Capítulo 1

Integral de Riemann

1.1 Los primeros pasos

Del mismo modo que para el caso real, el concepto de integral de Riemann[1] de funciones de varias variables (y valores reales), encuentra su motivación en problemas de diversa índole. Por ejemplo, supóngase que se tiene una lámina de metal cuyo grosor no es homogéneo. Supongamos que tenemos la suerte de contar con una función ρ que nos dice cuál es la "densidad" de la lámina en cada uno de sus puntos (es decir, una función que en "cada punto P de la lámina" nos asocia un número real $\rho(P)$ que nos indica la "cantidad de masa (por unidad de área) contenida alrededor de dicho punto"). La pregunta sería entonces: ¿cómo, a partir de esta función ρ, podríamos saber la masa total de la lámina? Supongamos por ahora que la lámina tiene la forma de un rectángulo R (véase la figura 1.1).

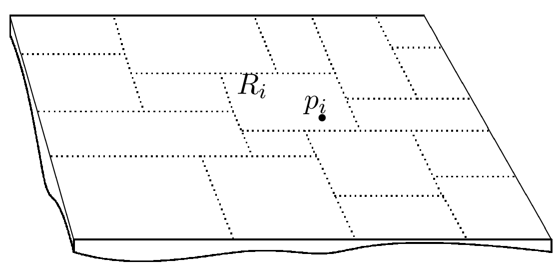

Figura 1.1: Lámina rectangular

Si a este rectángulo R lo subdividimos en rectángulos más pequeños, $R_1, \ldots, R_k$ y en cada uno de estos subrectángulos escogemos cualesquiera puntos $p_1, \ldots, p_k$, entonces el producto $\rho(p_i) \cdot área(R_i)$ nos daría un valor aproximado de la cantidad de masa contenida en el pedazo de lámina representado por el subrectángulo R_i (obsérvese que en términos de unidades, todo está bien, ya que la densidad se mide en unidades de masa por (o sobre) unidades de área, que al multiplicarlas por el área de R_i, obtenemos unidades de masa). Así, una aproximación a la masa total de la lámina (representada por el rectángulo R) estaría dada por

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(p_i) \cdot área(R_i) \tag{1.1}$$

[1] Georg Friedrich Bernhard Riemann (17 de septiembre de 1826 - 20 de junio de 1866) fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes en análisis y geometría diferencial.

Es un hecho claro que, si los subrectángulos en los que subdividimos al rectángulo R son cada vez más pequeños, las diferentes sumas que obtenemos se aproximan "mejor" a la masa de la lámina. Es decir, es "intuitivamente claro" que estas sumas deben aproximarse (en la medida en que nuestra subdivisión sea cada vez "más fina") a un valor específico.

Si sólo pensamos a ρ como una función que asigna valores positivos (independientemente de que éstos representen una densidad de masa), la expresión 1.1 tiene un significado geométrico muy específico. Si nos fijamos en la gráfica de la función ρ (que en este caso es una superficie en $\mathbb{R}^3$ ubicada por arriba del plano XY, como se muestra en la figura 1.2), la cantidad $\rho(p_i) \cdot \acute{a}rea(R_i)$ representa el volumen de un paralelepípedo cuya base es el rectángulo R_i y altura $\rho(p_i)$. Así, la suma de la expresión 1.1 también se puede interpretar como una aproximación al volumen que hay por arriba del rectángulo R y por debajo de la gráfica de ρ. En este sentido, podemos decir que, el problema del cálculo de la masa total de nuestra lámina, se puede "cambiar" por el problema de calcular el volumen de una cierta región. Este enfoque geométrico será el que seguiremos de aquí en adelante para dar un significado más preciso a las ideas expresadas en los párrafos anteriores.

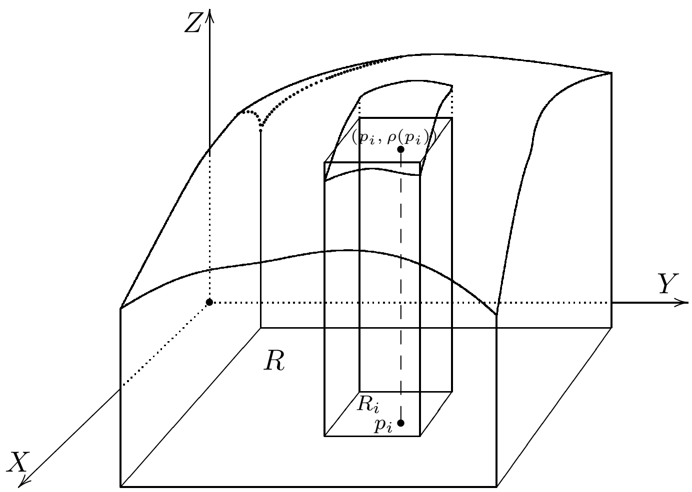

Figura 1.2: Función de densidad sobre R_i

Por tanto, el problema que abordaremos se podría resumir de la siguiente manera: si tenemos

1. R un "rectángulo" en $\mathbb{R}^n$

2. f una función de valores reales que está definida en R

3. $R_1, \ldots, R_k$ subrectángulos que se obtienen al subdividir a R y cualesquiera $p_i \in R_i$ $(i = 1, \ldots, k)$

¿existe un número, digamos I, tal que la suma de la forma

$$\sum_{i=1}^{k} f(p_i) \cdot \acute{a}rea(R_i)$$

"se parece mucho" a I? Más aun, ¿si los rectángulos $R_1, \ldots, R_k$ son una subdivisión "más fina" de R, entonces la correspondiente suma se parece más a I?

1.2 Construcción de la integral de Riemann

A fin de "construir" una respuesta al problema planteado, precisaremos algunos de los términos que hemos venido utilizando.

Definición 1.1 *R es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ si es un conjunto de la forma*

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

en donde cada $[a_i, b_i]$ es un intervalo cerrado de números reales. Al número

$$d(R) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}$$

lo llamaremos la diagonal de R, y al número

$$m(R) = (b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

se le llamará la medida de R.

Nótese que $m(R) \geq 0$ y que en el caso de $\mathbb{R}^2$ esta medida es el área de R, mientras que en $\mathbb{R}^3$ coincide con ser el volumen de R.

Diremos que *un rectángulo es no degenerado* si $m(R) > 0$. Todos los rectángulos que consideremos de aquí en adelante serán de este tipo, a menos que se indique lo contrario.

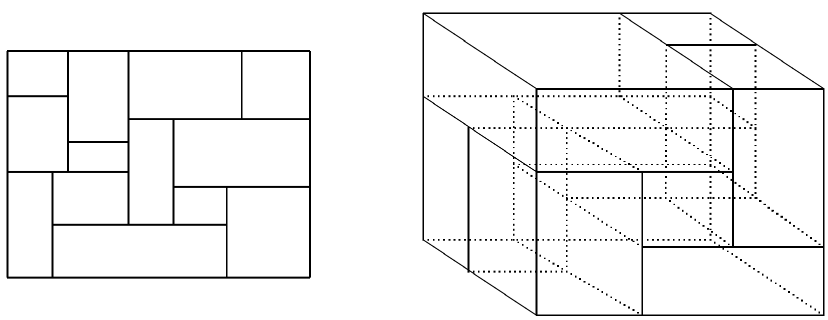

Figura 1.3: No-particiones

Existen muchas formas de subdividir a un rectángulo R, como las que se muestran en la figura 1.3. Sin embargo, para la construcción que vamos a hacer, será suficiente con que consideremos a aquellas que se obtienen de hacer subdivisiones en cada uno de los intervalos $[a_i, b_i]$, como se muestra en la figura 1.4.

Definición 1.2 *Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si $\mathcal{P}_i$ es una partición del intervalo $[a_i, b_i]$ (recuérdese que $\mathcal{P}_i$ es entonces un subconjunto finito del intervalo $[a_i, b_i]$ que incluye a los extremos a_i, b_i) para cada $i = 1, \ldots, n$, decimos que*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$$

es una partición de R. Obsérvese que $\mathcal{P}$ es un subconjunto finito de R, que consta de los vértices de cada uno de los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$. A la partición $\mathcal{P}_i$ le llamaremos la i-ésima partición coordenada de $\mathcal{P}$. Denotaremos por $\mathbf{P}_R$ al conjunto de todas las particiones del rectángulo R.

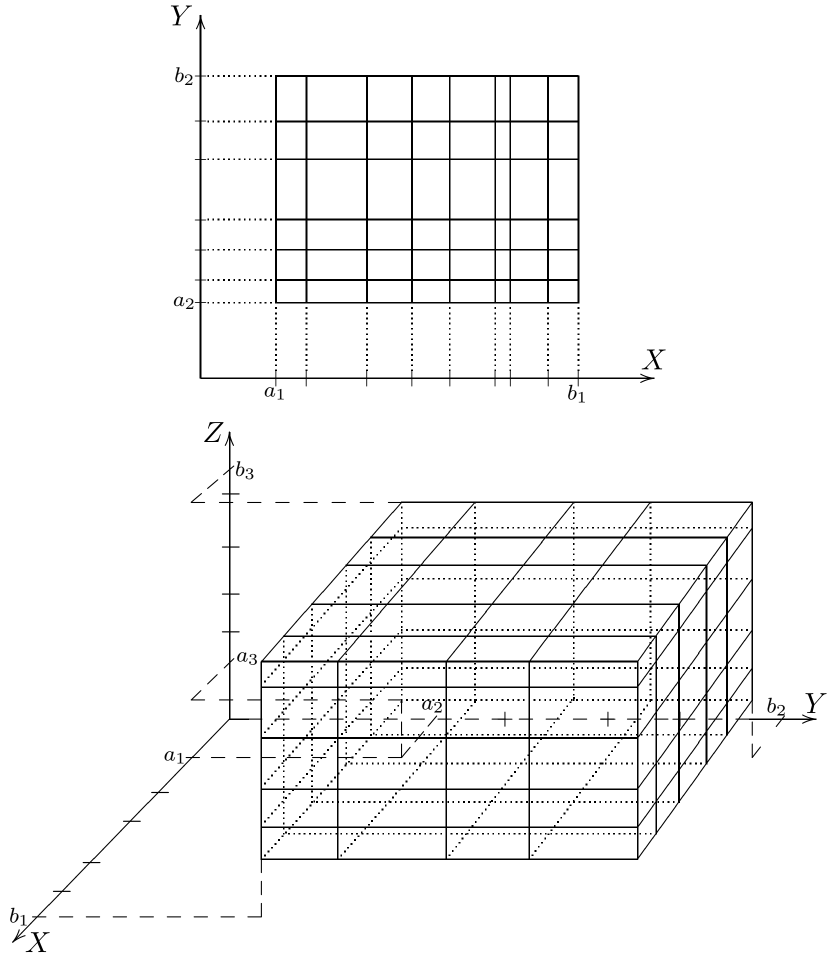

Figura 1.4: Particiones buenas

Hablando de particiones, que son a final de cuentas las que nos permitirán hablar de las diferentes subdivisiones que podemos hacer de un rectángulo R, cabe preguntarse: ¿qué relación tendrá que haber entre dos diferentes particiones de R de tal forma que podamos asegurar que la subdivisión inducida por una de ellas es "más fina" que la subdivisión inducida por la otra? Esta idea queda expresada en la siguiente definición

Definición 1.3 *Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones de R, con $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \cdots \times \mathcal{Q}_n$. Decimos que $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}_i \subset \mathcal{Q}_i$ para cada $i = 1, \ldots, n$.*

Nótese que, de acuerdo a esta definición, si $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ entonces $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$ y que lo recíproco también es cierto (afirmación que se deja probar al lector como un problema).

La figura 1.5 muestra (para el caso de $\mathbb{R}^2$) que, en efecto, la subdivisión inducida por una partición $\mathcal{Q}$ que refina a otra partición $\mathcal{P}$, es "más fina" que la subdivisión inducida por $\mathcal{P}$.

Dada una partición $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$, la partición $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}_1 \cup \{c\}) \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$, donde $c \in [a_1, b_1] \backslash \mathcal{P}_1$, es una de las particiones más sencillas que refinan a $\mathcal{P}$. En particular, es importante hacer notar que los subrectángulos inducidos por cada una de ellas son casi los mismos, salvo por algunos subrectángulos de $\mathcal{P}$, que se pueden poner como la unión de dos de los subrectángulos inducidos por esta $\mathcal{Q}$ (probar esta afirmación es más un problema de notación que de otra índole) (ver figura 1.6).

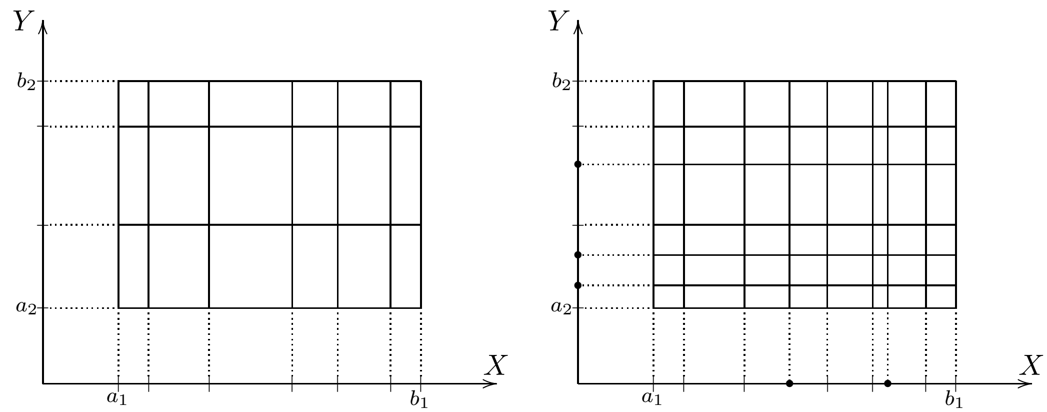

Figura 1.5: Una partición y un refinamiento de ella

Destacar la relación que hay entre estas dos particiones tiene como objetivo mostrar que, si $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \cdots \times \mathcal{Q}_n$ es cualquier otra partición que refina a $\mathcal{P}$, entonces podemos construir una sucesión finita de particiones $\mathcal{Q}^{(0)}, \ldots, \mathcal{Q}^{(m)}$ tales que $\mathcal{P} = \mathcal{Q}^{(0)}$, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{(m)}$ y con la propiedad adicional de que la partición $\mathcal{Q}^{(i)}$ sólo tiene un punto más, en alguna de sus particiones coordenadas, que $\mathcal{Q}^{(i-1)}$ (para $i = 1, \ldots, m$). Así, de acuerdo a lo que observamos en el párrafo anterior, los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{Q}^{(i-1)}$ son casi los mismos, salvo por algunos, que se pueden poner como la unión de dos subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{Q}^{(i)}$. Como esto es válido para toda $i = 1, \ldots, m$, podemos concluir que cada uno de los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{P}$ es la unión de algunos de los subrectángulos inducidos por $\mathcal{Q}$, propiedad que con frecuencia usaremos.

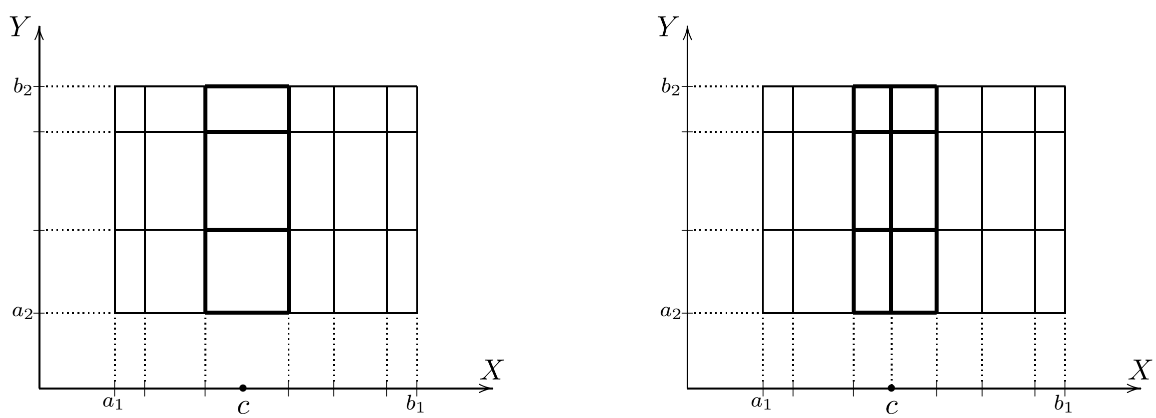

Figura 1.6: Si $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ los subrectángulos inducidos por $\mathcal{P}$ son la unión de subrectángulos inducidos por $\mathcal{Q}$

Note que, para obtener esta sucesión, bastaría empezar haciendo $\mathcal{Q}^{(0)} = \mathcal{P}$; $\mathcal{Q}^{(1)} = (\mathcal{P}_1 \cup \{c\}) \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde $c \in \mathcal{Q}_1 \backslash \mathcal{P}_1$; $\mathcal{Q}^{(2)} = (\mathcal{P}_1 \cup \{c, d\}) \times \mathcal{P}_2 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ donde $d \in \mathcal{Q}_1 \backslash (\mathcal{P}_1 \cup \{c\})$, y así sucesivamente, hasta agotar todos los puntos de $\mathcal{Q}_1$ que no están en $\mathcal{P}_1$, para después hacer un proceso análogo con todos los puntos de $\mathcal{Q}_2$ que no están en $\mathcal{P}_2$, y una vez agotados estos, continuar con el mismo procedimiento para el resto de las particiones coordenadas.

En general, dadas dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de un rectángulo R, no necesariamente existe una relación de refinamiento entre ellas. Sin embargo, es posible construir una tercera partición que refine a ambas; la denotaremos por $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$ y si $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_n$ y $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \times \cdots \times \mathcal{Q}_n$ entonces

$$\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q} = (\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{Q}_1) \times \cdots \times (\mathcal{P}_n \cup \mathcal{Q}_n)$$

(Nótese el símbolo especial de unión que usamos, en virtud de que $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$ no coincide con $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$) (ver figura 1.7).

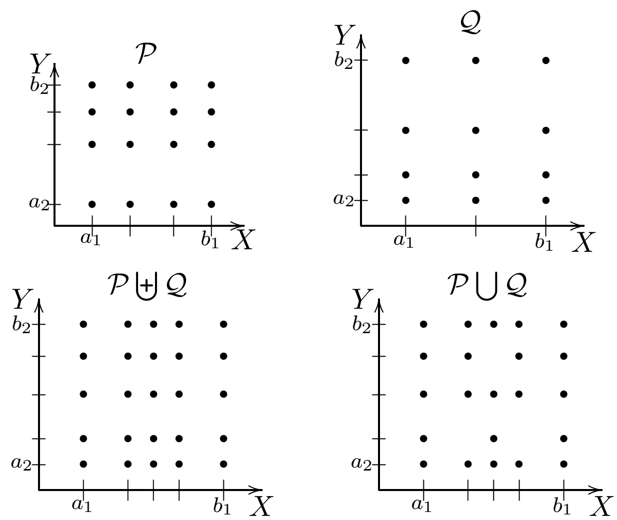

Figura 1.7: $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$ no coincide con $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$

Una vez que hemos precisado estos conceptos, el siguiente paso consistirá en construir sumas como las que aparecen en 1.1. Para ello, supondremos que tenemos una cierta función f, que está definida en R, y que toma valores reales. Es importante destacar que para construir sumas como las de 1.1 (que a partir de este momento empezaremos a llamar por su nombre: *sumas de Riemann*), además de contar con una partición $\mathcal{P}$ de R (que induce una subdivisión de R), también tenemos que hacer una elección de un punto en cada uno de los subrectángulos inducidos por dicha partición. Así pues, por cada partición $\mathcal{P}$, podemos obtener una infinidad de sumas de Riemann (tantas como formas diferentes haya de elegir dichos puntos). Veremos que no se necesita hacer tanto.

En realidad, por cada partición $\mathcal{P}$ de R sólo vamos a construir un par de sumas. Si, (como dijimos anteriormente y para el caso de $\mathbb{R}^2$), nuestro problema se puede ver como el cálculo de un volumen (el que está por "debajo" de la gráfica de f), para alcanzar dicho volumen bastaría entonces con tomar sumas de Riemann, sólo que en lugar de evaluar a la función f en algún punto del subrectángulo R_i, sería suficiente con tomar el mínimo valor de f sobre dicho subrectángulo. Como podrá suponerse, el otro tipo de sumas que vamos a tomar en cuenta serán aquellas en las que, en lugar de tomar el valor mínimo, tomaremos el valor máximo de f sobre el subrectángulo R_i. La "intuición dice" que con cualquiera de estas sumas debería de ser suficiente para aproximarnos al "volumen por debajo de la gráfica de f", con la peculiaridad de que con las primeras nos aproximamos "por abajo" de dicho volumen, y con las segundas lo hacemos "por arriba" del mismo volumen (ver figuras 1.8 y 1.9).

Una vez que hemos llegado hasta este punto, sólo resta aclarar un "detalle". En general, para que podamos asegurar que una función alcanza su valor mínimo y su valor máximo sobre un conjunto, sabemos que es "suficiente" con que dicha función sea continua sobre el conjunto y que

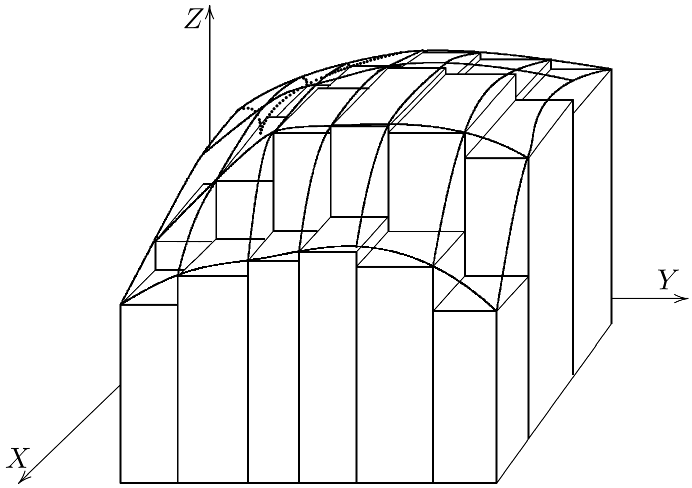

Figura 1.8: Suma inferior

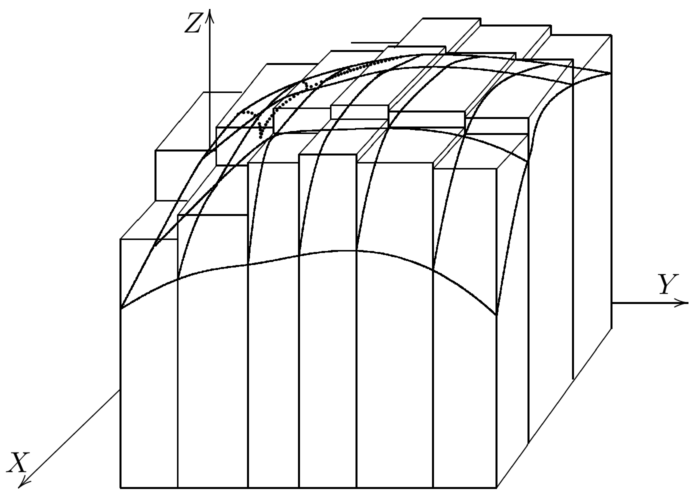

Figura 1.9: Suma superior

éste sea cerrado y acotado. Como esta construcción no la queremos "restringir" sólo a este tipo de funciones, y a este tipo de conjuntos (aunque un rectángulo sí es un conjunto cerrado y acotado), en lugar del tomar el valor mínimo y el valor máximo de f sobre cada subrectángulo R_i, tomaremos el ínfimo y el supremo de los valores de f sobre este subrectángulo. Tomar este camino sólo nos obliga a suponer que la función f está acotada sobre el rectángulo R, que comparada con la hipótesis de continuidad, esta nueva condición nos sale más barata. Así pues, de aquí en adelante supondremos que nuestra función f, además de estar definida sobre R, también está acotada (sobre R).

Aclarado el punto, procedemos a dar las siguientes definiciones:

Definición 1.4 *Sean, f una función (de valores reales) definida y acotada sobre un rectángulo R contenido en $\mathbb{R}^n$, y $\mathcal{P}$ una partición de R. Si $R_1, \ldots, R_k$ son los subrectángulos de R inducidos por la partición $\mathcal{P}$, definimos la suma inferior de f correspondiente a la partición $\mathcal{P}$, que denotaremos* *por* $\underline{S}(f, \mathcal{P})$, *como*

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot m(R_i)$$

en donde $m_i = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.
Análogamente, definimos la suma superior de f *correspondiente a la partición* $\mathcal{P}$, *que denotaremos por* $\overline{S}(f, \mathcal{P})$, *como*

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot m(R_i)$$

en donde $M_i = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.

Estas sumas tienen una serie de propiedades, de las cuales la primera es bastante evidente:

Proposición 1.5 *Si* $\mathcal{P}$ *es cualquier partición de* R, *entonces* $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$.

Dem. Como m_i y M_i son, respectivamente, el ínfimo y el supremo del mismo conjunto, a saber $\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$, se tiene que $m_i \leq M_i$. Por otra parte, de la definición de medida de un rectángulo se tiene que $0 \leq m(R_i)$ por lo que $m_i \cdot m(R_i) \leq M_i \cdot m(R_i)$ para cada $i = 1, \ldots, k$, de tal forma que sumando sobre las $i's$, se tiene que $\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$. ■

Como ya habíamos observado desde el principio, también es geométricamente claro que si refinamos una partición (es decir, la hacemos "más fina") entonces nuestras sumas se parecen más a ese volumen. Más aún, podemos estar seguros de que si $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ entonces la suma inferior de f correspondiente a $\mathcal{Q}$ es mayor o igual que la suma inferior correspondiente a $\mathcal{P}$ (ver figura 1.10); y análogamente, la suma superior de f correspondiente a $\mathcal{Q}$ es menor o igual que la suma superior correspondiente a $\mathcal{P}$.

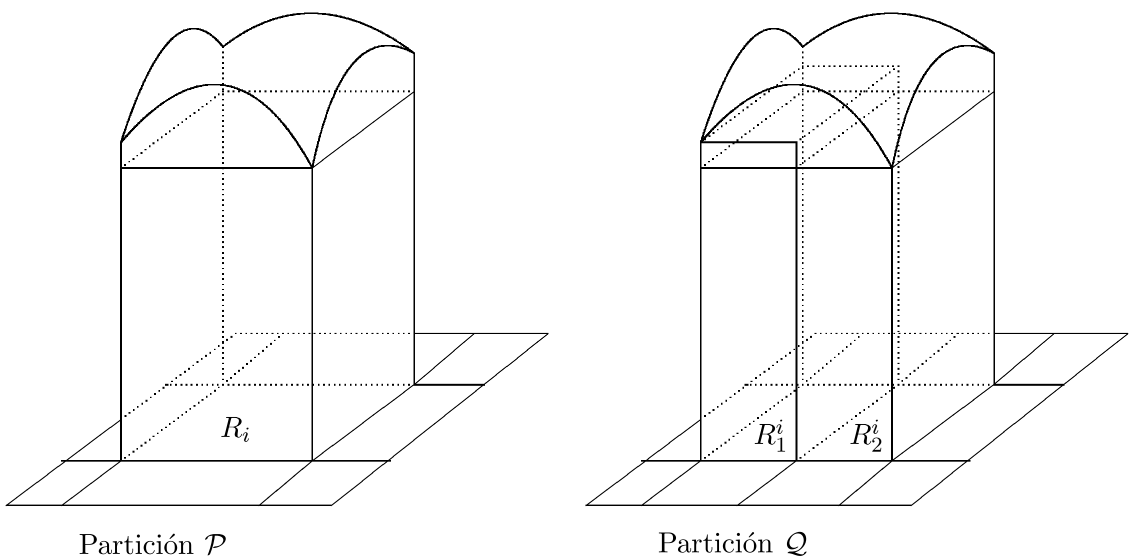

Figura 1.10: Si $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ entonces la suma inferior de f correspondiente a $\mathcal{Q}$ es mayor que la suma inferior correspondiente a $\mathcal{P}$

Esta propiedad la dejamos plasmada en la siguiente

Proposición 1.6 *Sean $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbf{P}_R$. Si $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ entonces $\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{Q})$ y $\overline{S}(f,\mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P})$.*

Dem. Sean $R_1, \ldots, R_k$ los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$, y sean $R_1^i, \ldots, R_{k_i}^i$ los subrectángulos inducidos por $\mathcal{Q}$ que unidos nos dan R_i (para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$). Dado que cada R_j^i está contenido en R_i, tenemos que $\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \subset \{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ y por lo tanto $\inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \leq \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\}$ y $\sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \leq \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ para cada $j = 1, \ldots, k_i$, de modo que multiplicando estas desigualdades por $m(R_j^i)$, que es un número no negativo, se tiene que

$$\inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i) \leq \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i)$$

y

$$\sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i)$$

Si ahora sumamos ambas desigualdades, corriendo el índice j de 1 a k_i, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i)$$

y

$$\sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_j^i)$$

Ahora, como el subrectángulo R_i es la unión de los subrectángulos $R_1^i, \ldots, R_{k_i}^i$, se tiene que $m(R_i) = \sum\limits_{j=1}^{k_i} m(R_j^i)$ y por lo tanto

$$\inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i) \leq \sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i)$$

y

$$\sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \leq \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i)$$

Si en estas desigualdades sumamos con respecto del índice i, corriendo de 1 a k, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{k} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \right)$$

y

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_j^i\} \cdot m(R_j^i) \right) \leq \sum_{i=1}^{k} \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\} \cdot m(R_i)$$

Recordando la definición de suma inferior y suma superior, tenemos entonces que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{Q})$$

y

$$\overline{S}(f,\mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P})$$

que es lo que queríamos demostrar. ■

Obsérvese que de las dos proposiciones anteriores podemos concluir, bajo el supuesto de que la partición $\mathcal{Q}$ refina a la partición $\mathcal{P}$, que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q})$$

y

$$\underline{S}(f,\mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P})$$

De hecho, si recurrimos nuevamente a la interpretación geométrica, estas desigualdades no nos deben de causar sorpresa puesto que cualquier suma inferior debe de "estar por debajo" del volumen que queremos calcular, y de manera análoga, cualquier suma superior debe de "estar por arriba". Por lo anterior, debiera ser cierto que, dadas cualesquiera dos particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ de R, se debe tener que $\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q})$. Esta propiedad, que será muy importante para la construcción que estamos realizando, la dejaremos establecida en la siguiente

Proposición 1.7 *Si $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son cualesquiera dos particiones del rectángulo R entonces se cumple que*

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q})$$

Dem. Consideremos la partición $\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}$. Como dijimos anteriormente, esta partición refina tanto a $\mathcal{P}$ como a $\mathcal{Q}$ de tal forma que, por la proposición 1.2 debemos tener que

$$\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \underline{S}(f,\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q})$$

y

$$\overline{S}(f,\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q})$$

Como $\underline{S}(f,\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{P} \uplus \mathcal{Q})$ (proposición 1.1), se tiene que $\underline{S}(f,\mathcal{P}) \leq \overline{S}(f,\mathcal{Q})$. ■

La conclusión de la proposición anterior resultará fundamental para la obtención (cuando menos "teórica") de ese número I al cual se deben de parecer las sumas de Riemann de una cierta función f. Nótese que esta proposición nos dice dos cosas relevantes:

1. el conjunto de todas las sumas inferiores que se obtiene para una función f definida sobre un rectángulo R, es un conjunto acotado superiormente y además cualquier suma superior es una cota superior de dicho conjunto, y

2. el conjunto de todas las sumas superiores que se obtiene para una función f definida sobre un rectángulo R, es un conjunto acotado inferiormente y además cualquier suma inferior es una cota inferior de dicho conjunto.

Así pues, cuando menos desde un punto de vista teórico, podríamos esperar que existiera algo así como "la suma inferior más grande" o "la suma superior más pequeña", y si todo funciona bien, cualquiera de estos dos números debiera de coincidir con el tan famoso y anhelado "volumen que hay por debajo de la gráfica de f". A continuación daremos una definición más precisa de estos números.

Denotaremos por $\underline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas inferiores de una función f (definida sobre el rectángulo R) y como $\overline{S}(f)$ al conjunto de todas las sumas superiores, es decir:

$$\underline{S}(f) = \{\underline{S}(f,\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

y

$$\overline{S}(f) = \{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

Dado que estos conjuntos son acotados superior e inferiormente, respectivamente, podemos dar la siguiente

Definición 1.8 *Al supremo del conjunto $\underline{S}(f)$ lo llamaremos la integral inferior de f sobre R, y lo denotaremos por $\int_{-R} f$, y al ínfimo del conjunto $\overline{S}(f)$ lo llamaremos la integral superior de f sobre R, y lo denotaremos por $\overline{\int}_R f$. De forma abreviada, se tendrá que*

$$\int_{-R} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

y

$$\overline{\int}_{R} f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$$

Sin duda nuestra primera reacción será pensar que estos números son iguales para cualquier función acotada que consideremos. Desafortunadamente, esto no siempre es así. El siguiente ejemplo nos muestra una función definida y acotada sobre el rectángulo $[0,1] \times [0,1]$, para la que no se cumple que estos números sean iguales.

Ejemplo 1.9 *Sea $f : R = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x\ o\ y \in \mathbb{Q} \\ \\ 0 & si\ x\ y\ y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Muestre que $\overline{\int}_R f \neq \int_{-R} f$.
Solución. Obsérvese que si $\mathcal{P}$ es cualquier partición del rectángulo R, y R_i es cualquier subrectángulo inducido por esta partición, entonces sobre dicho subrectángulo siempre existen parejas (x,y) tales que x o $y \in \mathbb{Q}$, y parejas (x,y) tales que x y $y \notin \mathbb{Q}$. De aquí se deduce que $M_i = 1$ y $m_i = 0$ de tal forma que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) = 1$ y $\underline{S}(f, \mathcal{P}) = 0$ para cualquier partición $\mathcal{P}$ de R. De esta forma, se tiene que $\underline{S}(f) = \{0\}$ y $\overline{S}(f) = \{1\}$ por lo que $\overline{\int}_R f = 1$ y $\int_{-R} f = 0$.

Aun cuando puede que este ejemplo nos desanime un poco, es importante hacer un par de observaciones:

1. la integral inferior y la integral superior de una función definida y acotada sobre un rectángulo R siempre existen, y

2. la integral inferior siempre es menor o igual que la integral superior, es decir,

$$\int_{-R} f \leq \overline{\int}_{R} f$$

Esta última desigualdad se obtiene muy fácilmente a partir de la proposición 1.7; baste recordar que de esa proposición se deduce que cualquier suma superior es una cota superior del conjunto de todas las sumas inferiores por lo que $\int_{-R} f$ (que es el supremo de todas las sumas inferiores y por lo tanto la más pequeña de todas las cotas superiores de este mismo conjunto) debe cumplir que $\int_{-R} f \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$ para cualquier partición $\mathcal{P}$ de R. De aquí, se tiene que $\int_{-R} f$ es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores, por lo que dicho número debe ser menor o igual que el ínfimo del conjunto de todas las sumas superiores, que es $\int_R^{-} f$. Por tanto, se tiene que $\int_{-R} f \leq \int_R^{-} f$ (este mismo trabalenguas se puede decir de otra forma si ahora empezamos diciendo que cualquier suma inferior es una cota inferior del conjunto de todas las sumas superiores, lo que también se sabe por la misma proposición. ¡Inténtelo!)

Así, de entre las funciones que están definidas y son acotadas sobre un rectángulo R, fijaremos nuestra atención en aquéllas para las cuales se tiene que $\int_R^{-} f = \int_{-R} f$. Este tipo de funciones serán conocidas como funciones Riemann-integrables (o simplemente integrables) sobre R, como quedará establecido en la siguiente

Definición 1.10 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. Decimos que f es Riemann-integrable (o simplemente integrable) sobre R si se tiene que la integral inferior y la integral superior de f sobre R son iguales. Es decir, si*

$$\int_R^{-} f = \int_{-R} f.$$

En este caso, a este número lo llamaremos la integral de f y lo denotaremos por $\int_R f$.

1.3 Propiedades de la integral de Riemann

Existen muchas propiedades del concepto que acabamos de definir, pero hay una en particular que sin duda tiene que ser la primera en aparecer. Se trata de una proposición que nos da un criterio alternativo para saber cuándo una función es integrable. Este criterio tiene la ventaja (o desventaja, según se vea) de establecer cuándo una función es integrable sin necesidad de saber cuál es el valor de la integral, algo así como el criterio de Cauchy para la convergencia de sucesiones.

Si una función es integrable, significa que la integral inferior y la integral superior de dicha función son iguales, digamos a un cierto número I. De las propiedades del ínfimo y del supremo sabemos entonces que, para cualquier cantidad positiva que demos (por pequeña que esta sea), existen particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ para las cuales las correspondientes suma inferior ($\underline{S}(f, \mathcal{Q})$) y suma superior ($\overline{S}(f, \mathcal{P})$) distan de este número I en menos que la mitad de la cantidad positiva que dimos, y por lo tanto la distancia entre estos números será menor a la distancia original (ver figura 1.11).

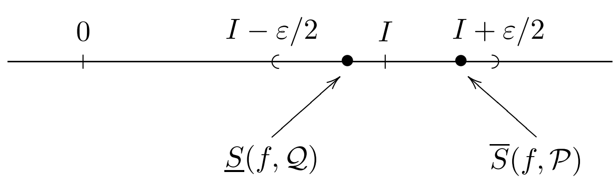

Figura 1.11: Si una función f es integrable y su integral es igual a un número I, dada una cantidad $\varepsilon > 0$, existen particiones $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{P}$ tales que $\underline{S}(f, \mathcal{Q})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P})$ difieren de I en menos que $\varepsilon/2$

Así, podemos asegurar que, para cualquier cantidad positiva que demos (digamos $\varepsilon > 0$), se pueden encontrar particiones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ tales que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}) < \varepsilon$. De hecho, vamos a mostrar que se puede conseguir una sola partición para la cual vale la misma desigualdad. Lo mejor de todo esto es que esta propiedad no sólo es necesaria (como acabamos de platicarlo) sino que también es una propiedad suficiente (que es la parte más interesante y más comunmente usada); es decir, si para cada cantidad positiva que demos, existe una partición $\mathcal{P}$ para la cual se tiene que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ entonces podremos estar seguros de que la función f es integrable. Esta importante propiedad la estableceremos en el siguiente

Teorema 1.11 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. f es integrable sobre R si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}$ partición de R tal que*

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

Dem. Probemos la necesidad. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es integrable, sabemos que $\int_R^- f = \int_{-R} f$. Llamemos I a este número. Como $I = \int_{-R} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$, de las propiedades del supremo sabemos que para $\varepsilon/2 > 0$, existe $\mathcal{P}'$ partición de R tal que

$$I - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, \mathcal{P}') \leq I$$

Por otra parte, como $I = \int_R^- f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$, de las propiedades del ínfimo sabemos que para $\varepsilon/2 > 0$, existe $\mathcal{Q}$ partición de R tal que

$$I \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q}) < I + \varepsilon/2$$

Si ahora hacemos $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \uplus \mathcal{Q}$, sabemos que $\mathcal{P}$ refina tanto a $\mathcal{P}'$ como a $\mathcal{Q}$ de tal forma que, por la proposición 1.6 tenemos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}') \leq \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{Q})$$

y por lo tanto, de las desigualdades anteriores obtenemos que

$$I - \varepsilon/2 < \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \overline{S}(f, \mathcal{P}) < I + \varepsilon/2$$

De estas últimas desigualdades concluimos que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

que es lo que se quería demostrar.
Para la prueba de la suficiencia, tenemos que demostrar que la función f es integrable, lo que significa que tenemos que probar que $\int_R^- f = \int_{-R} f$ para lo cual basta con demostrar que $\int_R^- f - \int_{-R} f = 0$. Como sabemos que $0 \leq \int_R^- f - \int_{-R} f$, es suficiente con demostrar que este número se puede hacer más pequeño que cualquier cantidad positiva (digamos $\varepsilon > 0$). Siendo así la cosa, sea $\varepsilon > 0$. De acuerdo a nuestra hipótesis, existe $\mathcal{P}$ partición de R tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$$

Por otra parte, como $\int_{-R} f = \sup\{\underline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$ y $\int_R^- f = \inf\{\overline{S}(f, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathbf{P}_R\}$, sabemos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \int_{-R} f \leq \int_{R}^{-} f \leq \overline{S}(f, \mathcal{P})$$

de modo que, como los extremos de estas desigualdades son dos números que distan entre si en menos de ε, entonces los números que están en medio también distan en menos de ε, es decir

$$0 \leq \overline{\int_R} f - \int_{-R} f < \varepsilon$$

Como esto se vale para toda $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\overline{\int_R} f - \int_{-R} f = 0$$

Por lo tanto $\int_R^- f = \int_{-R} f$, de modo que f es integrable sobre R. ■

Quizás fue una decepción el que no toda función definida y acotada sobre un rectángulo resultara ser integrable. Sin embargo, no hay porque tirarse al suelo. En el siguiente teorema mostraremos que hay una clase muy grande de funciones que sí resultan ser integrables. Estas funciones son las funciones continuas que (como la intuición nos lo indica, para este tipo de funciones sí debe de existir el "volumen bajo su gráfica"), sí son integrables. Y nada mejor que el siguiente teorema para estrenar el anterior.

Teorema 1.12 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua sobre el rectángulo R. Entonces f es integrable sobre R.*

Dem. Para la prueba de este teorema, tendremos que usar un par de teoremas (muy importantes) acerca de las funciones continuas que están definidas sobre conjuntos cerrados y acotados (como los rectángulos con los que estamos trabajando). El primero de ellos es el que nos dice que toda función de este tipo alcanza su valor máximo y su valor mínimo en puntos del dominio. Y el segundo, el que nos dice que estas mismas funciones también deben de ser uniformemente continuas sobre el mismo dominio. Con este par de potentes armas demostraremos nuestro teorema haciendo uso, por supuesto, del teorema 1.11.
Así pues, sea $\varepsilon > 0$. Como ya dijimos, sabemos que f también es uniformemente continua sobre R, de modo que, para $\varepsilon/m(R)$ (que es una cantidad positiva), existe $\delta > 0$ con la propiedad de que si $\hat{x}, \hat{y} \in R$ son tales que $\|\hat{x} - \hat{y}\| < \delta$ entonces $|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \varepsilon/m(R)$. Sea ahora $\mathcal{P}$ una partición de R con la propiedad de que la diagonal de cualquier subrectángulo R_i (de los inducidos sobre R por la partición $\mathcal{P}$) sea menor que δ (es decir, $d(R_i) < \delta$) (probar que existe una partición con esta propiedad es un ejercicio de este capítulo). Como también dijimos antes, como f es continua en cada subrectángulo R_i (que supongamos fueron k), existen $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in R_i$ tales que $f(\hat{x}_i) \leq f(\hat{x}) \leq f(\hat{y}_i)$ para todo $\hat{x} \in R_i$. Con todo esto en mente, tenemos que

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot m(R_i) = \sum_{i=1}^{k} f(\hat{x}_i) \cdot m(R_i)$$

y

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot m(R_i) = \sum_{i=1}^{k} f(\hat{y}_i) \cdot m(R_i)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{k} f(\hat{y}_i)\cdot m(R_i) - \sum_{i=1}^{k} f(\hat{x}_i)\cdot m(R_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (f(\hat{y}_i) - f(\hat{x}_i))\cdot m(R_i)
\end{aligned}$$

Ahora, como $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in R_i$ y $d(R_i) < \delta$, tenemos que $\|\hat{x}_i - \hat{y}_i\| < \delta$ de modo que $|f(\hat{x}_i) - f(\hat{y}_i)| = f(\hat{y}_i) - f(\hat{x}_i) < \varepsilon/m(R)$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} (f(\hat{y}_i) - f(\hat{x}_i))\cdot m(R_i) &< \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon/m(R))\cdot m(R_i) \\
&= \varepsilon/m(R)\cdot \sum_{i=1}^{k} m(R_i) \\
&= (\varepsilon/m(R))\cdot m(R) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

de donde tenemos que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) < \varepsilon$$

y por lo tanto, f es integrable sobre R. ■

Es importante destacar que el teorema anterior sólo nos dice que la continuidad es una condición suficiente para que una función sea integrable. De hecho, y afortunadamente, una función puede ser discontinua e integrable al mismo tiempo. El siguiente, es un ejemplo de este tipo de funciones.

Ejemplo 1.13 *Sea $f : R = [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida como*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ \\ 0 & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Muestre que f es integrable sobre R.
Solución. Para demostrar que esta función es integrable usaremos (como casi siempre haremos), el teorema 1.11. Sea $\varepsilon > 0$. Para esta ε, considérese la siguiente partición $\mathcal{P} = \{0, 1/2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2, 1\}\times\{0,1\}$ del rectángulo $R = [0,1]\times[0,1]$ (observe que necesitamos suponer que $0 < \varepsilon < 1$ para que $0 < 1/2 - \varepsilon/2$ y $1/2 + \varepsilon/2 < 1$, lo que no representa ningún problema, puesto que si lo probamos para estos números, entonces el teorema 1.11 también será cierto para números más grandes). Los subrectángulos de R inducidos por esta partición son los siguientes: $R_1 = [0, 1/2 - \varepsilon/2]\times[0,1]$, $R_2 = [1/2 - \varepsilon/2, 1/2 + \varepsilon/2]\times[0,1]$, y $R_3 = [1/2 + \varepsilon/2, 1]\times[0,1]$. Es fácil ver que: $m_3 = m_2 = 0$ mientras que $m_1 = 1$. Por otra parte, también es fácil ver que: $M_1 = M_2 = 1$ mientras que $M_3 = 0$. De aquí, se tiene que

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f,\mathcal{P}) &= m_1\cdot m(R_1) + m_2\cdot m(R_2) + m_3\cdot m(R_3) \\
&= 1\cdot(1/2 - \varepsilon/2) + 0\cdot\varepsilon + 0\cdot(1/2 - \varepsilon/2) \\
&= 1/2 - \varepsilon/2
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\mathcal{P}) &= M_1 \cdot m(R_1) + M_2 \cdot m(R_2) + M_3 \cdot m(R_3) \\ &= 1 \cdot (1/2 - \varepsilon/2) + 1 \cdot \varepsilon + 0 \cdot (1/2 - \varepsilon/2) \\ &= (1/2 - \varepsilon/2) + \varepsilon \\ &= 1/2 + \varepsilon/2\end{aligned}$$

de tal forma que $\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) = \varepsilon$. *Así, por el teorema 1.11 tenemos que esta función es integrable sobre* $[0,1] \times [0,1]$ *(esperamos que al lector no le cause ningún problema el hecho de que se haya obtenido una igualdad para la diferencia* $\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P})$*, en lugar de un menor estricto).*

Además de mostrar que existen funciones integrables que no son continuas, el ejemplo anterior muestra que las discontinuidades pueden ser "muchas". De hecho, el conjunto de discontinuidades de la función del ejemplo anterior (que es el conjunto $\{(1/2,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1\}$) tiene tantos elementos como el conjunto de discontinuidades de la función del ejemplo 1.9 (que es el conjunto $[0,1] \times [0,1]$).

Así pues, el problema para que una función discontinua sea integrable, no radica en la cantidad de discontinuidades que tenga, sino en la forma en que éstas están "acomodadas" (por decirlo de alguna forma). Observe que en el ejemplo 1.13 el conjunto de discontinuidades de la función es un conjunto "flaco" (o de "área cero") mientras que el conjunto de discontinuidades de la función del ejemplo 1.9 es un conjunto "gordo" (o de "área positiva"). Observe también que, para funciones definidas sobre rectángulos en $\mathbb{R}^2$, que su conjunto de discontinuidades sea un conjunto "flaco" significaría algo parecido a un conjunto finito de puntos o una línea (no necesariamente recta) (ver figura 1.12), y "gordo" algo que tuviera "área" diferente de cero, mientras que para funciones definidas sobre rectángulos en $\mathbb{R}^3$, "flaco" significaría algo parecido a un conjunto finito de puntos, una línea o a una superficie (no necesariamente plana), y "gordo" algo que tuviera "volumen" diferente de cero (se deja al lector "imaginar" el significado de estas palabras en dimensiones más grandes).

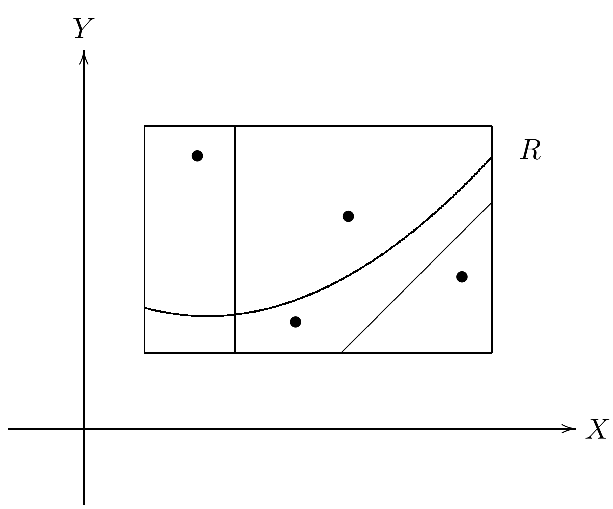

Figura 1.12: El conjunto de discontinuidades de una función f definida sobre un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^2$ es "flaco", si está formado por puntos "aislados", líneas (rectas o curvas) o por todos ellos juntos (claro, siempre y cuando al "juntarlos", no formen un conjunto "gordo")

Otra herramienta que nos permitiría hablar de conjuntos "flacos" y "gordos" (al menos por ahora) tiene que ver con el concepto de *interior de un conjunto*. Más adelante, una vez que hayamos precisado lo que significa que un conjunto se pueda "medir" (lo que en $\mathbb{R}^2$ significará que se puede hablar de su "área", o en $\mathbb{R}^3$ de su "volumen"), se podrá demostrar fácilmente que para estos conjuntos "medibles" se cumplen afirmaciones como la siguiente: *si un conjunto A "es medible", su "medida" será cero si y sólo si su interior (*$\mathrm{int}(A)$*) es vacío.*

El siguiente resultado que veremos es una primera aproximación a las ideas expuestas en los párrafos anteriores. En la prueba de este teorema será de vital importancia acordarnos del teorema de los "rectángulos anidados" (en $\mathbb{R}^n$). También será importante saber que, si una función es integrable sobre un rectángulo R, entonces también lo es sobre cualquier rectángulo R' contenido en R (este resultado se deja como un problema para el lector).

Teorema 1.14 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre R. Entonces existe $\hat{x}_0 \in \mathrm{int}(R)$ tal que f es continua en $\hat{x}_0$.*

Dem. Como f es integrable, por el teorema 1.11 sabemos que existe una partición $\mathcal{P}$ de R tal que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot m(R_i) - \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot m(R_i)\\ &= \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\cdot m(R_i)\\ &< m(R)\end{aligned}$$

Como los términos de la última suma son no negativos, debe existir un índice $i \in \{1,\dots,k\}$ (que sin pérdida de generalidad supondremos que $i = 1$), para el cual se tiene que

$$M_1 - m_1 < 1 \tag{1.2}$$

Observe que en caso contrario, si $M_i - m_i \geq 1$ para toda $i \in \{1,\dots,k\}$, entonces $(M_i - m_i)\cdot m(R_i) \geq m(R_i)$ (para toda $i \in \{1,\dots,k\}$) de tal forma que sumando esta última desigualdad, corriendo el índice i de 1 hasta k, tendríamos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i)\cdot m(R_i) &\geq \sum_{i=1}^{k} m(R_i)\\ &= m(R)\end{aligned}$$

lo cual sería una contradicción con la propiedad con que se eligió a la partición $\mathcal{P}$.

Llamemos entonces R_1 al subrectángulo inducido por $\mathcal{P}$ para el cual se satisface la desigualdad 1.2. Adicionalmente, supondremos que $R_1 \subset \mathrm{int}(R)$. En caso de que este subrectángulo no satisfaga esta propiedad, siempre podemos tomar otro rectángulo R' contenido en el interior del subrectángulo R_1 de tal forma que este nuevo rectángulo también estaría contenido en el interior del rectángulo original R. Además, el supremo y el ínfimo de los valores de la función f sobre este nuevo rectángulo R' seguirán cumpliendo una desigualdad análoga a 1.2 ya que $R' \subset R_1$.

Supongamos ahora que el lector ya probó el problema que establece que: si una función es integrable sobre un rectágulo R entonces es integrable sobre cualquier subrectángulo contenido en R. Entonces podemos asegurar que, como f es integrable sobre el rectángulo R_1, existe una partición $\mathcal{P}^{(1)}$ del rectángulo R_1 tal que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}^{(1)}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{k_1} M_i^{(1)} \cdot m(R_i^{(1)}) - \sum_{i=1}^{k_1} m_i^{(1)} \cdot m(R_i^{(1)})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{k_1} (M_i^{(1)} - m_i^{(1)}) \cdot m(R_i^{(1)}) \\ &< \frac{m(R_1)}{2} \end{aligned}$$

Por un argumento análogo al que hicimos renglones arriba, podemos asegurar que existe un subrectángulo $R_i^{(1)}$ (de los inducidos por $\mathcal{P}^{(1)}$ sobre R_1), y que denotaremos simplemente como R_2, con la propiedad de que

$$M_2 - m_2 < \frac{1}{2}$$

donde $M_2 = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_2\}$ y $m_2 = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_2\}$, y además $R_2 \subset \text{int}(R_1)$.
Siguiendo con este procedimiento, obtenemos una sucesión $\{R_k\}$ de rectángulos (o "intervalos") anidados en $\mathbb{R}^n$ con las siguientes propiedades:

1. $M_k - m_k < \frac{1}{k}$ donde $M_k = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_k\}$ y $m_k = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_k\}$, y
2. $R_{k+1} \subset \text{int}(R_k)$

para toda $k \in \mathbb{N}$.
Así, por el teorema de los "rectángulos anidados" sabemos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \emptyset$. Ahora, si $\hat{x}_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$, probaremos que f es continua en $\hat{x}_0$. Para ello, tomemos $\varepsilon > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Como $\hat{x}_0 \in R_{N+1} \subset \text{int}(R_N)$, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\hat{x}_0) \subset \text{int}(R_N) \subset R_N$ de tal forma que

$$m_N \leq f(\hat{x}) \leq M_N$$

para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$. Como $M_N - m_N < \frac{1}{N}$ se tiene que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0)| < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$, lo que prueba que f es continua en $\hat{x}_0$. ■

Este teorema tiene como consecuencia un hecho que seguido usaremos para determinar cuándo una función no es integrable. Para ello, establezcamos primero la siguiente notación: si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, denotaremos por $D_{f,A}$ al conjunto de discontinuidades de f en A, es decir, $D_{f,A} = \{\hat{x} \in A \mid f \text{ es discontinua en } \hat{x}\}$.

Corolario 1.15 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre R. Entonces $D_{f,R}$ tiene interior vacío ($\text{int}(D_{f,R}) = \emptyset$).*

Dem. Si $\text{int}(D_{f,R}) \neq \emptyset$ entonces existe un rectángulo R' tal que $R' \subset \text{int}(D_{f,R}) \subset D_{f,R} \subset R$. Como f es integrable sobre R y $R' \subset R$, entonces f también es integrable sobre R' de modo que, por el teorema anterior, existe $\hat{x}_0 \in \text{int}(R')$ tal que f es continua en $\hat{x}_0$. Observe que, como $\hat{x}_0 \in \text{int}(R')$, que es un conjunto abierto contenido en R, si f es continua en $\hat{x}_0$ restringida a R', entonces f es continua en $\hat{x}_0$ restringida a R, lo cual contradice el hecho de que $\hat{x}_0 \in D_{f,R}$. ■

Como dijimos antes, este resultado será muy útil para determinar cuando una función no es integrable. Tal es el caso de la función del ejemplo 1.9. En este caso, se tiene que $D_{f,R} = [0,1] \times [0,1]$

de tal forma que $\text{int}(D_{f,R}) \neq \emptyset$; así, por el corolario anterior podemos concluir nuevamente que dicha función no es integrable sobre $R = [0,1] \times [0,1]$.

Es una buena costumbre preguntarse siempre qué pasa con el recíproco de una afirmación. En el caso del corolario anterior no hay mucho que decir. En general, que el conjunto de discontinuidades de una función tenga interior vacío no significará necesariamente que dicho conjunto tenga que ser "flaco" (más aún, no tendrá nada que ver con el hecho de que se pueda "medir"). De hecho, este asunto nos conduce hacia una pregunta más general: ¿hay alguna manera de medir conjuntos (en $\mathbb{R}^n$) de tal forma que en función de dicha medida pudiéramos determinar si un conjunto es "flaco" o es "gordo"? (es claro que si se contara con esta medida, los conjuntos "flacos" serían aquellos que su medida fuera cero, y los "gordos" aquellos que su medida fuera mayor que cero). En el caso particular de $\mathbb{R}^2$, ¿existe una forma de extender el concepto de "área" a los subconjuntos (cuando menos acotados) de $\mathbb{R}^2$? (aquí usamos la palabra extender puesto que hay conjuntos a los cuales ya les asignamos un "área", como es el caso de los rectángulos). La respuesta es sí, hay forma de hacer esto (aunque no para todos los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^2$) y justo en este capítulo veremos una manera de hacerlo.

Sin embargo, antes de hablar de medida de conjuntos, nos será muy útil terminar de mencionar algunas otras propiedades de las funciones integrables, sobre todo aquellas que tienen que ver con las operaciones entre (o con) funciones. Estas propiedades las resumiremos en el siguiente

Teorema 1.16 *Sean $f, g : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrables sobre R. Entonces:*

1. *$f+g$ es integrable sobre R y además* $\int\limits_R (f+g) = \int\limits_R f + \int\limits_R g$
2. *si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable sobre R y además* $\int\limits_R cf = c \cdot \int\limits_R f$
3. *fg es integrable sobre R*
4. *si $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$ entonces* $\int\limits_R f \geq 0$
5. *si $f(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in R$, entonces* $\int\limits_R f \leq \int\limits_R g$
6. *$|f|$ es integrable sobre R y además* $\left|\int\limits_R f\right| \leq \int\limits_R |f|$
7. *las funciones* $\max\{f,g\}$ *y* $\min\{f,g\}$ [2] *son integrables sobre R*

La demostración de cada uno de los incisos de este teorema son parte de los problemas de este capítulo. Nótese también, que la afirmación del segundo inciso es un caso particular de la afirmación del tercero (tomando g igual a la función constante c), sólo que la fórmula que aparece en el segundo es muy utilizada.

Otra propiedad que destacaremos, relacionada con el cuarto inciso del teorema anterior, tiene que ver con la siguiente pregunta: ¿si $f(\hat{x}) > 0$ para toda $\hat{x} \in R$ entonces $\int_R f > 0$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa, sólo que para probarla hace falta el teorema 1.14 junto con la siguiente

[2] Recuerde que
$$\max\{f,g\} = \frac{f+g+|f-g|}{2} \quad \text{y} \quad \min\{f,g\} = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Proposición 1.17 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Si f es continua en $\hat{x}_0 \in R$ y $f(\hat{x}_0) > 0$ entonces $\int_R f > 0$.*

Dem. Si f es continua en $\hat{x}_0 \in R$ y $f(\hat{x}_0) > 0$, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que $|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0)| < \frac{f(\hat{x}_0)}{2}$ para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$ o, equivalentemente

$$-\frac{f(\hat{x}_0)}{2} < f(\hat{x}) - f(\hat{x}_0) < \frac{f(\hat{x}_0)}{2}$$

por lo que, de la primera desigualdad, tenemos que

$$\frac{f(\hat{x}_0)}{2} < f(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in B_\delta(\hat{x}_0)$.
Ahora, sea $\mathcal{P}$ una partición de R tal que uno de los subrectángulos inducidos por dicha partición (digamos R_1) se quede dentro de la vecindad $B_\delta(\hat{x}_0)$. Así, tenemos que

$$\begin{aligned}
\underline{S}(f, \mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{k} m_i \cdot m(R_i) \\
&= m_1 \cdot m(R_1) + \sum_{i=2}^{k} m_i \cdot m(R_i) \\
&\geq \frac{f(\hat{x}_0)}{2} \cdot m(R_1) + 0 \\
&> 0
\end{aligned}$$

donde $m_1 \geq \frac{f(\hat{x}_0)}{2} > 0$ porque $R_1 \subset B_\delta(\hat{x}_0)$ y $m_i \geq 0$ porque $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Como

$$0 < \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leq \int\limits_R f$$

concluimos la prueba. ∎

Una vez que contamos con la proposición anterior, se tiene como consecuencia inmediata (usando también el teorema 1.14) la siguiente

Proposición 1.18 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(\hat{x}) > 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Entonces $\int_R f > 0$.*

Con relación a la otra operación entre funciones (la composición) existen un par de resultados importantes. Uno de ellos, cuando componemos a una función $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre el rectángulo R, con otra función $g : R' \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; en este resultado se establecen condiciones sobre la función g que permiten asegurar que la función $f \circ g : R' \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ será integrable sobre el rectángulo R' y la relación entre la integral de f y la de $f \circ g$. De hecho, el planteamiento anterior es un caso particular de un teorema muy importante y mas general (el Teorema del Cambio de Variable) que analizaremos con mas detalle en el capítulo 2 y que por esta misma razón, ahora dejaremos pendiente. El otro caso, cuando componemos a f con una función $h : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, establece las condiciones suficientes sobre la función h que nos permitirán asegurar que la función $h \circ f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seguirá siendo integrable sobre el rectángulo R, resultado que probaremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.19 *Si $f : R \subset \mathbb{R}^n \to [a,b] \subset \mathbb{R}$ es integrable sobre el rectángulo R y $h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ entonces $h \circ f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable sobre R.*

Dem. Como en la prueba del teorema 1.12, haremos uso nuevamente del hecho de que toda función continua sobre un conjunto cerrado y acotado (es decir, un compacto, como el intervalo $[a,b]$) es uniformemente continua sobre ese mismo conjunto, y la integrabilidad de la función $h \circ f$ la probaremos usando el teorema 1.11. De esta forma, dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [a,b]$ son tales que $|x - y| < \delta$ entonces $|h(x) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)}$. Por otra parte, como f es integrable sobre R, por el teorema 1.11 existe $P \in \mathcal{P}_R$ tal que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) \cdot m(R_i) < \frac{\delta \cdot \varepsilon}{4 \cdot M}$$

en donde $M > 0$ es tal que $|h(x)| \leq M$ para toda $x \in [a,b]$. Como se suele hacer en estos casos, clasificaremos a los subrectángulos (a trevés de sus índices) inducidos por la partición $\mathcal{P}$ en dos tipos; por una parte $I_1 = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid M_i - m_i < \delta\}$ e I_2 el resto, es decir $I_2 = \{i \in \{1, \ldots, k\} \mid M_i - m_i \geq \delta\}$. De esta forma, podemos escribir que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) - \underline{S}(f,\mathcal{P}) = \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) \cdot m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) \cdot m(R_i)$$

y nuestro objetivo será mostrar que

$$\begin{aligned} \overline{S}(h \circ f,\mathcal{P}) - \underline{S}(h \circ f,\mathcal{P}) &= \sum_{i \in I_1} (M_i' - m_i') \cdot m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i' - m_i') \cdot m(R_i) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

en donde $M_i' = \sup\{(h \circ f)(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ y $m_i' = \inf\{(h \circ f)(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$. Para lograr lo anterior, probaremos que cada una de las sumas (del lado derecho del primer renglón de la última identidad) será menor o igual que $\frac{\varepsilon}{2}$ (proceso en el que quedará claro la razón por la que se escogieron ciertas cantidades).

Para la primera suma, nótese que si $i \in I_1$ entonces para toda $\hat{x}, \hat{y} \in R_i$ se tiene que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \leq M_i - m_i < \delta$$

de modo que, por la forma en que se eligió δ, tenemos que

$$\begin{aligned} |(h \circ f)(\hat{x}) - (h \circ f)(\hat{y})| &= |h(f(\hat{x})) - h(f(\hat{y}))| \\ &< \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$M_i' - m_i' \leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)}$$

De esta forma, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} (M_i' - m_i') \cdot m(R_i) &\leq \sum_{i \in I_1} \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \cdot m(R_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \sum_{i \in I_1} m(R_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{2 \cdot m(R)} \cdot m(R) \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Para la segunda suma, si $i \in I_2$ entonces $\delta \leq M_i - m_i$ de modo que

$$\begin{aligned} \delta \sum_{i \in I_2} m(R_i) &= \sum_{i \in I_2} \delta \cdot m(R_i) \\ &\leq \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) \cdot m(R_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} (M_i - m_i) \cdot m(R_i) \\ &< \frac{\delta \cdot \varepsilon}{4 \cdot M} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\sum_{i \in I_2} m(R_i) < \frac{\varepsilon}{4 \cdot M}$$

Si ahora observamos que para toda $i \in \{1, \dots, k\}$ se tiene que $M_i' - m_i' \leq 2M$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_2} (M_i' - m_i') \cdot m(R_i) &\leq \sum_{i \in I_2} (2M) \cdot m(R_i) \\ &= 2M \sum_{i \in I_2} m(R_i) \\ &< (2M) \cdot \frac{\varepsilon}{4 \cdot M} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

obtene.mos que

$$\begin{aligned} \overline{S}(h \circ f, \mathcal{P}) - \underline{S}(h \circ f, \mathcal{P}) &= \sum_{i \in I_1} (M_i' - m_i') \cdot m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i' - m_i') \cdot m(R_i) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

■

Para concluir esta sección, probaremos un teorema relacionado con el hecho de que la integral de una función f sobre un rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, dividida por la medida de R, también se puede interpretar como “el valor promedio” de los valores de f sobre R. En efecto, si tomamos $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$, una manera de aproximarnos a “el valor promedio” de f sobre R consistiría de los siguientes pasos:

1. tomamos la partición de R que se obtiene al subdividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ en k partes iguales (de longitud $(b_i - a_i)/k$); esta partición induce k^n subrectángulos R_j de R, todos de la misma medida, es decir, se tiene que

$$m(R_j) = \frac{m(R)}{k^n}$$

para cada $j = 1, \dots, k^n$

2. en cada uno de estos subrectángulos R_j ($j = 1, \ldots, k^n$) elegimos un punto $\hat{\xi}_j$, con lo cual obtenemos una "muestra" de puntos del rectángulo R muy bien distribuida

3. calculamos el promedio de los valores de f sobre estos puntos $\hat{\xi}_j$, es decir, calculamos

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j)}{k^n} \tag{1.3}$$

Es "intuitivamente" claro que esta suma es una muy buena aproximación a "el promedio" de los valores de f sobre R, y que esta aproximación será mejor en la medida que k sea más grande. Lo interesante es que esta misma suma también se puede ver como una suma de Riemann de f sobre R, dividida por $m(R)$; en efecto, como $m(R_j) = m(R)/k^n$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j)}{k^n} &= \sum_{j=1}^{k^n} \frac{f(\hat{\xi}_j)}{k^n} \\
&= \sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j)\frac{1}{k^n} \\
&= \sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j)\frac{m(R_j)}{m(R)} \\
&= \frac{1}{m(R)} \sum_{j=1}^{k^n} f(\hat{\xi}_j) m(R_j)
\end{aligned}$$

Dado que esta suma de Riemann se "parecerá" mucho a la integral de f sobre R cuando k es muy grande, resultará "natural" decir que el número

$$\frac{1}{m(R)} \int\limits_R f$$

se puede interpretar como "el valor promedio" de los valores de f sobre R.

Pues bien, el último teorema de esta sección establece que, si f es una función continua sobre R, este valor promedio se "alcanza" en algún punto de R, razón por la cual, es conocido como el Teorema del Valor Promedio.

Teorema 1.20 (del Valor Promedio) *Sean $f, g : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que f es continua en R y g integrable sobre R. Entonces:*

1. $\int_R f = f(\hat{\xi}) \cdot m(R)$ *para alguna* $\hat{\xi} \in R$

2. *si* $g(\hat{x}) \geq 0$ *para toda* $\hat{x} \in R$ *entonces* $\int_R fg = f(\hat{\xi}) \cdot \int_R g$ *para alguna* $\hat{\xi} \in R$

Dem. Sean m y M el mínimo y el máximo de f sobre R, respectivamente. Por el problema 11 de este capítulo tenemos que

$$m \cdot m(R) \leq \int\limits_R f \leq M \cdot m(R)$$

de tal forma que

$$m \leq \frac{\int_R f}{m(R)} \leq M$$

Como f es continua y R es conexo, debe de existir $\hat{\xi} \in R$ tal que

$$f(\hat{\xi}) = \frac{\int_R f}{m(R)}$$

por lo que $\int_R f = f(\hat{\xi}) \cdot m(R)$.
En cuanto al segundo inciso, como $m \leq f(\hat{x}) \leq M$ y $g(\hat{x}) \geq 0$, para toda $\hat{x} \in R$, tenemos que

$$(mg)(\hat{x}) \leq (fg)(\hat{x}) \leq (Mg)(\hat{x})$$

de tal forma que

$$m \cdot \int\limits_R g = \int\limits_R mg \leq \int\limits_R fg \leq \int\limits_R Mg = M \cdot \int\limits_R g$$

Ahora, si $\int_R g = 0$, de las desigualdades de arriba se tiene que $\int_R fg = 0$ y por lo tanto $\int_R fg = 0 = f(\hat{\xi}) \cdot \int_R g$ para cualquier $\hat{\xi} \in R$. Si $\int_R g > 0$ entonces

$$m \leq \frac{\int_R fg}{\int_R g} \leq M$$

y nuevamente, como f es continua y R es conexo, debe de existir $\hat{\xi} \in R$ tal que

$$f(\hat{\xi}) = \frac{\int_R fg}{\int_R g}$$

por lo que $\int_R fg = f(\hat{\xi}) \cdot \int_R g$ para alguna $\hat{\xi} \in R$. ■

Observe que el primer inciso de la proposición anterior, es un caso particular del segundo inciso tomando g igual a la función constante 1.

1.4 Medida de Jordan

En esta sección se abordará el problema de encontrar una forma de "medir conjuntos" a fin de contar con un concepto que nos permita, entre otras cosas, precisar la idea de cuándo un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es "flaco" o es "gordo". Veremos que justo el concepto de integración que acabamos de definir nos proporciona una herramienta para lograrlo.

En realidad, eso de "medir conjuntos" es algo que nos han venido enseñando desde que somos niños (quién no recuerda una que otra fórmula para calcular "el área" de una figura plana (conjuntos en $\mathbb{R}^2$) o "el volumen" de uno que otro sólido (conjuntos en $\mathbb{R}^3$)). Lo relevante de lo que haremos a continuación es que vamos a definir formalmente conceptos como los de "área" y "volumen", y "extender" dichos conceptos cuando menos en dos sentidos: uno, en cuanto a que el tipo de conjuntos a los cuáles podremos asignarle esta "medida" será bastante más diverso (no sólo triángulos, rectángulos, polígonos, círculos, cilíndros, esferas, etc.), y dos, esta forma de "medir" incluirá no sólo figuras planas o sólidos, ¡sino conjuntos que "viven" en otras dimensiones! (¡un mundo nos vigila!).

Definición 1.21 *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, definimos $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la función característica de A, de la siguiente forma*

$$\chi_A(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si } \hat{x} \notin A \end{cases}$$

(ver figura 1.13).

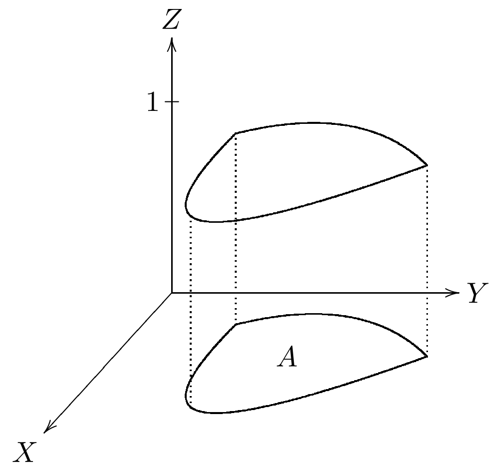

Figura 1.13: La gráfica de la función característica χ_A de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

Una vez que tenemos esta función, estamos en condiciones de definir cuándo un conjunto (acotado) es Jordan-medible[3] y cuál es esa medida.

Definición 1.22 *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, decimos que A es Jordan-medible si la función característica de A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga a A. En este caso decimos que la medida de Jordan de A (que denotaremos por $J(A)$) está dada por*

$$J(A) = \int\limits_R \chi_A$$

Antes de entrar de lleno al estudio de los conjuntos Jordan-medibles, es importante hacer algunas observaciones acerca de la definición anterior.

Nótese primero que en dicha definición hemos echado mano de un rectángulo R que contiene al conjunto acotado A; la cuestión, al parecer muy sutil, es: ¿qué sucede con nuestra definición de medida si en lugar del rectángulo R tomamos otro, digamos R', que también contenga al conjunto A? (es claro que, si A es un conjunto acotado, ¡hay una infinidad de rectángulos que lo contienen!). La pregunta, sin lugar a dudas, es: ¿el concepto de medibilidad, y lo que llamamos la medida de A, dependen de qué rectángulo tomemos? Se deja al lector verificar (con ayuda de los problemas 13, 6 y 7 de este capítulo, junto con el hecho de que la intersección (¡a diferencia de la unión!) de dos rectángulos es un rectángulo) que: si la definición de medibilidad se cumple para un rectángulo

[3]Nombrados así en recuerdo de Camille Jordan (Lyon 1838 - París 1922), un matemático francés conocido tanto por su trabajo sobre la teoría de los grupos como por su influyente *Curso de análisis (Cours d'analyse).*

R entonces también se cumple para cualquier otro rectángulo R' que contenga al conjunto A, y además

$$\int_R \chi_A = \int_{R'} \chi_A$$

En segundo lugar es importante destacar que para llegar a este concepto de medida, además del concepto de integral (que no es poca cosa, o mejor dicho, que lo es casi todo), sólo fue necesario haber definido previamente lo que significaba la medida de un cierto tipo de conjuntos, a saber aquellos que llamamos "rectángulos". De hecho, la medida de Jordan también se puede interpretar como una "extensión" (a conjuntos más "arbitrarios") de la medida de un rectángulo, sobre todo si observamos que cualquier rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$ es Jordan-medible y que $J(R) = m(R)$ (problema 19). No obstante lo anterior, hasta este momento no sabemos si figuras (o subconjuntos de $\mathbb{R}^2$) tales como un triángulo o un círculo, son conjuntos para las cuales tiene sentido hablar de su área, y en caso de que sí, ¿cómo se calcularía dicha área?

A continuación ilustraremos por medio de un ejemplo muy sencillo que en efecto, el concepto de medida de Jordan no es más que la formalización de conceptos tan intuitivos para nosotros como los de área y volumen.

Ejemplo 1.23 *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ números positivos y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq (b/a)x\}$. Como se podrá notar fácilmente, A es un triángulo de base a y altura b. Mostraremos que A es un conjunto Jordan-medible en $\mathbb{R}^2$, y que su medida (o su área) es, como todos sabemos, $\frac{a \cdot b}{2}$.*
Solución. Tomemos el rectángulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} = [0, a] \times [0, b]$ el cual contiene a A. De acuerdo con nuestra definición tenemos que mostrar que la función característica χ_A es integrable sobre el rectángulo R y que

$$\int_R \chi_A = \frac{a \cdot b}{2}$$

Para lograr esto echaremos mano del problema 10 de este capítulo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_1^{(n)} \times \mathcal{P}_2^{(n)}$, donde $\mathcal{P}_1^{(n)} = \{i\frac{a}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{P}_2^{(n)} = \{i\frac{b}{n} \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$, la partición de R que lo subdivide en n^2 subrectángulos de medida (o área) $\frac{a \cdot b}{n^2}$. Como la función con la que estamos trabajando es χ_A, se tiene que

$$\underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{R_i \subset A} m(R_i) \qquad y \qquad \overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} m(R_i)$$

donde los R_i representan a los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$, de modo que en este caso

$$\begin{aligned}
\underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) &= \sum_{R_i \subset A} m(R_i) \\
&= 1 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + 2 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} \\
&= \frac{a \cdot b}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} i \\
&= \frac{a \cdot b}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{n-1}{n}
\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) &= \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} m(R_i) \\
&= 2 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + \cdots + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + n \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + n \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} \\
&= 1 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + 2 \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + \cdots + n \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2} \\
&= \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{n+1}{n} + (n-1) \cdot \frac{a \cdot b}{n^2}
\end{aligned}$$

De estas dos identidades se obtiene inmediatamente que

$$\lim_{n \to \infty} \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)}) = \frac{a \cdot b}{2} = \lim_{n \to \infty} \overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}^{(n)})$$

de modo que por el problema antes mencionado, tenemos que χ_A es integrable sobre el rectángulo R y además

$$J(A) = \int_R \chi_A = \frac{a \cdot b}{2}$$

que es lo que queríamos mostrar.

Finalmente, es importante resaltar que no todos los subconjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$ resultan ser Jordan-medibles. El lector podrá comprobar fácilmente que el ejemplo 1.9 no sólo nos proporciona una función que no es integrable, sino que también nos muestra que el conjunto $A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \mid x \text{ ó } y \in \mathbb{Q}\}$ ¡es un conjunto que no es Jordan-medible! Por cierto que tampoco resulta ocioso decir que las siguientes dos frases tienen significados realmente diferentes; no es lo mismo decir: "A es un conjunto con medida de Jordan cero", que decir: "A es un conjunto que no tiene medida de Jordan" o "A no es Jordan-medible".

Una vez discutidas estas cuestiones acerca de la definición de lo que son los conjuntos medibles (y la medida misma), el primer resultado que probaremos nos proporcionará condiciones necesarias y suficientes para determinar cuándo un conjunto es Jordan-medible. Antes, estableceremos que si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $Fr(A)$ denotará al conjunto de puntos frontera de A (o simplemente, la frontera de A).

Teorema 1.24 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es Jordan-medible*
2. *para cada $\varepsilon > 0$ existen $R_1, \ldots, R_k$ rectángulos tales que:*
   (a) *$Fr(A) \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k$, y*
   (b) *$\sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \varepsilon$*
3. *la $Fr(A)$ es Jordan-medible y $J(Fr(A)) = 0$*

Dem.

A lo largo de esta demostración supondremos que R es un rectángulo tal que la cerradura de A ($\bar{A}$) está contenida en el interior de R (int(R)), es decir: $\bar{A} \subset \text{int}(R)$ (observe que con esta elección

no perdemos generalidad en virtud de que, como lo mencionamos párrafos arriba, nuestra definición de medibilidad no depende del rectángulo que contenga a A).
1) $\Rightarrow$ 2) Sea $\varepsilon > 0$. Como A es Jordan-medible, sabemos que χ_A es integrable sobre este rectángulo R (que contiene a A) de tal forma que existe $\mathcal{P}$ partición de R tal que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) < \varepsilon \tag{1.4}$$

Nótese que en este caso se tiene que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{R_i \cap A \neq \emptyset} m(R_i)$$

y

$$\underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{R_i \subset A} m(R_i)$$

donde los R_i representan a los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$. Así, tenemos que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{R_i \cap A \neq \emptyset \\ y \\ R_i \cap A^c \neq \emptyset}} m(R_i)$$

Sean $R_1, \ldots, R_k$ los subrectángulos de R, inducidos por la partición $\mathcal{P}$, tales que

$$R_i \cap A \neq \emptyset \quad \text{ y } \quad R_i \cap A^c \neq \emptyset \tag{1.5}$$

A fin de concluir la prueba de la condición 2, por la desigualdad 1.4, sólo resta probar que $Fr(A) \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k$. Para obtener esta contención observe primero que, como $\bar{A} \subset \operatorname{int}(R)$, entonces $Fr(A) \subset \operatorname{int}(R)$. Sea $\hat{x} \in Fr(A)$. Si tenemos la suerte de que $\hat{x} \in \operatorname{int}(R_i)$ para alguno de los subrectángulos inducidos por la partición $\mathcal{P}$ (recuerde que R es la unión de todos esos subrectángulos), es claro que R_i cumple con las condiciones 1.5, en cuyo caso ya habremos acabado. Por otra parte, si $\hat{x}$ no pertenece al interior de alguno de los subrectángulos, entonces $\hat{x}$ está en la frontera de más de uno de los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$ ya que $\hat{x} \in Fr(A) \subset \operatorname{int}(R)$ (en realidad debe estar en 2^k para algún $k \in \{1, \ldots, n\}$; la figura 1.14 (a) ilustra este hecho en $\mathbb{R}^2$). En este caso, si todos los subrectángulos que tienen a $\hat{x}$ en su frontera están contenidos en A, entonces $\hat{x} \in \operatorname{int}(A)$ (ver figura 1.14 (b)). De forma análoga, si todos los subrectángulos que tienen a $\hat{x}$ en su frontera están contenidos en A^c, entonces $\hat{x} \in \operatorname{ext}(A)$. En ambas situaciones obtenemos que $\hat{x} \notin Fr(A)$ lo cual es una contradicción. Así pues, de entre todos los subrectángulos para los cuales $\hat{x}$ pertenece a su frontera, debe existir alguno, llamemoslo R_i, para el que se satisfacen las condiciones 1.5. Con esto concluimos la prueba de la condición 2.

2) $\Rightarrow$ 3) En este inciso tenemos que probar que el conjunto $Fr(A)$ es Jordan-medible, por lo que es suficiente probar que su función característica $\chi_{Fr(A)}$ es integrable sobre el rectángulo R, ya que $Fr(A) \subset R$. Por otra parte, de acuerdo con nuestra hipótesis, existen $R_1, \ldots, R_k$ rectángulos tales que

$$Fr(A) \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k$$

y

$$\sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \varepsilon$$

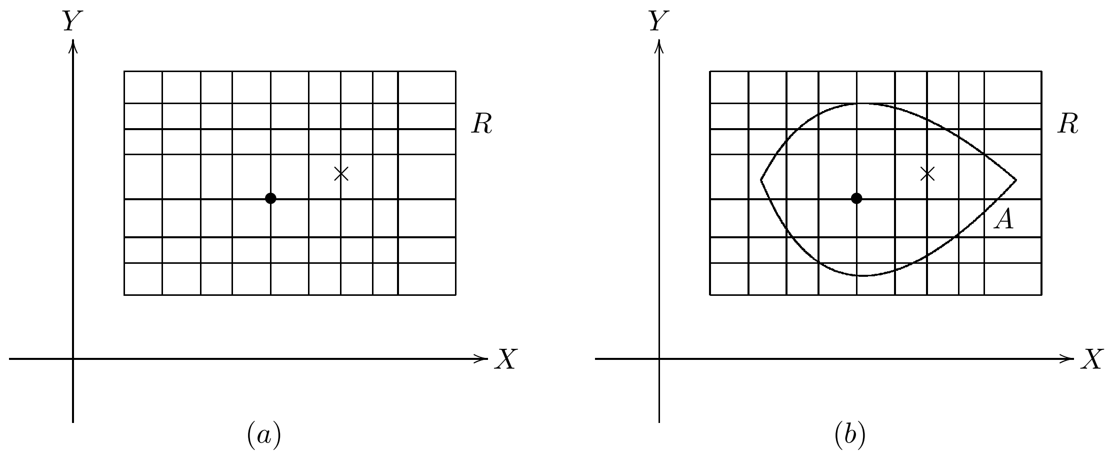

Figura 1.14: En $\mathbb{R}^2$, si un punto $\hat{x} \in \operatorname{int}(R)$ no pertenece al interior de ninguno de los subrectángulos inducidos por una partición $\mathcal{P}$, entonces $\hat{x}$ pertenece a la frontera de $2 = 2^1$ subrectángulos adyacentes ($\times$), o es un vértice de $4 = 2^2$ de ellos ($\bullet$). Si todos los subrectángulos que tienen a $\hat{x}$ en su frontera están contenidos en A, entonces $\hat{x} \in \operatorname{int}(A)$.

Lo primero que vamos a destacar, apoyados por el segundo inciso del problema 2, es que los rectángulos $R_1, \ldots, R_k$ los podemos elegir de tal forma que, además de tener la propiedad de que la suma de sus medidas es menor que ε, también tienen la propiedad de que

$$Fr(A) \subset \operatorname{int}(R_1) \cup \cdots \cup \operatorname{int}(R_k) \tag{1.6}$$

(observe que el problema citado dice, en otras palabras, que todo rectángulo se puede "agrandar" un poquito; ¡tan poquito como se quiera!). Una vez aclarado lo anterior, notemos que también podemos suponer que cada $R_i \subset R$ (de no ser así, bastaría con tomar los subrectángulos $R_i \cap R$ los cuales siguen teniendo las mismas propiedades que le estamos pidiendo a los rectángulos R_i). Ahora "extendamos" los "lados" de cada uno de los rectángulos R_i y llamemos $\mathcal{P}$ a la partición que dichas extensiones generan sobre R (la figura 1.15 ilustra este proceso en $\mathbb{R}^2$). Si bien es cierto que los subrectángulos R'_i inducidos por esta partición sobre R, no coinciden necesariamente con los rectángulos originales $R_1, \ldots, R_k$ (¡lo más seguro es que casi nunca coincidan!), también es cierto que si tomamos cualquiera de estos nuevos subrectángulos R'_i que intersecte a la $Fr(A)$, entonces éste debe estar contenido en alguno de los R_j, lo cual es una consecuencia de 1.6 (esperamos que el lector coincida en que lo difícil de esta afirmación no está en imaginar su prueba, sino en ¡escribirla!).

En síntesis, podemos asegurar que, si $R'_1, \ldots, R'_l$ son todos los subrectángulos de R inducidos por la partición $\mathcal{P}$ tales que

$$Fr(A) \cap R'_i \neq \emptyset \text{ con } i = 1, \ldots, l$$

entonces

$$R'_1 \cup \cdots \cup R'_l \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k$$

y por lo tanto tendremos que

$$\sum_{i=1}^{l} m(R'_i) \leq \sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \varepsilon$$

Como

$$\overline{S}(\chi_{Fr(A)}, \mathcal{P}) = \sum_{R'_i \cap Fr(A) \neq \emptyset} m(R'_i)$$

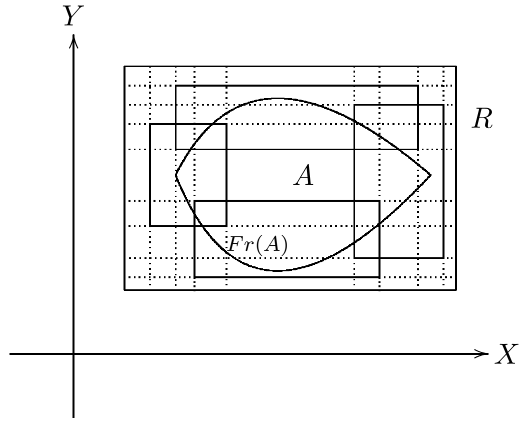

Figura 1.15: "Extendiendo" los lados de cada uno de los rectángulos R_i para obtener una partición $\mathcal{P}$ del rectángulo R

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^{l} m(R_i') \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

por el problema 8 podemos concluir que la función $\chi_{Fr(A)}$ es integrable sobre R y que además

$$\int_R \chi_{Fr(A)} = 0$$

Es decir, $Fr(A)$ es un conjunto Jordan-medible y $J(Fr(A)) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 1) Recordemos que R es un rectángulo tal que la cerradura de A está contenida en el interior de R. Por tanto, también tenemos que $Fr(A) \subset R$ de modo que $\int_R \chi_{Fr(A)} = \overline{\int_R} \chi_{Fr(A)} = 0$. De la segunda identidad, podemos concluir que existe $\mathcal{P}$ partición de R tal que, si $R_1, \ldots, R_l$ son todos los subrectángulos de R inducidos por la partición $\mathcal{P}$ tales que $Fr(A) \cap R_i \neq \emptyset$ (con $i = 1, \ldots, l$), entonces

$$\begin{aligned} \overline{S}(\chi_{Fr(A)}, \mathcal{P}) &= \sum_{R_i \cap Fr(A) \neq \emptyset} m(R_i) \\ &= \sum_{i=1}^{l} m(R_i) \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

Por otra parte, para la misma partición $\mathcal{P}$ sabemos que

$$\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) = \sum_{\substack{R_i' \cap A \neq \emptyset \\ y \\ R_i' \cap A^c \neq \emptyset}} m(R_i')$$

donde los R_i' también son parte de los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$. Ahora observe que si R_i' es cualquiera de estos subrectángulos que intersecan tanto a A como a A^c, entonces éste debe de intersecar a la $Fr(A)$ (problema 4 de este capítulo). En resumen, si $R_i^{'}, \ldots, R_k^{'}$ son todos los subrectángulos que intersecan tanto a A como a A^c entonces $\{R_i^{'}, \ldots, R_k^{'}\} \subset \{R_1, \ldots, R_l\}$, de tal forma que

$$\begin{aligned}
\overline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) - \underline{S}(\chi_A, \mathcal{P}) &= \sum_{\substack{R_i^{'} \cap A \neq \emptyset \\ y \\ R_i^{'} \cap A^c \neq \emptyset}} m(R_i^{'}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} m(R_i^{'}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{l} m(R_i) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

con lo que podemos concluir que la función χ_A es integrable sobre R y que por lo tanto A es un conjunto Jordan-medible, como se quería demostrar. ■

Sin duda la demostración de este teorema fue un poco larga, pero no se podrá negar que es un teorema que nos proporciona información muy valiosa. Para empezar, nos dice que para saber si un conjunto es Jordan-medible, es suficiente con que su frontera también sea un conjunto Jordan-medible, pero además de medida cero (es decir, "flaco"). Y para terminar, los incisos 2 y 3 nos dan condiciones necesarias y suficientes para que dicha frontera resulte ser un conjunto Jordan-medible y de medida cero. Esto último nos hace ver que los conjuntos Jordan-medibles y de medida cero resultan ser muy importantes (sobre todo si son la frontera de otro conjunto). Es por esta razón que nuestro siguiente resultado nos da condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto (aunque no sea la frontera de otro) tenga estas importantes características; por supuesto que dichas condiciones están sugeridas por los mismos incisos 2 y 3, y su prueba resulta muy análoga a lo que hicimos antes, razón por la cual se deja como un problema para el lector.

Teorema 1.25 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto acotado. A es Jordan-medible y $J(A) = 0$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existen $R_1, \ldots, R_k$ rectángulos tales que:*

1. *$A \subset R_1 \cup \cdots \cup R_k$, y*
2. *$\sum_{i=1}^{k} m(R_i) < \varepsilon$*

Lo siguiente que vamos a mostrar es que este concepto de medida de conjuntos se lleva bastante bien con las operaciones entre conjuntos (¡como es de esperarse de cualquier concepto de medida que se respete!).

Teorema 1.26 *Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ son Jordan-medibles entonces $A \cup B$ y $A \cap B$ también son Jordan-medibles y además*

$$J(A \cup B) = J(A) + J(B) - J(A \cap B) \tag{1.7}$$

Dem. Primero demostraremos que $A \cup B$ y $A \cap B$ son Jordan-medibles. Para ello, basta recordar que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ y $Fr(A \cap B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$ de tal forma que, por el teorema 1.24 (la equivalencia de los incisos 1 y 3, en ambos sentidos) y el problema 21 (ambos incisos), podemos concluir que $A \cup B$ y $A \cap B$ son Jordan-medibles.

En cuanto a la identidad 1.7 basta observar que se satisface la siguiente identidad de funciones

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B$$

la cual se puede probar fácilmente analizando los casos: $\hat{x} \in A \cap B, \hat{x} \in A \backslash B, \hat{x} \in B \backslash A$ y $\hat{x} \notin A \cup B$. Si ahora tomamos un rectángulo R tal que $A, B \subset R$, dado que por la primera parte de esta prueba ya sabemos que las funciones $\chi_{A\cup B}$ y $\chi_{A\cap B}$ son integrables sobre R, usando el primer inciso del teorema 1.16 obtenemos la fórmula deseada. ■

Como se recordará, parte de la motivación para contar con una forma de medir conjuntos estaba en la posibilidad de decidir cuándo un conjunto es "flaco" (o "gordo"), lo cual a su vez estaba relacionado con la posibilidad de decidir la "forma" que debería tener el conjunto de discontinuidades de una función para que ésta resultara ser integrable (de hecho, habíamos adelantado que ser de medida cero era una manera de decidir que un conjunto era "flaco"). Pues bien, terminaremos esta sección con un resultado que cumple parcialmente con este objetivo. Y decimos que lo cumple parcialmente en virtud de que las condiciones de este resultado sólo son suficientes.

Teorema 1.27 *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. Si el conjunto de discontinuidades de f en R ($D_{f,R}$) es un conjunto Jordan-medible y de medida cero entonces f es integrable sobre R.*

Dem. Sea $M > 0$ tal que $|f(\hat{x})| \leq M$ para toda $\hat{x} \in R$. Usaremos el teorema 1.11 para demostrar que f es integrable sobre R. Sea pues $\varepsilon > 0$. Dado que $J(D_{f,R}) = 0$ sabemos que existe una partición $\mathcal{P}$ del propio rectángulo R tal que

$$\overline{S}(\chi_{D_{f,R}}, \mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Si $R_1, \ldots, R_l$ son los subrectángulos de R inducidos por la partición $\mathcal{P}$ que tienen la propiedad de que $R_i \cap D_{f,R} \neq \emptyset$ $(i = 1, \ldots, l)$, tenemos entonces que

$$\sum_{i=1}^{l} m(R_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

Si ahora $R_{l+1}, \ldots, R_k$ son el resto de los subrectángulos de R inducidos por $\mathcal{P}$, sabemos entonces que f es continua en cada uno de ellos de tal forma que, por el teorema 1.12, f es integrable sobre cada R_i $(i = l+1, \ldots, k)$. Nuevamente por el teorema 1.11, para cada uno de estos subrectángulos podemos encontrar una partición $\mathcal{P}^{(i)}$ tal que

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{2(k-l)}$$

para cada $i = l+1, \ldots, k$. Ahora, cada una de estas particiones $\mathcal{P}^{(i)}$ la extendemos a todo el rectángulo R y junto con la partición inicial $\mathcal{P}$, formamos una nueva partición del rectángulo R a la que llamaremos $\mathcal{Q}$ (la figura 1.16 ilustra este procedimiento en $\mathbb{R}^2$).

Es importante hacer notar que, por la forma en que la construimos, la partición $\mathcal{Q}$ es un refinamiento de la partición $\mathcal{P}$ de modo que cada subrectángulo R_i $(i = 1, \ldots, k)$ inducido por $\mathcal{P}$ es la unión de subrectángulos inducidos por $\mathcal{Q}$; o dicho de otra forma, si los subrectángulos inducidos por $\mathcal{Q}$ los denotamos por $R'_{j,i}$, en donde i es un índice que corre desde 1 hasta k, y para cada una de estas $i's$, j es un índice que corre desde 1 hasta una cierta k_i, entonces

$$R_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} R'_{j,i}$$

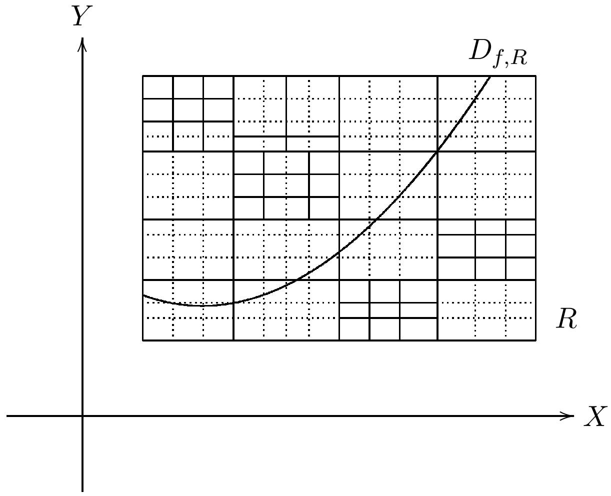

Figura 1.16: En cada subrectángulo R_i que no interseca al conjunto de las discontinuidades de f en R ($D_{f,R}$), "extendemos" su partición $\mathcal{P}^{(i)}$ para obtener otra partición $\mathcal{Q}$ del rectángulo R (en la figura sólo se hizo en cinco de éstos)

para $i = 1, \ldots, k$.

Obsérvese también que para cada $i = l+1, \ldots, k$, los $R'_{j,i}$ ($j = 1, \ldots, k_i$) son subrectángulos de R_i inducidos por alguna partición $\mathcal{Q}^{(i)}$ que refina a $\mathcal{P}^{(i)}$ (en la figura 1.16 también se alcanza a notar este hecho), de modo tal que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) &\leq \overline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)})\\ &< \frac{\varepsilon}{2(k-l)}\end{aligned}$$

Una vez aclarado lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, \mathcal{Q}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}) &= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k_i}(M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k_i}(M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i})\right) + \sum_{i=l+1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{k_i}(M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k_i}(M'_{j,i} - m'_{j,i}) \cdot m(R'_{j,i})\right) + \sum_{i=l+1}^{k}\left(\overline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{Q}^{(i)})\right)\\ &\leq \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k_i} 2M \cdot m(R'_{j,i})\right) + \sum_{i=l+1}^{k}\left(\overline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(i)})\right)\\ &< 2M \cdot \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{j=1}^{k_i} m(R'_{j,i})\right) + \sum_{i=l+1}^{k}\frac{\varepsilon}{2(k-l)}\\ &= 2M \cdot \sum_{i=1}^{l} m(R_i) + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< 2M \cdot \left(\frac{\varepsilon}{4M}\right) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

en donde, como era de esperarse, $M'_{j,i} = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R'_{j,i}\}$, y $m'_{j,i} = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R'_{j,i}\}$ para $i = 1, \dots, k$ y $j = 1, \dots, k_i$.
Como se podrá observar, con esto terminamos la prueba del teorema. ■

Como dijimos antes, este teorema es una respuesta parcial al problema de caracterizar a las funciones integrables en términos de la medida de su conjunto de discontinuidades. Es un hecho desafortunado que, si una función es integrable sobre un rectángulo, no se pueda asegurar que su conjunto de discontinuidades sea Jordan-medible, lo que se puede comprobar con la función del problema 9. Por cierto que, si se supiera que el conjunto de discontinuidades de una función integrable es Jordan-medible, éste tendría que ser necesariamente de medida cero, como se pide probar en el ejercicio 26.

Sin embargo, y como casi todo mundo lo sabe, los matemáticos no suelen quedarse con una duda y no faltó uno de ellos que se diera a la tarea de buscar una nueva forma de medir conjuntos que permitiera caracterizar a las funciones integrables (o más específicamente, a el conjunto de discontinuidades de una función integrable). Este trabajo lo realizó el matemático francés Henri León Lebesgue (1875-1941) quien introdujo un nuevo concepto de medida de conjuntos (y que por razones obvias ahora se le conoce como *medida de Lebesgue*). En particular, los conjuntos que resultan ser "flacos" con esta medida (es decir, los conjuntos de medidad de Lebesgue cero) se caracterizan por una propiedad análoga a la que sirve para caracterizar a los conjuntos de medida de Jordan cero, y que nosotros probamos en el teorema 1.25. Específicamente se tiene la siguiente

Definición 1.28 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, un conjunto acotado. A tiene medida de Lebesgue cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad numerable de rectángulos $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$ tales que:*

1. $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$, *y*

2. $\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) < \varepsilon$

En este caso escribimos que $\lambda(A) = 0$ (en donde $\lambda(A)$ denota la medida de Lebesgue de A).

Lo mejor de todo esto es que, sin tener que saber cómo se define en general la medida de Lebesgue, y sólo contando con la definición anterior, podemos formular el teorema que nos permite caracterizar plenamente a las funciones integrables sobre un rectángulo R. Este teorema es conocido como el *Teorema de Lebesgue* (¡uno de los muchos que probó!) y dice lo siguiente

Teorema 1.29 (de Lebesgue) *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el rectángulo R. f es integrable sobre R si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f sobre R ($D_{f,R}$) es un conjunto de medida de Lebesgue cero (es decir, $\lambda(D_{f,R}) = 0$).*

La prueba de este teorema requiere de algunos resultados previos relacionados con los conjuntos de medida de Lebesgue cero los cuales, aunque sencillos de probar, escapan a los objetivos de este texto. Por esta razón, dichos resultados y la prueba del propio teorema se incluyen en un apéndice.

1.5 La integral sobre conjuntos Jordan-medibles

En esta sección mostraremos que el concepto de integral se puede extender a conjuntos más generales que los rectángulos. En principio, podremos extenderlo a cualquier conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ (de hecho, así lo haremos), aunque rápidamente nos daremos cuenta de que, para ciertos conjuntos acotados, algunas funciones tan sencillas como las funciones constantes (distintas de la constante cero) no resultarán ser integrables. En este sentido, si queremos que funciones tan "elementales" (como por ejemplo la función constante uno) resulten ser integrables, lo más apropiado será que nos concentremos en los conjuntos Jordan-medibles.

Una vez aclarado lo anterior, procedemos a dar nuestra definición

Definición 1.30 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto acotado A. Definimos $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como*

$$f_A(\hat{x}) = \begin{cases} f(\hat{x}) & \text{si } \hat{x} \in A \\ \\ 0 & \text{si } \hat{x} \notin A \end{cases}$$

(ver figura 1.17).
Decimos que f es integrable sobre A si la función f_A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga a A. En este caso diremos que la integral de f sobre A (que denotaremos por $\int_A f$) está dada por

$$\int\limits_A f = \int\limits_R f_A$$

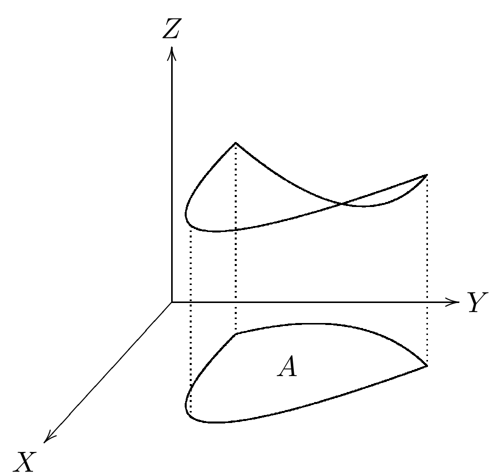

Figura 1.17: La gráfica de la función f_A de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$

De forma análoga a como lo hicimos cuando definimos los conjuntos Jordan-medibles, debe hacerse notar que la definición anterior no depende del rectángulo R que se elija. Usando la misma herramienta que en ese caso se puede probar que, si la función f_A es integrable sobre algún rectángulo R que contenga al conjunto A, entonces es integrable sobre cualquier otro rectángulo que lo contenga.

Asimismo vale la pena destacar que, si la función f es la función constante uno sobre A ($f \equiv 1$) entonces la función f_A no es más que la función característica de A, de forma tal que pedir que esta función sea integrable sobre A, es lo mismo que pedir que A sea un conjunto Jordan-medible. He aquí la razón por la que decimos que nuestra definición de integral sobre conjuntos más arbitrarios que los rectángulos, en realidad debiera de circunscribirse a los conjuntos Jordan-medibles.

La discusión anterior también sirve para mostrar que, si no suponemos que el conjunto A sobre el cual queremos integrar es Jordan-medible, entonces podemos tomar funciones que, a pesar de que se porten muy bien sobre dicho conjunto (como por ejemplo que sean continuas sobre A), de cualquier forma no resultan ser integrables sobre A (¡qué mejor ejemplo que la función constante uno!). Por el contrario, si suponemos que el conjunto es Jordan-medible, se puede probar que cualquier función que sea continua sobre A resulta ser integrable sobre él. Más aún, con ayuda del teorema 1.27 podemos probar un resultado un poco más general y del cual la afirmación previa resultará ser un corolario.

Teorema 1.31 *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A. Si el conjunto de discontinuidades de f sobre A ($D_{f,A}$) es un conjunto Jordan-medible y de medida cero entonces f es integrable sobre A.*

Dem. Sea R un rectángulo que contenga a A. De acuerdo con la definición, hay que probar que la función f_A es integrable sobre este rectángulo. Para obtener esto, por el teorema 1.27 basta probar que el conjunto de discontinuidades de la función f_A sobre el rectángulo R es un conjunto Jordan-medible y de medida cero, lo cual a su vez se obtiene de la contención que se prueba en el ejercicio 30, del hecho que la $Fr(A)$ es un conjunto Jordan-medible y de medida cero (puesto que A es Jordan-medible (teorema 1.24)), y de ambos incisos del problema 21. ■

Corolario 1.32 *Si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua sobre el conjunto Jordan-medible A entonces f es integrable sobre A.*

Esta manera de extender el concepto de integral a otros conjuntos tiene todas las propiedades básicas que se pueden esperar de ella. Sobre todo aquellas que tienen que ver con las operaciones entre funciones (suma, multiplicación, etc.), en donde incluso ni siquiera hace falta suponer que el conjunto sobre el cual estemos integrando, es Jordan-medible. Estas propiedades quedan resumidas en el siguiente teorema y su prueba, como era de esperarse, se deja al lector.

Teorema 1.33 *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrables sobre el conjunto A. Entonces:*

1. *$f + g$ es integrable sobre A y además $\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g$*
2. *si $c \in \mathbb{R}$, cf es integrable sobre A y además $\int\limits_A cf = c \cdot \int\limits_A f$*
3. *fg es integrable sobre A*
4. *si $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$ entonces $\int\limits_A f \geq 0$*
5. *si $f(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in A$, entonces $\int\limits_A f \leq \int\limits_A g$*
6. *$|f|$ es integrable sobre A y además $\left|\int\limits_A f\right| \leq \int\limits_A |f|$*
7. *las funciones $\max\{f, g\}$ y $\min\{f, g\}$ son integrables sobre A*

Además de trabajar bien con las operaciones entre funciones, este concepto de integral también se lleva bien con las operaciones entre conjuntos. Esto significa que, si una función es integrable sobre un par de conjuntos, entonces es integrable sobre la intersección y la unión de ambos. Como en el caso del teorema anterior, estas propiedades son válidas aun cuando los conjuntos en cuestión no sean Jordan-medibles, como se establece en el siguiente

Teorema 1.34 *Si $f : A \cup B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable sobre A y sobre B entonces f es integrable sobre $A \cap B$ y $A \cup B$ y además*

$$\int_{A\cup B} f = \int_{A} f + \int_{B} f - \int_{A\cap B} f \tag{1.8}$$

Dem. Primero observemos que, como f es integrable sobre A y sobre B, entonces f_A y f_B son integrables (sobre algún rectángulo R que contenga a $A \cup B$) de tal forma que, por el problema 14 sabemos que $(f_A)_+$ y $(f_B)_+$ son integrables sobre R. Ahora, por la primera identidad del primer inciso del problema 35 se tiene que $(f_{A\cap B})_+$ es integrable sobre R. Análogamente se prueba que $(f_{A\cap B})_-$ es integrable sobre R. Por otra parte, dado que $f_{A\cap B} = (f_{A\cap B})_+ + (f_{A\cap B})_-$ se tiene que $f_{A\cap B}$ es integrable sobre R, es decir, f es integrable sobre $A \cap B$. Finalmente, por la identidad del segundo inciso del mismo problema 35 tenemos que

$$f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_{A\cap B}$$

de tal forma que podemos concluir que f es integrable sobre $A \cup B$, además de que también obtenemos la fórmula 1.8. ■

Para concluir esta sección (¡y este capítulo!), probaremos las correspondientes versiones de "el Teorema del Valor Promedio" y "el Teorema del Valor Promedio Generalizado" que también son válidos para la integral con la que estamos tratando, sólo que a diferencia de los teoremas anteriores, para éstos sí hace falta suponer que el conjunto sobre el cual se está integrando sea Jordan-medible (además de otra propiedad).

Teorema 1.35 *Sean, $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que, f es continua y acotada en A, g es integrable sobre A y A es un conjunto conexo y Jordan-medible. Entonces:*

1. $\int_A f = f(\hat{\xi}) \cdot J(A)$ *para alguna* $\hat{\xi} \in A$
2. *si* $g(\hat{x}) \geq 0$ *para toda* $\hat{x} \in A$ *entonces* $\int_A fg = f(\hat{\xi}) \cdot \int_A g$ *para alguna* $\hat{\xi} \in A$

Dem.

•

Sean $m = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in A\}$ y $M = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in A\}$. Entonces

$$m \leq f(\hat{x}) \leq M \tag{1.9}$$

para toda $\hat{x} \in A$. Como A es Jordan-medible, por el inciso 5 del teorema 1.33, tenemos que

$$m \cdot J(A) \leq \int_A f \leq M \cdot J(A) \tag{1.10}$$

Obsérvese que si $J(A) = 0$ entonces, de las desigualdades anteriores, concluimos que $\int_A f = 0$ de tal forma que la identidad del inciso 1 se cumple para cualquier $\hat{\xi} \in A$. Supongamos por tanto que $J(A) > 0$. En este caso, por el inciso *a*) del problema 22 y el problema 38 (aplicado a las funciones $f-m$ y/o $M-f$), podemos asegurar que, si en 1.9 se satisface alguna (o ambas) de las desigualdades, para toda $\hat{x} \in A$, entonces en 1.10 también se satisface la correspondiente desigualdad. De esta forma, aún cuando en 1.9 se cumpliera alguna (o ambas) desigualdad estricta (para toda $\hat{x} \in A$), dado que f es continua sobre el conjunto conexo A, podemos asegurar que el número $\left(\int_A f\right)/J(A)$ pertenece a $f(A)$ (la imagen de A bajo f), o lo que es lo mismo, que existe $\hat{\xi} \in A$ tal que

$$\frac{\int_A f}{J(A)} = f(\hat{\xi})$$

con lo cual terminamos la prueba del inciso 1).

Para la prueba del inciso 2, si en 1.9 multiplicamos por $g(\hat{x})$ tenemos que

$$m \cdot g(\hat{x}) \leq f(\hat{x}) \cdot g(\hat{x}) \leq M \cdot g(\hat{x})$$

para toda $\hat{x} \in A$ de tal forma que, nuevamente por el inciso 5 del teorema 1.33, se tiene que

$$m \cdot \int_A g \leq \int_A fg \leq M \cdot \int_A g \tag{1.11}$$

Como en la prueba del inciso 1, si $\int_A g = 0$, por las desigualdades anteriores tenemos que $\int_A fg = 0$ y por tanto la identidad del inciso 2 se cumple para cualquier $\hat{\xi} \in A$. Supongamos entonces que $\int_A g > 0$. En este caso, por el problema 38 (en un sentido aplicado a la función g y en el otro a las funciones $fg - mg$ y/o $Mg - fg$) de nueva cuenta podemos concluir que, si en 1.9 alguna de las desigualdades es estricta para toda $\hat{x} \in A$, entonces la correspondiente en 1.11 también es estricta. Por este hecho, y por las mismas hipótesis sobre f y sobre A que usamos en la prueba del primer inciso, podemos asegurar que el número $\left(\int_A fg\right)/\left(\int_A g\right)$ pertenece a $f(A)$, o lo que es lo mismo, que existe $\hat{\xi} \in A$ tal que

$$\frac{\int_A fg}{\int_A g} = f(\hat{\xi})$$

con lo cual terminamos la prueba del inciso 2. ■

1.6 Problemas

1. Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Pruebe que:

   (a) si $b_i - a_i < \delta$ para $i = 1, \ldots, n$, entonces $d(R) < \sqrt{n} \cdot \delta$

   (b) si $\hat{x}, \hat{y} \in R$, entonces $\|\hat{x} - \hat{y}\| \leq d(R)$

   (c) si $\hat{x}_0 \in R$ y $r > d(R)$, entonces $R \subset B_r(\hat{x}_0)$

2. Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ un rectángulo en $\mathbb{R}^n$. Dado $\varepsilon > 0$, pruebe que existen R_1, R_2 rectángulos tales que

   (a) $R_1 \subset \operatorname{int}(R)$ y $m(R) - \varepsilon < m(R_1)$

(b) $R \subset \operatorname{int}(R_2)$, y $m(R_2) < m(R) + \varepsilon$.

3. Pruebe que, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto acotado, entonces existe R un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ tal que $A \subset R$.

4. Pruebe que si $A \subset \mathbb{R}^n$ y R es un rectángulo en $\mathbb{R}^n$ tal que $R \cap A \neq \emptyset$ y $R \cap A^c \neq \emptyset$ entonces $R \cap Fr(A) \neq \emptyset$.

5. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones del rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\mathcal{Q}$ refina a $\mathcal{P}$ si y sólo si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

6. Pruebe que, si f es integrable sobre el rectángulo $R \subset \mathbb{R}^n$, entonces f es integrable sobre cualquier rectángulo $R' \subset R$.

7. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \operatorname{int}(R)$. Pruebe que f es integrable sobre R y que $\int_R f = 0$.

8. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada tal que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{P}$ una partición de R tal que $\overline{S}(f, \mathcal{P}) < \varepsilon$ entonces f es integrable sobre R y $\int_R f = 0$.

9. Sea $f : R = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ o } y \text{ es irracional, } 0 \text{ o } 1 \\ \\ \frac{1}{n} + \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{m}{n} \text{ y } y = \frac{p}{q} \text{ con } (m,n) \text{ y } (p,q) \text{ primos relativos} \end{cases}$$

Determine si f es integrable sobre R. Pruebe su respuesta.

10. Sean, $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada, $I \in \mathbb{R}$, y $\{\mathcal{P}^{(k)}\}, \{\mathcal{Q}^{(k)}\}$ dos sucesiones de particiones del rectángulo R tales que

$$\lim_{k \to \infty} \underline{S}(f, \mathcal{P}^{(k)}) = I = \lim_{k \to \infty} \overline{S}(f, \mathcal{Q}^{(k)})$$

Pruebe que f es integrable sobre R y que además

$$\int_R f = I$$

11. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrables sobre R. Pruebe que, si M y m son tales que $m \leq f(\hat{x}) \leq M$ para toda $\hat{x} \in R$, entonces $m \cdot m(R) \leq \int_R f \leq M \cdot m(R)$

12. Sean f, g funciones integrables sobre el rectángulo cerrado $R \subset \mathbb{R}^n$ y $c \in \mathbb{R}$. Pruebe que $f + g$ y cf son integrables sobre R, y además

$$\int_R (f+g) = \int_R f + \int_R g \quad \text{y} \quad \int_R cf = c \int_R f$$

13. Sean R, R_1, R_2 rectángulos en $\mathbb{R}^n$ tales que $R = R_1 \cup R_2$ e $\operatorname{int}(R_1) \cap \operatorname{int}(R_2) = \emptyset$ (observe que, si $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $a_i < c < b_i$ para alguna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ entonces $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_i, c] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ y $R_2 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [c, b_i] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ son dos rectángulos que satisfacen las codiciones de este problema. Sin embargo, lo más importante de esta observación es que ¡también se cumple lo recíproco! Es decir, si R, R_1, R_2 son rectángulos que satisfacen las condiciones de este problema, entonces deben de poderse escribir justo como los que acabamos de describir). Pruebe que:

(a) $\underline{\int}_R f = \underline{\int}_{R_1} f + \underline{\int}_{R_2} f$ y $\overline{\int}_R f = \overline{\int}_{R_1} f + \overline{\int}_{R_2} f$

(b) f es integrable sobre R si y sólo si f es integrable sobre R_1 y R_2. Además, en ambos casos se tiene que $\int_R f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$

14. Pruebe que, si $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable sobre R, entonces:

    (a) f_+ definida como

    $$f_+(\hat{x}) = \begin{cases} f(\hat{x}) & \text{si } f(\hat{x}) > 0 \\ \\ 0 & \text{si } f(\hat{x}) \leq 0 \end{cases}$$

    es integrable sobre R

    (b) f_- definida como

    $$f_-(\hat{x}) = \begin{cases} f(\hat{x}) & \text{si } f(\hat{x}) < 0 \\ \\ 0 & \text{si } f(\hat{x}) \geq 0 \end{cases}$$

    es integrable sobre R (sugerencia: pruebe, y use, que $f = f_+ + f_-$)

    (c) $|f|$ es integrable sobre R y además

    $$\left| \int\limits_R f \right| \leq \int\limits_R |f|$$

    (sugerencia: pruebe, y use, que $|f| = f_+ - f_-$)

    (d) si además $g : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable sobre R, entonces $\min\{f, g\}$ y $\max\{f, g\}$ son integrables sobre R.

15. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada

    (a) Suponga que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Pruebe que, si $M = \sup\{\ f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$, $M' = \sup\{\ f^2(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$, $m = \inf\{\ f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$ y $m' = \inf\{\ f^2(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$, entonces $M' = M^2$ y $m' = m^2$. ¿Es indispensable la hipótesis de que f sea no negativa? Justifique su respuesta.

    (b) Pruebe que, si f es integrable sobre R entonces f^2 es integrable sobre R.

    (c) Pruebe que, si f y g son integrables sobre R entonces fg es integrable sobre R

16. Pruebe los incisos (c) y (b) de los problemas 14 y 15, respectivamente, usando la proposición 1.19.

17. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada. Pruebe que, si f^2 es integrable sobre R entonces $|f|$ es integrable sobre R. ¿f es integrable sobre R?

18. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre R tal que $f(\hat{x}) \leq 0$ para toda $\hat{x} \in R$. Pruebe que:

    (a) $\int_R f \leq 0$

    (b) si f es continua en $\hat{x}_0 \in R$ y $f(\hat{x}_0) < 0$, entonces $\int_R f < 0$

    (c) si f es menor que cero para toda $\hat{x} \in R$, entonces $\int_R f < 0$

19. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo. Pruebe que R es Jordan-medible y que $J(R) = m(R)$

20. Pruebe el teorema 1.25.

21. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados. Pruebe que:

    (a) si $J(B) = J(A) = 0$, entonces $J(A \cup B) = 0$

    (b) si $B \subset A$ y $J(A) = 0$, entonces B es Jordan-medible y además $J(B) = 0$

22. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto Jordan-medible. Pruebe que:

    (a) $J(A) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{int}(A) \neq \emptyset$

    (b) $J(A) = 0 \Leftrightarrow A \subset Fr(A)$

    (c) $\operatorname{int}(A)$ es Jordan-medible y además $J(\operatorname{int}(A)) = J(A)$

    (d) si B es un conjunto tal que $\operatorname{int}(A) \subseteq B \subseteq (A \cup Fr(A))$, entonces B es Jordan-medible y además $J(B) = J(A)$

23. Sea $\{A_k \subset \mathbb{R}^n \mid k \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos Jordan-medibles tales que $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ son acotados. ¿Los conjuntos $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ y $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ son Jordan-medibles? Pruebe su respuesta.

24. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-medibles. Pruebe que $A \backslash B$ es Jordan-medible y además $J(A \backslash B) = J(A) - J(A \cap B)$

25. Determine si el conjunto de discontinuidades de cada una de las funciones de los ejemplos 1.9 y 1.13, y el problema 9 son Jordan-medibles, y diga cuál es su medida. Pruebe sus respuestas.

26. Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre el rectángulo R tal que $D_{f,R}$ es un conjunto Jordan-medible. Pruebe que $J(D_{f,R}) = 0$.

27. Sean, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, y < 1 \text{ y } x, y \in \mathbb{Q}\}$, y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = \frac{1}{n} + \frac{1}{q}$$

    en donde $x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{q}$ y (m, n),(p, q) son primos relativos.

    (a) ¿A es un conjunto Jordan-medible?

    (b) ¿f es integrable sobre A?
    Pruebe sus respuestas.

28. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tal que $J(A) = 0$ y f es acotada sobre A. Pruebe que f es integrable sobre A y además $\int_A f = 0$.

29. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A. Pruebe que, si $f(\hat{x}) = 0$ para toda $\hat{x} \in \operatorname{int}(A)$ entonces f es integrable sobre A y además $\int_A f = 0$.

30. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto Jordan-medible A y R un rectángulo tal que $A \subset R$. Pruebe que $D_{f_A,R} \subset Fr(A) \cup D_{f,A}$. ¿Es necesaria la hipótesis de que A sea un conjunto Jordan-medible? Pruebe su respuesta.

31. Pruebe el teorema 1.33.

32. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A. Pruebe que la gráfica de f ($G_f = \{(\hat{x}, f(\hat{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \hat{x} \in A\}$) es un conjunto Jordan-medible (en $\mathbb{R}^{n+1}$) y de medida cero.

33. Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continuas sobre el conjunto cerrado, acotado y Jordan-medible A, tales que $f(\hat{x}) \leq g(\hat{x})$ para toda $\hat{x} \in A$. Pruebe que el conjunto

$$\{(\hat{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(\hat{x}) \leq y \leq g(\hat{x}),\ \hat{x} \in A\}$$

es Jordan-medible (en $\mathbb{R}^{n+1}$).

34. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre A y $B \subset A$.

    (a) ¿f es integrable sobre B? Pruebe su respuesta

    (b) ¿bajo que condiciones sobre B es cierto que f es integrable sobre B? Pruebe su respuesta

    (c) pruebe que, si f es integrable sobre B entonces f es integrable sobre $A \backslash B$

    (d) pruebe que, si f es integrable sobre B y además $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$, entonces $\int_B f \leq \int_A f$

35. Sea $f : A \cup B \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada sobre el conjunto acotado $A \cup B$. Pruebe que:

    (a) $(f_{A\cap B})_+ = \min\{(f_A)_+, (f_B)_+\}$ y $(f_{A\cap B})_- = \max\{(f_A)_-, (f_B)_-\}$ (consulte el problema 14 para la definición de estas funciones)

    (b) $f_{A\cup B} + f_{A\cap B} = f_A + f_B$

36. Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ que $A = B \cup C$. Pruebe que, si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es integrable sobre A, sobre $A \backslash B$ y sobre $A \backslash C$ entonces f es integrable sobre B, sobre C y sobre $B \cap C$ y además

$$\int\limits_A f = \int\limits_B f + \int\limits_C f - \int\limits_{B\cap C} f$$

37. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A tal que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$. Pruebe que, si f es continua en $\hat{x}_0 \in \text{int}(A)$ y $f(\hat{x}_0) > 0$ entonces $\int_A f > 0$. ¿Es indispensable la hipótesis de que $\hat{x}_0 \in \text{int}(A)$?

38. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A. Suponga que $f(\hat{x}) \geq 0$ para toda $\hat{x} \in A$ y sea $B = \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) > 0\}$. Pruebe que: $\int_A f > 0$ si y sólo si $\text{int}(B) \neq \emptyset$.

39. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ integrable sobre el conjunto Jordan-medible A. Sea $B = \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) \neq 0\}$

    (a) ¿B es un conjunto Jordan-medible?

    (b) pruebe que f es integrable sobre B y que además $\int_A f = \int_B f$