Capítulo 2

Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Al inicio del capítulo anterior dimos una lista de ejemplos que planteaban diversas situaciones. Nuestro objetivo principal fue mostrar, para cada una de estas situaciones, que la función que permitía describirla era una función cuyas variables independiente o dependiente (o ambas) pertenecían a algún espacio vectorial, y por esta razón dichas variables siempre eran suceptibles de representarse (describirse o medirse) por una cierta cantidad de números reales (dos, tres, cuatro ¡o más!), es decir, por una n-ada de números reales.

De esta forma, cada función que surge de estos ejemplos se puede considerar, en última instancia, como una función cuya variable independiente pertenece a algún subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y la variable dependiente a algún subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Por lo anterior, las m-adas que representen a la variable dependiente estarán expresadas en términos de las n-adas que representen a la variable independiente.

En el capítulo anterior nos concentramos en estudiar al conjunto de las n-adas, es decir $\mathbb{R}^n$. Por las razones anteriormente expuestas, en este capítulo realizaremos un análisis más detallado de las funciones definidas sobre subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ cuyos valores estén en $\mathbb{R}^m$, sin importar (por ahora) a qué espacios vectoriales pertenezcan las variables (independientes y dependientes) representadas por estas n-adas (y m-adas) de números reales.

2.1 Álgebra y geometría de las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Iniciamos esta sección estableciendo la nomenclatura y la notación con la cual trabajeremos a lo largo de todo este texto. Casi siempre usaremos la letra f para denotar a una función. Si está definida sobre un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ y toma valores en $\mathbb{R}^m$, todo ello lo escribiremos de la siguiente forma:

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m.$$

Que los valores de f estén en $\mathbb{R}^m$, significa que para cada $\hat{x} \in A$ se debe tener que $f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^m$, razón por la que el valor $f(\hat{x})$ debe de tener m coordenadas, a las cuales denotaremos por $f_i(\hat{x}) \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, m$. Es decir, $f(\hat{x}) = (f_1(\hat{x}), \dots, f_m(\hat{x}))$. De esta forma, toda función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ determina (o está determinada por) m funciones $f_i : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a las cuales conoceremos con el nombre de *funciones coordenadas*. Con frecuencia escribiremos que $f = (f_1, \dots, f_m)$.

Las funciones coordenadas siempre son funciones de valores reales y veremos que tienen un papel muy importante en los conceptos y resultados que desarrollaremos a lo largo de este texto.

La siguiente lista ejemplifica el tipo de funciones con las cuales trabajaremos.

Ejemplo 2.1 *Considere las siguientes funciones:*

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definida como* $f(\hat{x}) = \|\hat{x}\|$

2. $f : [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *definida como* $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$

3. $f : A = [0, 2\pi] \times [0, \pi] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *definida como* $f(x, y) = (\cos(x)\operatorname{sen}(y), \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \cos(y))$

4. $f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *definida como*

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

5. $f : A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \ y \ y = 0\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida como*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x \\ x^2 & si\ x \leq 0\ y\ 0 < y \\ -x^2 & si\ x \leq 0\ y\ y < 0 \end{cases}$$

Otro aspecto que mencionaremos rápidamente, es el relacionado con las operaciones algebraicas que se pueden realizar con este tipo de funciones y que serán con las que trabajaremos en este texto. Todas estas operaciones las formalizamos en la siguiente

Definición 2.2 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{c} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $\hat{c} \in \mathbb{R}^m$ y $h : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Definimos:*

1. *La suma de f y g, que denotamos por $f+g$, como $(f+g)(\hat{x}) := f(\hat{x}) + g(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in A$.*
2. *El producto del escalar c por la función f, que denotamos por cf, como $(cf)(\hat{x}) := cf(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in A$.*
3. *En general, el producto de la función escalar $\tilde{c}$ por la función f, que denotamos por $\tilde{c}f$, como $(\tilde{c}f)(\hat{x}) := \tilde{c}(\hat{x})f(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in A$.*
4. *El producto punto de $\hat{c}$ por f, que denotamos por $\hat{c} \cdot f$, como $(\hat{c} \cdot f)(\hat{x}) := \hat{c} \cdot f(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in A$.*
5. *En general, el producto punto de f por g, que denotamos por $f \cdot g$, como $(f \cdot g)(\hat{x}) := f(\hat{x}) \cdot g(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in A$.*
6. *Si $m = 3$, el producto cruz de f por g, que denotamos por $f \times g$, como $(f \times g)(\hat{x}) := f(\hat{x}) \times g(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in A$.*
7. *Si $m = 1$, el cociente de f entre g, que denotamos por f/g, como $(f/g)(\hat{x}) := f(\hat{x})/g(\hat{x})$ para cada $\hat{x} \in B = \{\hat{x} \in A \mid g(\hat{x}) \neq 0\}$.*
8. *La composición de h con f, que denotamos por $h \circ f$, como $(h \circ f)(\hat{x}) := h(f(\hat{x}))$ para cada $\hat{x} \in B = \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) \in D\}$.*

Obtener algún tipo de representación geométrica de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, depende del tamaño de n y m. En algunos casos, sobre todo cuando n y m no son muy grandes, existe la posibilidad de "hacer" un poco de geometría con este tipo de funciones. Para lograr lo anterior, asociados a una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definiremos algunos conjuntos a los cuales haremos alusión a lo largo de todo este texto. El primero de ellos, sin importar qué tan grandes sean n y m, será lo que llamaremos *la gráfica de f*.

Definición 2.3 *Dada $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definimos la gráfica de f, que denotaremos por G_f, como el siguiente conjunto:*

$$G_f := \left\{ (x_1, \ldots, x_n, f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m} \mid (x_1, \ldots, x_n) \in A \right\}.$$

y que con frecuencia escribiremos simplemente (para evitar expresiones muy largas, pero no sin cierto abuso de notación) como

$$G_f := \left\{ (\hat{x}, f(\hat{x})) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m} \mid \hat{x} \in A \right\}$$

Seguramente el lector estará de acuerdo en que sólo podremos "dibujar" (¡y ver!) la gráfica de una función si $2 \leq n+m \leq 3$. Es decir, en muy pocos casos. Peor aún, en el caso $n = 1$ y $m = 2$ este conjunto no resulta de mucha utilidad, y como el caso $n = 1$ y $m = 1$ ya se estudió con mucho cuidado en los cursos previos de cálculo de una variable, sólo en el caso $n = 2$ y $m = 1$ podremos dibujar la gráfica, lo que no le quita interés a su estudio.

De acuerdo con lo anterior, el tipo de función para el cual vale la pena destacar algunas estrategias que nos permitan darnos una idea geométrica de cómo es su gráfica (independientemente de que hoy en día se cuenta con herramientas muy sofisticadas para dibujarlas), será cuando tengamos una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. En este caso, la gráfica de f se puede escribir como

$$G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y) \text{ y } (x, y) \in A\right\}$$

lo que en principio establece que los elementos de la gráfica deben satisfacer la ecuación

$$z = f(x, y),$$

con la restricción de que $(x, y) \in A$. De esta forma, la experiencia del lector (obtenida en sus cursos de geometría analítica) para visualizar conjuntos en $\mathbb{R}^3$ definidos a partir de una ecuación (la mayoría de las veces de tipo cuadrático en las variables x, y y z), le será de gran utilidad.

Relacionado con lo anterior, de la misma forma que no cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^2$ puede ser la gráfica de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, no cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^3$ puede ser la gráfica de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Seguramente el lector recordará que para una función definida de $\mathbb{R}$ (o de un subconjunto de $\mathbb{R}$) en $\mathbb{R}$, la gráfica de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ que intersecta a cualquier recta paralela al eje Y en a lo más un punto. En el caso de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, hay un "criterio geométrico" equivalente: la gráfica de una función definida de $\mathbb{R}^2$ (o de un subconjunto de $\mathbb{R}^2$) en $\mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^3$ que intersecta a cualquier recta paralela al eje Z en a lo más un punto.

Como el lector recordará también, la justificción de este criterio se basa en el hecho de que estamos hablando de funciones, de tal forma que a cada elemento del dominio le corresponde uno y sólo un valor del contradominio.

En el siguiente ejemplo ilustramos cómo usar este criterio geométrico, para identificar o esbozar la gráfica de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.4 *Esboce la gráfica de la función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$, definida como*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}.$$

Con base en la observación que hicimos anteriormente, las ternas $(x, y, z) \in G_f$ deben ser tales que

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \qquad (2.1) \\ &= \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}, \end{aligned}$$

de tal forma que, tomando el cuadrado en ambos lados de esta identidad (operación que será muy importante recordar más adelante), concluimos que estas ternas satisfacen la ecuación

$$z^2 = 1 - (x^2 + y^2)$$

o equivalentemente, la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad (2.2)$$

que seguramente el lector reconocerá como la ecuación de una esfera de radio 1 con centro en el origen $(0, 0, 0)$. Pero justo por la observación anterior a este ejemplo, dado que muchas rectas paralelas al eje Z (incluyendo el propio eje) intersectan a esta esfera en más de un punto, la gráfica de nuestra función no puede ser toda la esfera.

Para determinar qué parte de la esfera corresponde a la gráfica de nuestra función, recordemos que la ternas que están en la gráfica satisfacen la ecuación 2.1, de donde se deduce que la coordenada z de estas ternas siempre es mayor o igual a 0 (a diferencia de las ternas que satisfacen la ecuación 2.2, de la que no se puede deducir que la coordenada z tenga que cumplir con la misma condición). Como seguramente el lector *ya lo habrá notado, esta "pérdida" del signo de la coordenada z fue producto de haber tomado el cuadrado en la ecuación 2.1.*

Por otra parte, si $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, con $z \geq 0$, satisface la ecuación 2.2, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \\ &= f(x, y), \end{aligned}$$

de donde se concluye que $(x, y, z) \in G_f$.

Resumiendo lo anterior, concluimos que la gráfica de nuestra función es la parte de la esfera unitaria que se encuentra por arriba (y sobre) el plano XY, como se muestra en la figura 2.1.

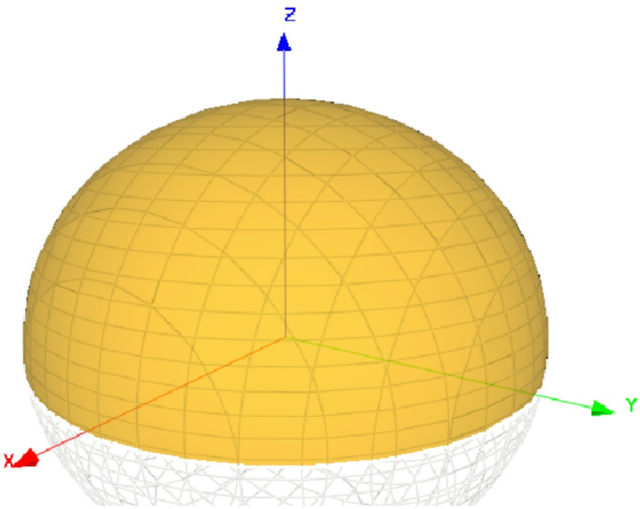

Figura 2.1: Gráfica de la función $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$.

Con frecuencia haremos referencia a otro conjunto asociado a una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, el llamado conjunto de nivel. Su definición formal es la siguiente:

Definición 2.5 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$. Definimos el conjunto de nivel c de f, que denotamos por $N_c(f)$, como*

$$N_c(f) := \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) = c\}.$$

Una propiedad evidente (pero importante) es que los conjuntos de nivel correspondientes a valores distintos de c, no se intersectan. Esta propiedad es una consecuencia inmediata del hecho de que f sea una función. La dejaremos plasmada en la siguiente

Observación 2.6 *Dados $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $N_c(f) \neq \varnothing$ y $N_d(f) \neq \varnothing$, se tiene que*

$$N_c(f) \cap N_d(f) = \varnothing \text{ si y sólo si } c \neq d.$$

Como es de esperarse, los conjuntos de nivel sólo se pueden "ver" o "dibujar" si el dominio de nuestra función está contenido en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (lo que no reduce su importancia para dimensiones mayores). Por esta razón, daremos algunos ejemplos sólo en estos casos.

Ejemplo 2.7 *Determine los conjuntos de nivel de las siguientes funciones:*

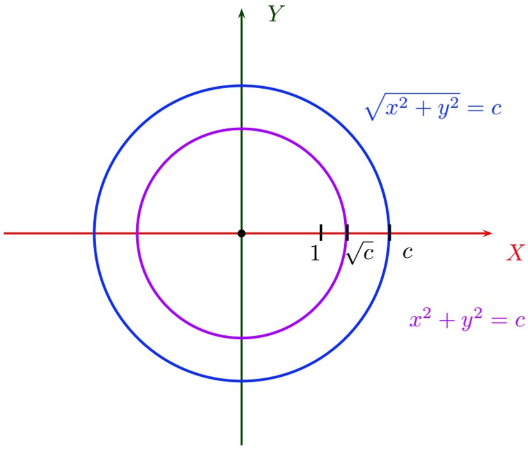

Figura 2.2: Curvas de nivel c de las funciones $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ y $f(x,y)=x^2+y^2$, las circunferencias de radio c y $\sqrt{c}$, respectivamente.

1. $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ *con* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*. Dado que* $f(x,y)\geq 0$ *para toda* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, para* $c<0$ *se tiene que* $N_c(f)=\varnothing$*. Si* $c=0$*, entonces* $N_c(f)=\{(0,0)\}$*, y si* $c>0$*, entonces*

$$N_c(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)=c\right\},$$

que no es más que la circunferencia de radio c *con centro en el origen (ver figura 2.2).*

2. $f(x,y)=x^2+y^2$ *con* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*. Como para esta función también se tiene que* $f(x,y)\geq 0$ *para toda* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$*, si* $c<0$*, entonces* $N_c(f)=\varnothing$*. Asimismo, si* $c=0$*, entonces* $N_c(f)=\{(0,0)\}$*, y si* $c>0$*, entonces*

$$N_c(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=f(x,y)=c\right\},$$

que en este caso es la circunferencia de radio $\sqrt{c}$ *con centro en el origen (ver figura 2.2).*

3. $f(x,y,z)=x+y+z$ *con* $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$*. En este caso se cumple que* $N_c(f)\neq\varnothing$ *para toda* $c\in\mathbb{R}$ *y*

$$N_c(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=f(x,y)=c\right\}$$

que, como el lector reconocerá fácilmente, se trata de un plano con vector normal $(1,1,1)$ *(ver figura 2.3).*

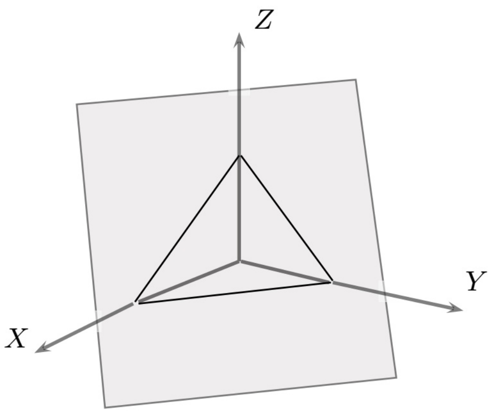

Figura 2.3: Conjunto de nivel 1 de la función $f(x,y,z)=x+y+z$.

Entre otras cosas, y para el caso de $\mathbb{R}^2$, este tipo de conjuntos también serán útiles para esbozar la gráfica de una función. En efecto, si cada conjunto de nivel $N_c(f)$ (o una cantidad suficiente de ellos) se traslada paralelamente al plano XY a la "altura" c, obtenemos un bosquejo de la gráfica de f (ver figura 2.4). Este hecho, junto con todas las demás técnicas que el lector haya aprendido en sus cursos de Geometría Analítica (como por ejemplo, la intersección con los "planos coordenados"), serán útiles a la hora de intentar visualizar la gráfica de una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

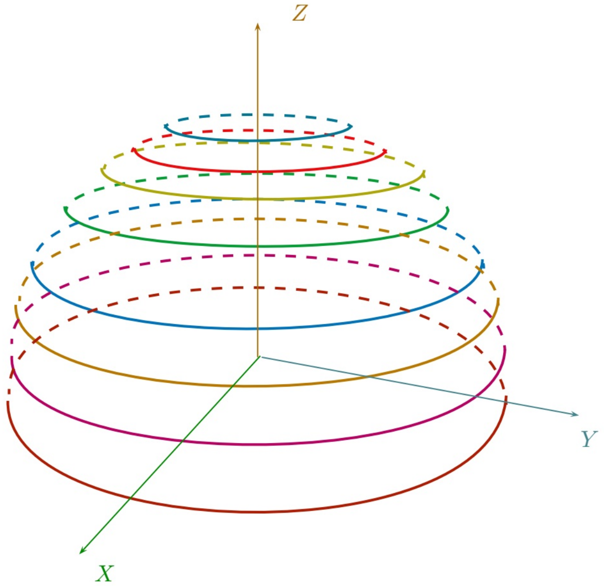

Figura 2.4: Bosquejo de la gráfica de la función $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ a partir de algunas de sus curvas de nivel.

En realidad, los conjuntos de nivel son un caso particular de otros conjuntos con los cuales vamos a trabajar en este mismo capítulo, un poco más adelante. Aprovechamos esta relación para definir lo que se conoce como "*la imagen inversa de D bajo f*", de la siguiente manera:

Definición 2.8 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $D \subset \mathbb{R}^m$. Definimos la imagen inversa de D bajo f, que denotamos por $f^{-1}(D)$, como el conjunto dado por:*

$$f^{-1}(D) := \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) \in D\}.$$

Esperemos que la notación usada en esta definición no cause confusión con la notación de función inversa; si lo que está entre paréntesis (el "argumento") es un conjunto, nos referimos a la imagen inversa; y si es un elemento de $\mathbb{R}^n$, hablamos de la función inversa de f.

Observación 2.9 *Como el lector podrá verificar fácilmente, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

$$N_c(f) = f^{-1}(\{c\}).$$

Para terminar la lista de conjuntos asociados con una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, dado un conjunto $B \subset A$, definiremos ahora lo que se conoce como "*la imagen directa* (o simplemente "*la imagen*") *de B bajo f*" de la siguiente manera.

Definición 2.10 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $B \subset A$. Definimos la imagen (directa) de B bajo f, que denotamos[1] por $f(B)$, como el conjunto dado por:*

$$f(B) := \{f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \hat{x} \in B\} = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^m \mid \textit{existe } \hat{x} \in B \textit{ tal que } f(\hat{x}) = \hat{y}\}.$$

[1]Como en el caso de la imagen inversa, nuevamente esperemos que esta notación no cause confusión con la notación de función; si lo que está entre paréntesis es un conjunto, nos referimos a la imagen directa; y si es un elemento de $\mathbb{R}^n$, hablamos de la función evaluada en ese elemento.

Desde un punto de vista geométrico, la imagen de un conjunto bajo una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jugará un papel relevante cuando $n \leq m$. En estos casos, dado un conjunto $B \subset A$, será muy importante reconocer quién es el conjunto $f(B)$.

De hecho, apoyados en el concepto de imagen directa, diremos (por ahora de manera informal) que un subconjunto $C \subset \mathbb{R}^m$ que pueda obtenerse (todo él o "en partes") como la imagen de un conjunto bajo una función $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (que cumpla con ciertas propiedades de derivabilidad que definiremos más adelante) es una *curva en* $\mathbb{R}^m$.

Análogamente, si un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^m$ se puede obtener (todo él o "en partes") como la imagen de un conjunto bajo una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ (que también cumpla con algunas propiedades de derivabilidad), nos referiremos a él como una *superficie en* $\mathbb{R}^m$.

Como es de suponer, los únicos casos en los que será posible dibujar (o bosquejar) la imagen de un conjunto bajo una función serán aquellos en los que el contradominio de la función es $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. Es decir, sólo para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$.

En el capítulo 3 vamos a estudiar con más detalle las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ (en particular en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$), razón por la cual ahora sólo nos concentraremos en dar ejemplos de cómo es la imagen de algunos conjuntos bajo este tipo de funciones.

Ejemplo 2.11 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$. Describiremos (o bosquejaremos) los conjuntos $f([-\pi/2, \pi/2])$, $f([t_0, t_0 + 2\pi])$ y $f(\{t_0 + k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$ con $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo, en ambos casos.*

Para lograr nuestro objetivo, es importante observar lo siguiente: si interpretamos a la variable t como el ángulo dirigido (medido en radianes) formado por la parte positiva del eje X y una semirrecta que parte del origen, entonces el punto representado por la pareja $(\cos(t), \operatorname{sen}(t)) = f(t)$ es la intersección de esta semirrecta con la circunferencia de radio 1 con centro en el origen.

Tomando en consideración este hecho, ahora fácilmente podemos concluir que: $f([-\pi/2, \pi/2])$ es el conjunto formado por la parte de la circunferencia unitaria con centro en el origen que se encuentra en el semiplano derecho (figura 2.5 (a)), $f([t_0, t_0 + 2\pi])$ es dicha circunferencia completa (figura 2.5 (b)), y $f(\{t_0 + k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$ es un conjunto formado sólo por cuatro puntos (figura 2.5 (c)).

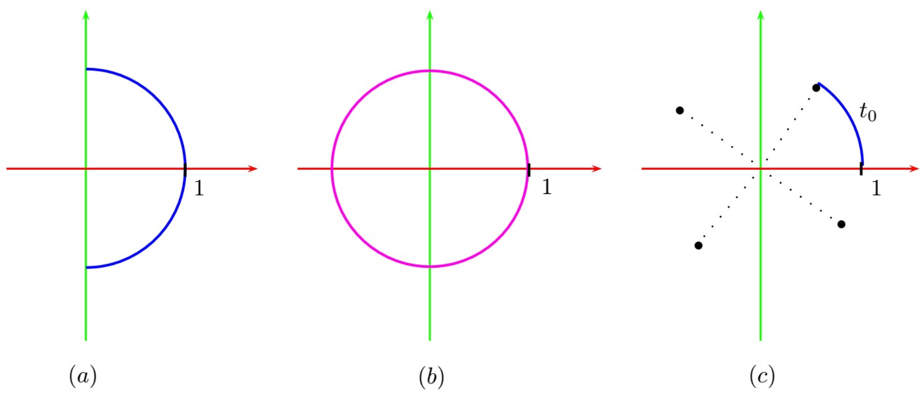

Figura 2.5: Los conjuntos $f([-\pi/2, \pi/2])$, $f([t_0, t_0 + 2\pi])$ y $f(\{t_0 + k\pi/2 \mid k \in \mathbb{Z}\})$.

Ejemplo 2.12 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, con $A = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$, dada por*

$$f(t, s) = (\cos(t)\operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s), \cos(s)).$$

Describiremos (o bosquejaremos) los conjuntos $f(\{(t, s_0) \mid t \in [0, 2\pi]\})$, $f(\{(t_0, s) \mid s \in [0, \pi]\})$ con $s_0 \in [0, \pi]$ y $t_0 \in [0, 2\pi]$ fijos.

De forma análoga al ejemplo anterior, ahora es importante notar que las ternas

$$(\cos(t)\operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s), \cos(s))$$

satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por lo que podemos concluir que los conjuntos que buscamos están contenidos en la esfera de radio 1 con centro en el origen.

Como todas las ternas $f(t, s_0) = (\cos(t)\operatorname{sen}(s_0), \operatorname{sen}(t)\operatorname{sen}(s_0), \cos(s_0))$ tienen la particularidad de que su tercera coordenada es la misma, entonces satisfacen la ecuación del plano $z = \cos(s_0)$, el cual es paralelo al plano XY. En virtud de la primera observación, concluimos que nuestro conjunto está contenido en la intersección de la esfera que mencionamos y este plano, que es una circunferencia de radio $\operatorname{sen}(s_0)$ con centro en el punto $(0, 0, \cos(s_0))$. Dado que $t \in [0, 2\pi]$, tenemos que el conjunto buscado coincide con esta circunferencia (ver figura 2.6).

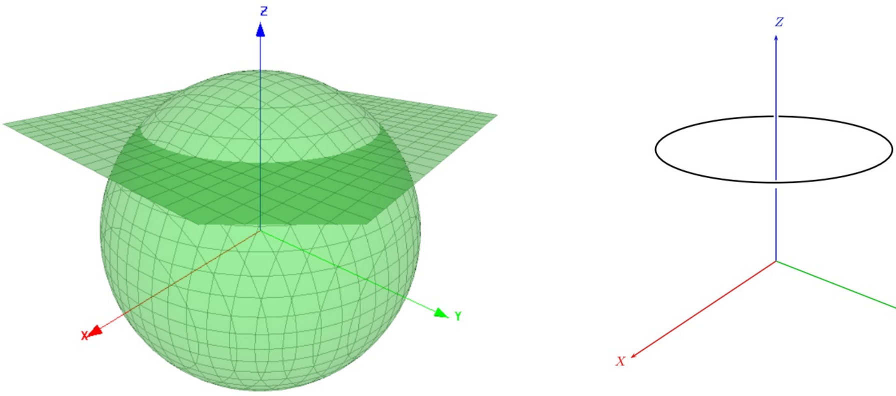

Figura 2.6: El conjunto $f(\{(t, s_0) \mid t \in [0, 2\pi]\})$ se obtiene al intersectar la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $z = \cos(s_0)$.

Por otra parte, como $\operatorname{sen}(s) \geq 0$ para toda $s \in [0, \pi]$, se tiene que las parejas $(\cos(t_0)\operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(t_0)\operatorname{sen}(s))$ (que son la proyección sobre el plano XY de las ternas $(\cos(t_0)\operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(t_0)\operatorname{sen}(s), \cos(s)) = f(t_0, s)$) pertenecen a la semirrecta que parte del origen y que forma un ángulo de t_0 radianes con la parte positiva del eje X. Como las ternas $(\cos(t_0)\operatorname{sen}(s), \operatorname{sen}(t_0)\operatorname{sen}(s), \cos(s)) = f(t_0, s)$ también satisfacen la ecuación del plano $-\operatorname{sen}(t_0)x + \cos(t_0)y = 0$, concluimos que el conjunto $f(\{(t_0, s) \mid s \in [0, \pi]\})$ está contenido en la intersección de la esfera unitaria con centro en el origen y este plano. Esta intersección es una circunferencia completa, pero dado que la proyección de los elementos de nuestro conjunto sólo caen en la semirecta antes descrita, inferimos que este conjunto sólo abarca la mitad de esta circunferencia, la que une a los puntos $(0, 0, 1) = f(t_0, 0)$ y $(0, 0, -1) = f(t_0, \pi)$ y que se proyecta sobre dicha semirecta (ver figura 2.7).

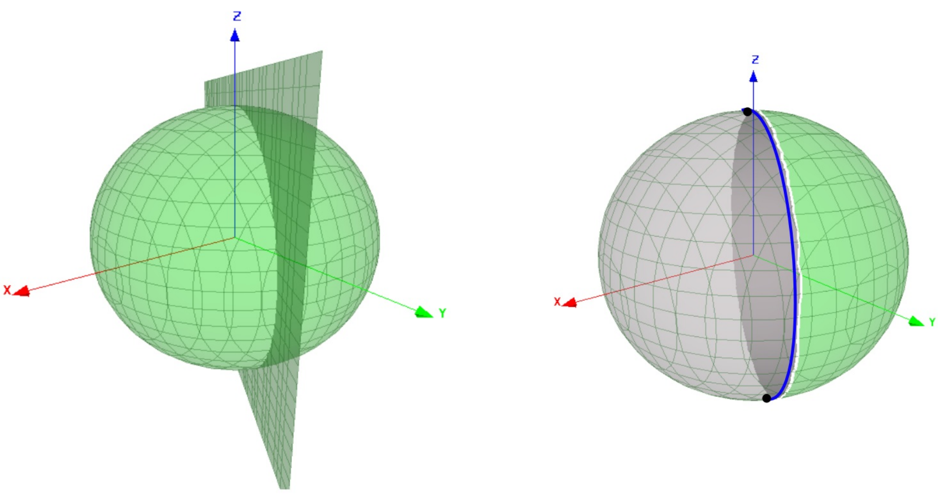

Figura 2.7: El conjunto $f(\{(t_0, s) \mid s \in [0, \pi]\})$ está contenido en la intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con el plano $-\operatorname{sen}(t_0)x + \cos(t_0)y = 0$, y sólo consta de una semicircunferencia.

Las propiedades más importantes relacionadas con los conceptos de imagen inversa e imagen directa las dejaremos plasmadas en la siguiente proposición. Dada la sencillez de sus pruebas, éstas quedarán a cargo del lector.

Proposición 2.13 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $A_\alpha, B, C \subset A$, y $D_\alpha, D, E \subset \mathbb{R}^m$, con $\alpha \in I$, I un conjunto de índices. Se cumple que:*

1. *si $D \subset E$, entonces $f^{-1}(D) \subset f^{-1}(E)$*
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} D_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$
3. $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} D_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$
4. $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c \cap A = A \setminus f^{-1}(D)$
5. *si $B \subset C$, entonces $f(B) \subset f(C)$*
6. $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
7. $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$ *y si f es inyectiva, entonces* $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
8. $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ *y si f es inyectiva, entonces $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$*
9. $B \subset f^{-1}(f(B))$ *y si f es inyectiva, entonces $B = f^{-1}(f(B))$*
10. $f(f^{-1}(D)) \subset D$ *y $f(f^{-1}(D)) = D$ si y sólo si $D \subset f(A)$*
11. $f^{-1}(D) = f^{-1}(D \cap f(A))$

Concluimos esta sección mencionando otra forma de representar "geométricamente" a las funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Esta otra forma se desprende básicamente de las dos maneras "geométricas" en que podemos representar a una pareja (o terna) de números reales. En efecto, como ya hemos mencionado en muchas ocasiones, las parejas o ternas las podemos dibujar, o bien como un punto, o bien como una flecha (o vector). Combinando estas dos representaciones, dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (o $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$), la representaremos geométricamente de la siguiente forma: a cada elemento $\hat{x} \in A$ lo dibujaremos como un punto y a $f(\hat{x})$ como un vector "colocado" sobre este punto $\hat{x}$.

Otra forma de decir lo anterior es que en el punto $\hat{x} \in A$ "*sembramos*" el vector $f(\hat{x})$. Tal vez por esta forma más "coloquial" de decirlo es que a este tipo de funciones (y su representación geométrica) también se les conoce con el nombre de "*campos vectoriales*".

Es importante mencionar que en la descripción anterior se está suponiendo que, mientras el sistema coordenado con base en el cual se dibuja a cada $\hat{x} \in A$ es fijo, el que se usa para dibujar a $f(\hat{x})$ tendrá como origen al punto $\hat{x}$ y sus ejes (a menos que se indique lo contrario) serán paralelos a los ejes del primero. Es decir, mientras que el sistema coordenado en el que representamos a los elementos del dominio A no cambia, el que usamos para representar a los valores de f cambiará con cada punto.

Los siguientes ejemplos ilustran esta forma de representar geométricamente a este tipo de funciones.

Ejemplo 2.14 *Considere las siguientes funciones.*

1. $f(x,y) = (x,y)$. *En este caso, como el dominio de f es todo $\mathbb{R}^2$, cada punto del plano tiene asignado un vector, como se muestra en la figura 2.8 (a).*
2. $f(x,y) = (-y,x)$. *Nuevamente, como el dominio de f también es todo $\mathbb{R}^2$, cada punto del plano tiene asignado un vector, como se muestra en la figura 2.8 (b).*

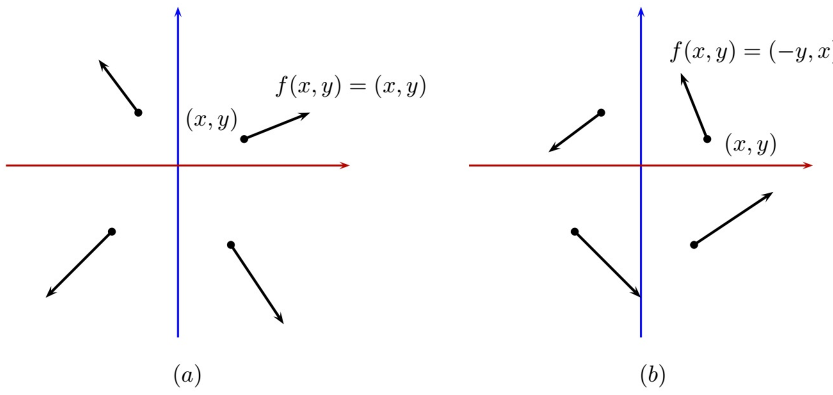

Figura 2.8: Representación geométrica de funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. La pareja (x,y) se representa por un punto y el valor de f en este punto $(f(x,y))$ por una flecha cuyo punto inicial es el punto (x,y).

3. $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\hat{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$f(x,y,z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right).$$

En este caso, a cada punto de $\mathbb{R}^3$ distinto del origen, la función le asigna un vector que tiene la particularidad de ser siempre de norma 1, como se muestra en la figura 2.9.

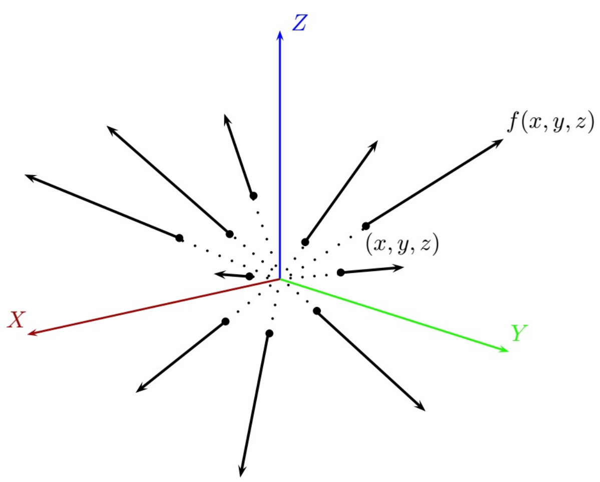

Figura 2.9: Representación geométrica de una función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. La terna (x,y,z) se representa por un punto y el valor de f en este punto $(f(x,y,z))$ por una flecha cuyo punto es el punto (x,y,z).

2.2 Límite y continuidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Como el lector seguramente recordará de su primer curso de cálculo, para el caso de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, los conceptos de límite y continuidad están íntimamente relacionados con la idea de cercanía, la cual, tratándose de los números reales, se formaliza a través del concepto de valor absoluto.

Para las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, los conceptos de límite y continuidad no cambian esencialmente y siguen siendo una expresión de las ideas de cercanía y aproximación.

De esta manera, dado que en $\mathbb{R}^n$ contamos con varias formas de medir la distancia entre sus elementos (o de generalizar el concepto de valor absoluto), en principio tenemos muchas maneras de definir estos conceptos (aunque, como veremos más adelante, y a la luz de las desigualdades de la proposición 1.15 del capítulo 1, todas ellas serán equivalentes).

Así como en el caso de los números reales realizamos nuestro primer acercamiento a la idea de límite (o aproximación) a través del concepto de sucesión, para el caso de $\mathbb{R}^n$ haremos lo mismo.

2.2.1 Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

El concepto de sucesión en $\mathbb{R}^n$ (o en un conjunto arbitrario) es análogo al de sucesión en $\mathbb{R}$: una sucesión es una función que a cada natural le asocia un elemento de $\mathbb{R}^n$. Este concepto lo formalizamos en la siguiente

Definición 2.15 *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$. Denotamos por $\hat{x}_k$ a s evaluada en k, es decir, $\hat{x}_k = s(k)$. Para referirnos a la función s, escribiremos $\{\hat{x}_k\}$.*

Como sucede con cualquier función, una sucesión en $\mathbb{R}^n$ queda totalmente determinada si se conoce la regla de asociación, es decir, si conocemos $\hat{x}_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Dado que $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$, ésta debe tener n coordenadas (a las cuales denotaremos[2]) por $x_k^{(i)}$, es decir que

$$\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right).$$

De esta forma, toda sucesión determina (o está determinada por) n sucesiones de números reales, a las cuales conoceremos con el nombre de *sucesiones coordenadas*. Las sucesiones coordenadas tendrán un papel muy importante en los conceptos y resultados que desarrollaremos en esta sección, pues la mayoría de ellos se pueden reducir a los conceptos y resultados análogos del caso real.

Sin duda el concepto más importante con relación a las sucesiones en $\mathbb{R}^n$ es el de convergencia, el cual deseamos que refleje la misma idea de aproximación que se tiene para el caso real.

En términos intuitivos (o geométricos), diremos que una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ "tiende" (o converge, que es el témino que usaremos) a un punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si los términos de la sucesión están cada vez más cerca de $\hat{x}_0$ conforme el índice k se va haciendo cada vez más grande (o conforme k tiende a infinito, que es la forma en que expresamos esta idea de que "k se va haciendo cada vez más grande").

Como se recordará, en el caso de los números reales esta idea de aproximación o cercanía se formaliza a través del concepto de valor absoluto. Dado que en $\mathbb{R}^n$ contamos con conceptos equivalentes, la definición de convergencia de una sucesión en $\mathbb{R}^n$ será una copia de la definición para sucesiones de números reales.

Definición 2.16 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\{\hat{x}_k\}$ es convergente (o que converge) si existe $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que para toda cantidad positiva ε existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier otro índice $k \geq N$ se tiene que*

$$\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < \varepsilon,$$

es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces $\hat{x}_k \in B_\varepsilon(\hat{x}_0)$.

En este caso decimos que la sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge a $\hat{x}_0$, lo que denotamos como $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$ o

$$\lim_{k\to\infty} \hat{x}_k = \hat{x}_0,$$

Una interpretación geométrica de la definición anterior sería la siguiente: cuando una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge a un punto $\hat{x}_0$, se tiene que para *cualquier* bola que tomemos con centro en $\hat{x}_0$, sin importar cuán pequeño pueda ser su radio, ésta contiene a casi todos los términos de la sucesión (salvo quizás un número finito de ellos). La figura 2.10 ilustra este hecho en $\mathbb{R}^2$.

Como seguramente el lector habrá pensado, una opción para definir la convergencia de una sucesión en $\mathbb{R}^n$ hubiera sido hacerlo a través de las sucesiones coordenadas, es decir, definir que

$$\left\{\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\}$$

[2]En este caso usaremos un superíndice (encerrado entre paréntesis) para denotar la coordenada de un elemento de $\mathbb{R}^n$, dado que en este caso el subíndice denota el término de la sucesión.

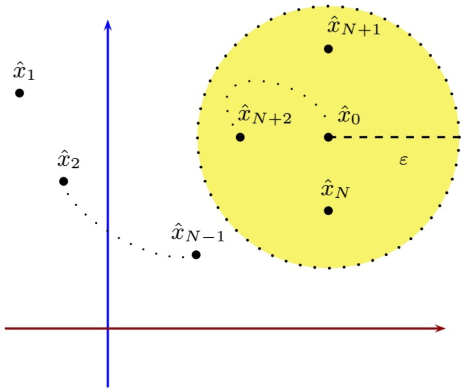

Figura 2.10: Una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge a un punto $\hat{x}_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces $\hat{x}_k \in B_\varepsilon(\hat{x}_0)$.

converge si cada sucesión coordenada (de números reales) $\left\{x_k^{(i)}\right\}$ converge (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$). Y el lector habría estado en lo correcto, como lo mostraremos, dada su importancia, en la primera proposición que formularemos con relación a la convergencia de sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.17 *Sea $\left\{\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. La sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge si y sólo si la sucesión $\left\{x_k^{(i)}\right\}$ converge para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right)$ si y sólo si $\left\{x_k^{(i)}\right\} \to x_0^{(i)}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Por los incisos 1 y 2 de la proposición 1.15 (del capítulo 1) sabemos que para cualquier $\hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$|x_i| \leq \|\hat{x}\| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, de tal forma que

$$\left|x_k^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leq \|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| \leq \left|x_k^{(1)} - x_0^{(1)}\right| + \cdots + \left|x_k^{(n)} - x_0^{(n)}\right| \tag{2.3}$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y para toda $k \in \mathbb{N}$.

Supongamos ahora que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right)$. Sabemos entonces que, dado $\varepsilon > 0$, existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces

$$\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < \varepsilon,$$

de tal forma que, por la primera desigualdad de 2.3, se tiene (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$) que

$$\left|x_k^{(i)} - x_0^{(i)}\right| \leq \|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < \varepsilon$$

para toda $k \geq N$, de donde concluimos que $\left\{x_k^{(i)}\right\} \to x_0^{(i)}$ (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Si ahora suponemos que $\left\{x_k^{(i)}\right\} \to x_0^{(i)}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon/n > 0$ y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe un índice $N_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|x_k^{(i)} - x_0^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

para toda $k \geq N_i$ (y para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$). Por tanto, si $N = \max\{N_1, \ldots, N_n\}$, por la segunda desigualdad de 2.3, si $k \geq N$, como $N \geq N_i$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| \leq \left|x_k^{(1)} - x_0^{(1)}\right| + \cdots + \left|x_k^{(n)} - x_0^{(n)}\right|$$

$$
\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon}{n} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}
$$

con lo que concluimos que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$.

■

Con base en la proposición anterior y dando como un hecho conocido (¡y probado!) que la suma y producto de sucesiones de números reales convergentes también es convergente, obtenemos el siguiente resultado (relacionado con el diferente tipo de operaciones algebraicas que podemos realizar con sucesiones en $\mathbb{R}^n$). Como es de suponerse, la prueba se deja al lector.

Proposición 2.18 *Sean $\{\hat{x}_k\}, \{\hat{y}_k\}$ sucesiones en $\mathbb{R}^n$, y $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$ y $\{\hat{y}_k\} \to \hat{y}_0$, entonces:*

1. $\{\hat{x}_k\} + \{\hat{y}_k\} := \{\hat{x}_k + \hat{y}_k\} \to \hat{x}_0 + \hat{y}_0$

2. $\alpha\{\hat{x}_k\} := \{\alpha\hat{x}_k\} \to \alpha\hat{x}_0$

3. $\{\hat{x}_k\} \cdot \{\hat{y}_k\} := \{\hat{x}_k \cdot \hat{y}_k\} \to \hat{x}_0 \cdot \hat{y}_0$

4. *si $n = 3$, $\{\hat{x}_k\} \times \{\hat{y}_k\} := \{\hat{x}_k \times \hat{y}_k\} \to \hat{x}_0 \times \hat{y}_0$*

Hablando de criterios que nos permiten garantizar la convergencia de una sucesión en $\mathbb{R}^n$, seguramente el lector recordará el muy conocido criterio de convergencia de sucesiones de números reales: el afamado *criterio de Cauchy*. Para formular este criterio, antes será necesario introducir el concepto de sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$.

Como en el caso de la definición de convergencia en $\mathbb{R}^n$, también podríamos recurrir a las sucesiones coordenadas para "generalizar" el concepto de sucesión de Cauchy a las sucesiones en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, al igual que hicimos con la convergencia, ya que este concepto también expresa una cierta idea de cercanía, lo definiremos con base al concepto (o a uno de ellos) de distancia que hemos definido en $\mathbb{R}^n$. Después formularemos un resultado que muestra que esta definición es equivalente a que las sucesiones coordenadas también sean de Cauchy.

Definición 2.19 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\{\hat{x}_k\}$ es de Cauchy si para toda cantidad positiva ε existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier otro par de índices $k, l \geq N$ se tiene que*

$$\|\hat{x}_k - \hat{x}_l\| < \varepsilon,$$

es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq N$, entonces $\|\hat{x}_k - \hat{x}_l\| < \varepsilon$.

Como mencionamos antes, la definición anterior resulta equivalente a que las sucesiones coordenadas también sean de Cauchy, lo que plasmamos en la siguiente proposición y cuya prueba, como es de suponerse, queda a cargo del lector.

Proposición 2.20 *Sea $\left\{\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. La sucesión $\{\hat{x}_k\}$ es de Cauchy si y sólo si la sucesión $\left\{x_k^{(i)}\right\}$ es de Cauchy para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

La importancia del concepto de sucesión de Cauchy (en $\mathbb{R}^n$) radica en que dicha propiedad es una condición equivalente a la propiedad de ser convergente (también en $\mathbb{R}^n$), resultado que podemos obtener como un fácil corolario de la proposición anterior y del correspondiente resultado para las sucesiones de números reales.

Corolario 2.21 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. La sucesión $\{\hat{x}_k\}$ es convergente si y sólo si $\{\hat{x}_k\}$ es de Cauchy.*

Es importante mencionar que el resultado anterior se puede probar sin recurrir a la proposición 2.20, prueba que dejamos como un problema para el lector (problema 23).

Otro concepto que resulta muy importante con relación a las sucesiones es el de subsucesión. Con la misma idea bajo la cual se define el concepto de subsucesión de una sucesión de números reales, también se define el concepto de subsucesión de una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Es decir, una subsucesión de una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ será una nueva sucesión que se construye eligiendo términos de la sucesión original $\{\hat{x}_k\}$, con la única restricción de que los índices de los términos que se elijan vayan "creciendo", es decir, que éstos formen una sucesión de números naturales "creciente" (restricción que no debe extrañarnos, sobre todo si recordamos que lo importante de las sucesiones es lo que sucede con sus términos justo cuando su índice "crece" (o tiende a "infinito")).

La formalización de este concepto la damos en la siguiente

Definición 2.22 *Sean $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y $\{k_l\}$ una sucesión de números naturales (es decir, una función que al natural l le asocia el natural k_l). Decimos que $\{\hat{x}_{k_l}\}$ es una subsucesión de $\{\hat{x}_k\}$ si $\{k_l\}$ es una sucesión creciente de números naturales (es decir, que $k_l < k_{l+1}$ para toda $l \in \mathbb{N}$).*

Como dijimos antes, una subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ de una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ es a su vez una sucesión, y es importante recalcar que el índice (o variable) de esta nueva sucesión está representado por la letra l; es decir, el décimo término de la sucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ es el k_{10} término de la sucesión original $\{\hat{x}_k\}$.

También es importante hacer notar que toda sucesión es subsucesión de sí misma; en efecto, si tomamos $k_l = l$ la función identidad de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$, que sin duda es creciente, entonces la subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ es $\{\hat{x}_l\}$. Es decir, la sucesión original $\{\hat{x}_k\}$ (en donde la única diferencia es que cambiamos el nombre de su índice (o variable), l por k).

De la idea intuitiva de convergencia es de esperarse que si una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge al punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces cualquier subsucesión de ésta también converja a $\hat{x}_0$. El recíproco de la afirmación anterior también es cierto; es decir, si *todas* las subsucesiones de una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ convergen a un mismo punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{\hat{x}_k\}$ también converge a $\hat{x}_0$, afirmación que resulta evidente puesto que, como dijimos antes, toda sucesión es subsucesión de sí misma.

Lo interesante es que, aún cuando excluyamos a la sucesión $\{\hat{x}_k\}$ como subsucesión de sí misma, el resultado sigue siendo cierto. Este es un hecho importante y lo dejamos plasmado en la siguiente proposición. Con relación a su prueba, vale la pena mencionar que, como ya va siendo costumbre, hay dos caminos para hacerla: usar la proposición 2.17 y el correspondiente resultado para sucesiones de números reales (que es la que haremos aquí), o hacerla sin usar esta proposición y probarla "directamente" (que es la que dejaremos como un problema para el lector).

Proposición 2.23 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. La sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge al punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si cualquier subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ de $\{\hat{x}_k\}$, diferente de $\{\hat{x}_k\}$, también converge a $\hat{x}_0$.*

Demostración. Para entender un poco mejor esta prueba, nótese que la proposición se puede reformular de la siguiente manera: $\{\hat{x}_k\}$ converge al punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si para cualquier sucesión creciente de números naturales $\{k_l\}$ tal que $k_l \neq l$ para alguna $l \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{\hat{x}_{k_l}\}$ también converge al punto $\hat{x}_0$.

Supongamos que $\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)$ y $\hat{x}_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right)$. Si $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$, por la proposición 2.17 sabemos que $\{x_k^{(i)}\} \to x_0^{(i)}$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ahora, si tomamos cualquier subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\} \neq \{\hat{x}_k\}$, dado que $\{x_{k_l}^{(i)}\}$ es una subsucesión de $\{x_k^{(i)}\}$ (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$), por el correspondiente resultado para sucesiones de números reales sabemos que $\{x_{k_l}^{(i)}\} \to x_0^{(i)}$ (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$) de modo que, nuevamente por la proposición 2.17, tenemos que $\{\hat{x}_{k_l}\} \to \hat{x}_0$.

Por otra parte, si *cualquier* subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\} \neq \{\hat{x}_k\}$ converge a $\hat{x}_0 = \left(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(n)}\right)$, entonces *cualquier* subsucesión $\left\{x_{k_l}^{(i)}\right\} \neq \left\{x_k^{(i)}\right\}$ converge a $x_0^{(i)}$ (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$). De esta forma, por el correspondiente resultado para sucesiones de números reales, sabemos que $\left\{x_k^{(i)}\right\} \to x_0^{(i)}$ (para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$). Por lo tanto, una vez más por la proposición 2.17, tenemos que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$. ■

El resultado anterior tiene una consecuencia práctica muy importante: si $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión que tiene una subsucesión que no converge, o tiene dos subsucesiones que convergen a puntos diferentes, entonces $\{\hat{x}_k\}$ no es convergente.

Para finalizar con la lista de condiciones necesarias y suficientes (o ambas) para que una sucesión en $\mathbb{R}^n$ sea convergente (sin duda el tema más importante con relación a éstas), retomaremos la interpretación geométrica que dimos al hecho de que una sucesión sea convergente.

Como se recordará, si una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ converge a un punto $\hat{x}_0$, entonces cualquier bola con centro en este punto, sin importar su radio, contiene a casi todos los términos de la sucesión, salvo quizás un número finito de ellos. Entre otras cosas, de este hecho se deduce que el conjunto formado por los términos de la sucesión (y que más adelante definiremos formalmente) está ubicado esencialmente alrededor del punto $\hat{x}_0$ y por lo tanto será un conjunto acotado.

El conjunto formado por los términos de una sucesión (al que se le conoce como el rango de la sucesión) es muy importante, y más aún cuando éste está acotado. Por esta razón lo definiremos formalmente y a las sucesiones para las cuales se cumple que su rango es un conjunto acotado, les daremos un nombre particular (que seguramente el lector ya adivina).

Definición 2.24 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Definimos el rango de la sucesión, que denotamos por $R(\{\hat{x}_k\})$, como el conjunto formado por los términos de la sucesión, es decir*

$$R(\{\hat{x}_k\}) := \{\hat{x}_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Definición 2.25 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Decimos que $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión acotada si $R(\{\hat{x}_k\})$ es un conjunto acotado, es decir, si existe $M > 0$ tal que $\|\hat{x}_k\| \leq M$ para toda $k \in \mathbb{N}$.*

Con base en estas definiciones, la discusión que hicimos previa a ellas se puede resumir en la siguiente

Proposición 2.26 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Si $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión convergente, entonces $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión acotada.*

Demostración. Sea $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$. De acuerdo con la definición de convergencia, sabemos que para $\varepsilon = 1 > 0$ (o cualquier otra cantidad positiva que se nos ocurra) existe un índice $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $\hat{x}_k \in B_1(\hat{x}_0)$, o equivalentemente, que $\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < 1$. De esta forma, si tomamos $M = \max\{\|\hat{x}_1\|, \dots, \|\hat{x}_{N-1}\|, \|\hat{x}_0\| + 1\}$ tenemos que $\|\hat{x}_k\| \leq M$ si $k \in \{1, \dots, N-1\}$, y si $k \geq N$, entonces $\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}_k\| &= \|(\hat{x}_k - \hat{x}_0) + \hat{x}_0\| \\
&\leq \|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| + \|\hat{x}_0\| \\
&< 1 + \|\hat{x}_0\| \\
&\leq M,
\end{aligned}$$

con lo que concluimos que $\|\hat{x}_k\| \leq M$ para toda $k \in \mathbb{N}$, es decir, que $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión acotada. ■

El resultado anterior nos proporciona una consecuencia (o condición) necesaria de las sucesiones convergentes. Suele ser muy útil cuando dicha condición no se cumple pues, nos permite concluir que la sucesión en cuestión no es convergente (como suele suceder con todas las condiciones que son necesarias). Desafortunadamente esta propiedad no es una condición suficiente que garantice la convergencia de una sucesión, como es fácil verificar en el siguiente

Ejemplo 2.27 *Considere la sucesión en $\mathbb{R}^2$ dada por $\{\hat{x}_k = \big((-1)^k, 1/k\big)\}$. Como*

$$\begin{aligned}
\|\hat{x}_k\| &= \sqrt{((-1)^k)^2 + (1/k)^2} \\
&= \sqrt{1 + 1/k^2} \\
&\leq \sqrt{2},
\end{aligned}$$

concluimos que $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión acotada. Sin embargo, como $\{x_k^{(1)} = (-1)^k\}$ no es convergente, por la proposición 2.17 tenemos que $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión no convegente.

A pesar del ejemplo anterior, del hecho de que una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ sea acotada se puede obtener un resultado muy importante: si bien la sucesión $\{\hat{x}_k\}$ "completa" puede no ser convergente, lo que siempre sucede es que existe al menos una subsucesión de $\{\hat{x}_k\}$ que sí converge. Esta afirmación la podemos verificar con la sucesión del ejemplo anterior, para la cual se tiene que la subsucesión cuyos índices son los números pares, $\{\hat{x}_{2l} = \big((-1)^{2l}, 1/2l\big)\}$, converge al punto $(1,0)$, y que la subsucesión de los índices impares, $\{\hat{x}_{2l-1} = \big((-1)^{2l-1}, 1/(2l-1)\big)\}$, converge al punto $(-1,0)$. Este importante resultado lo dejamos plasmado en el siguiente

Teorema 2.28 *Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Si $\{\hat{x}_k\}$ está acotada, entonces existe $\{\hat{x}_{k_l}\}$, subsucesión de $\{\hat{x}_k\}$, tal que $\{\hat{x}_{k_l}\}$ es convergente.*

Demostración. Existen al menos tres pruebas diferentes de este teorema (dos de las cuales se dejan como problema para el lector). La prueba que haremos aquí se basará, como en casos anteriores, en la proposición 2.17 y en el resultado equivalente para sucesiones de números reales.

Procederemos por inducción en n, la dimensión del espacio en el que estamos tomando la sucesión. De esta forma, para $n = 1$ estamos en el caso de sucesiones en $\mathbb{R}$, el cual vamos a dar por probado. Supongamos entonces que el teorema es cierto para sucesiones en $\mathbb{R}^n$ y lo probaremos para una sucesión $\left\{\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}, x_k^{(n+1)}\right)\right\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ acotada.

Definimos $\left\{\hat{y}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\}$; por el problema 20 (aplicado en ambos "sentidos") tenemos que $\{\hat{y}_k\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$, de tal forma que, por hipótesis de inducción, tiene una subsucesión $\{\hat{y}_{k_l}\}$ que es convergente.

Consideremos ahora la sucesión de números reales $\left\{x_l = x_{k_l}^{(n+1)}\right\}$; dado que $\left\{x_k^{(n+1)}\right\}$ está acotada, entonces $\{x_l\}$ también está acotada, de tal forma que, por el mismo teorema para sucesiones en $\mathbb{R}$, sabemos que existe una subsucesión $\left\{x_{l_m}^{(n+1)} = x_{k_{l_m}}^{(n+1)}\right\}$ de $\{x_l\}$ que converge.

Ahora, como $\left\{\hat{y}_{k_{l_m}} = \left(x_{k_{l_m}}^{(1)}, \ldots, x_{k_{l_m}}^{(n)}\right)\right\}$ es una subsucesión de $\{\hat{y}_{k_l}\}$, por la proposición 2.23 se tiene que ésta también converge y, por lo tanto (nuevamente por la proposición 2.17, en ambos "sentidos"), obtenemos que la subsucesión

$$\left\{\hat{x}_{k_{l_m}} = \left(x_{k_{l_m}}^{(1)}, \ldots, x_{k_{l_m}}^{(n)}, x_{k_{l_m}}^{(n+1)}\right)\right\}$$

de $\{\hat{x}_k\}$, también converge, afirmación con la que concluye nuestra prueba. ■

2.2.2 Límite

Como sucede con las sucesiones en $\mathbb{R}^n$, los conceptos de límite y continuidad para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ expresan la misma idea de aproximación que expresan los mismos conceptos para el caso de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, y además se definen de manera completamente análoga a como se hace para este tipo de funciones.

Aún tomando en cuenta lo anterior, es importante hacer notar que ahora que contamos con una clasificación más detallada del tipo de puntos asociados a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, si este conjunto es el dominio de una función f, los puntos para los cuales tendrá sentido preguntarse por el límite de f serán justo aquellos que están "pegados" a A, es decir, el tipo de punto al que nos podemos aproximar por medio de puntos diferentes de él y que estén en A (ver inciso (b) del problema 29). Como el lector recordará, estos puntos son aquellos que llamamos puntos de acumulación de A y al conjunto que forman es al que denotamos por A'.

De aquí en adelante, cuando digamos que una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ está contenida en en un conjunto A, esto significará que el rango de $\{\hat{x}_k\}$ ($R(\{\hat{x}_k\})$) está contenido en A. Por otra parte, nótese que, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, entonces $\{f(\hat{x}_k)\}$ también es una sucesión (en $\mathbb{R}^m$) y la llamaremos *la sucesión de imágenes (bajo f)*. Una vez dicho lo anterior, damos la siguiente

Definición 2.29 (de límite por sucesiones) *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A'$. Decimos que f tiene límite en $\hat{x}_0$ y que su límite es $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$, si para toda sucesión $\{\hat{x}_k\}$ contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ que converge a $\hat{x}_0$*

se tiene que la sucesión de imágenes $\{f(\hat{x}_k)\}$ *converge a* $\hat{l}$*. En este caso escribimos que*

$$\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} f(\hat{x}) = \hat{l}$$

y decimos que $\hat{l}$ *es el límite de* f *en* $\hat{x}_0$*.*

De forma análoga a lo que sucede con las sucesiones en $\mathbb{R}^n$, y como una consecuencia de este hecho, si $f = (f_1, \dots, f_m)$, la existencia del límite de f en un punto $\hat{x}_0 \in A'$ es una condición necesaria y suficiente para la existencia del límite (en el mismo punto) de cada una de sus funciones coordenadas f_i. Este importante resultado lo dejamos expresado en la siguiente

Proposición 2.30 *Sean* $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $\hat{x}_0 \in A'$*. La función* f *tiene límite en* $\hat{x}_0$ *y su límite es* $\hat{l} = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ *si y sólo si la función* f_i *tiene límite en* $\hat{x}_0$ *y su límite es* l_i*, para cada* $i \in \{1, \dots, m\}$*.*

La prueba de esta proposición es una consecuencia inmediata de la proposición 2.17 y se deja como un problema para el lector. La proposición anterior tiene la virtud de reducir el problema de determinar la existencia del límite (y en caso de existir, su cálculo) de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ a sólo funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Por esta razón, a continuación daremos una serie de ejemplos en los cuales sólo consideraremos funciones de este último tipo.

Antes de dar los ejemplos, describiremos un procedimiento que consiste en "experimentar" con algunas sucesiones que satisfagan la definición 2.29 y observar qué es lo que sucede con las correspondientes sucesiones de imágenes. Los pasos a seguir después de hacer estos "experimentos" dependerán de sus resultados.

Si para "varias" sucesiones específicas que convergen a un punto $\hat{x}_0$, las correspondientes sucesiones de imágenes siempre convergen a un mismo valor $\hat{l}$, y además el lector "intuye" (intuición que seguramente desarrollará después de calcular muchos límites) que la función debe tener límite, habrá que hacer una demostración que satisfaga la definición 2.29. Es decir, probar que si $\{\hat{x}_k\}$ es cualquier otra sucesión (totalmente arbitraria) que converge a $\hat{x}_0$, entonces la sucesión de imágenes $\{f(\hat{x}_k)\}$ converge a $\hat{l}$.

Por otra parte, si tenemos la suerte de encontrar sucesiones para las cuales las correspondientes sucesiones de imágenes no convergen, o convergen a valores diferentes, entonces de acuerdo a la definición 2.29 podemos concluir que la función no tiene límite en el punto en cuestión. Como se podrá notar, cuando el problema sea mostrar que una función no tiene límite en un punto, las sucesiones son una herramienta muy útil y muy sencilla de usar.

Ejemplo 2.31 *Determinaremos si las siguientes funciones tienen límite en el punto que se indica.*

1. $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$ *en el punto* $(0, 0)$*.*

   Observe que esta función está definida en $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ *y el* $(0, 0)$ *es un punto de acumulación de* A*, de tal forma que sí es válido preguntarse si esta función tiene límite en dicho punto.*

   Tomemos la sucesión $\{\hat{x}_k = (1/k, 0)\}$*; esta sucesión satisface las condiciones de la definición 2.29 ya que* $\hat{x}_k \in A$ *para toda* $k \in \mathbb{N}$*, y* $\{\hat{x}_k\} \to (0, 0)$ *en virtud de que* $\{x_k^{(1)} = 1/k\} \to 0$ *y* $\{x_k^{(2)} \equiv 0\} \to 0$ *(la sucesión constante cero). Por otra parte, se tiene que*

$$\begin{aligned} f(\hat{x}_k) &= \frac{(1/k)(0)}{(1/k)^2 + 0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   para toda $k \in \mathbb{N}$*, es decir, la sucesión de imágenes* $\{f(\hat{x}_k)\}$ *es la sucesión constante cero, la cual converge a* 0*.*

   Si ahora consideramos la sucesión $\{\hat{x}_k = (1/k, 1/k)\}$*, también es una sucesión contenida en* A *para la cual se satisface que* $\{\hat{x}_k\} \to (0, 0)$ *y sin embargo*

$$f(\hat{x}_k) = \frac{(1/k)(1/k)}{(1/k)^2 + (1/k)^2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

para toda $k \in \mathbb{N}$. Es decir, ahora la sucesión de imágenes $\{f(\hat{x}_k)\}$ es la sucesión constante $1/2$, la cual converge a $1/2$.

Con base en el comportamiento de estas dos sucesiones, podemos concluir que la función no tiene límite en el punto $(0,0)$.

2. *$f(x,y) = xy/\sqrt{x^2+y^2}$ en el punto $(0,0)$.*

   Como en el inciso anterior, es fácil ver que si $\{\hat{x}_k = (1/k, 0)\}$, $\{\hat{x}_k = (0, 1/k)\}$ o $\{\hat{x}_k = (1/k, 1/k)\}$, entonces en todos estos casos se tiene que la correspondientes sucesiones de imágenes satisfacen que $\{f(\hat{x}_k)\} \to 0$.

   Más aún, si $\{\hat{x}_k = (1/k, m/k)\}$, con $m \in \mathbb{R}$, en cuyo caso los terminos $\hat{x}_k$ satisfacen la ecuación de la recta (en $\mathbb{R}^2$) $y = mx$ (es decir que la sucesión $\{\hat{x}_k\}$ se "aproxima" al $(0,0)$ "por" (o "sobre") esta recta), entonces

$$\begin{aligned} f(\hat{x}_k) &= \frac{(1/k)(m/k)}{\sqrt{(1/k)^2 + (m/k)^2}} \\ &= \frac{m(1/k)^2}{(1/k)\sqrt{1+m^2}} \\ &= \left(\frac{1}{k}\right)\frac{m}{\sqrt{1+m^2}}, \end{aligned}$$

   de donde también tenemos que $\{f(\hat{x}_k)\} \to 0$.

   Los "experimentos" anteriores nos hacen "sospechar" que la función sí tiene límite (en cuyo caso tendría que ser 0), y para demostrar que esta afirmación es cierta, recurriremos a una de las desigualdades que el lector probó en el problema 3 del capítulo 1 y que resultará muy útil a la hora de hacer demostraciones de límites. En ese problema se prueba que, si $\hat{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $|x_i| \leq \|\hat{x}\|$ para cada $i = 1, ..., n$. De esta forma, si $\hat{x} = (x, y)$, entonces $|x|, |y| \leq \|\hat{x}\| = \sqrt{x^2+y^2}$ y por tanto

$$|xy| \leq \|\hat{x}\|^2.$$

   Por esta última desigualdad, si $\hat{x} \neq \hat{0}$, tenemos que

$$\begin{aligned} |f(\hat{x})| &= \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\ &= \frac{|xy|}{\|\hat{x}\|} \\ &\leq \|\hat{x}\|. \end{aligned}$$

   Sea ahora $\{\hat{x}_k\}$ cualquier sucesión contenida en $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tal que $\{\hat{x}_k\} \to (0,0)$; por la desigualdad anterior, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(\hat{x}_k) - 0| &= |f(\hat{x}_k)| \\ &\leq \|\hat{x}_k\|. \end{aligned}$$

   Ahora, como $\{\hat{x}_k\} \to (0,0)$, por el problema 14 tenemos que $\{\|\hat{x}_k\|\} \to 0$, por la desigualdad anterior (aplicando la "ley del sandwich" para sucesiones de números reales) concluimos que la sucesión $\{|f(\hat{x}_k) - 0|\} \to 0$ y por el problema 13 tenemos que $\{f(\hat{x}_k)\} \to 0$.

   De esta forma, hemos probado que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

En el ejemplo anterior, inciso (2), usamos la conocida "*ley del sandwich*" para sucesiones de números reales. Este resultado lo podemos "extender" a las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y va a resultar ser una herramienta muy útil para el cálculo de límites.

Proposición 2.32 *Sean $f, g, h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\hat{x}_0 \in A'$. Si existe $r > 0$ tal que*

$$f(\hat{x}) \leq h(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in (B_r(\hat{x}_0) \setminus \{\hat{x}_0\}) \cap A$ y

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) = l = \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} g(\hat{x}),$$

entonces h tiene límite en $\hat{x}_0$ y

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} h(\hat{x}) = l.$$

Esta proposición es una consecuencia inmediata de la mencionada "*ley del sandwich*" para sucesiones de números reales y, como es de suponer, su prueba se deja al lector.

Lo que sí vamos a hacer es resaltar el hecho de que la hipótesis relacionada con las desigualdades que deben satisfacer las funciones involucradas sólo se debe de satisfacer en una vecindad del punto en donde se va a tomar el límite, confirmando con ello que este concepto sólo depende del comportamiento "local" de dichas funciones.

Otro hecho muy fácil de probar, pero no por ello menos importante, es la relación del concepto de límite con la aritmética de las funciones. Los resultados que formularemos en la siguiente proposición se deducen (casi todos ellos) de las correspondientes propiedades de sucesiones que quedaron plasmadas en la proposición 2.18. Por esta razón, salvo en el caso de la última afirmación, su prueba se deja al lector.

Proposición 2.33 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{c} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $c, \alpha \in \mathbb{R}$, $\hat{l}, \hat{l}' \in \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A'$. Si f, g y $\tilde{c}$ tienen límite en $\hat{x}_0$ y*

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) = \hat{l}, \qquad \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} g(\hat{x}) = \hat{l}' \qquad y \qquad \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} \tilde{c}(\hat{x}) = c,$$

entonces:

1. *la función $f + g$ tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} (f + g)(\hat{x}) &= \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) + \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} g(\hat{x}) \\ &= \hat{l} + \hat{l}' \end{aligned}$$

2. *la función αf tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} (\alpha f)(\hat{x}) &= \alpha \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) \\ &= \alpha \hat{l} \end{aligned}$$

3. *en general, la función $\tilde{c} f$ tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} (\tilde{c} f)(\hat{x}) &= \left(\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} \tilde{c}(\hat{x}) \right) \left(\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) \right) \\ &= c\hat{l} \end{aligned}$$

4. *la función $f \cdot g$ tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\begin{aligned} \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} (f \cdot g)(\hat{x}) &= \left(\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) \right) \cdot \left(\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} g(\hat{x}) \right) \\ &= \hat{l} \cdot \hat{l}' \end{aligned}$$

5. *si $m = 3$, la función $f \times g$ tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\begin{aligned}\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0}(f \times g)(\hat{x}) &= \left(\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} f(\hat{x})\right) \times \left(\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} g(\hat{x})\right)\\ &= \hat{l} \times \hat{l}'\end{aligned}$$

6. *si $m = 1$, $B = \{\hat{x} \in A \mid g(\hat{x}) \neq 0\}$ y $\hat{l}' \neq 0$, entonces $\hat{x}_0 \in B'$ y además*

$$\begin{aligned}\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0}\left(\frac{f}{g}\right)(\hat{x}) &= \frac{\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} f(\hat{x})}{\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} g(\hat{x})}\\ &= \frac{\hat{l}}{\hat{l}'}\end{aligned}$$

Demostración. (inciso 6). Primero probaremos que $\hat{x}_0 \in B'$. Como $\hat{x}_0 \in A'$, de acuerdo con el inciso (b) del problema 29 sabemos que existe una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ tal que $\{\hat{x}_k\}$ converge a $\hat{x}_0$. De la definición de límite tenemos entonces que la sucesión (de números reales) $\{g(\hat{x}_k)\}$ converge a $\hat{l}' \neq 0$, de tal forma que, para $\varepsilon = \left|\hat{l}'\right| > 0$, sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq N$, entonces

$$\left|g(\hat{x}_k) - \hat{l}'\right| < \varepsilon = \left|\hat{l}'\right|.$$

Nótese que en la desigualdad anterior no puede suceder que $g(\hat{x}_k) = 0$ y por tanto podemos concluir que, si $k \geq N$, entonces $g(\hat{x}_k) \neq 0$. De aquí tenemos que $\hat{x}_k \in B \setminus \{\hat{x}_0\}$ para toda $k \geq N$. Por tanto, si hacemos $\hat{y}_l = \hat{x}_{l+N}$, entonces $\{\hat{y}_l\}$ es una sucesión en $B \setminus \{\hat{x}_0\}$ que, además de ser una subsucesión de la sucesión $\{\hat{x}_k\}$ (tomando $k_l = l + N$), se tiene que también converge a $\hat{x}_0$. De este modo, nuevamente por el inciso (b) del problema 29, concluimos que $\hat{x}_0 \in B'$.

Esto prueba que $\hat{x}_0$ es punto de acumulación del dominio de la función f/g; por otra parte, que esta función tiene límite en $\hat{x}_0$, y que su límite es el cociente de los límites de f y g, es una consecuencia inmediata del correspondiente resultado para el cociente de sucesiones de números reales, que aquí daremos por probado.

■

Como el lector habrá notado, en las operaciones entre funciones mencionadas en la proposición anterior no se incluye a la composición de funciones. El motivo es que el posible resultado que se podría formular para esta operación no resulta cierto: si $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\hat{x}_0 \in A'$, $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $\hat{l} \in D'$ y $\hat{l}' \in \mathbb{R}^k$ son tales que:

1. $\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} g(\hat{x}) = \hat{l}$ y $\lim_{\hat{y}\to\hat{l}} f(\hat{y}) = \hat{l}'$, y

2. $\hat{x}_0 \in (g^{-1}(D))'$ (esta condición es para garantizar que $\hat{x}_0$ sea punto de acumulación del dominio de la función $f \circ g$),

no es posible asegurar que la función $f \circ g$ tenga límite en el punto $\hat{x}_0$, como lo mostraremos en el siguiente

Ejemplo 2.34 *Sean $g(x, y) = x$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $f(t) = 0$ si $t \neq 0$ y $f(0) = 1$.*

Lo primero que se tiene que observar en este ejemplo es que el dominio de la función g está dado por $A = \mathbb{R}^2$ y que $(0, 0) \in A'$.

Tomemos ahora $\{\hat{x}_k\}$ cualquier sucesión contenida en A tal que $\{\hat{x}_k = (x_k, y_k)\} \to (0, 0)$. Por la proposición 2.17 sabemos que $\{x_k\} \to 0$, de tal forma que, como $g(\hat{x}_k) = x_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{g(\hat{x}_k)\} \to 0$. Por lo tanto concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$.

Observemos que la función f está definida para toda $t \in \mathbb{R}$ y que $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Por tanto, la función $f \circ g$ también está definida para toda $(x, y) \in A$, de modo que sí es válido preguntar si esta función tiene límite en el punto $(0, 0)$.

Afirmamos que dicho límite no existe; en efecto, si tomamos la sucesión $\{\hat{x}_k = (0, 1/k)\}$, se tiene que $\{\hat{x}_k\} \to (0,0)$. Por otra parte, $g(\hat{x}_k) = g(0,1/k) = 0$, de modo que $(f \circ g)(\hat{x}_k) = 1$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $\{(f \circ g)(\hat{x}_k)\} \to 1$. Si ahora elegimos la sucesión $\{\hat{y}_k = (1/k, 0)\}$, entonces $\{\hat{y}_k\} \to (0,0)$ y $g(\hat{y}_k) = g(1/k, 0) = 1/k \neq 0$, de modo que $(f \circ g)(\hat{y}_k) = 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $\{(f \circ g)(\hat{y}_k)\} \to 0$. De esta forma, concluimos que la función $f \circ g$ no tiene límite en el punto $(0,0)$.

Más adelante, una vez que hayamos introducido el concepto de continuidad, retomaremos el problema de formular un resultado que relacione la composición de funciones y el concepto de límite. Sin embargo, tomando en cuenta las características del ejemplo anterior, podemos agregar una hipótesis que nos permita formular una proposición referente al límite de la composición de funciones.

Proposición 2.35 *Sean $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $\hat{x}_0 \in (g^{-1}(D))'$, $\hat{l} \in D'$ y $\hat{l}' \in \mathbb{R}^k$ tales que $\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} g(\hat{x}) = \hat{l}$ y $\lim_{\hat{y} \to \hat{l}} f(\hat{y}) = \hat{l}'$. Si existe $r > 0$ tal que $g(\hat{x}) \neq \hat{l}$ para toda $\hat{x} \in (B_r(\hat{x}_0) \setminus \{\hat{x}_0\}) \bigcap g^{-1}(D)$, entonces $f \circ g$ tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} (f \circ g)(\hat{x}) = \hat{l}'.$$

Demostración. Sea $\{\hat{x}_k\} \subset g^{-1}(D) \backslash \{\hat{x}_0\} \subset A \backslash \{\hat{x}_0\}$ tal que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$. Probaremos que $\{(f \circ g)(\hat{x}_k)\} \to \hat{l}'$.

Primero notemos que, como $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_0$ se tiene que $\hat{x}_k \in B_r(\hat{x}_0) \setminus \{\hat{x}_0\}$.

Hacemos $\hat{y}_k = g(\hat{x}_{N_0+k})$; como $\hat{x}_{N_0+k} \in (B_r(\hat{x}_0) \setminus \{\hat{x}_0\}) \bigcap g^{-1}(D)$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces $\{\hat{y}_k\} \subset D \setminus \{\hat{l}\}$.

Por otra parte, como $\{\hat{x}_{N_0+k}\}$ es una subsucesión de $\{\hat{x}_k\}$ y $\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} g(\hat{x}) = \hat{l}$, concluimos que $\{\hat{y}_k = g(\hat{x}_{N_0+k})\}$ converge a $\hat{l}$. De esta forma, como $\lim_{\hat{y} \to \hat{l}} f(\hat{y}) = \hat{l}'$, tenemos que $\{f(\hat{y}_k)\}$ converge a $\hat{l}'$.

De este último hecho se tiene que, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_1$ entonces $\left\| f(\hat{y}_k) - \hat{l}' \right\| < \varepsilon$. Por lo tanto, si hacemos $N = N_0 + N_1$ y tomamos $k \geq N$, se tiene que $k - N_0 \geq N_1$ de modo que

$$\begin{aligned}
\left\| (f \circ g)(\hat{x}_k) - \hat{l}' \right\| &= \left\| f(g(\hat{x}_k)) - \hat{l}' \right\| \\
&= \left\| f(g(\hat{x}_{N_0+(k-N_0)})) - \hat{l}' \right\| \\
&= \left\| f(\hat{y}_{k-N_0}) - \hat{l}' \right\| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

con lo cual concluimos que $\{(f \circ g)(\hat{x}_k)\} \to \hat{l}'$. ■

Aún cuando la conclusión de la proposición anterior asegura la existencia de un límite, se suele usar con más frecuencia para demostrar que una función no tiene límite, como se muestra en el siguiente

Ejemplo 2.36 *Sea*

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}.$$

Mostraremos que esta función no tiene límite en el punto $(0,0)$.

Lo que haremos será "aproximarnos" al punto $(0,0)$ a través de diferentes "curvas", las cuales definiremos por medio de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ (funciones que serán el tema principal del capítulo 3), y que tienen la particularidad de "aproximarse" al punto que nos interesa.

Primero consideraremos una función de la forma $g(t) = (t, mt)$, con $m \neq 0$ arbitrario. Nótese: que $g(t) \neq (0,0)$ para toda $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, que $\lim_{t \to 0} g(t) = (0,0)$ (proposición 2.30), y que su imagen es una recta (de pendiente m) que se "aproxima" al origen $(0,0)$ cuando t se "aproxima" al 0. Si ahora realizamos la composición $f \circ g$ tenemos que

$$(f \circ g)(t) = \frac{t^2 (mt)}{(t^2)^2 + (mt)^2}$$

$$= \frac{mt}{t^2 + m^2}$$

para toda $t \in \mathbb{R}$, *y obtenemos que*

$$\lim_{t \to 0} (f \circ g)(t) = 0.$$

Si además observamos que $f(t, 0) = 0 = f(0, t)$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$, *podemos decir que* f *se "aproxima" a* 0 *cuando nos "aproximamos" al* $(0, 0)$ *a través de cualquier recta.*

Ahora consideremos la función $h(t) = \left(t, t^2\right)$. *En este caso nuevamente la función* h *satisface que* $h(t) \neq (0, 0)$ *para toda* $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, *que* $\lim_{t \to 0} h(t) = (0, 0)$, *y claramente "describe" (o "recorre") la parábola* $y = x^2$, *lo que significa que con esta función nos "aproximamos" al* $(0, 0)$ *a través de esta curva. Si consideramos nuevamente la composición* $f \circ h$, *tenemos que*

$$\begin{aligned} (f \circ h)(t) &= \frac{t^2 t^2}{\left(t^2\right)^2 + (t^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para toda $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, *de modo que ahora tenemos que*

$$\lim_{t \to 0} (f \circ h)(t) = \frac{1}{2}.$$

Con base en estos dos resultados y en la proposición 2.35 podemos concluir que nuestra función f *no tiene límite en el* $(0, 0)$.

Si bien es cierto que definir el concepto de límite a través de sucesiones resulta ser muy intuitivo (y muy útil, sobre todo cuando se trata de probar que una función *no* tiene límite en un punto), también es cierto que esta definición puede resultar un poco "*complicada*" de usar cuando se trata de probar que una función *sí* tiene límite en un punto.

Lo que ahora vamos a hacer será introducir otra forma de definir el concepto de límite (la muy conocida definición $\varepsilon - \delta$) que, entre otras muchas virtudes, resultará ser más sencilla de usar cuando se quiera probar que una función *sí* tiene límite en un punto. Como es de suponerse, probaremos que ambas definiciones resultan ser equivalentes.

Definición 2.37 **($\varepsilon - \delta$)** *Sean* $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *y* $\hat{x}_0 \in A'$. *Decimos que* f *tiene límite en* $\hat{x}_0$ *y que su límite es* $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$, *si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $\|\hat{x} - \hat{x}_0\| < \delta$ *(y* $\hat{x} \in A \setminus \{\hat{x}_0\}$*), entonces* $\left\| f(\hat{x}) - \hat{l} \right\| < \varepsilon$. *Es decir, si para toda bola de radio* $\varepsilon > 0$ *(con centro en* $\hat{l}$*) existe una bola de radio* $\delta > 0$ *(con centro en* $\hat{x}_0$*) tal que, si* $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, *entonces* $f(\hat{x}) \in B_\varepsilon(\hat{l})$ *(o* $f(B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})) \subset B_\varepsilon(\hat{l})$*).*

Una de las ventajas de la definición anterior es que se puede ilustrar geométricamente, como se muestra en la figura 2.11.

Probar que la definición anterior es equivalente a la definición 2.29 es sin duda algo que tenemos que hacer, pero antes mostraremos por medio de un ejemplo la conveniencia de usar esta definición, sobre todo cuando pretendamos demostrar que una función sí tiene límite.

Ejemplo 2.38 *Considere la función*

$$f(x, y, z) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2 + z^4}},$$

que está definida para todo $(x, y, z) \in A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. *Mostraremos, usando la definición 2.37, que esta función tiene límite en el* $\hat{0} = (0, 0, 0) \in A'$ *y que dicho límite es* 0.

Sea pues una cantidad $\varepsilon > 0$; *nuestra tarea es mostrar que existe una cantidad* $\delta > 0$ *(que en general dependerá de la cantidad* ε *dada) para la cual se satisfaga que, si* $\left\| \hat{x} - \hat{0} \right\| < \delta$ *(y* $\hat{x} \in A \setminus \{\hat{0}\}$*), entonces* $|f(\hat{x}) - 0| < \varepsilon$.

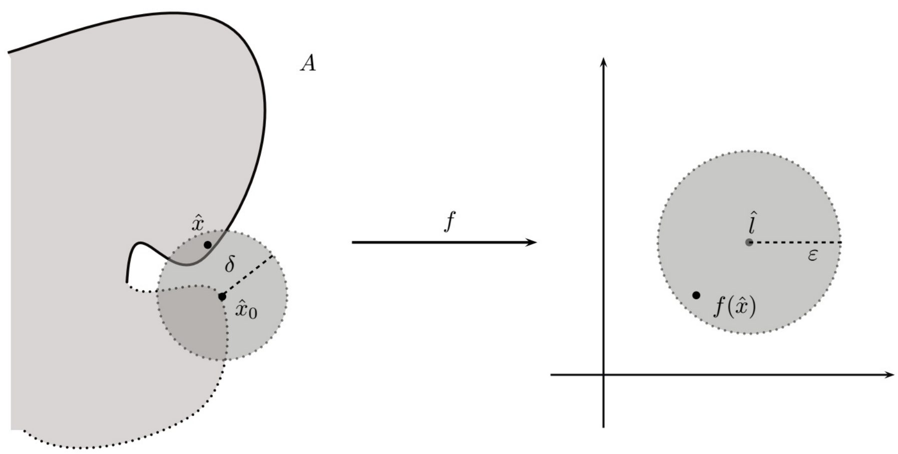

Figura 2.11: La función f tiene límite en $\hat{x}_0 \in A'$ y su límite es $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$ si para toda bola de radio $\varepsilon > 0$ (con centro en $\hat{l}$) existe una bola de radio $\delta > 0$ (con centro en $\hat{x}_0$) tal que, si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, entonces $f(\hat{x}) \in B_\varepsilon(\hat{l})$.

Para lograr esto, como seguramente el lector recordará de sus cursos anteriores de cálculo, lo que hay que buscar es la forma de acotar la cantidad $|f(\hat{x}) - 0| = |f(\hat{x})|$ en términos de la cantidad $\left\|\hat{x} - \hat{0}\right\| = \|\hat{x}\|$, y para ello habrá que echar mano de todo el acervo de desigualdades de las que disponemos. Por ejemplo, recordemos que todo número elevado a una potencia par siempre es no negativo, de tal forma que

$$\sqrt{x^4 + y^4 + z^2} \leq \sqrt{x^4 + y^4 + z^2} + z^4$$

y por lo tanto

$$\frac{1}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2} + z^4} \leq \frac{1}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2}},$$

lo cual es cierto para toda $(x, y, z) \in A$.

Si por otra parte observamos que la cantidad $\sqrt{x^4 + y^4 + z^2}$ es la norma (euclidiana) del vector (x^2, y^2, z) y que esta última siempre es mayor o igual que el valor absoluto de cualquiera de sus coordenadas (problema 3 del capítulo 1), es decir, que

$$y^2 = \left|y^2\right| \leq \left\|(x^2, y^2, z)\right\| = \sqrt{x^4 + y^4 + z^2},$$

entonces concluimos que

$$\frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2}} \leq 1$$

también para toda $(x, y, z) \in A$.

Por tanto, reuniendo las desigualdades anteriores, tenemos que

$$\begin{aligned}
|f(\hat{x}) - 0| &= |f(\hat{x})| \\
&= \left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2} + z^4}\right| \\
&\leq \frac{|x|\, y^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2}} \\
&= |x| \frac{y^2}{\sqrt{x^4 + y^4 + z^2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq |x| \\
&\leq \|(x, y, z)\| \\
&= \left\|\hat{x} - \hat{0}\right\|.
\end{aligned}
$$

Si tomamos $\delta = \varepsilon$ y $\hat{x} \in A$ es tal que $\left\|\hat{x} - \hat{0}\right\| < \delta = \varepsilon$, entonces, como $|f(\hat{x}) - 0| \leq \left\|\hat{x} - \hat{0}\right\|$, tenemos que $|f(\hat{x}) - 0| < \varepsilon$.

De esta forma mostramos que se verifica la definición 2.37 y concluimos nuestro ejemplo.

Una vez hecho el ejemplo anterior, mostraremos que las dos definiciones de límite que hemos dado son equivalentes, lo cual dejaremos formulado en el siguiente

Teorema 2.39 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\hat{x}_0 \in A'$ y $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$. Si f y $\hat{l}$ satisfacen la definición 2.37, entonces satisfacen la definición 2.29. Recíprocamente, si f y $\hat{l}$ satisfacen la definición 2.29, entonces satisfacen la definición 2.37.*

Demostración. Supongamos que f y $\hat{l}$ satisfacen la definición 2.37. Para probar que satisfacen la definición 2.29, tomemos $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ tal que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$; mostraremos que $\{f(\hat{x}_k)\} \to \hat{l}$.

Para probar esto último, tomamos cualquier $\varepsilon > 0$; de la definición 2.37 sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, entonces $f(\hat{x}) \in B_\varepsilon(\hat{l})$.

Ahora, dado que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$, para esta $\delta > 0$ sabemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $k \geq N$, entonces $\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < \delta$, es decir $\hat{x}_k \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$. Así, por la propiedad que tiene δ, tenemos que $f(\hat{x}_k) \in B_\varepsilon(\hat{l})$, es decir que $\left\|f(\hat{x}_k) - \hat{l}\right\| < \varepsilon$ para toda $k \geq N$, con lo que concluimos que $\{f(\hat{x}_k)\} \to \hat{l}$.

Supongamos ahora que f y $\hat{l}$ satisfacen la definición 2.29. En esta parte de la prueba procederemos por el método de la contrapuesta, es decir, que f y $\hat{l}$ no satisfacen la definición 2.37. Esto significa que existe una cantidad $\varepsilon > 0$ tal que, para cualquier cantidad $\delta > 0$ que se tome, siempre existe $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$ con la propiedad de que $f(\hat{x}) \notin B_\varepsilon(\hat{l})$, es decir que $\left\|f(\hat{x}) - \hat{l}\right\| \geq \varepsilon$.

Aplicando lo anterior para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos tomar $\hat{x}_k \in A \setminus \{\hat{x}_0\}$ tal que $\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < 1/k$ y $\left\|f(\hat{x}_k) - \hat{l}\right\| \geq \varepsilon$.

De esta forma obtenemos una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ tal que $\{\hat{x}_k\} \to \hat{x}_0$ (problema 13) para la cual se tiene que $\{f(\hat{x}_k)\}$ no converge a $\hat{l}$ (puesto que $\left\|f(\hat{x}_k) - \hat{l}\right\| \geq \varepsilon > 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$). Como esta propiedad es justo la negación de nuestra hipótesis, con esto concluimos la prueba de la segunda parte del teorema. ■

Además de contar con dos formas equivalentes de definir el concepto de límite, el teorema anterior nos da la posibilidad de probar otra condición (que llamaremos *criterio de Cauchy*) la cual nos permitirá saber si una función tiene límite en un punto, sin necesidad de saber cuál es dicho límite (aunque con más frecuencia este criterio se usará para probar que una función no tiene límite).

Proposición 2.40 (Criterio de Cauchy) *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A'$. La función f tiene límite en $\hat{x}_0$ si y sólo si para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ existe una cantidad $\delta > 0$ tal que si $\hat{x}, \hat{y} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$ entonces $\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| < \varepsilon$*

Demostración. ($\Longrightarrow$) Supongamos que $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$ es el límite de f en $\hat{x}_0$. De acuerdo con la definición $(\varepsilon - \delta)$ de límite, sabemos que para $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$ entonces $\left\|f(\hat{x}) - \hat{l}\right\| < \varepsilon/2$. De esta forma, si $\hat{x}, \hat{y} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$ entonces

$$
\begin{aligned}
\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| &= \left\|(f(\hat{x}) - \hat{l}) + (\hat{l} - f(\hat{y}))\right\| \\
&\leq \left\|f(\hat{x}) - \hat{l}\right\| + \left\|\hat{l} - f(\hat{y})\right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

con lo cual concluimos esta implicación.

($\Longleftarrow$) Para probar esta implicación primero mostraremos que, si $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ que converge a $\hat{x}_0$, entonces la sucesión $\{f(\hat{x}_k)\}$ converge y esto último lo haremos probando que es de Cauchy.

Si tomamos $\varepsilon > 0$, por la hipótesis sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\hat{x}, \hat{y} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$ entonces $\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| < \varepsilon$. Por otra parte, como $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ que converge a $\hat{x}_0$, se tiene que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, l \geq N$, entonces $0 < \|\hat{x}_k - \hat{x}_0\| < \delta$ y $0 < \|\hat{x}_l - \hat{x}_0\| < \delta$, es decir que $\hat{x}_k, \hat{x}_l \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, de donde obtenemos que $\|f(\hat{x}_k) - f(\hat{x}_l)\| < \varepsilon$. Esta última desigualdad prueba que la sucesión $\{f(\hat{x}_k)\}$ es de Cauchy y por lo tanto existe $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$ tal que $\{f(\hat{x}_k)\}$ converge a $\hat{l}$.

Para concluir esta prueba, sólo nos resta probar que, si $\{\hat{y}_k\}$ es cualquier otra sucesión contenida en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ que converge a $\hat{x}_0$, entonces la sucesión $\{f(\hat{y}_k)\}$ también converge a $\hat{l}$.

Procediendo como en el caso de la sucesión $\{\hat{x}_k\}$, sabemos que existe $\hat{l}' \in \mathbb{R}^m$ tal que $\{f(\hat{y}_k)\}$ converge a $\hat{l}'$. Ahora probaremos que $\hat{l} = \hat{l}'$.

Nuevamente, si $\varepsilon > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $\hat{x}, \hat{y} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$ entonces $\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| < \varepsilon/3$. Por otra parte, como las sucesiones $\{\hat{x}_k\}$ y $\{\hat{y}_k\}$ convergen a $\hat{x}_0$, la sucesión $\{f(\hat{x}_k)\}$ converge a $\hat{l}$ y la sucesión $\{f(\hat{y}_k)\}$ converge a $\hat{l}'$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces $\hat{x}_k, \hat{y}_k \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, $\|f(\hat{x}_k) - l\| < \varepsilon/3$ y $\|f(\hat{y}_k) - l'\| < \varepsilon/3$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\hat{l} - \hat{l}'\right\| &= \left\|(\hat{l} - f(\hat{x}_k)) + (f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)) + (f(\hat{y}_k) - \hat{l}')\right\| \\
&\leq \left\|\hat{l} - f(\hat{x}_k)\right\| + \|f(\hat{x}_k) - f(\hat{y}_k)\| + \left\|f(\hat{y}_k) - \hat{l}'\right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $\hat{l} = \hat{l}'$. ■

2.2.3 Continuidad

Como en el caso de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, una de las primeras aplicaciones del concepto de límite está en la formalización del concepto de continuidad de una función.

Dada una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la idea intuitiva de que ésta sea continua consiste en que si $\hat{x}, \hat{y}$ son elementos de su dominio que están "cercanos", entonces sus valores bajo f ($f(\hat{x})$ y $f(\hat{y})$) están "cercanos". Esta idea intuitiva se puede simplificar si dejamos fijo uno de estos puntos, que ahora llamaremos $\hat{x}_0$, y decimos que la función f es "continua" en $\hat{x}_0 \in A$ si para todo $\hat{x} \in A$ que está "cerca" de $\hat{x}_0$ se tiene que $f(\hat{x})$ está "cerca" de $f(\hat{x}_0)$.

Como seguramente el lector ya está intuyendo, esta última expresión se puede formalizar usando el concepto de límite. En efecto, podemos decir que una función f es "continua" en $\hat{x}_0 \in A$ si tiene límite en este punto y su límite es $f(\hat{x}_0)$ (el valor de f en $\hat{x}_0$). Es decir, si

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) = f(\hat{x}_0). \tag{2.4}$$

Aún cuando todo parezca indicar que hemos logrado una "buena" definición de continuidad, es importante precisar algunos aspectos. El primero de ellos es que el concepto de continuidad se definirá para un punto y éste siempre tendrá que ser un elemento de su dominio, es decir, un punto para el cual la función f está definida. El segundo aspecto tiene que ver con el uso del concepto de límite; como se recordará, el límite de una función sólo se define para los puntos de acumulación del dominio de ésta, lo que puede ser un obstáculo ya que, dado $A \subset \mathbb{R}^n$, en general no es cierto que todo elemento de A tiene que ser un punto de acumulación de A (es decir, $A \nsubseteq A'$).

Si dado $\hat{x}_0 \in A$ tenemos la suerte de que éste sea un punto de acumulación de A ($\hat{x}_0 \in A'$), usar la identidad 2.4 para decir que f es continua en $\hat{x}_0$ es sin duda la forma más adecuada de hacerlo. Sólo restaría analizar el caso en que $\hat{x}_0$ no fuera un punto de acumulación de A (aún cuando sí pertenezca a A). Nótese que en este caso, $\hat{x}_0$ sería un punto aislado de A, es decir, un punto de A para el cual existe $r > 0$ con la propiedad de que $B_r(\hat{x}_0) \cap A = \{\hat{x}_0\}$ (ver definición 1.27), lo que significa que el único punto de A que realmente está "cerca" de $\hat{x}_0$ es ¡él mismo!

Pareciera un poco "inútil" tratar de incluir a los puntos aislados del dominio de una función en el tipo de puntos para los cuales se pueda dar la definición de continuidad (lo que por otra parte, tampoco tendría nada de "insensato"). Sin embargo, aún sin buscar lo anterior, si escribimos la identidad 2.4 usando la definición 2.37, notaremos que estos puntos se pueden incluir de manera "natural". En efecto, de acuerdo con esta definición, que se satisfaga la identidad 2.4 va a significar que, para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ existe una cantidad $\delta > 0$ tal que, si $\hat{x} \in A \setminus \{\hat{x}_0\}$ tiene la propiedad de que $\|\hat{x} - \hat{x}_0\| < \delta$, entonces $\|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0)\| < \varepsilon$, es decir que, si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, entonces $f(\hat{x}) \in B_\varepsilon(f(\hat{x}_0))$.

Si ahora observamos que, como ahora sí estamos seguros de que $\hat{x}_0 \in A$, y que las condiciones anteriores se siguen cumpliendo aún cuando $\hat{x}$ sea igual a $\hat{x}_0$, todo parece indicar que, independientemente de qué tipo de punto sea $\hat{x}_0$ con respecto de A (de acumulación o aislado), la siguiente definición es la mejor opción para expresar el hecho de que una función sea continua en un punto de su dominio.

Definición 2.41 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A$. Decimos que f es continua en $\hat{x}_0$ si para cualquier cantidad $\varepsilon > 0$ existe una cantidad $\delta > 0$ tal que, si $\hat{x} \in A$ tiene la propiedad de que $\|\hat{x} - \hat{x}_0\| < \delta$, entonces $\|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0)\| < \varepsilon$. Es decir que, si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap A$, entonces $f(\hat{x}) \in B_\varepsilon(f(\hat{x}_0))$ (o equivalentemente, que $f(B_\delta(\hat{x}_0) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}_0))$).*

Todas las observaciones y afirmaciones que hicimos para "deducir" la definición anterior las dejaremos plasmadas en la siguiente proposición, y aprovechando el teorema 2.39, incluiremos una forma equivalente de expresar la continuidad de una función en un punto, en términos de sucesiones (que bien podría llamarse la "*definición de continuidad por sucesiones*").

Proposición 2.42 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A$.*

1. *Si $\hat{x}_0$ es un punto aislado de A, entonces f es continua en $\hat{x}_0$.*
2. *Si $\hat{x}_0$ es un punto de acumulación de A, se satisface que f es continua en $\hat{x}_0$ si y sólo si f tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*
$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) = f(\hat{x}_0).$$
3. *La función f es continua en $\hat{x}_0$ si y sólo si para toda sucesión $\{\hat{x}_k\}$ contenida en A que converge a $\hat{x}_0$ se tiene que la sucesión $\{f(\hat{x}_k)\}$ converge a $f(\hat{x}_0)$.*

La demostración de esta proposición es muy sencilla y se deja como un problema para el lector.

Otro hecho (que sin duda también resultará evidente para el lector) es la relación que existe entre la continuidad de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un punto $\hat{x}_0 \in A$ y la de sus funciones coordenadas (en el mismo punto).

En efecto, si $f = (f_1, \ldots, f_m)$, es de esperarse que f será continua en $\hat{x}_0 \in A$ si y sólo si f_i es continua en $\hat{x}_0$ para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, propiedad que, a pesar de su "predecibilidad", es muy importante y por lo mismo la dejamos expresada en la siguiente

Proposición 2.43 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A$. La función f es continua en $\hat{x}_0$ si y sólo si f_i es continua en $\hat{x}_0$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Las propiedades del concepto de continuidad relacionadas con la aritmética de las funciones, las dejaremos expresadas en la siguiente proposición. Dada la cercanía de este concepto con el de límite, casi todas las afirmaciones de esta proposición (salvo por el inciso 7) serán una consecuencia inmediata de las correspondientes afirmaciones de la proposición 2.33, en virtud de lo cual su prueba, una vez más, quedará a cargo del lector (incluyendo el inciso 7).

Proposición 2.44 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\tilde{c} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\hat{x}_0 \in A$. Si f, g y $\tilde{c}$ son continuas en $\hat{x}_0$, entonces:*

1. *la función $f + g$ es continua en $\hat{x}_0$*

2. *la función αf es continua en $\hat{x}_0$*
3. *en general, la función $\tilde{c}f$ es continua en $\hat{x}_0$*
4. *la función $f \cdot g$ es continua en $\hat{x}_0$*
5. *si $m = 3$, la función $f \times g$ es continua en $\hat{x}_0$*
6. *si $m = 1$ y $g(\hat{x}_0) \neq 0$, la función f/g es continua en $\hat{x}_0$*
7. *si $\hat{y}_0 = f(\hat{x}_0) \in D \subset \mathbb{R}^m$ y $h : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ es continua en $\hat{y}_0$, entonces $h \circ f$ es continua en $\hat{y}_0$.*

Como el lector habrá notado, dentro de las operaciones entre funciones que acabamos de enlistar en la proposición anterior, ahora sí incluimos a la operación composición (a diferencia de la proposición 2.33). La razón de esto, es que el concepto de continuidad sí se "comporta" bien con esta operación (a diferencia del concepto de límite, como vimos en el ejemplo 2.34).

Lo que ahora queremos destacar es que hay un resultado un poco más general para el cual no se requiere que ambas funciones (las que se vayan a componer) tengan que ser continuas en los correspondientes puntos (como se requiere en el inciso 7 de la proposición anterior). Este resultado es muy importante (y muy útil) y lo dejaremos formulado en la siguiente

Proposición 2.45 *Sean $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$, $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\hat{l} \in D$ y $\hat{x}_0 \in (g^{-1}(D))' \subset A'$. Si $\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} g(\hat{x}) = \hat{l}$ y f es continua en $\hat{l}$, entonces $f \circ g$ tiene límite en $\hat{x}_0$ y además*

$$\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} (f \circ g)(\hat{x}) = f\left(\hat{l}\right) = f\left(\lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} g(\hat{x})\right).$$

Demostración. Usaremos la definición $\varepsilon - \delta$ de límite para hacer esta demostración. Sea $\varepsilon > 0$ arbitraria. De la definición de continuidad sabemos que existe $\delta' > 0$ tal que

$$\text{si } \hat{y} \in B_{\delta'}\left(\hat{l}\right) \cap D \text{ entonces } f(\hat{y}) \in B_\varepsilon\left(f\left(\hat{l}\right)\right) \tag{2.5}$$

y de la definición de límite tenemos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } \hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\}), \text{ entonces } g(\hat{x}) \in B_{\delta'}\left(\hat{l}\right). \tag{2.6}$$

Afirmamos que, si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$, entonces $(f \circ g)(\hat{x}) \in B_\varepsilon\left(f\left(\hat{l}\right)\right)$ (ver figura 2.12). En efecto, dado que $g^{-1}(D) \subset A$, entonces

$$B_\delta(\hat{x}_0) \cap (g^{-1}(D) \setminus \{\hat{x}_0\}) \subset B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\}).$$

de tal forma que, si $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (g^{-1}(D) \setminus \{\hat{x}_0\})$, entonces $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap (A \setminus \{\hat{x}_0\})$. Por lo tanto, de 2.6 se siguee que $g(\hat{x}) \in B_{\delta'}\left(\hat{l}\right)$ y por 2.5 concluimos que $(f \circ g)(\hat{x}) = f(g(\hat{x})) \in B_\varepsilon\left(f\left(\hat{l}\right)\right)$. ■

Con frecuencia se suele decir "coloquialmente" que el resultado anterior nos asegura que "el límite se puede meter dentro (o a través) de una función continua". Esta "propiedad" es de mucha utilidad cuando nos enfrentamos al problema de mostrar que una función tiene límite, como lo haremos ver en el siguiente

Ejemplo 2.46 *Sea*

$$h(x, y) = \cos\left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right).$$

Mostraremos que esta función tiene límite en el punto $(0, 0)$ y calcularemos cuál es su valor.

Dado que la función $f(t) = \cos(t)$ es continua en $\mathbb{R}$, por la proposición 2.45 bastará mostrar que la función

$$g(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

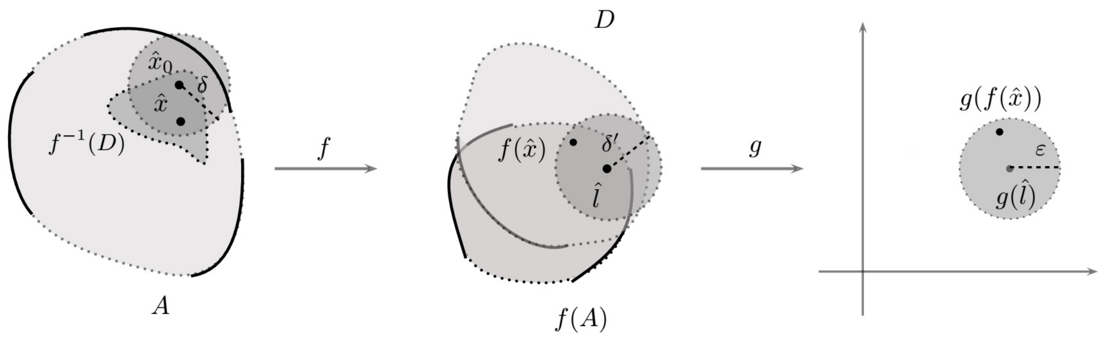

Figura 2.12: "Prueba geométrica" de la proposición 2.45.

tiene límite en el punto $(0,0)$ *y calcular cuánto vale éste. Para ello, obsérvese que, como*

$$\begin{aligned}\left|x^2y\right| &= x^2\,|y| \\ &\leq \left(x^2+y^2\right)\|(x,y)\|,\end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \|(x,y)\|$$

para toda $(x,y)\neq(0,0)$ *y por lo tanto, que*

$$\begin{aligned}|g(x,y)-0| &= \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \\ &\leq \|(x,y)\| \\ &= \|(x,y)-(0,0)\|.\end{aligned}$$

De esta forma, dado $\varepsilon>0$, *si tomamos* $\delta=\varepsilon$ *y* $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *tal que* $0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$, *entonces*

$$|g(x,y)-0| \leq \|(x,y)-(0,0)\| < \delta = \varepsilon,$$

de modo que se satisface la definición 2.37 y concluimos que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Por la proposición 2.45 tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (f\circ g)(x,y) \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos\left(\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \cos\left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right) \\ &= \cos(0) \\ &= 1.\end{aligned}$$

Otra pregunta que resulta interesante con relación a la proposición 2.45 es si las hipótesis sobre las funciones f y g son "intercambiables". Es decir, si ahora suponemos que g es continua en $\hat{x}_0\in A$ y f tiene límite en $\hat{l}=g(\hat{x}_0)\in D'$, ¿se cumple que la función $f\circ g$ tiene límite en $\hat{x}_0$? La respuesta a esta pregunta es negativa y el ejemplo 2.34 de la sección anterior nos sirve como contraejemplo.

Para terminar esta subsección (y antes de pasar a los teoremas "fuertes" de continuidad), definiremos lo que significa que una función sea continua en un subconjunto de su dominio (definición que al lector le resultará del todo "natural"), y probaremos una interesante y útil caracterización de esta propiedad.

Definición 2.47 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $B \subset A$. Decimos que f es continua en (o sobre) B si f es continua en cada punto de B, es decir, si f es continua para cada $\hat{x} \in B$.*

La siguiente caracterización de la continuidad de un función f sobre su dominio A será de gran utilidad y podemos motivarla a partir de la contención que escribimos al final de la definición 2.41. En efecto, recordemos que si f es continua en un punto $\hat{x} \in A$, podemos asegurar que para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B_\delta(\hat{x}) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}))$$

y, por lo tanto, que

$$B_\delta(\hat{x}) \cap A \subset f^{-1}\left(B_\varepsilon(f(\hat{x}))\right).$$

De esta forma, si $V \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto y $\hat{x} \in f^{-1}(V)$, se tiene que $f(\hat{x}) \in V$ de modo que, como V es abierto, existe $\varepsilon_{\hat{x}} > 0$ tal que $B_\varepsilon(f(\hat{x})) \subset V$, y como f es continua en $\hat{x}$ (pues es continua en A), existe $\delta_{\hat{x}} > 0$ tal que

$$B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}) \cap A \subset f^{-1}\left(B_{\varepsilon_{\hat{x}}}(f(\hat{x}))\right).$$

Si hacemos lo anterior para cada $\hat{x} \in f^{-1}(V)$, por las propiedades de la imagen inversa dadas en la proposición 2.13 tendremos que

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{\hat{x}\in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x})\right) \cap A &= \bigcup_{\hat{x}\in f^{-1}(V)} \left(B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}) \cap A\right) \\ &\subset \bigcup_{\hat{x}\in f^{-1}(V)} f^{-1}\left(B_{\varepsilon_{\hat{x}}}(f(\hat{x}))\right) \\ &\subset f^{-1}(V) \\ &\subset \left(\bigcup_{\hat{x}\in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x})\right) \cap A,\end{aligned}$$

es decir, que

$$f^{-1}(V) = \left(\bigcup_{\hat{x}\in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x})\right) \cap A.$$

Si ahora recordamos que las bolas (o vecindades) son conjuntos abiertos, por el problema 22 del capítulo 1 tenemos que

$$U = \bigcup_{\hat{x}\in f^{-1}(V)} B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x})$$

es un conjunto abierto, de tal forma que lo que hemos probado es que $f^{-1}(V) = U \cap A$. Es decir, que la imagen inversa $f^{-1}(V)$ se puede ver como la intersección de un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^n$ con el dominio A de f.

Lo que formularemos y probaremos en la siguiente proposición es que esta propiedad no sólo es una consecuencia necesaria de la continuidad de f en A, sino que también es una condición suficiente para ella.

Proposición 2.48 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. La función f es continua en A si y sólo si para todo conjunto abierto $V \subset \mathbb{R}^m$ existe un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(V) = A \cap U$.*

Demostración. ($\Longrightarrow$) La prueba de esta implicación la hicimos en los párrafos anteriores, así que no la repetiremos. Sólo restaría agregar que, si $f^{-1}(V) = \varnothing$, entonces tomamos $U = \varnothing$.

($\Longleftarrow$) Sea $\hat{x} \in A$ y $\varepsilon > 0$. Como la bola $B_\varepsilon(f(\hat{x})) \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto abierto, por hipótesis existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $f^{-1}(B_\varepsilon(f(\hat{x}))) = U \cap A$. Ahora, dado que $\hat{x} \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(\hat{x}))) = U \cap A$ y U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\hat{x}) \subset U$, de modo que

$$B_\delta(\hat{x}) \cap A \subset U \cap A = f^{-1}(B_\varepsilon(f(\hat{x})))$$

y por lo tanto $f(B_\delta(\hat{x}) \cap A) \subset f(f^{-1}(B_\varepsilon(f(\hat{x})))) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}))$, lo que prueba que f es continua en $\hat{x}$. ■

2.2.4 Teoremas "fuertes" de continuidad

Seguramente el lector estará de acuerdo en que tratándose de funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ dos son los resultados más importantes relacionados con ellas: el *Teorema del Valor Intermedio*, y el *Teorema del valor Máximo (y el valor Mínimo)*, que asegura que toda función continua sobre un intervalo de la forma $[a, b]$ (un subconjunto cerrado y acotado (además de conexo) de $\mathbb{R}$) siempre alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

Sin restarles importancia a estos teoremas, lo que es más relevante aún, son los dos resultados que podemos probar o reformular a partir de ellos (o de los argumentos usados en su prueba). El primero de ellos, que se prueba a partir del Teorema del Valor Intermedio, es aquel que asegura que si se tiene función continua sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ (totalmente arbitrario, sin importar si I es abierto, cerrado, acotado o no acotado), entonces su imagen $f(I) \subset \mathbb{R}$ también es un intervalo.

Si observamos que los intervalos son los únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (problema 41, capítulo 1), el resultado que acabamos de mencionar se podría reformular de la siguiente manera: si f es continua sobre el conjunto $I \subset \mathbb{R}$, e I es conexo, entonces $f(I) \subset \mathbb{R}$ es conexo.

El segundo resultado importante que se puede probar usando los mismos argumentos que se usan para la prueba del Teorema del valor Máximo (y el valor Mínimo) es aquel que asegura que si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado y acotado (aún cuando este conjunto A no sea de la forma $[a, b]$), entonces $f(A) \subset \mathbb{R}$ también es un conjunto cerrado y acotado.

Lo que vamos a hacer en esta subsección es mostrar que los resultados que acabamos de mencionar (para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) se siguen cumpliendo para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Teorema 2.49 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A y $B \subset A$. Si B es conexo, entonces $f(B)$ es conexo.*

Demostración. En esta prueba, además de hacerla por el método de la contrapuesta, usaremos la equivalencia para conjuntos disconexos probada en la proposición 1.48 del capítulo 1. Supongamos entonces que $f(B)$ no es conexo; por la proposición mencionada, sabemos que existen $\tilde{U}, \tilde{V} \subset \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos tales que:

(a) $f(B) \subset \tilde{U} \cup \tilde{V}$,

(b) $f(B) \cap \tilde{U} \neq \varnothing$ y $f(B) \cap \tilde{V} \neq \varnothing$, y

(c) $f(B) \cap \tilde{U} \cap \tilde{V} = \varnothing$.

Por la proposición 2.48 sabemos que existen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos tales que $f^{-1}(\tilde{U}) = A \cap U$ y $f^{-1}(\tilde{V}) = A \cap V$. Afirmamos que U y V satisfacen que:

(1) $B \subset U \cup V$,

(2) $B \cap U \neq \varnothing$ y $B \cap V \neq \varnothing$, y

(3) $B \cap U \cap V = \varnothing$.

Para probar lo anterior usaremos varias de las propiedades de la imagen inversa y la imagen directa formuladas en la proposición 2.13.

Por el inciso (a) de nuestra suposición, sabemos que

$$B \subset f^{-1}(f(B))$$

$$
\begin{aligned}
&\subset f^{-1}(\tilde{U} \cup \tilde{V}) \\
&= f^{-1}(\tilde{U}) \cup f^{-1}(\tilde{V}) \\
&= (A \cap U) \cup (A \cap V) \\
&= A \cap (U \cup V)
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $B \subset U \cup V$, con lo cual probamos el inciso (1).

Ahora, por el inciso (b), como $f(B) \cap \tilde{U} \neq \varnothing$, entonces existe $\hat{x} \in B$ tal que $f(\hat{x}) \in \tilde{U}$. Por tanto, $\hat{x} \in f^{-1}(\tilde{U}) = A \cap U$, de modo que $\hat{x} \in B \cap U$, es decir, $B \cap U \neq \varnothing$. Análogamente se prueba que $B \cap V \neq \varnothing$, con lo cual tenemos probado el inciso (2).

Finalmente, dado que $B \subset A$ y $B \subset f^{-1}(f(B))$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
B \cap U \cap V &= B \cap (U \cap A) \cap (V \cap A) \\
&= B \cap f^{-1}(\tilde{U}) \cap f^{-1}(\tilde{V}) \\
&\subset f^{-1}(f(B)) \cap f^{-1}(\tilde{U}) \cap f^{-1}(\tilde{V}) \\
&= f^{-1}(f(B) \cap \tilde{U} \cap \tilde{V}) \\
&= f^{-1}(\varnothing) \\
&= \varnothing,
\end{aligned}
$$

de donde $B \cap U \cap V = \varnothing$, con lo cual probamos el inciso (3).

Como el lector habrá notado, los incisos (1), (2) y (3), por la misma proposición 2.13, implican que B es disconexo, conclusión con la cual terminamos la prueba. ■

Con base en el teorema anterior, se establece una interesante versión del teorema del valor intermedio para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, resultado que dejamos plasmado en el siguiente corolario y cuya prueba se deja al lector.

Corolario 2.50 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, $B \subset A$ conexo y $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in B$ tales que $f(\hat{x}_1) < f(\hat{x}_2)$. Si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $f(\hat{x}_1) < c < f(\hat{x}_2)$, entonces existe $\hat{x} \in B$ tal que $f(\hat{x}) = c$.*

Como mencionamos al inicio de esta subsección, otro tipo de conjuntos que "preservan" sus características bajo funciones continuas son los conjuntos cerrados y acotados. Este resultado tiene consecuencias muy importantes, en particular las relacionadas con la existencia de valores máximos y mínimos de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, tema que trataremos ampliamente en el capítulo 4.

Teorema 2.51 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A y $B \subset A$. Si B es cerrado y acotado, entonces $f(B)$ es cerrado y acotado.*

Demostración. En la prueba de este teorema jugarán un papel muy importante varios de los resultados que probamos para sucesiones.

Primero probaremos que $f(B)$ está acotado y usaremos nuevamente el método de la contrapuesta. Supongamos entonces que $f(B)$ no está acotado. Bajo este supuesto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\hat{x}_k \in B$ tal que $\|f(\hat{x}_k)\| > k$.

Dado que B está acotado, entonces $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión acotada, de modo que por el teorema 2.28 existe una subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ que converge. Si $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\{\hat{x}_{k_l}\} \to \hat{x}_0$ (cuando $l \to \infty$), por el inciso (a) del problema 29 se tiene que $\hat{x}_0 \in \bar{B}$ y como B es un conjunto cerrado, entonces $B = \bar{B}$ y por lo tanto $\hat{x}_0 \in B$. Ahora, como $\|f(\hat{x}_{k_l})\| > k_l$ para toda $l \in \mathbb{N}$ y $\{k_l\}$ es una sucesión creciente de naturales, se tiene que la sucesión $\{f(\hat{x}_{k_l})\}$ no converge, lo cual contradice el hecho de que f es continua en $\hat{x}_0$.

Para probar que $f(B)$ es un conjunto cerrado mostraremos que $(f(B))' \subset f(B)$. Si $(f(B))' = \varnothing$ la contención es inmediata. Supongamos entonces que $\hat{y}_0 \in (f(B))'$; por el inciso (b) del mismo problema 29, sabemos que existe una sucesión $\{\hat{y}_k\}$ contenida en $f(B)$ tal que $\{\hat{y}_k\} \to \hat{y}_0$, de tal forma que si $\hat{x}_k \in B$ es tal que $f(\hat{x}_k) = \hat{y}_k$, entonces $\{\hat{x}_k\}$, por estar contenida en B, es una sucesión acotada.

Nuevamente, por el teorema 2.28 existe una subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ que converge. Si $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ es tal que $\{\hat{x}_{k_l}\} \to \hat{x}_0$ (cuando $l \to \infty$), por el mismo argumento usado en la primera parte de esta prueba se tiene que $\hat{x}_0 \in B$ y como f es continua en $\hat{x}_0$, entonces $\{f(\hat{x}_{k_l}) = \hat{y}_{k_l}\} \to f(\hat{x}_0)$ (cuando $l \to \infty$).

Por otra parte, dado que $\{\hat{y}_{k_l}\}$ es una subsucesión de $\{\hat{y}_k\}$, entonces $\{\hat{y}_{k_l}\} \to \hat{y}_0$ y como el punto de convergencia de una sucesión es único, se tiene que $\hat{y}_0 = f(\hat{x}_0)$, lo que prueba que $\hat{y}_0 \in f(B)$. ■

Como anunciamos anteriormente, con base en este teorema podemos probar un resultado muy importante que nos proporciona condiciones suficientes para que una función continua de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ "alcance" valores máximos y mínimos sobre un conjunto.

Este resultado lo dejamos formulado en el siguiente corolario y su prueba (¡nuevamente!) se deja al lector.

Corolario 2.52 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A y $B \subset A$. Si $B \neq \varnothing$ es cerrado y acotado, entonces existen $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in B$ tales que $f(\hat{x}_1) \leq f(\hat{x}) \leq f(\hat{x}_2)$ para toda $\hat{x} \in B$. Es decir, f alcanza un valor máximo y un valor mínimo sobre B.*

2.3 Continuidad uniforme

Concluimos este capítulo definiendo el concepto de continuidad uniforme para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$. La forma explícita de esta definición es totalmente equivalente a la de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y expresa la misma propiedad de una función f sobre un conjunto B: a saber, que *para cada cantidad $\varepsilon > 0$ existe una cantidad $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(\hat{x}) \cap B) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}))$ para toda $\hat{x} \in B$*. Es decir, dada una $\varepsilon > 0$ se puede encontrar una $\delta > 0$ que "*sirve*" *para cualquier $\hat{x} \in B$* (en el sentido de que $f(B_\delta(\hat{x}) \cap B) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}))$), propiedad que sin duda "*dice*" que, además de que f es continua en cada $\hat{x} \in B$, esta continuidad tiene cierta cualidad de "*uniformidad*" sobre este conjunto.

Definición 2.53 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $B \subset A$. Decimos que f es uniformemente continua sobre B si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ con la propiedad de que: si $\hat{x}, \hat{y} \in B$ son tales que $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \delta$, entonces $\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| < \varepsilon$. Es decir, $f(B_\delta(\hat{x}) \cap B) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}))$ para toda $\hat{x} \in B$.*

Como ha sucedido con los conceptos de límite y de continuidad para funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, que se pueden caracterizar en términos de los conceptos correspondientes de sus funciones coordenadas, para el caso de la continuidad uniforme sucede lo mismo, propiedad que vamos a dejar expresada en la siguiente proposición y cuya prueba ... (¡adivine el lector!).

Proposición 2.54 *Sean $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $B \subset A$. La función f es uniformemente continua sobre B si y sólo si cada función f_i es uniformemente continua sobre B, para $i \in \{1, \ldots, m\}$.*

Como mencionamos en el comentario previo a la definición 2.53, toda función que es uniformemente continua sobre un conjunto A también es continua sobre el mismo conjunto, hecho que dejamos plasmado en la siguiente proposición y cuya veracidad es tan inmediatamente clara, que omitiremos su prueba.

Proposición 2.55 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Si f es uniformemente continua sobre A, entonces f es continua en A.*

Como seguramente el lector tendrá presente para el caso de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, el recíproco de la proposición anterior es falso, situación que se repite para las funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, como lo mostraremos en el siguiente

Ejemplo 2.56 *Sea*

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{1}{\|(x, y)\|} \end{aligned}$$

con $(x, y) \in A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Mostraremos en general que, si $B \subset A$ es tal que $(0, 0) \in B'$, entonces f no es uniformemente continua en B.

Este ejemplo, además de mostrar que el recíproco de la proposición 2.55 no se satisface, tendrá el mérito de exhibir un método para probar que una función no es uniformemente continua sobre un conjunto.

De acuerdo con la definición 2.53, para probar que f no es uniformemente continua sobre el conjunto B es necesario mostrar que existe una cantidad específica $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier $\delta > 0$, siempre se pueden encontrar puntos $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in B$ tales que $\|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\| < \delta$ y sin embargo $|f(\hat{x}_1) - f(\hat{x}_2)| \geq \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon = 1$ y sea $\delta > 0$ arbitrario. Como $(0,0) \in B'$ existe $\hat{x}_1 \in B$ tal que

$$0 < \|\hat{x}_1\| = \|\hat{x}_1 - (0,0)\| < \delta/2$$

y por la misma razón, existe $\hat{x}_2 \in B$ tal que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_2\| &= \|\hat{x}_2 - (0,0)\| \\ &< \frac{\|\hat{x}_1\|}{\|\hat{x}_1\| + 1} \\ &< \|\hat{x}_1\|, \end{aligned}$$

de tal forma que $0 < \|\hat{x}_2\| < \|\hat{x}_1\|$. Por lo tanto, $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in B$ son tales que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_1 - \hat{x}_2\| &\leq \|\hat{x}_1\| + \|\hat{x}_2\| \\ &< 2\|\hat{x}_1\| \\ &< \delta \end{aligned}$$

y además tienen la propiedad de que

$$\begin{aligned} |f(\hat{x}_1) - f(\hat{x}_2)| &= \left| \frac{1}{\|\hat{x}_1\|} - \frac{1}{\|\hat{x}_2\|} \right| \\ &= \frac{1}{\|\hat{x}_2\|} - \frac{1}{\|\hat{x}_1\|} \\ &> \frac{\|\hat{x}_1\| + 1}{\|\hat{x}_1\|} - \frac{1}{\|\hat{x}_1\|} \\ &= 1, \end{aligned}$$

que es lo que deseábamos probar.

El ejemplo anterior también tiene la virtud de mostrar el tipo de características que deben de tener una función f y un conjunto B, si se desea concluir que f no es uniformemente continua sobre B.

En efecto, para concluir lo anterior basta con mostrar que en el conjunto B existen puntos tan cercanos como se quiera, tales que sus imágenes bajo la función f se "alejan" entre ellas (o permanecen a una distacia mayor que una constante). Y esto es justo lo que sucede con aquellos puntos que están "cerca" del $(0,0)$ en el ejemplo anterior, en donde, si evaluamos a f en puntos cada vez más cercanos a este punto, los valores que se obtienen se hacen cada vez más grandes (y están más "alejados" entre ellos).

Por otra parte, en el problema 63 se pide al lector probar que la misma función f del ejemplo anterior sí es uniformemente continua sobre cualquier subconjunto B de su dominio, siempre y cuando se satisfaga que el $(0,0)$ no sea punto de acumulación de B.

Con esta prueba se mostrará que la continuidad uniforme es un concepto que depende no sólo de la función que estemos tratando, sino también del conjunto sobre el cual la estemos considerando. La misma función puede ser uniformemente continua sobre algunos conjuntos, y no serlo sobre otros. No tiene sentido afirmar que una función es (o no es) uniformemente continua, si no se menciona un conjunto sobre el cual se pretende que lo sea (o que no lo sea).

Regresando al recíproco de la proposición 2.55, dado que a la función involucrada no le podemos pedir algo más que ser continua, la opción es pedirle algunas características al conjunto sobre el cuál queremos que ésta sea uniformemente continua. Una manera de dar con estas características (que en matemáticas suele dar sus frutos), consiste en intentar hacer la prueba y sobre la marcha ubicar qué es lo que se va "necesitando". ¡Manos a la obra!

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con f continua sobre A, y una cantidad $\varepsilon > 0$ arbitraria. La continuidad de f en cada punto de $\hat{x} \in A$ nos asegura que para cada uno de ellos existe $\delta_{\hat{x}} > 0$ tal que $f(B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}))$.

Sin duda que nuestro primer impulso para encontrar una sola $\delta > 0$ para la cual la contención anterior se cumpla para toda $\hat{x} \in A$, sería tomar "la mínima" (o el ínfimo, para ser más precisos) de entre todas las $\delta_{\hat{x}}$, pero a estas alturas ya sabemos que "esa mínima" (o el ínfimo) de todas ellas no tiene por qué ser mayor que cero. Ante esta situación, vale la pena observar lo siguiente: el conjunto A siempre está contenido (o queda "cubierto") por la unión de todas las vecindades $B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x})$, es decir

$$A \subset \bigcup_{\hat{x} \in A} B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}).$$

Más aún, podemos tomar la mitad de cada uno de los radios $\delta_{\hat{x}}$ (o la tercera parte, o la cuarta parte, ¡o cualquier otra cantidad menor!) y se sigue cumpliendo que

$$A \subset \bigcup_{\hat{x} \in A} B_{\frac{\delta_{\hat{x}}}{2}}(\hat{x}).$$

Si de entre todas estas vecindades (o bolas) se puede encontrar un número finito de ellas que sigan teniendo la propiedad de que "cubren" a A, es decir que existen $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_k \in A$ tales que

$$A \subset B_{\frac{\delta_{\hat{x}_1}}{2}}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{\delta_{\hat{x}_k}}{2}}(\hat{x}_k),$$

entonces podemos elegir $\delta = \min\{\delta_{\hat{x}_1}/2, \ldots, \delta_{\hat{x}_k}/2\}$ (la cual sí será mayor que 0, puesto que ahora sí estamos tomando el mínimo de un conjunto finito), cantidad para la cual se va a satisfacer el siguiente hecho: si $\hat{x}, \hat{y} \in A$ son tales que $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \delta$, entonces existe $j \in \{1, \ldots, k\}$ tal que

$$\hat{x}, \hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}_j}}(\hat{x}_j),$$

es decir, que $\hat{x}$ y $\hat{y}$ pertenecen a la misma vecindad.

La afirmación anterior (de la que más adelante daremos su prueba) resulta ser muy importante, puesto que ahora, dado que $f(B_{\delta_{\hat{x}_j}}(\hat{x}_j) \cap A) \subset B_\varepsilon(f(\hat{x}_j))$, por una sencilla aplicación de la desigualdad del triángulo, tendremos que

$$\begin{aligned}
\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| &= \|(f(\hat{x}) - f(\hat{x}_j)) + (f(\hat{x}_j) - f(\hat{y}))\| \\
&\leq \|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_j)\| + \|f(\hat{x}_j) - f(\hat{y})\| \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto, ya que ε fue una cantidad arbitraria, podremos concluir que ¡f es uniformemente continua!

Como seguramente el lector habrá notado, la hipótesis que resulta determinante en la argumentación que acabamos de dar está en el supuesto de que, para cada familia (o conjunto) de vecindades $\left\{B_{\delta_{\hat{x}}/2}(\hat{x}) \mid \hat{x} \in A\right\}$ que "cubren" al conjunto A (familia de vencindades que depende de cada cantidad $\varepsilon > 0$ que se tome), existe una subfamilia *finita* que sigue teniendo la propiedad de "cubrir" a A. Los conjuntos que tienen esta propiedad (o una equivalente, en donde las vecindades se sustituyen por conjuntos abiertos arbitrarios), reciben el nombre de *conjuntos compactos*, los cuales introducimos en la siguiente

Definición 2.57 *Sean $K \subset \mathbb{R}^n$ y $\{U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \in I\}$ una familia de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$ indexada por un conjunto I. Decimos que:*

1. *la familia de subconjuntos $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \in I\}$ es una cubierta (abierta) de K si*

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

2. *el conjunto K es un conjunto compacto si toda cubierta (abierta) $\mathcal{U} = \{U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \mid \alpha \in I\}$ de K tiene una subcubierta finita, es decir, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ tales que*

$$K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}.$$

Con base en esta definición, ya estamos en condiciones de formular un resultado que da respuesta a la pregunta que hicimos sobre el recíproco de la proposición 2.55, el cual dejaremos plasmado en el siguiente

Teorema 2.58 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $K \subset A$. Si f es continua sobre K y K es un conjunto compacto, entonces f es uniformemente continua sobre K.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua para cada $\hat{x} \in K$, sabemos que existe $\delta_{\hat{x}} > 0$ tal que $f(B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}) \cap K) \subset B_{\varepsilon/2}(f(\hat{x}))$. Dado que la familia de vecindades $\mathcal{U} = \{B_{\delta_{\hat{x}}/2}(\hat{x}) \mid \hat{x} \in K\}$ es una cubierta abierta de K, sabemos que existen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k \in K$ tales que

$$K \subset B_{\frac{\delta_{\hat{x}_1}}{2}}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{\frac{\delta_{\hat{x}_k}}{2}}(\hat{x}_k). \tag{2.7}$$

Tomamos

$$\delta = \min\left\{\frac{\delta_{\hat{x}_1}}{2}, \dots, \frac{\delta_{\hat{x}_k}}{2}\right\} > 0$$

y sean $\hat{x}, \hat{y} \in K$ tales que $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \delta$. Por la contención 2.7 sabemos que existe $j \in \{1, \dots, k\}$ tal que

$$\hat{x} \in B_{\frac{\delta_{\hat{x}_j}}{2}}(\hat{x}_j),$$

y como $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \delta \leq \delta_{\hat{x}_j}/2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\hat{y} - \hat{x}_j\| &= \|(\hat{y} - \hat{x}) + (\hat{x} - \hat{x}_j)\| \\
&\leq \|\hat{y} - \hat{x}\| + \|\hat{x} - \hat{x}_j\| \\
&< \delta + \frac{\delta_{\hat{x}_j}}{2} \\
&\leq \delta_{\hat{x}_j},
\end{aligned}$$

de donde $\hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}_j}}(\hat{x}_j)$. Así, como $\hat{x}, \hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}_j}}(\hat{x}_j) \cap K$ concluimos que

$$\begin{aligned}
\|f(\hat{x}) - f(\hat{y})\| &= \|(f(\hat{x}) - f(\hat{x}_j)) + (f(\hat{x}_j) - f(\hat{y}))\| \\
&\leq \|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_j)\| + \|f(\hat{x}_j) - f(\hat{y})\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

y por lo tanto, que f es uniformemente continua sobre K. ■

No podemos ignorar que al lector le parecerá un tanto "mágica" la forma en que hemos introducido el concepto de conjunto compacto, razón por la cual dedicaremos los últimos resultados de esta sección (¡y de este capítulo!) a establecer una caracterización (en $\mathbb{R}^n$) muy importante de este tipo de conjuntos.

En efecto, existe un conocido y muy importante teorema que da una caracterización de los conjuntos compactos, el teorema de Heine-Borel[3], el cual establece que en $\mathbb{R}^n$, los conjuntos compactos no son más que nuestros muy conocidos conjuntos ¡cerrados y acotados!

Teorema 2.59 (de Heine-Borel) *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. K es un conjunto compacto si y sólo si K es un conjunto cerrado y acotado.*

[3]Heinrich Eduard Heine (16 de marzo de 1821, Berlin–21 de octubre de 1881, Halle). Heine es conocido por sus resultados sobre funciones especiales y en análisis real. En particular, escribió un importante tratado sobre funciones armónicas esféricas y funciones de Legendre. También investigó series hipergeométricas básicas e introdujo la fórmula Mehler–Heine.

Félix Édouard Justin Émile Borel (7 de enero de 1871–3 de Febrero 1956) fue un matemático y político francés. Como matemático, es conocido por su trabajo fundacional en las áreas de teoría de la medida y probabilidad. (fuente: Wikipedia).

Demostración. ($\Longrightarrow$) Primero mostraremos que K es un conjunto acotado. Para ello, consideremos la familia $\mathcal{U}=\{B_k(\hat{0}) \mid k \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Dado que

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k(\hat{0}) = \mathbb{R}^n,$$

entonces $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de K, de modo que existen $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$ tales que

$$K \subset B_{k_1}(\hat{0}) \cup \cdots \cup B_{k_l}(\hat{0}),$$

de tal forma que, si $N = \max\{k_1, \ldots, k_l\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} K &\subset B_{k_1}(\hat{0}) \cup \cdots \cup B_{k_l}(\hat{0}) \\ &= B_N(\hat{0}), \end{aligned}$$

de donde concluimos que K está acotado.

Para probar que K es cerrado, mostraremos que $K^c := \mathbb{R}^n \setminus K$ es un conjunto abierto. Sea $\hat{x} \in \mathbb{R}^n \setminus K$ y para cada $k \in \mathbb{N}$ hacemos $U_k = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{1/k}(\hat{x})}$; dado que $\overline{B_{1/k}(\hat{x})} = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{y} - \hat{x}\| \leq 1/k\}$ es un conjunto cerrado, U_k es un conjunto abierto, y como

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_{1/k}(\hat{x})} = \{\hat{x}\},$$

se tiene que

$$\begin{aligned} K &\subset \mathbb{R}^n \setminus \{\hat{x}\} \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{B_{1/k}(\hat{x})} \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{1/k}(\hat{x})}\right) \\ &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k \end{aligned}$$

de tal forma que $\mathcal{U} = \{U_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, existen $k_1, \ldots, k_l \in \mathbb{N}$ tales que

$$\begin{aligned} K &\subset U_{k_1} \cup \cdots \cup U_{k_l} \\ &= \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{1/k_1}(\hat{x})}\right) \cup \cdots \cup \left(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{1/k_l}(\hat{x})}\right) \\ &= \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{1/N}(\hat{x})} \end{aligned}$$

en donde $N = \max\{k_1, \ldots, k_l\}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} B_{1/N}(\hat{x}) &\subset \overline{B_{1/N}(\hat{x})} \\ &\subset \mathbb{R}^n \setminus K, \end{aligned}$$

con lo que concluimos que $\mathbb{R}^n \setminus K$ es abierto y por lo tanto, que K es cerrado.

($\Longleftarrow$) Supongamos ahora que $K \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado. Para esta implicación procederemos por contradicción. Supongamos entonces que K no es compacto. Bajo este supuesto, entonces debe existir una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ de K tal que ningún número finito de elementos de $\mathcal{U}$ sigue cubriendo a K. Ahora, por el problema 21 del capítulo 1, sabemos que cada U_α se puede expresar como la unión de bolas (o vecindades) con centro en un punto de $\mathbb{Q}^n$ y radio racional.

Dado que $\mathbb{Q}^n$ y los racionales (positivos) son conjuntos numerables, entonces la familia $\mathcal{V}$ de todas las vecindades de este tipo que son necesarias para expresar a todos los U_α como unión de éstas, también es numerable, y por lo tanto existe una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ de puntos en $\mathbb{Q}^n$ y una sucesión $\{r_k\}$ de números racionales positivos tales que la familia de bolas $\mathcal{V} = \{B_{r_k}(\hat{x}_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ satisface las siguientes condiciones:

1. para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha \in I$ tal que $B_{r_k}(\hat{x}_k) \subset U_\alpha$, y
2. $$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\hat{x}_k) = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$

Nótese que, dado que no existe un número finito de elementos de $\mathcal{U}$ que cubra a K, por el inciso 1 tampoco existe un número finito de elementos de $\mathcal{V}$ que cubra a K; y por el inciso 2, dado que $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de K, $\mathcal{V}$ también es una cubierta abierta de K.

Ahora, para cada $k \in \mathbb{N}$, hacemos

$$A_k = (\mathbb{R}^n \setminus (B_{r_1}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\hat{x}_k))) \cap K.$$

Obsérvese que estos conjuntos A_k satisfacen las siguientes condiciones, para cada $k \in \mathbb{N}$:

a. $A_k \neq \varnothing$ (recuerde que no existe un número finito de elementos de $\mathcal{V}$ que cubra a K),

b. $A_{k+1} \subset A_k$ (pues $B_{r_1}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\hat{x}_k) \subset B_{r_1}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\hat{x}_k) \cup B_{r_{k+1}}(\hat{x}_{k+1})$), y

c. A_k es cerrado y acotado (es la intersección de dos conjuntos cerrados, uno de los cuales, K, está acotado)

Por tanto, por el problema 35 del capítulo 1, se tiene que

$$\begin{aligned}
\varnothing \neq \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k
&= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus (B_{r_1}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\hat{x}_k))) \cap K \\
&= \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} (\mathbb{R}^n \setminus (B_{r_1}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\hat{x}_k))) \right) \cap K \\
&= \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_{r_1}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{r_k}(\hat{x}_k)) \right) \cap K \\
&= \left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\hat{x}_k) \right) \cap K.
\end{aligned}$$

Por otra parte, como $\mathcal{V} = \{B_{r_k}(\hat{x}_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ también es una cubierta de K, se debe tener que

$$K \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\hat{x}_k)$$

y por tanto, que

$$\left(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{r_k}(\hat{x}_k) \right) \cap K = \varnothing.$$

Con esta contradicción concluimos nuestra prueba. ■

Como seguramente el lector recordará, los conjuntos cerrados y acotados son "viejos conocidos" para nosotros, pues junto con los conjuntos conexos, son el tipo de conjuntos que "preservan" sus características bajo funciones continuas, resultado que dejamos formulado en el teorema 2.51. De esta forma, y como una consecuencia inmediata del teorema de Heine-Borel, podemos reescribir el teorema 2.51 diciendo ahora que los conjuntos compactos también se "preservan" bajo funciones continuas.

Aunque no haría falta hacer ninguna prueba de este hecho, haremos una muy sencilla, en la que sólo usaremos la ("singular") caracterización de la continuidad de una función dada en la proposición 2.48, y algunas propiedades elementales de la imagen inversa establecidas en la proposición 2.13.

Teorema 2.60 *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A y $K \subset A$. Si K es un conjunto compacto, entonces $f(K)$ es es un conjunto compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha \mid \alpha \in I\}$ una cubierta (de abiertos en $\mathbb{R}^m$) de $f(K)$. Por la proposición 2.48, sabemos que para cada $V_\alpha \in \mathcal{V}$ existe $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $f^{-1}(V_\alpha) = U_\alpha \cap A$. Ahora, dado que

$$\begin{aligned} K &\subset f^{-1}(f(K)) \\ &\subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha\right) \\ &= \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(V_\alpha) \\ &= \bigcup_{\alpha\in I} (U_\alpha \cap A) \\ &= \left(\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha\right) \cap A \\ &\subset \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha \end{aligned}$$

se tiene que $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in I$ tales que

$$K \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}.$$

Ahora, como $K \subset A$, tenemos que

$$\begin{aligned} K &\subset (U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}) \cap A \\ &= (U_{\alpha_1} \cap A) \cup \cdots \cup (U_{\alpha_k} \cap A) \\ &= f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_k}) \end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} f(K) &\subset f\left(f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_k})\right) \\ &= f(f^{-1}(V_{\alpha_1})) \cup \cdots \cup f(f^{-1}(V_{\alpha_k})) \\ &\subset V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_k}, \end{aligned}$$

con lo que concluimos que $f(K)$ es compacto. ■

2.4 Problemas

1. Considere las siguientes funciones definidas para algún subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. En cada caso, identifique al conjunto A y haga un esbozo de su gráfica.

   i) $f(x,y) = x^2 + y^2$ *ii)* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2}$ *iii)* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

   iv) $f(x,y) = xy$ *v)* $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ *vi)* $f(x,y) = x^2 - y^2$

2. Sean $g : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Determine el dominio (y describa o esboce la gráfica) de las siguientes funciones en términos del dominio (de la gráfica) de g:

   i) $f(x,y) = g(x,y) + k$ *ii)* $f(x,y) = kg(x,y)$

   iii) $f(x,y) = g(-x,-y)$ *iv)* $f(x,y) = g(x-x_0, y-y_0)$

3. Determine los conjuntos de nivel de cada una de las siguientes funciones:

$$i)\ f(x,y) = x^2 - y^2 \quad ii)\ f(x,y) = 2xy \quad iii)\ f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 \quad iv)\ f(x,y,z) = yz$$

4. Determine cuál es el conjunto $f(A)$, si:

   (a) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), x)$ y $A = \mathbb{R}^2$

   (b) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = \left(x^2\cos(y), x^2\operatorname{sen}(y), x^2\right)$ y $A = \mathbb{R}^2$

   (c) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = \left(x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), x^2\right)$ y $A = \mathbb{R}^2$

   (d) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = (a\cos(x), a\operatorname{sen}(x), y)$, $a > 0$, y $A = [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$

   (e) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como

   $$f(x,y) = (r\cos(x)\operatorname{sen}(y), r\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), r\cos(y))$$

   $r > 0$, y $A = [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \subset \mathbb{R}^2$

   (f) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como

   $$f(x,y) = \left(\sqrt{x^2+1}\cosh(y), \sqrt{x^2+1}\operatorname{senh}(y), x\right)$$

   y $A = \mathbb{R}^2$

   (g) la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ está definida como $f(x,y) = \left(x+y, x-y, x^2-y^2\right)$ y $A = \mathbb{R}^2$.

5. Encuentre una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ cuya imagen coincida con el elipsoide

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$$

6. Considere las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y) = (x\operatorname{sen}(y), x\cos(y))$; ¿cuál es la imagen bajo esta función de las rectas de la forma $x = c$ y $y = d$, con c y d cualesquiera números reales?

   (b) $f(x,y) = (e^x\operatorname{sen}(y), e^x\cos(y))$; ¿cuál es la imagen bajo esta función de las rectas de la forma $x = c$ y $y = d$, con c y d cualesquiera números reales?

   (c) $f(x,y,z) = (x\cos(y), x\operatorname{sen}(y), z)$; ¿cuál es la imagen bajo esta función de los planos de la forma $x = c$, $y = d$ y $z = k$, con c, d y k cualesquiera números reales?

   (d) $f(x,y,z) = (x\operatorname{sen}(y)\cos(z), x\operatorname{sen}(y)\operatorname{sen}(z), x\cos(y))$; ¿cuál es la imagen bajo esta función de los planos de la forma $x = c$, $y = d$ y $z = k$, con c, d y k cualesquiera números reales?

7. Sean $g = (g_1, g_2), h : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definidas como sigue:

$$g_1(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$g_2(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0 \text{ y } y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{si } x < 0 \text{ y } y < 0 \end{cases}$$

y $h(x,y) = g(x, y + \pi/2)$, en donde arctan toma sus valores entre $-\pi/2$ y $\pi/2$.

(a) determine cuáles son los conjuntos $g(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ y $h(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

(b) pruebe que $(f \circ g)(x,y) = (x,y) = (f \circ h)(x,y)$ para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

(c) si f es la función definida en el inciso (a) del problema 6, ¿para cuáles $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se satisface que $(g \circ f)(x,y) = (x,y)$? ¿para cuáles $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se satisface que $(h \circ f)(x,y) = (x,y)$?

8. Pruebe la proposición 2.13 y de ejemplos de funciones en los que las contenciones de los incisos $7, 8, 9$ y 10 sean propias.

9. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pruebe que para toda $c \in \mathbb{R}$ existe $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $N_c(f) = N_0(h)$.

10. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

    (a) pruebe que existe $H : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $G_f = H(A)$.

    (b) pruebe que existe $h : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ tal que $G_f = N_0(h) = h^{-1}(\{0\})$.

11. Decimos que $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función lineal, si $L(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) = \alpha L(\hat{x}) + \beta L(\hat{y})$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y para todos $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

    (a) $L(\hat{0}) = \hat{0}$

    (b) si $\hat{c} \in \mathbb{R}^m$, la función $\hat{c} \cdot L$ (ver inciso 3 de la definición 2.2) es una función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$

    (c) la función constante cero (de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$) es la única función constante que es lineal

    (d) existe $M \geq 0$ tal que $\|L(\hat{x})\| \leq M \|\hat{x}\|$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$

    (e) si $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función lineal, entonces la gráfica de L es un plano que pasa por el origen

    (f) cualquier plano cuya ecuación sea de la forma

    $$Ax + By + Cz = 0$$

    con $C \neq 0$, coincide con ser la gráfica de alguna función lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (de las variables x y y).

    (g) si $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, con L diferente de la función constante cero, entonces cualquier conjunto de nivel de L es un plano.

12. Determine cuáles de las siguientes sucesiones convergen y cuál es su punto de convergencia (si es que convergen)

    i)) $\{\hat{x}_k = (k \operatorname{sen}(1/k), (1 + 1/k)^k)\}$

    ii) $\{\hat{x}_k = (\operatorname{sen}(k)/k, (1 + k)^{1/k})\}$

    iii) $\{\hat{x}_k = ((a^k + b^k)^{1/k}, kc^k, (-1)^k(1 + 1/k))\}$

    iv) $\{\hat{x}_k = ((k^2 + 1)^{1/8} - (k + 1)^{1/4}, \frac{k}{k+1} - \frac{k+1}{k})\}$

13. Pruebe que una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ converge al punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ si y sólo si la sucesión de números reales $\{\|\hat{x}_k - \hat{x}_0\|\}$ converge a 0.

14. Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ que converge al punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que la sucesión de números reales $\{\|\hat{x}_k\|\}$ converge a $\|\hat{x}_0\|$. ¿Es cierto lo recíproco para cualquier $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$?

15. En la definición 2.16 sustituya la norma euclideana por la norma uno y la norma infinito y pruebe que la proposición 2.17 sigue siendo cierta con cada una de ellas. Con base en lo anterior, pruebe que todas estas definiciones de convergencia son equivalentes.

16. Pruebe la proposición 2.18, usando la proposición 2.17 y sin usar dicha proposición.

17. Pruebe la proposición 2.20.

18. En la definición 2.19 sustituya la norma euclideana por la norma uno y la norma infinito y pruebe que la proposición 2.20 sigue siendo cierta con cada una de ellas. Con base en lo anterior, pruebe que todas estas definiciones son equivalentes.

19. Pruebe, sin usar la proposición 2.17, la proposición 2.23 (*sugerencia*: recuerde (o pruebe) que si $\{k_l\}$ es una sucesión creciente de números naturales (es decir que $k_l < k_{l+1}$ para toda $l \in \mathbb{N}$), entonces $l \leq k_l$ para toda $l \in \mathbb{N}$).

20. Sea $\left\{\hat{x}_k = \left(x_k^{(1)}, \ldots, x_k^{(n)}\right)\right\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{\hat{x}_k\}$ está acotada si y sólo si $\{x_k^{(i)}\}$ está acotada para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$.

21. Pruebe que, si $\{\hat{x}_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, entonces cualquier subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ de $\{\hat{x}_k\}$, también es de Cauchy.

22. Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Pruebe, directamente de la definición, que:

    (a) la sucesión $\{\hat{x}_k\}$ está acotada

    (b) si el rango de $\{\hat{x}_k\}$ es finito, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{x}_k = \hat{x}_0$ para toda $k \geq N$

    (c) si $\{\hat{x}_{k_l}\}$ es una subsucesión de $\{\hat{x}_k\}$ que converge a $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces $\{\hat{x}_k\}$ converge a $\hat{x}_0$.

23. Pruebe el corolario 2.21 sin usar la proposición 2.20 (*sugerencia*: para probar que la condición de Cauchy es suficiente para la convergencia, use el problema anterior y el teorema de Bolzano-Weierstrass).

24. Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ cuyo rango A es finito. Pruebe que existe $\hat{y} \in A$ y una subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ de $\{\hat{x}_k\}$ tal que $\hat{x}_{k_l} = \hat{y}$ para toda $l \in \mathbb{N}$.

25. Sea $\{\hat{x}_k\}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ cuyo rango A es infinito. Pruebe que:

    (a) si $\hat{x}_0$ es un punto de acumulación de A, entonces existe una subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ de $\{\hat{x}_k\}$ que converge a $\hat{x}_0$.

    (b) si $\{\hat{x}_k\}$ converge al punto $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces $\hat{x}_0$ es el único punto de acumulación de A.

26. Determine si la siguientes proposiciones son falsas o verdaderas. Pruebe sus respuestas.

    (a) si una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ es tal que su rango tiene un único punto de acumulación, entonces $\{\hat{x}_k\}$ es convergente

    (b) existe una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$ no convergente que tiene una única subsucesión convergente.

27. Pruebe, usando el teorema de Bolzano-Weierstrass y sin usar el caso real, el teorema 2.28 (*sugerencia*: analice dos casos: cuando el rango de $\{\hat{x}_k\}$ es finito, en cuyo caso será útil el problema 24, y cuando el rango de $\{\hat{x}_k\}$ es infinito, en cuyo caso será útil el teorema de Bolzano-Weierstrass y el inciso (b) del problema 25).

28. Pruebe, sin usar el teorema de Bolzano-Weierstrass y el caso real, el teorema 2.28 (*sugerencia*: use que los naturales son infinitos y el teorema de los rectángulos anidados, "imitando" el método de la cacería del león usado en la prueba del teorema de Bolzano-Weierstrass).

29. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

    (a) $\hat{x}_0 \in \bar{A}$ si y sólo si existe una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ en A tal que $\{\hat{x}_k\}$ converge a $\hat{x}_0$

    (b) $\hat{x}_0 \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $\{\hat{x}_k\}$ en $A \setminus \{\hat{x}_0\}$ tal que $\{\hat{x}_k\}$ converge a $\hat{x}_0$

    (c) si $\hat{x}_0$ es un punto aislado de A y $\{\hat{x}_k\} \subset A$ es una sucesión que converge a $\hat{x}_0$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\hat{x}_k = \hat{x}_0$ para toda $k \geq N$.

30. Pruebe la proposición 2.30.

31. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}$.

(a) Defina el concepto de límite lateral (por la izquierda y por la derecha) de f en x_0; es decir, defina lo que significa que $\hat{l} \in \mathbb{R}^n$ sea tal que

$$\hat{l} = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

o que

$$\hat{l} = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Para dar estas definiciones, ¿qué condición es necesario que cumpla el punto x_0? ¿es suficiente que $x_0 \in A'$? Justifique su respuesta.

(b) Con base en las definiciones anteriores (y suponiendo que x_0 satisface las condiciones que hayan hecho falta), pruebe que

$$\hat{l} = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad \text{si y sólo si} \quad \hat{l} = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{y} \quad \hat{l} = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

32. Determine si las siguientes funciones tienen límite en el punto que se indica. Pruebe su respuesta.

i) $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x^6+y^4}$	en $(0,0)$	*ii)* $f(x,y) = \frac{x^3+xy^2-x^2y-y^3}{x^2+y^2}$	en $(0,0)$
iii) $f(x,y) = \frac{x^2(y-1)}{x^4+(y-1)^2}$	en $(0,1)$	*iv)* $f(x,y) = \frac{x^2y+x^2}{x^2+y^2+2y+1}$	en $(0,-1)$
v) $f(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$	en $(0,0,0)$	*vi)* $f(x,y,z) = \frac{xy+yz+zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	en $(0,0,0)$
vii) $f(x,y) = \frac{x^3y^4}{x^4+y^4}$	en $(0,0)$	*viii)* $f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$	en $(0,0)$
ix) $f(x,y) = \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$	en $(0,0)$	*x)* $f(x,y) = \frac{x^2y^5}{x^2+(y-1)^2}$	en $(0,1)$

33. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A'$. Pruebe que $\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) = \hat{0}$ si y sólo si $\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} \|f(\hat{x})\| = 0$.

34. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$. Definimos $B = \{\hat{x} - \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \in A\}$ y $g : B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como $g(\hat{h}) = f(\hat{x}_0 + \hat{h})$ para cada $\hat{h} \in B$. Pruebe que:

    (a) $\hat{x}_0 \in A'$ si y sólo si $\hat{0} \in B'$

    (b) $\hat{l} = \lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x})$ si y sólo si $\hat{l} = \lim_{\hat{h} \to \hat{0}} g(\hat{h})$.

35. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $\hat{x}_0 \in A'$. Pruebe que, si g está acotada en una vecindad "agujerada" de $\hat{x}_0$ (es decir que existen $r > 0$ y $M > 0$ tales que $\|g(\hat{x})\| \leq M$ para toda $\hat{x} \in (B_r(\hat{x}_0) \setminus \{\hat{x}_0\}) \cap A$) y $\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} f(\hat{x}) = \hat{0}$, entonces $\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} (g \cdot f)(\hat{x}) = 0$.

36. En la definición 2.37 sustituya la norma euclideana por las normas uno e infinito y pruebe que todas estas definiciones son equivalentes.

37. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\hat{x}_0 \in A'$ y $k \in \mathbb{N}$. Pruebe que, si

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} \frac{\|f(\hat{x}) - g(\hat{x})\|}{\|\hat{x} - \hat{x}_0\|^k} = 0,$$

entonces

$$\lim_{\hat{x} \to \hat{x}_0} \frac{\|f(\hat{x}) - g(\hat{x})\|}{\|\hat{x} - \hat{x}_0\|^s} = 0$$

para toda $s \in \mathbb{Z}$ tal que $s \leq k$.

38. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal, es decir que $L(\alpha\hat{x} + \beta\hat{y}) = \alpha L(\hat{x}) + \beta L(\hat{y})$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y para todos $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que, si

$$\lim_{\hat{h}\to\hat{0}} \frac{\left\|L(\hat{h})\right\|}{\left\|\hat{h}\right\|} = 0$$

entonces L es la función constante cero ($L \equiv 0$).

39. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\hat{x}_0 \in A'$ y $\hat{l} \in \mathbb{R}^m$ tales que $\hat{l} = \lim_{\hat{x}\to\hat{x}_0} f(\hat{x})$. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe sus respuestas.

   (a) $\hat{l} \in (f(A))'$

   (b) si $D \subset \mathbb{R}^m$ es tal que $\hat{l} \in \operatorname{int}(D)$, entonces $\hat{x}_0 \in (f^{-1}(D))'$

   (c) si alguna de las afirmaciones anteriores no es cierta, dé hipótesis adicionales sobre la función f para que ésta sí sea cierta

40. Pruebe la proposición 2.33, primero usando la proposición 2.18, y después usando sólo la definición 2.37.

41. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\hat{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $r > 0$ tales que:

   (a) $(x, y_0), (x_0, y) \in A'$ para toda $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ y para toda $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(x,y_0)} f(x, y) = l$ y $\lim_{x\to x_0} f(x, y) = g(y)$ para cada $y \in (y_0 - r, y_0 + r)$

   Pruebe que $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$ (este último límite es conocido como *límite iterado* pues $\lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to y_0} (\lim_{x\to x_0} f(x, y))$. *Sugerencia*: use el hecho de que f satisface la condición de Cauchy).

42. Pruebe las proposiciones 2.42, 2.43 y 2.44.

43. Determine en qué puntos de su dominio son continuas las funciones g y h definidas en el problema 7. Pruebe su respuesta.

44. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en $\hat{x}_0 \in A$ tal que $f(\hat{x}_0) \neq \hat{0}$. Pruebe que:

   (a) existe $\delta > 0$ tal que $f(\hat{x}) \neq \hat{0}$ para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0) \cap A$

   (b) existen $c > 0$ y $\delta' > 0$ tales que $\|f(\hat{x})\| \geq c$ para toda $\hat{x} \in B_{\delta'}(\hat{x}_0) \cap A$.

45. Pruebe la proposición 2.35.

46. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pruebe que f es continua en A si y sólo si para todo conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^m$ existe un conjunto cerrado $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f^{-1}(C) = D \cap A$.

47. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Pruebe que:

   (a) f es continua en A si y sólo si $f\left(\bar{B} \cap A\right) \subset \overline{f(B)}$ para todo $B \subset A$

   (b) f es continua en A si y sólo si $f(B' \cap A) \subset \overline{f(B)}$ para todo $B \subset A$.

48. Pruebe que:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y\}$ es un conjunto abierto

   (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (zx + zy)/(x^2 + y^2) < 0\}$ es un conjunto abierto

   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1/x\}$ es un conjunto cerrado.

49. Sean $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\hat{x}_0 \in U$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(U) \subset (a,b)$ y $g : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en $f(\hat{x}_0)$. Definimos $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\varphi(\hat{x}) = \begin{cases} \frac{g(f(\hat{x}))-g(f(\hat{x}_0))}{f(\hat{x})-f(\hat{x}_0)} & \text{si } f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0) \neq 0 \\ g'(f(\hat{x}_0)) & \text{si } f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0) = 0 \end{cases}$$

Pruebe que, si f es continua en $\hat{x}_0$, entonces φ es continua en $\hat{x}_0$.

50. Pruebe que las siguientes funciones son continuas en su dominio:
    (a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(\hat{x}) = \|\hat{x}\|$
    (b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como $f(\hat{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$
    (c) $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ cualquier función lineal

51. Sea
$$S^{n-1} = \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{x}\| = 1\}.$$
Pruebe que S^{n-1} es un conjunto cerrado.

52. Sean, $A \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $\hat{x} \in A, \hat{y} \in (A \cup A')^c$ y $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ continua tal que $f(0) = \hat{x}$ y $f(1) = \hat{y}$. Pruebe que existe $t \in (0,1)$ tal que $f(t) \in Fr(A)$.

53. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, con A conexo y tal que $f(\hat{x}) \neq 0$ para toda $\hat{x} \in A$. Pruebe que $f(\hat{x}) > 0$ para toda $\hat{x} \in A$ o $f(\hat{x}) < 0$ para toda $\hat{x} \in A$.

54. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua en A, con A conexo y tal que $\|f(\hat{x})\| \neq 1$ para toda $\hat{x} \in A$. Pruebe que, si $\|f(\hat{x}_0)\| < 1$ para alguna $\hat{x}_0 \in A$, entonces $\|f(\hat{x})\| < 1$ para toda $\hat{x} \in A$.

55. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en A, y $B \subset A$ conexo, cerrado y acotado. Pruebe que existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(B) = [a,b]$.

56. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, cerrado y acotado, y $\hat{y} \in A^c$. Pruebe que existe $\hat{x}_0 \in A$ tal que $\|\hat{y} - \hat{x}_0\| \leq \|\hat{x} - \hat{y}\|$ para todo $\hat{x} \in A$. Muestre, con un ejemplo, que esta afirmación no es válida si no suponemos que A es cerrado. ¿Esta afirmación sigue siendo válida si sólo suponemos que A es cerrado? Pruebe su respuesta.

57. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos no vacíos, cerrados y acotados, tales que $A \cap B = \varnothing$. Pruebe que existen $\hat{x}_0 \in A$ y $\hat{y}_0 \in B$ tales que $\|\hat{y}_0 - \hat{x}_0\| \leq \|\hat{x} - \hat{y}\|$ para todo $\hat{x} \in A$ y para todo $\hat{y} \in B$. Muestre, con un ejemplo, que esta afirmación no es válida si no suponemos que A es cerrado.

58. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua, con A cerrado y acotado. Pruebe que existen $\hat{x}_0, \hat{x}_1 \in A$ tales que $\|f(\hat{x}_0)\| \leq \|f(\hat{x})\| \leq \|f(\hat{x}_1)\|$ para toda $\hat{x} \in A$.

59. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que el conjunto K es compacto si y sólo si toda sucesión $\{\hat{x}_k\} \subset K$ tiene una subsucesión $\{\hat{x}_{k_l}\}$ que converge a un punto $\hat{x}_0 \in K$.

60. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua e inyectiva en A, con A cerrado y acotado. Pruebe que $f^{-1} : f(A) \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ (la función inversa de f) es continua en $f(A)$. ¿Esta afirmación se sigue cumpliendo si A no es cerrado? Pruebe su respuesta.

61. En la definición 2.53 sustituya la norma euclideana por las normas uno e infinito y pruebe que todas estas definiciones son equivalentes.

62. Pruebe la proposición 2.54.

63. Pruebe que la función definida en el ejemplo 2.56 es uniformemente continua sobre cualquier subconjunto $B \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ que no tenga como punto de acumulación al $(0,0)$.

64. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado, y $f : [a,b] \times A \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b] \times A \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Definimos $h : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$h(\hat{y}) = \int_a^b f(x, \hat{y})dx$$

Pruebe que h es uniformemente continua en A.

65. Sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función lineal. Pruebe que L es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$.

66. Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en A y $\{\hat{x}_k\} \subset A$ una sucesión de Cauchy. Pruebe que $\{f(\hat{x}_k)\}$ es una sucesión de Cauchy.

67. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en A. Pruebe que existe $\tilde{f} : \bar{A} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uniformemente continua en $\bar{A}$ tal que $\tilde{f}(\hat{x}) = f(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in A$.

68. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ no vacío. Definimos $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como $f_A(\hat{x}) = dist(\hat{x}, A) := \inf\{\|\hat{x} - \hat{z}\| \mid \hat{z} \in A\}$ (para cada $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$). Pruebe que:

    (a) $f_A(\hat{x}) = 0$ si y sólo si $\hat{x} \in \bar{A}$

    (b) f_A es uniformemente continua en $\mathbb{R}^n$ (*sugerencia*: pruebe que $|f_A(\hat{x}) - f_A(\hat{y})| \leq \|\hat{x} - \hat{y}\|$ para todo $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$)

    (c) si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ están separados, entonces existen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abiertos tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$ (*sugerencia*: considere la función $f(\hat{x}) = f_A(\hat{x}) - f_B(\hat{x})$)

    (d) ¿La afirmación del problema 57 sigue siendo válida si sólo suponemos que A es cerrado? Pruebe su respuesta.