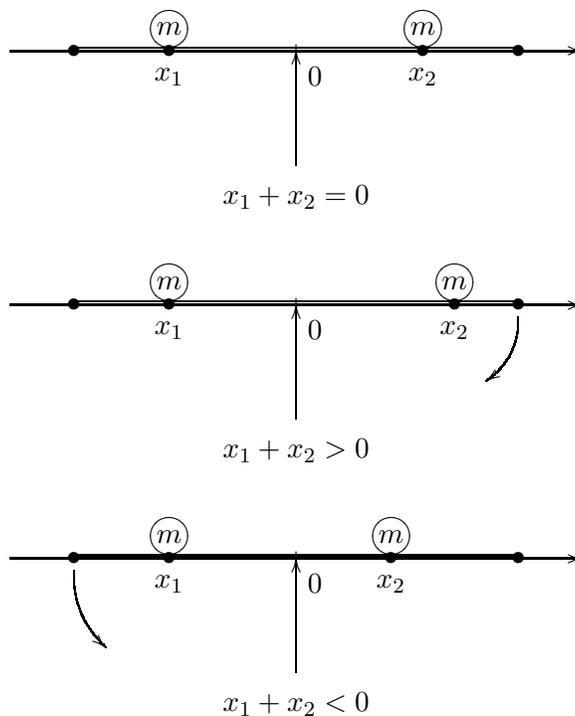


Figura 2.30: Si $x_1 + x_2 > 0$ entonces el alambre gira en el sentido de las manecillas del reloj; si $x_1 + x_2 < 0$ lo hace en el sentido contrario, y si $x_1 + x_2 = 0$ el alambre no gira

$x_2 = -x_1$ ó $x_1 + x_2 = 0$, entonces la suma

$$m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = (m_1 - m_2) \cdot x_1$$

es nuevamente un número que refleja con toda precisión el efecto producido sobre el alambre.

En general, se puede comprobar que, si colocamos sobre nuestro alambre masas m_1, \dots, m_k en las posiciones x_1, \dots, x_k , respectivamente, entonces el número

$$m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k \tag{2.19}$$

nos permite medir (y saber) cuál es el giro producido sobre dicho alambre al sostenerlo por su punto medio; en particular, si

$$m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k = 0$$

podemos asegurar que el alambre no girará, o lo que es lo mismo, permanecerá “equilibrado”.

Es importante destacar que hasta ahora la expresión 2.19 sólo nos permite determinar si las masas m_1, \dots, m_k , ubicadas en las posiciones x_1, \dots, x_k , están equilibradas (o no) con respecto al punto medio del alambre (que por cierto, es el punto del alambre que ocupa la posición 0 , de acuerdo con la forma en que ubicamos nuestra recta real). Por esta razón, es pertinente hacernos la siguiente pregunta: ¿cuál es la expresión que nos permite determinar si el mismo conjunto de masas y ubicaciones está equilibrado, si ahora suponemos que el alambre se sostiene desde un punto que está en una posición x_0 arbitraria?

Supongamos entonces que sostenemos el alambre por un punto que ocupa una posición x_0 y que colocamos una masa de magnitud m en una posición x (ver figura 2.31). No es difícil convencerse de que ahora el número $m \cdot (x - x_0)$ es el que nos da una medida del giro (incluyendo la orientación

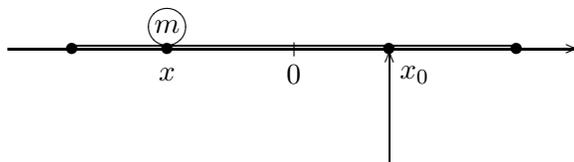


Figura 2.31: Ahora sostenemos el alambre por un punto que ocupa una posición x_0 y colocamos una masa de magnitud m en una posición x

de éste, por medio de su signo) producido sobre nuestro alambre. Y si razonamos como párrafos arriba, también llegaremos a la conclusión de que, al colocar un conjunto de masas m_1, \dots, m_k en las posiciones x_1, \dots, x_k , el número

$$m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \dots + m_k \cdot (x_k - x_0)$$

nos proporciona una manera de saber la magnitud y orientación del giro producido, y en particular que, si

$$m_1 \cdot (x_1 - x_0) + \dots + m_k \cdot (x_k - x_0) = 0 \quad (2.20)$$

entonces el alambre permanecerá en equilibrio.

Lo más relevante de la identidad 2.20 es que ésta determina al valor x_0 en términos de los valores m_1, \dots, m_k y x_1, \dots, x_k . En efecto, si en esta identidad despejamos a x_0 , obtenemos que

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \end{aligned}$$

Como se podrá observar, esta última identidad resuelve el problema que planteamos inicialmente: si colocamos sobre nuestro alambre k objetos con masas m_1, \dots, m_k en las posiciones x_1, \dots, x_k , respectivamente, entonces la posición dada por la fórmula

$$x_0 = \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \quad (2.21)$$

es aquella desde la cual se debe de sostener al alambre para que éste permanezca equilibrado.

Todo lo discutido párrafos arriba constituye la base de lo que haremos a continuación. Ahora nuestro nuevo problema es el siguiente: si tenemos un alambre cuya distribución de masa no es homogénea, y contamos con una función que nos asigna la densidad de masa en cada punto del alambre, la pregunta es: ¿cuál es el punto de equilibrio de este alambre?, es decir, ¿desde qué punto debemos sostener a nuestro alambre para que se mantenga en posición horizontal?

¡Manos a la obra! Empecemos por establecer un sistema de referencia sobre el alambre, es decir, lo ubicamos sobre una recta real. Si el extremo izquierdo del alambre se ubica en la posición a y el derecho en la posición b , entonces la función de densidad (de masa) del alambre se puede pensar como una función $\rho : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

El siguiente paso consistirá en subdividir el alambre en pedazos más pequeños, lo que en términos de posiciones equivale a tomar una partición $\mathcal{P} = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ del intervalo $[a, b]$. A continuación, elegimos $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ para cada uno de los subintervalos inducidos por \mathcal{P} en

$[a, b]$. Ahora, resulta razonable suponer que la cantidad $\rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ es una aproximación a la masa contenida en la porción del alambre representada por el subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, y que esta aproximación es mejor en la medida de que dicho subintervalo sea más pequeño, es decir, en la medida de que la partición \mathcal{P} sea más “fina”. Como seguramente se recordará, la masa total m del alambre se parecerá mucho a la suma de estos números, es decir

$$m \approx \sum_{i=1}^k \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

suma que a su vez se parece mucho a

$$\int_a^b \rho(x) dx$$

de donde concluimos que

$$m = \int_a^b \rho(x) dx$$

lo cual debe de resultarle muy familiar al lector.

En cuanto al problema de encontrar el punto de equilibrio del alambre, se estará de acuerdo en que nos podemos aproximar a éste através del punto de equilibrio del conjunto de masas (colocadas sobre un alambre homogéneo que flota sobre algún líquido) $m_i = \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ ubicadas en las posiciones ξ_i ($i = 1, \dots, k$) que, de acuerdo con la identidad 2.21, está dado por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\sum_{i=1}^k m_i \cdot \xi_i}{\sum_{i=1}^k m_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k \xi_i \cdot \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})}{\sum_{i=1}^k \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})} \end{aligned}$$

y que esta aproximación será mejor en la medida de que la partición \mathcal{P} sea más fina (ver figura 2.32).

Seguramente el lector coincidirá en que, como

$$\sum_{i=1}^k \xi_i \cdot \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \approx \int_a^b x \cdot \rho(x) dx$$

justo cuando la partición \mathcal{P} es más fina, es del todo razonable afirmar que el número

$$x_0 = \frac{\int_a^b x \cdot \rho(x) dx}{\int_a^b \rho(x) dx} \tag{2.22}$$

nos proporciona la ubicación del punto de equilibrio de nuestro alambre.

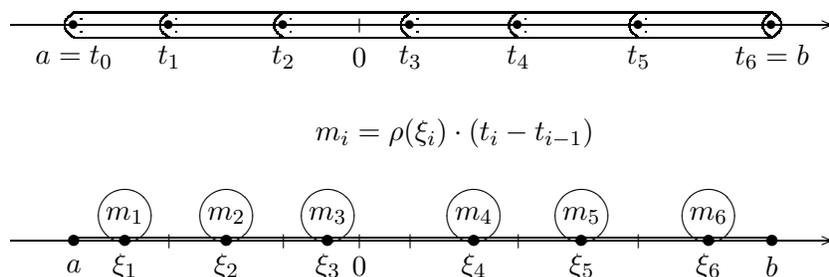


Figura 2.32: El punto de equilibrio de un alambre no homogéneo, se puede aproximar a través del punto de equilibrio del conjunto de masas (colocadas sobre un alambre homogéneo que flota sobre algún líquido) $m_i = \rho(\xi_i) \cdot (t_i - t_{i-1})$ ubicadas en las posiciones ξ_i ($i = 1, \dots, k$)

Al número que aparece a la derecha de la identidad 2.22 se le conoce como el *centro de masa* de un alambre (identificado con el intervalo $[a, b]$) cuya función de densidad de masa está dada por $\rho : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Como se habrá notado, en todo lo que hemos hecho hasta ahora no han aparecido las integrales de funciones de varias variables, pero como seguramente se sospechará, éstas aparecerán cuando abordemos el problema equivalente para objetos en el plano (láminas) o en el espacio (sólidos).

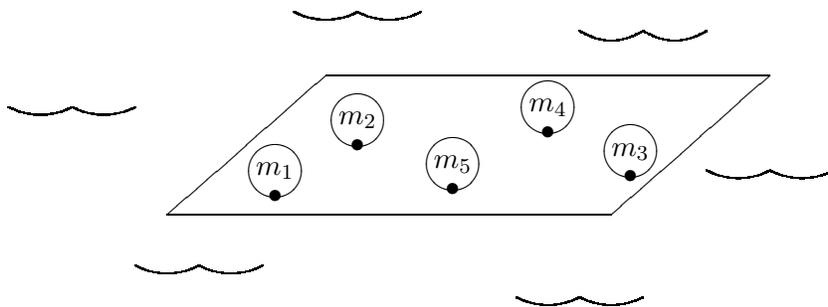


Figura 2.33: En una lámina que flota sobre algún líquido colocamos objetos de diferente masa

¡Y aquí vamos! Imaginemos ahora que tenemos una lámina de forma rectangular (lo que por ahora será irrelevante) que flota sobre un cierto líquido y cuya masa está distribuida de forma homogénea. Sobre ésta, colocamos objetos de diferente masa. La pregunta nuevamente es: ¿desde que punto de la lámina debemos sostenerla para que ésta no se sumerja y además permanezca horizontal? (ver figura 2.33).

Como en el caso del alambre, si ahora sostenemos nuestra lámina por alguno de sus puntos, digamos \hat{P}_0 , y en otro, digamos \hat{P}_1 , colocamos un objeto de masa m , el efecto producido sobre la lámina dependerá, de nueva cuenta, de las posiciones de \hat{P}_0 y de \hat{P}_1 . De hecho, es intuitivamente (y experimentalmente) claro que la lámina se sumergirá en la dirección del punto \hat{P}_1 (visto desde el punto \hat{P}_0) como si ésta estuviera sostenida a lo largo de toda la línea que pasa por \hat{P}_0 y que es perpendicular a la línea que une a \hat{P}_0 con \hat{P}_1 (ver figura 2.34). También es intuitivamente claro que la “fuerza” con la que hará este movimiento dependerá de la magnitud de la masa y de la distancia entre los puntos. Así, es fácil conversarse de que el vector

$$m \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0)$$

es una muy buena forma de medir el efecto producido sobre la lámina.

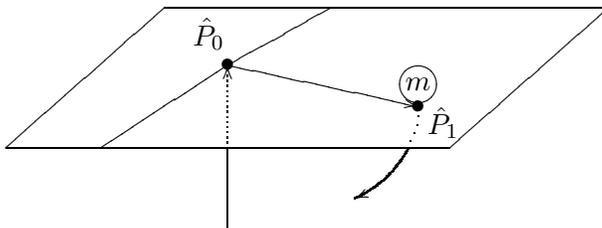


Figura 2.34: La lámina se “sumergirá” en la dirección del punto \hat{P}_1 (visto desde el punto \hat{P}_0) como si ésta estuviera sostenida a lo largo de toda la línea que pasa por \hat{P}_0 y que es perpendicular a la línea que une a \hat{P}_0 con \hat{P}_1

En general, podemos afirmar que, si colocamos k masas de magnitudes m_1, \dots, m_k en los puntos $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$, respectivamente, entonces el efecto producido sobre la lámina (que seguimos suponiendo se sostiene por el punto \hat{P}_0) queda plenamente determinado por el vector

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0)$$

(seguramente el lector se podrá imaginar algunas “configuraciones” sencillas de masas y posiciones que confirman esta afirmación), y en particular, si

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0) = \hat{0} \quad (2.23)$$

entonces podemos asegurar que la lámina permanece horizontal (o en “equilibrio”).

Como en el caso unidimensional, la identidad 2.23 determina de manera única al punto \hat{P}_0 ya que, despejando, tenemos que

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{m_1 + \dots + m_k} \cdot (m_1 \cdot \hat{P}_1 + \dots + m_k \cdot \hat{P}_k) \quad (2.24)$$

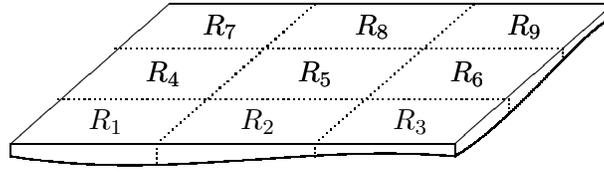
con lo cual resolvemos el problema inicialmente planteado.

Si elegimos un sistema cartesiano en el que los puntos $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$ tienen coordenadas $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$, respectivamente, entonces las coordenadas (x_0, y_0) (en el mismo sistema) del punto de “equilibrio” \hat{P}_0 (o centro de masa) del conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en dichos puntos, están dadas por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ y_0 &= \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_k \cdot y_k}{m_1 + \dots + m_k} \end{aligned}$$

Con base en lo anterior, podemos resolver ahora el problema de encontrar el punto de “equilibrio” (o centro de masa) de una lámina cuya densidad de masa está dada por un función ρ . Para empezar, supondremos nuevamente que nuestra lámina tiene la forma de un rectángulo R . Como en el caso de un alambre, si damos una partición \mathcal{P} del rectángulo R y consideramos los subrectángulos R_1, \dots, R_k de R inducidos por esta partición, una primera aproximación al punto de “equilibrio” de la lámina se obtiene calculando el punto de “equilibrio” correspondiente al conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en los puntos $\hat{P}_1 = (x_1, y_1), \dots, \hat{P}_k = (x_k, y_k)$, en donde tomamos

$$m_i = \rho(\hat{P}_i) \cdot \text{área}(R_i) = \rho(\hat{P}_i) \cdot m(R_i)$$



$$m_i = \rho(\hat{P}_i) \cdot \text{área}(R_i)$$

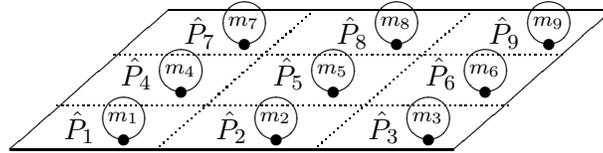


Figura 2.35: El punto de equilibrio de una lámina no homogénea, se puede aproximar a través del punto de equilibrio del conjunto de masas (colocadas sobre una lámina homogénea) $m_i = \rho(\hat{P}_i) \cdot \text{área}(R_i)$ ubicadas en las posiciones \hat{P}_i ($i = 1, \dots, k$)

y \hat{P}_i es cualquier punto del subrectángulo R_i , para $i = 1, \dots, k$ (ver figura 2.35).

Así, el punto \hat{P}_0 cuyas coordenadas están dadas por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k x_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)}{\sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_k \cdot y_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^k y_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)}{\sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i)} \end{aligned}$$

son una aproximación a las coordenadas del centro de masa de la lámina, y esta aproximación es mejor entre más “fina” sea la partición \mathcal{P} .

Por otra parte, justo si la partición \mathcal{P} es muy “fina”, sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k x_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i) &\approx \int_R x \cdot \rho(x, y) \\ \sum_{i=1}^k y_i \cdot \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i) &\approx \int_R y \cdot \rho(x, y) \end{aligned}$$

y

$$\sum_{i=1}^k \rho(x_i, y_i) \cdot m(R_i) \approx \int_R \rho(x, y)$$

de tal forma que podemos estar seguros de que las coordenadas del centro de masa (o punto de “equilibrio”) de la lámina están dadas por

$$x_0 = \frac{\int_R x \cdot \rho(x, y)}{\int_R \rho(x, y)}$$

$$y_0 = \frac{\int_R y \cdot \rho(x, y)}{\int_R \rho(x, y)}$$

Como el lector deducirá fácilmente, si ahora la forma de nuestra lámina coincide con la de un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^2$, en este caso el centro de masa de dicha lámina estará en el punto cuyas coordenadas son

$$x_0 = \frac{\int_A x \cdot \rho(x, y)}{\int_A \rho(x, y)}$$

$$y_0 = \frac{\int_A y \cdot \rho(x, y)}{\int_A \rho(x, y)}$$

Por nuestra incapacidad para “percibir” una cuarta dimensión espacial (¡en caso de que existiera!), resultaría “poco intuitivo” seguir el mismo procedimiento que en los casos anteriores para “motivar” el concepto de punto de “equilibrio” (o centro de masa) de un conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas ahora en puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$. Es por esta razón que en este caso plantearemos el problema de manera diferente.

Supongamos que tenemos un objeto ubicado en una posición \hat{P}_0 el cual vamos a unir, por medio de resortes de diferente tipo, a un conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en los puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$, respectivamente (ver figura 2.36). Supongamos también que la “tensión” del resorte que une a la masa en el punto \hat{P}_i con el objeto en la posición \hat{P}_0 , es igual al producto de la masa m_i por la distancia entre dichos puntos, de tal forma que la medida de la fuerza (o “tirón”) que se ejerce sobre nuestro objeto está dada por $m_i \cdot (\hat{P}_i - \hat{P}_0)$ ⁹. Por tanto, la fuerza neta que se ejercerá sobre el objeto que está colocado en el punto \hat{P}_0 estará dada por

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0)$$

y como en los casos anteriores, podremos decir que el punto \hat{P}_0 es el punto de “equilibrio” de nuestro conjunto de masas y resortes si

$$m_1 \cdot (\hat{P}_1 - \hat{P}_0) + \dots + m_k \cdot (\hat{P}_k - \hat{P}_0) = \hat{0}$$

⁹El lector estará de acuerdo en que este planteamiento también funcionaría para los casos en una y dos dimensiones.

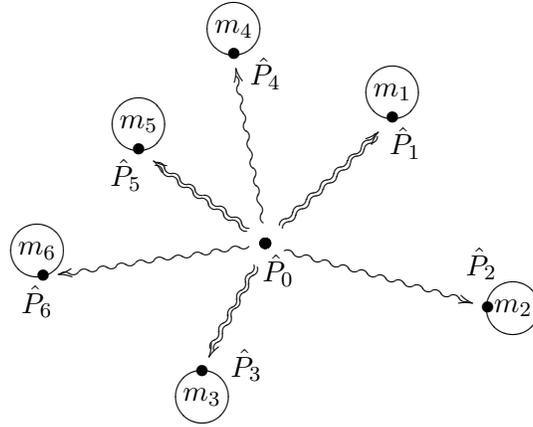


Figura 2.36: Un objeto ubicado en una posición \hat{P}_0 está unido por medio de resortes de diferente tipo, a un conjunto de masas m_1, \dots, m_6 ubicadas en los puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_6$, respectivamente

Como en los otros casos, esta última identidad determina de manera única al punto \hat{P}_0 por lo que diremos que el punto de “equilibrio” (o centro de masa) del conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en los puntos del espacio $\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_k$ está dado por

$$\hat{P}_0 = \frac{1}{m_1 + \dots + m_k} \cdot (m_1 \cdot \hat{P}_1 + \dots + m_k \cdot \hat{P}_k)$$

Si estos puntos tienen (en algún sistema de referencia) coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_k, y_k, z_k)$, respectivamente, entonces las coordenadas (x_0, y_0, z_0) (en el mismo sistema) del punto de “equilibrio” \hat{P}_0 del conjunto de masas m_1, \dots, m_k ubicadas en dichos puntos, están dadas por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + \dots + m_k \cdot x_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ y_0 &= \frac{m_1 \cdot y_1 + \dots + m_k \cdot y_k}{m_1 + \dots + m_k} \\ z_0 &= \frac{m_1 \cdot z_1 + \dots + m_k \cdot z_k}{m_1 + \dots + m_k} \end{aligned}$$

Si ahora seguimos el mismo procedimiento que en los casos anteriores (y que a estas alturas el lector debe saberse de memoria) debe ser claro que, si tenemos un sólido cuya forma coincide con la de un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^3$ y su densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z)$, entonces las coordenadas (x_0, y_0, z_0) del centro de masa \hat{P}_0 de este sólido, están dadas por

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\int_A x \cdot \rho(x, y, z)}{\int_A \rho(x, y, z)} \\ y_0 &= \frac{\int_A y \cdot \rho(x, y, z)}{\int_A \rho(x, y, z)} \\ z_0 &= \frac{\int_A z \cdot \rho(x, y, z)}{\int_A \rho(x, y, z)} \end{aligned}$$

Concluimos esta sección (y este capítulo) con un ejemplo.

Ejemplo 2.14 Considere una lámina cuya forma coincide con la del conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ que se encuentra dentro de la circunferencia unitaria con centro en el origen, y por arriba de la parábola $y = \frac{1}{2}(1 - x^2)$. Si la densidad de masa de la lámina es homogénea, es decir, $\rho(x, y) \equiv c$, calcule su centro de masa.

Solución. Primero observemos que la región en cuestión se puede escribir como

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, \frac{1}{2}(1 - x^2) \leq y \leq \sqrt{1 - x^2} \right\}$$

Como se sabe, la masa total de la lámina está dada por

$$\begin{aligned} \int_A \rho(x, y) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} c \cdot dy \right) dx \\ &= c \cdot \int_{-1}^1 \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2) \right) dx \\ &= c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \int_A x \cdot \rho(x, y) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} c \cdot x dy \right) dx \\ &= c \cdot \int_{-1}^1 x \cdot \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2) \right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

se tiene que la abcisa x_0 del centro de masa es igual a 0, como era de esperarse, puesto que la región A es simétrica con respecto al eje Y y la lámina es homogénea.

Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \int_A y \cdot \rho(x, y) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{\frac{1}{2}(1-x^2)}^{\sqrt{1-x^2}} c \cdot y dy \right) dx \\ &= c \cdot \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} \cdot \left((1-x^2) - \frac{1}{4}(1-x^2)^2 \right) \right) dx \\ &= \frac{c}{2} \cdot \int_{-1}^1 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{4} \cdot x^4 \right) dx \\ &= \frac{8 \cdot c}{15} \end{aligned}$$

se tiene que la ordenada del centro de masa es

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\int y \cdot \rho(x, y)}{\int \rho(x, y)} \\ &= \frac{8c/15}{c \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)} \\ &= \frac{8}{15 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

la cual, por cierto, es independiente de la densidad c . Por tanto, el centro de masa de nuestra lámina es

$$\left(0, \frac{8}{15 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)}\right)$$

2.6 Problemas

1. Sea $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua en R , y sean $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tales que $i_l < i_{l+1}$ para $l = 1, \dots, k-1$ y $\{j_1, \dots, j_{n-k}\} = \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$ con $j_l < j_{l+1}$ para $l = 1, \dots, n-k-1$. Si $y_{i_1} \in [a_{i_1}, b_{i_1}], \dots, y_{i_k} \in [a_{i_k}, b_{i_k}]$ pruebe que:

- (a) la función $f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}} : R_{j_1, \dots, j_{n-k}} = [a_{j_1}, b_{j_1}] \times \cdots \times [a_{j_{n-k}}, b_{j_{n-k}}] \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = f((x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})_{(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})})$$

en donde $(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}})_{(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})}$ denota al elemento de \mathbb{R}^n cuya i_l coordenada es y_{i_l} (para $l = 1, \dots, k$) y su j_l coordenada es x_{j_l} (para $l = 1, \dots, n-k$), es continua en $R_{j_1, \dots, j_{n-k}}$.

- (b) la función $\phi : R_{i_1, \dots, i_k} = [a_{i_1}, b_{i_1}] \times \cdots \times [a_{i_k}, b_{i_k}] \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}$$

es continua en R_{i_1, \dots, i_k} .

2. (Teorema de Fubini generalizado) Sean, $f : R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre R , y $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ tales que $i_l < i_{l+1}$ para $l = 1, \dots, k-1$. Usando la misma notación del ejercicio anterior, definimos las funciones $\phi, \Phi : R_{i_1, \dots, i_k} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}$$

y

$$\Phi(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}}$$

para cada $(y_{i_1}, \dots, y_{i_k}) \in R_{i_1, \dots, i_k}$. Pruebe que ϕ y Φ son integrables sobre R_{i_1, \dots, i_k} y que

$$\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \phi = \int_R f = \int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \Phi$$

3. Considere las hipótesis, los conjuntos y las funciones definidas en el problema 1. Agregue la función $\psi : R_{j_1, \dots, j_{n-k}} \subset \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\psi(x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}) = \int_{R_{i_1, \dots, i_k}} f_{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}}$$

Pruebe que

$$\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \phi = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} \psi$$

o lo que es lo mismo, que

$$\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} \left(\int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} f_{y_{i_1}, \dots, y_{i_k}} \right) = \int_{R_{j_1, \dots, j_{n-k}}} \left(\int_{R_{i_1, \dots, i_k}} f_{x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-k}}} \right)$$

4. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con A abierto. Pruebe, usando el teorema de Fubini que, si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ son continuas en A , entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u, v) \text{ para toda } (u, v) \in A$$

5. Sean $f_i : [a_i, b_i] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n$) funciones continuas. Si definimos $f : R = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot \dots \cdot f_n(x_n)$, pruebe que f es integrable sobre R y además

$$\int_R f = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1) dx_1 \right) \cdot \dots \cdot \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n) dx_n \right)$$

6. Sea $f : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. Definimos $F : R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x, y) = \int_{[a, x] \times [c, y]} f \quad \text{para toda } (x, y) \in [a, b] \times [c, d]$$

Pruebe que F es de clase C^2 en $\text{int}(R)$. Calcule todas las derivadas parciales hasta de orden dos de F .

7. Sea $f : R = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Pruebe que la integral iterada $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ existe pero que sin embargo f no es integrable sobre R .

8. Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ y $R = [a, b] \times [a, b]$. Pruebe que para toda $u \in [a, b]$:

$$\int_a^b \left(\int_a^u f(u)f(v)dv \right) du = \int_a^b \left(\int_u^b f(u)f(v)dv \right) du = \frac{1}{2} \left(\int_a^b f(t)dt \right)^2$$

9. Sea $f : R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $f_{x,y} : [a_3, b_3] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f_{x,y}(z) = f(x, y, z)$ es integrable para toda $(x, y) \in R' = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ y $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en R . Si definimos $g : R' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz$, pruebe que $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ existe para toda $(x, y) \in R'$ y además

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dz$$

10. Sea f como en el problema anterior y suponga que $[a_1, b_1] = [a_2, b_2]$. Si definimos $F : [a_1, b_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x) = \int_{a_1}^x \left(\int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z)dz \right) dy$$

- (a) ¿bajo qué condiciones F es derivable?

- (b) si F es derivable, pruebe que $F'(x) = \int_{a_3}^{b_3} f(x, x, z)dz + \int_{a_1}^x \left(\int_{a_3}^{b_3} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dz \right) dy$

11. Determine las regiones de integración que conducen a las siguientes integrales múltiples, y evalúelas

$$(i) \int_0^2 \left(\int_0^z \left(\int_0^{\sqrt{z^2-y^2}} x dx \right) dy \right) dz \quad (ii) \int_{-1}^1 \left(\int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy \right) dx$$

$$(iii) \int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_{x^2+y^2}^{x+y} dz \right) dy \right) dx \quad (iv) \int_0^3 \left(\int_0^{6-2z} \left(\int_0^{4-(2y/3)-4z/3} yz dx \right) dy \right) dz$$

$$(v) \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx \right) dy \quad (vi) \int_0^1 \left(\int_{x^3}^x (x^n + y^m) dy \right) dx$$

12. Pruebe que, si $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ es una biyección de clase C^1 y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot |g'(t)| dt$$

13. Sea $f : [0, a] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

- (a) identifique la región que conduce a la siguiente integral

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(z) dz \right) dy \right) dx$$

- (b) use el teorema de Fubini para probar la identidad

$$\int_0^a \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(z) dz \right) dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^a f(z)(a-z)^2 dz$$

14. Calcule la integral de la función f sobre la región A , donde:

- (a) A es la región acotada por la parte positiva de los ejes X y Y y la recta $3x + 4y = 10$ y $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (b) A es la región comprendida entre el círculo de radio 1 y el círculo radio 2, ambos con centro en el origen, y $f(x, y) = 1 + xy$
- (c) A es la región acotada por el eje Y y la parábola $x = -4y^2 + 3$, y $f(x, y) = x^3y$
- (d) A es la región encerrada por la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos $z = 5$ y $z = 10$, y $f(x, y, z) = 1$
- (e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9, y \leq x + 3, x + y \leq 0\}$ y $f(x, y) = xy$
- (f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \leq y \leq 1\}$ y $f(x, y) = e^{y^2}$
- (g) A es la región acotada por los planos $z = 0$, $z = x$ y la superficie $y^2 = 4 - 2x$, y $f(x, y, z) = 1$
- (h) A es la región encerrada por las superficies $y^2 + z^2 = 4a$ y $|x| = 4a$, y $f(x, y, z) = x^2$
- (i) A es la intersección de los cilindros sólidos $x^2 + y^2 \leq 1$ y $x^2 + z^2 \leq 1$, y $f(x, y, z) = 1$
15. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, -\phi(x) \leq y \leq \phi(x)\}$ donde $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y no negativa. Pruebe que:

- (a) si $(x, y) \in A$, entonces $(x, -y) \in A$
- (b) si $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f(x, -y) = -f(x, y)$, entonces $\int_A f = 0$

16. En cada inciso, encuentra la imagen bajo la transformación g de la región A e integre la función f sobre $g(A)$, donde:

- (a) $g(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ y } u^2 + v^2 \leq 1\}$, y $f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$
- (b) $g(u, v) = (u + v, u^2 - v)$, $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u, v \geq 0 \text{ y } u + v \leq 2\}$, y $f(x, y) = \frac{1}{1 + \sqrt{4x + 4y + 1}}$
- (c) $g(u, v) = (u, v(1 + u^2))$, $A = [0, 3] \times [0, 2]$ y $f(x, y) = x$
- (d) $g(u, v) = (u, v(1 + 2u))$, (¿cuál es la imagen de las líneas horizontales bajo esta transformación?) $A = [0, 3] \times [1, 3]$ y $f(x, y) = 1$

17. Calcule el área de las siguientes regiones:

- (a) la región acotada por las curvas cuyas ecuaciones polares son $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ y $r = \theta^2$
- (b) la región acotada por la curva $r^2 = 2a^2 |\cos(2\theta)|$ (dibújela)
- (c) la región que está dentro de la curva $r = 1 + \cos(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1$
- (d) la región que está dentro de la curva $r = 3 \sin(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1 + \sin(\theta)$
18. Calcule el volumen de las siguientes regiones:
- (a) la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$, debajo de la esfera de radio 2 con centro en el origen y arriba del plano XY
- (b) la región que está dentro del elipsoide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ y fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 1$
19. Sea $M > 0$.
- (a) muestre que
- $$\pi(1 - e^{-M^2}) \leq \int_{[-M, M] \times [-M, M]} e^{-(x^2+y^2)} \leq \pi(1 - e^{-2M^2})$$
- (b) pruebe que
- $$\pi(1 - e^{-M^2}) \leq \left(\int_{-M}^M e^{-t^2} dt \right)^2 \leq \pi(1 - e^{-2M^2})$$
- (c) ¿cuánto vale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt$?
20. Calcule la integral de la función $f(x, y, z) = xyz$ sobre el conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^3$, en donde A es la región acotada por los planos $4x - y = 0, x - 4y = 0, x + y = 1, x + y = 4, x + y - z = 0$ y $z = 0$ (sugerencia: proceda como en el ejemplo 2.10).
21. Una bola en \mathbb{R}^4 de radio $R \geq 0$ con centro en el origen se define como $\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq R^2\}$. Calcule el “volumen” de esta bola.
22. Si g es la transformación de coordenadas esféricas, verifique que los puntos de la forma $g(\rho, \theta, \varphi_0)$ (φ_0 fijo) satisfacen la ecuación de un cono.
23. Usando el cambio de coordenadas “adecuado”, integra la función f sobre la región A , donde:
- (a) A es la región que está fuera del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, y $f(x, y, z) = kz^2$
- (b) A es la región que está dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, y $f(x, y, z) = kz$
- (c) A es la región que está dentro del paraboloide $x^2 + y^2 = z$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$, y $f(x, y, z) = 2$
- (d) A es la región que está fuera del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y dentro del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$, y $f(x, y, z) = x$
- (e) A es la región que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y fuera del hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, y $f(x, y, z) = y$

- (f) A es la región que está por debajo del paraboloido $x^2 + y^2 = z$, arriba del plano $z = 0$ y dentro del cilindro recto cuya base tiene la forma de la curva $r = 1 + \cos(\theta)$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (esboce la región)
- (g) A es la región que está dentro del cono $x^2 + y^2 = z^2$ y por debajo del plano $x - 2z + 2 = 0$, y $f(x, y, z) = 2$
- (h) A es la región que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y dentro del cilindro recto cuya base tiene la forma de la curva $r = \cos(2\theta)$, y $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ (esboce la región)
24. Sea $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Deduzca, usando coordenadas cilíndricas, cuál es el volumen del sólido de revolución que se obtiene cuando se gira la gráfica de h con respecto al eje X .
25. De una esfera de radio ρ se corta una cuña mediante dos planos que se intersecan en un diámetro de la esfera. Si el ángulo entre los planos es $\frac{\pi}{3}$, ¿cuál es el volumen de la cuña?
26. Defina, en general, el concepto de masa y centro de masa para un “objeto en n dimensiones” cuya forma coincide con la de un conjunto Jordan-medible $A \subset \mathbb{R}^n$ y cuya “densidad” está dada por la función $\rho : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
27. Considere dos objetos cuyas formas coinciden con los conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-medibles, respectivamente, tales que $J(A \cap B) = 0$, y con función de densidad $\rho : A \cup B \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Si \hat{P}_A, \hat{P}_B , y $\hat{P}_{A \cup B}$ son puntos de \mathbb{R}^n que representan los centros de masa de A, B y $A \cup B$, respectivamente. Pruebe que

$$\hat{P}_{A \cup B} = \frac{M(A)}{M(A) + M(B)} \cdot \hat{P}_A + \frac{M(B)}{M(A) + M(B)} \cdot \hat{P}_B$$

Interprete “geométricamente” (el lector estará de acuerdo en que este problema “justifica” de alguna manera la expresión: “un objeto (o masa) ubicado(a) en un punto”, que sin duda “idealiza” una situación que es muy difícil que se cumpla en “la realidad”).

28. Considere una lámina de densidad constante 1 cuya forma coincide con la del conjunto $A = [-2, 2] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$.
- (a) muestre que cualquier recta que pasa por su centro de masa la divide en dos partes con la misma masa (o área)
- (b) si ahora la lámina tiene la forma del conjunto $A = [-2, 0] \times [-2, 2] \cup [0, 2] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$, ¿se sigue cumpliendo la misma propiedad del inciso anterior?
29. Sea A la región que está dentro de la circunferencia de radio 1 con centro en el $(0, 1)$. Si A es la forma de una placa metálica cuya densidad de masa ρ está dada por la función $\rho(x, y) = x^2 + y^2$, calcule:
- (a) la masa total de la placa
- (b) el centro de masa de la placa
30. Sea A la región que está dentro de la circunferencia de radio 1 con centro en el $(0, 1)$. Si A es la forma de una placa metálica cuya densidad de masa ρ está dada por la función

$$\rho(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ y^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

calcule:

- (a) la masa total de la placa
(b) el centro de masa de la placa
31. Considere la región del problema 23 inciso (a). Si A es el complemento (en la esfera) de dicha región y es tal que su densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, calcule:
- (a) la masa total de A
(b) el centro de masa de A
32. Una placa metálica tiene la forma de la región que está dentro de la curva $r = 3 \operatorname{sen}(\theta)$ y fuera de la curva $r = 1 + \operatorname{sen}(\theta)$, y tiene una función de densidad de masa en el punto P igual al cuadrado de la distancia que hay de P al eje polar. Calcule:
- (a) la masa total de la placa
(b) el centro de masa de la placa
33. Encuentre la masa total y el centro de masa del sólido que está en el interior, tanto del cilindro $x^2 + y^2 - 2y = 0$ como de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, suponiendo que la densidad de masa en el punto P es directamente proporcional a la distancia de P al plano XY .