

Capítulo 1

El conjunto \mathbb{R}^n

Así como en el caso del cálculo diferencial de una variable empezamos por estudiar al conjunto de los números reales \mathbb{R} , en este capítulo empezaremos por analizar más a fondo al conjunto \mathbb{R}^n , en virtud de que dicho conjunto será tanto el dominio como, en algunos casos, el contradominio de casi todas las funciones con las que trabajaremos en este texto. En la primera sección de este capítulo intentaremos mostrar porqué este tipo de conjuntos (para diferentes valores de n) es la forma más adecuada de representar al dominio y/o contradominio de la mayoría de las funciones que se encuentran en la base del cálculo de varias variables.

1.1 Para empezar, algunos ejemplos

Como mencionamos en la introducción, una motivación para el desarrollo del Cálculo de varias variables se puede encontrar en el planteamiento de ciertas situaciones en las que *una* cantidad (o variable, en general) se puede poner en términos de *otra* variable, con la particularidad de que alguna de estas variables (¡o ambas!) *no se puede medir, describir o representar con un sólo número real*. Lo que haremos en esta sección será presentar algunos ejemplos con estas características.

Ejemplo 1.1 *Supongamos que tenemos la suerte de contar con un dispositivo que nos permite saber, en un cierto instante, la temperatura en cada posición de la habitación en la que nos encontramos. Si queremos pensar esta situación en términos más técnicos, lo que estamos planteando es que este dispositivo nos permite establecer una función entre las distintas posiciones de la habitación y la temperatura en cada una de ellas.*

De esta forma, queda claro que una de nuestras variables (la independiente, como suele decirse) es la posición y la otra (la dependiente) es la temperatura.

Como seguramente el lector ya sabe, las diferentes posiciones en una habitación no son susceptibles de describirse con un sólo número real y con toda certeza también sabe que para representar cada posición nos harán falta tres números reales (e incluso también estará consciente de que para una misma posición dentro de la habitación, pueden haber diferentes ternas de números que la representan, ¡dependiendo del “sistema de referencia” que elijamos!).

Finalmente, la variable dependiente (en este caso la temperatura) sí se puede describir con un sólo número real, por lo que la situación que planteamos nos conduce a obtener una función que depende de tres números reales (los que describen o representan una posición) y que asigna otro número real (el que describe o mide la temperatura).

El ejemplo anterior permite una variante que nos lleva a obtener una función con una variable independiente diferente. Veamos de qué forma.

Ejemplo 1.2 *En el ejemplo anterior mencionamos que nuestro dispositivo nos permitía conocer la temperatura en cada posición de una habitación, en un cierto instante, situación que de inmediato nos hace pensar en una nueva variable: el instante en que estamos midiendo la temperatura.*

El lector estará de acuerdo en que esta nueva variable se puede medir con un sólo número real (y también estará de acuerdo en que a un mismo instante lo podrán describir diferentes números reales, ¡dependiendo en dónde colocamos el “instante cero”!).

De esta forma, considerando esa nueva variable, la función que obtenemos será una función cuya variable independiente estará dada por una posición y un instante. Esta variable se puede describir con cuatro números reales (tres que sirven para describir o representar la posición, y uno para describir el instante). La variable dependiente estará dada por otro número real (el que describe o mide la temperatura).

Ejemplo 1.3 Supongamos ahora que nos encontramos a la orilla de un río y que dentro de éste observamos una pequeña mota de polvo que se mueve como resultado de la corriente del mismo. Esta sencilla situación nos lleva de manera natural a pensar en una función: aquella que, para cada instante, nos da la posición de la mota de polvo.

Como seguramente el lector ya dedujo, en este caso las dos variables importantes son: por un lado el tiempo (la variable independiente) que, como en el ejemplo anterior, podemos describir con un número real, y la posición (la variable dependiente), que como vimos en los ejemplos anteriores, se necesitan tres números reales (o dos, si el movimiento se realizara sobre un plano) para representarla.

Así pues, este ejemplo nos lleva a considerar una función que tiene como variable independiente al tiempo (que se puede medir con un sólo número real), y como “variable” dependiente a una posición, para la cual necesitamos tres cantidades (o números) para describirla.

Ejemplo 1.4 Si todavía seguimos parados a la orilla del mismo río, podemos analizar la siguiente situación: si imaginamos al torrente del río como un conjunto de moléculas de agua que se están moviendo, pensemos en la función que, en un instante dado, nos asigna la velocidad con la que va viajando cada una de las moléculas que forman el torrente. De esta forma, nuestra función tendrá que ser tal que, a cada posición dentro del río, le asigna una velocidad.

A estas alturas nos queda claro que a cada posición dentro del río (la variable independiente en este caso) la podemos describir con una terna de números reales, pero la velocidad (la variable dependiente) tal vez requiera un análisis aparte.

Cuando un objeto se mueve en línea recta es fácil convencerse de que su velocidad en un instante se puede medir por un sólo número real, pero este no es el caso si el movimiento se da en un plano o en el espacio. Intuitivamente, si un objeto se mueve en un plano o en el espacio, su velocidad en un instante dado se puede representar por medio de una “flecha” cuyo punto inicial (u origen) se encuentra en la posición en la que se encuentra (en ese instante) el objeto en cuestión; la dirección de la “flecha” indicará la dirección del movimiento, y su “magnitud” (o longitud) indicará la rapidez con la que lo está haciendo.

Si ahora recordamos de nuestros cursos de Geometría Analítica que las flechas que parten de un punto fijo se pueden representar por una pareja (si estamos en el plano) o una terna (si estamos en el espacio) de números reales, tendremos que la variable dependiente de la función que describimos anteriormente (la velocidad de cada molécula, en un instante dado) se podrá describir por medio de una terna de números reales.

De esta forma, la función que obtenemos en este ejemplo asignará a una terna de números reales (la que describe la posición de una molécula en un cierto instante) otra terna de números reales (la que describe la velocidad de esa molécula en ese instante).

Como en el caso de ejemplo 1.1, el ejemplo anterior permite una variante que nos conduce a obtener una función con una variable independiente diferente.

Ejemplo 1.5 Si en el ejemplo anterior, además de considerar la posición de cada molécula del agua del río en un instante dado, también consideramos diferentes instantes, entonces obtenemos una nueva función cuya variable independiente estará dada por una posición y un instante, la cual, como en el caso del ejemplo 1.2 se puede describir con cuatro números reales, y nos asignará una velocidad (su variable dependiente), que se podrá describir por tres números reales.

En el último de nuestros ejemplos, mostraremos que las funciones (y sus variables) con las que nos podemos topar, pueden ser de muy diversa índole, y que éstas no siempre están relacionadas con posiciones, velocidades, tiempos o temperaturas.

Ejemplo 1.6 Supongamos que en un laboratorio de investigación se encuentran realizando un experimento en el cual, para un valor de una cierta variable x , se obtiene un valor de otra variable y (vamos a suponer que los posibles valores de ambas variables se expresan con números reales).

El experimento se realiza para k valores diferentes de la variable x , x_1, \dots, x_k , ordenados de menor a mayor (es decir: $x_1 < \dots < x_k$) y se obtienen k valores de la variable y , y_1, \dots, y_k . De esta forma, se cuenta con k parejas de números reales $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ las cuales se grafican como se muestra en la figura 1.1, (a). Si el gráfico que se obtiene (y el fenómeno con el que se está experimentando) sugieren que estos datos se deben parecer a (o “encajar” en) una recta, un problema importante es encontrar la recta que mejor se “ajuste” a estos datos.

En este momento no vamos a ver qué criterios son mejores para determinar si una recta se “ajusta” bien a un conjunto de datos, y sólo destacaremos que este problema nos conduce a considerar una función cuya variable independiente es una recta y cuya variable dependiente será (como veremos más adelante en el capítulo 4) un número real.

Aun cuando a primera vista parezca un poco “exótico” eso de considerar una función cuya variable independiente sea una recta, no lo parecerá tanto si recordamos que toda recta (no vertical) en un plano tiene una ecuación de la forma $y = mx + b$, de tal manera que ésta queda totalmente determinada si conocemos m (su pendiente) y b (su ordenada al origen); es decir, toda recta (no vertical) en el plano se puede representar por medio de la pareja de números reales (m, b) .

Tomando en consideración lo anterior, podemos concluir que la función a la que nos condujo este problema terminará siendo una que asociará a un par de números reales (m, b) (que en este caso “representan” a una recta, la variable independiente de la función) un número real.

Pero el ejemplo no termina aquí. ¿Cómo sería la función que tendríamos que considerar si lo que tenemos es que nuestro conjunto de datos se parece a (o encaja en) una parábola? (ver figura 1.1, (b)). Dado que las parábolas (con eje vertical) tienen en general una ecuación de la forma $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$ (es decir, un polinomio de grado a lo más 2, que está determinado por sus coeficientes a_0, a_1 y a_2), la función a considerar sería entonces una que asociaría a una terna de números reales (a_0, a_1, a_2) (la cual representa a una parábola si $a_2 \neq 0$, la variable independiente de nuestra función en este caso), un número real.

Como el lector seguramente ya está imaginando, podemos llevar este problema más lejos y considerar funciones que asocien a: “tétradas” (si nuestros datos se parecen a (o encajan en) la gráfica de un polinomio de grado a lo más 3), o a “quíntuplas” (si nuestros datos se parecen a la gráfica de un polinomio de grado a lo más 4), o en general, a “ n -adas” (si nuestros datos se parecen a la gráfica de un polinomio de grado a lo más $n - 1$), un número real.

Dicho de otra forma, nuestra función podría ser tal que su variable independiente fuera un polinomio de grado a lo más $n - 1$ (los cuales se pueden representar por medio de “ n -adas” de números reales).

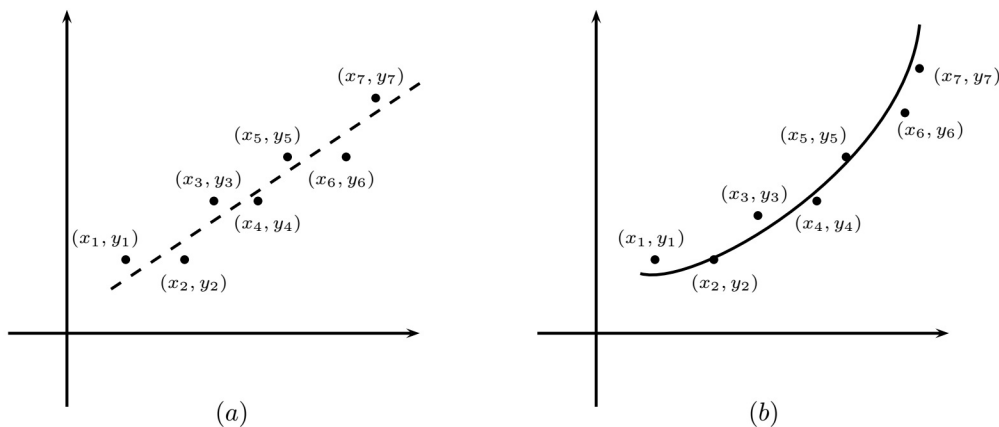


Figura 1.1: Los datos de un experimento, representados por cada pareja (x_i, y_i) , sugieren que éstos “encajan” en una recta (a) o en una parábola (b).

Como resultado de esta larga lista de ejemplos, y de acuerdo con la intención original de presentarlos, resumiremos algunas de las características que tienen las variables (y/o “valores”) de las funciones que describimos en ellos:

1. las variables (y/o valores) de estas funciones pueden ser de muy diversos tipos,

2. estas variables (y/o valores) siempre son susceptibles de representarse (describirse o medirse) por una cierta cantidad de números reales (dos, tres, cuatro ¡o más!),
3. esta representación no es única y en general depende del “*sistema de referencia*” que se elija.

Las características anteriores son muy importantes y algunas de ellas explican algunos de los términos que se suelen usar cuando nos referimos a la materia que nos ocupa, como es el caso del término: *Cálculo de varias variables*. Este término tiene su origen en la segunda característica que mencionamos, pues las diferentes cantidades que se necesitan para representar a la variable independiente de una función, también se consideran variables, de ahí que las funciones con las que se trabajará dependan de varias variables.

Otra importante observación que se debe hacer a partir de la segunda característica (sin duda la más importante), es que la representación de las variables (y/o valores) de estas funciones por medio de parejas, ternas, tétradas, o en general, “*n-adas*” de números reales, es un proceso que se suele realizar en el contexto de un concepto más amplio: el de *espacio vectorial*. El conjunto de posiciones” (o flechas que parten de un mismo punto) de un plano (o las correspondientes en el espacio), o el conjunto de polinomios de grado menor o igual a $n - 1$ (que mencionamos en el ejemplo 1.6), son ejemplos particulares de este tipo de espacios.

Aunque el lector posiblemente todavía no esté muy familiarizado con este concepto, pronto aprenderá (en su curso de Álgebra Lineal I) que un espacio vectorial es un conjunto V que está dotado de dos operaciones: una suma y una multiplicación por escalares (cuando dichos escalares son números reales, decimos que V es un *espacio vectorial sobre los números reales*), operaciones a las cuales se le suelen pedir ciertas propiedades.

También pronto sabrá que, si $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ es un subconjunto de V que tiene la propiedad de que cualquier otro elemento $v \in V$ se puede escribir de manera *única* como *combinación lineal* de los elementos de β (es decir, que existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, únicos, tales que $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$), entonces se dice que β es una *base* para V .

El concepto de base es muy importante, pues apoyándose en él es que se establece la representación de cada elemento $v \in V$ por medio de una “*n-ada*” de números reales $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$; hacer esta representación por medio de diferentes bases es lo que está íntimamente relacionado con los diferentes “*sistemas de referencia*” que mencionamos en el inciso 3. Cuando V tiene una base de este tipo, decimos que V es un espacio vectorial (sobre los números reales) de dimensión finita, específicamente de dimensión n .

De esta última observación, se desprende que las variables (independientes o dependientes) de las funciones con las que trabajaremos en este texto se pueden ver como elementos de un cierto espacio vectorial. Esto también explica por qué a todo este conjunto de conceptos y resultados relacionados con estas funciones, también se les conoce con el nombre de: *Cálculo vectorial*.

Por lo anterior, las funciones con las que vamos a trabajar deberían de estar consideradas, en general, como funciones definidas sobre un subconjunto de un espacio vectorial V y con contradominio sobre otro espacio vectorial W (ambos sobre los números reales y de dimensión finita).

Sin embargo, dado que cualquier espacio vectorial de este tipo se puede representar por medio del conjunto de “*n-adas*” de números reales (aunque esta representación no sea única y dependa de la *base* (o “*sistemas de referencia*”) que se elija, lo que siempre habrá que recordar), a lo largo de este trabajo vamos a suponer que nuestras funciones estarán definidas sobre algún subconjunto de estas “*n-adas*”, y tomarán sus valores (en general) sobre algún conjunto de “*m-adas*” (¡aunque se oiga un poco feo!).

A pesar de la observación anterior, en algunas ocasiones y para definir ciertos conceptos, no será necesario hacer referencia a la representación por medio de “*n-adas*” de los elementos de un cierto espacio vectorial. En estos casos usaremos letras del tipo \hat{x} y \hat{y} para denotar a estos elementos y escribiremos simplemente (no sin cometer cierto abuso de notación) $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ o $\hat{y} \in \mathbb{R}^n$.

Por lo dicho en los párrafos anteriores, lo siguiente que haremos será estudiar de manera más detallada al conjunto \mathbb{R}^n .

1.2 Estructura algebraica de \mathbb{R}^n

Pensar al conjunto \mathbb{R}^n como una forma de representar a un espacio vectorial (sobre los reales y de dimensión n), tiene la ventaja de que la estructura algebraica de éste último se puede “exportar” o “trasladar” a \mathbb{R}^n . Esto es lo que nos proponemos hacer en esta sección. Antes de hacerlo, recordemos que el conjunto \mathbb{R}^n está

formado por las n -adas ordenadas (x_1, \dots, x_n) en donde cada x_i (a quien llamaremos la i -ésima coordenada de (x_1, \dots, x_n)) es un número real, es decir

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$$

y que también se suele decir que este conjunto es n veces el producto cruz (de conjuntos) de \mathbb{R} consigo mismo.

A fin de motivar las operaciones que vamos a definir en \mathbb{R}^n , pensemos en el conjunto de todas las flechas del plano que comparten un punto inicial fijo, al que denotaremos por $\hat{0}$ y que llamaremos “origen”. Es un hecho conocido que en este conjunto podemos definir (geoméricamente y sin necesidad de recurrir a su representación por medio de parejas ordenadas) una operación de “suma” de “flechas”, y una de “multiplicación” de un escalar real por una “flecha”. Si estas operaciones tienen ciertas propiedades, permiten ver a dicho conjunto como un espacio vectorial.

Para definir la suma de las flechas (o vectores), utilizamos la llamada “ley del paralelogramo” que consiste en tomar el vector \hat{y} y trasladar su punto inicial al punto final del vector \hat{x} , de tal forma que el vector que parte del origen y termina en el punto final del vector \hat{y} (trasladado), será la flecha a la que llamaremos $\hat{x} + \hat{y}$ (ver figura 1.2, (a)).

Para la definición del producto de un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por una flecha \hat{x} , que denotaremos por $\lambda\hat{x}$, tomamos cualquier “recta real” que pase por el origen $\hat{0}$ y que no “contenga” al vector \hat{x} , y realizamos la construcción de triángulos semejantes que se describe en la figura 1.2, (b)).

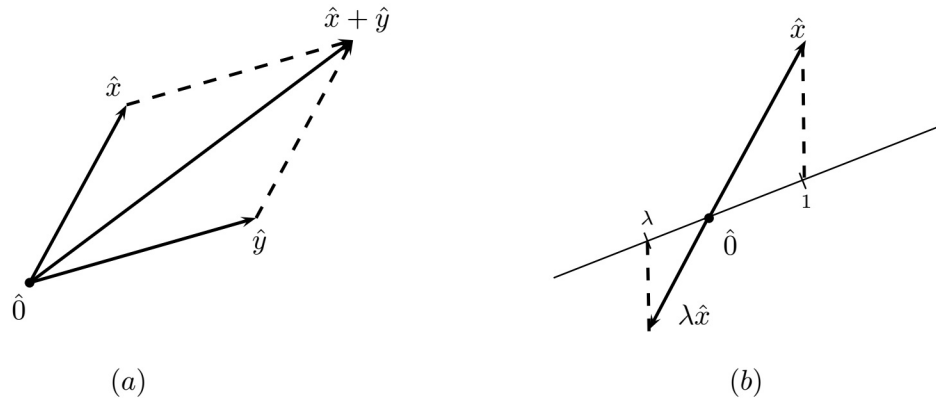


Figura 1.2: La suma (a) y el producto por un escalar (b) de vectores en \mathbb{R}^2 .

Lo importante de haber hecho la definición geométrica de estas operaciones es que, si ahora establecemos un sistema de referencia que nos permita tener una representación de estas flechas en términos de parejas de números reales, obtenemos una forma de definir la multiplicación por un escalar y suma de dichas parejas (seguramente el lector coincidirá en que es la forma más “natural” de definir las).

Para obtener una base (o un sistema de referencia, que es como les vamos a llamar de aquí en adelante) que nos permita representar a cualquier flecha por medio de una pareja de números reales, elijiremos dos de estas flechas (que denotaremos por \hat{v}_1 y \hat{v}_2), en términos de las cuales haremos dicha representación. Es necesario que \hat{v}_1 y \hat{v}_2 no se encuentren sobre la misma recta, aunque el “ángulo” que formen no sea recto, ni sean de la misma longitud (ver figura 1.3).

Si ahora las parejas (x_1, x_2) y (y_1, y_2) representan, respectivamente, a la flecha \hat{x} y a la flecha \hat{y} en el sistema de referencia dado, lo que significa que

$$\hat{x} = x_1\hat{v}_1 + x_2\hat{v}_2 \quad \text{y} \quad \hat{y} = y_1\hat{v}_1 + y_2\hat{v}_2$$

y que simplemente expresaremos escribiendo que $\hat{x} = (x_1, x_2)$ y $\hat{y} = (y_1, y_2)$, uno puede comprobar (geoméricamente) que las flechas $\hat{x} + \hat{y}$ y $\lambda\hat{x}$ estarán representadas, respectivamente, por las parejas $(x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ y $(\lambda x_1, \lambda x_2)$, es decir que

$$\hat{x} + \hat{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{y} \quad \lambda\hat{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

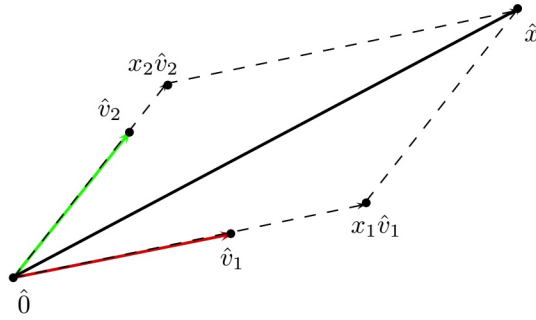


Figura 1.3: Significado geométrico del hecho de que la pareja (x_1, x_2) represente a la flecha (o vector) \hat{x} .

Este procedimiento, que consiste en definir ciertos conceptos (en este caso la suma y producto por un escalar en el conjunto de las “flechas”) partiendo de lo geométrico para después determinar cómo se expresan dichos conceptos en términos de la representación por n -adas (en este caso parejas), es un procedimiento al que recurriremos con mucha frecuencia para dotar al conjunto \mathbb{R}^n de varias de sus “estructuras”, tanto algebraicas como geométricas.

De hecho, con base en lo anterior definimos en el conjunto \mathbb{R}^n un par de operaciones, una suma y un producto por escalares (reales), de la siguiente forma:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

y

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es muy fácil probar que todas las propiedades que tiene la suma de números reales, se “heredan” a esta suma definida en \mathbb{R}^n . En particular, a la n -ada cuyas coordenadas son todas cero lo llamaremos *el origen* y la denotaremos por $\hat{0}$, es decir

$$\hat{0} := (0, \dots, 0),$$

del mismo modo que si $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$, denotaremos por $-\hat{x}$ a la n -ada $(-x_1, \dots, -x_n)$, es decir

$$-\hat{x} := (-x_1, \dots, -x_n) = (-1)(x_1, \dots, x_n).$$

A su vez, aprovecharemos para definir la resta de elementos en \mathbb{R}^n (la cual, como en el caso de \mathbb{R} , no es más que una suma “encubierta”), de la siguiente manera: si $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ definimos

$$\hat{x} - \hat{y} := \hat{x} + (-\hat{y}).$$

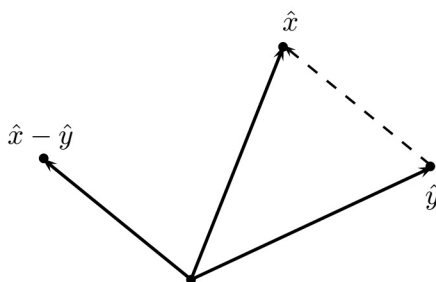
Si pensamos a \hat{x} y \hat{y} como flechas en el plano o en el espacio, la flecha $\hat{x} - \hat{y}$ coincide con ser la flecha que se obtiene uniendo el punto final de \hat{y} con el punto final de \hat{x} , trasladada al origen, como se muestra en la figura 1.4 para el caso del plano.

Para concluir esta breve sección, simplemente resaltaremos el hecho de que en \mathbb{R}^n existen dos propiedades distributivas: el producto por un escalar distribuye a la suma de elementos en \mathbb{R}^n , y el producto de un elemento de \mathbb{R}^n distribuye a la suma de escalares, es decir, si $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lambda(\hat{x} + \hat{y}) = \lambda\hat{x} + \lambda\hat{y} \quad \text{y} \quad (\lambda + \gamma)\hat{x} = \lambda\hat{x} + \gamma\hat{x}.$$

1.3 Aspectos geométricos de \mathbb{R}^n

Como vimos en la sección anterior, para establecer una correspondencia entre los puntos o flechas del plano con las parejas ordenadas de números reales, no es necesario elegir un sistema de referencia en el que las flechas que lo formen tengan que ser perpendiculares ni de la misma longitud. Tomarlas de esta forma, en

Figura 1.4: Construcción geométrica del vector $\hat{x} - \hat{y}$.

cuyo caso diremos que nuestro sistema de referencia es un *sistema coordenado cartesiano*¹, es una libertad adicional que nos podemos dar, y que nos permitirá “trasladar” al conjunto \mathbb{R}^n toda la estructura geométrica que este concepto de perpendicularidad conlleva.

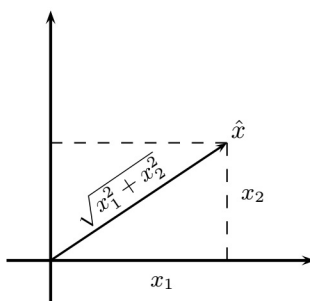
De esta forma, cuando usamos a la pareja (x_1, x_2) o a la terna (x_1, x_2, x_3) de números reales para designar a una flecha (o vector) de un cierto sistema coordenado cartesiano, la longitud (o magnitud) de esta flecha es una cantidad que podemos escribir en términos de las coordenadas correspondientes. La expresión algebraica que representa a esta cantidad se deduce fácilmente usando el Teorema de Pitágoras (como se muestra en la figura 1.5), y está dada por

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

para el caso del plano (\mathbb{R}^2), y por

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

para el caso del espacio (\mathbb{R}^3). Es importante resaltar que si la pareja o la terna designa a un punto (en lugar de una flecha), lo que estas expresiones representan es la distancia que hay entre dicho punto y el origen.

Figura 1.5: La cantidad $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ representa la magnitud del vector $\hat{x} = (x_1, x_2)$.

Tomando como base las expresiones anteriores, a cada $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ (para cualquier $n \in \mathbb{N}$) le asociaremos un número real positivo, al que llamaremos *la norma (euclídeana) de \hat{x}* , y que denotaremos por $\|\hat{x}\|$. Este nuevo concepto está definido de la siguiente manera.

Definición 1.7 Para cada $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos la *norma (euclídeana) de \hat{x}* , que denotamos por $\|\hat{x}\|$, como

$$\|\hat{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (1.1)$$

¹Nombrado así en recuerdo de René Descartes (La Haye, Turena francesa, 31 de marzo de 1596 - Estocolmo, Suecia, 11 de febrero de 1650), también llamado Renatus Cartesius, quien fue un filósofo, matemático y físico francés, considerado como el padre de la geometría analítica y de la filosofía moderna, así como uno de los nombres más destacados de la revolución científica. (fuente: Wikipedia).

Aun cuando n sea mayor que 3, de acuerdo con la interpretación como una distancia que se le da a dicha expresión para el caso en que $n = 2$ o $n = 3$, en general diremos que el número $\|\hat{x}\|$ representa *la distancia* entre el “punto” determinado por \hat{x} y el origen $\hat{0}$.

A fin de explorar las propiedades del concepto que acabamos de definir, vale la pena hacer notar que si en esta definición tomamos $n = 1$ (en cuyo caso nuestro conjunto coincide con ser \mathbb{R}), entonces la norma no es otra cosa más que el conocidísimo concepto de valor absoluto de los números reales, lo que por cierto, nos permite pensar al concepto de norma como una generalización a \mathbb{R}^n del correspondiente concepto de valor absoluto de los números reales. Es precisamente a partir de este hecho, y recordando las propiedades más elementales del valor absoluto, que podemos establecer la siguiente

Proposición 1.8 *La norma (euclídeana) satisface las siguientes propiedades:*

1. $\|\hat{x}\| \geq 0$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\|\hat{x}\| = 0$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{0}$
2. $\|\lambda\hat{x}\| = |\lambda| \|\hat{x}\|$ para toda $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ y para toda $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $\|\hat{x} + \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$ para cualesquiera $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad del triángulo)

Demostración. Las afirmaciones de los incisos 1 y 2 son inmediatas. La prueba del inciso 3 requiere un nuevo concepto que desarrollaremos a continuación. ■

Para poder probar el inciso 3 de la proposición 1.8 introduciremos un nuevo concepto que vamos a motivar a partir de un problema geométrico muy sencillo: dados dos vectores $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2$, distintos de $\hat{0}$, ¿cuál es el escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ que hace que los vectores $\hat{x} - \lambda\hat{y}$ y \hat{y} sean perpendiculares? (ver figura 1.6).

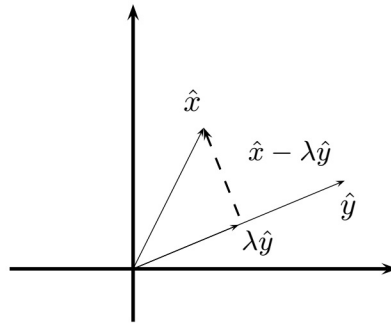


Figura 1.6: ¿Cuál es el valor de λ que hace que los vectores $\hat{x} - \lambda\hat{y}$ y \hat{y} sean perpendiculares?

Supongamos que los vectores \hat{x} y \hat{y} tienen coordenadas (x_1, x_2) y (y_1, y_2) , respectivamente. Dado que deseamos que el triángulo formado por los vectores \hat{x} , $\hat{x} - \lambda\hat{y}$ y $\lambda\hat{y}$ sea un triángulo rectángulo, por el teorema de Pitágoras debemos tener que

$$\|\lambda\hat{y}\|^2 + \|\hat{x} - \lambda\hat{y}\|^2 = \|\hat{x}\|^2 \quad (1.2)$$

lo cual, escrito en términos de las coordenadas de los vectores, se traduce en

$$\left(\sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x_1 - \lambda y_1)^2 + (x_2 - \lambda y_2)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^2.$$

Cancelando los cuadrados con las raíces cuadradas, desarrollando los cuadrados que se encuentran dentro de la segunda raíz cuadrada y cancelando y factorizando los términos iguales, llegamos a que λ debe satisfacer la ecuación

$$2\lambda^2 (y_1^2 + y_2^2) - 2\lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2) = 0,$$

la cual tiene las soluciones $\lambda = 0$ y

$$\lambda = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{y_1^2 + y_2^2} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\hat{y}\|^2}. \quad (1.3)$$

Es importante observar que la solución $\lambda = 0$ no tiene mucho que ver con el problema planteado, puesto que, independientemente de la posición de \hat{x} y \hat{y} , tomando este valor de λ siempre se satisface la ecuación 1.2. Por esta razón, la segunda solución de la ecuación es la importante para el problema que planteamos.

La expresión $x_1y_1 + x_2y_2$ (que aparece en el numerador de la expresión del número λ que calculamos renglones arriba) resultará ser muy relevante a la hora de precisar un concepto que hasta ahora sólo podemos manejar de una forma muy intuitiva: el ángulo formado por los vectores \hat{x} y \hat{y} .

Podemos reforzar la sospecha de que existe una relación entre esta expresión y el concepto de ángulo si en el problema que planteamos anteriormente observamos que, si los vectores \hat{x} y \hat{y} ya fueran perpendiculares, la única solución sería $\lambda = 0$ de donde se concluye que la expresión $x_1y_1 + x_2y_2$ tendría que ser 0. Esto se puede confirmar con algunos ejemplos, como sería el caso de los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$, que de acuerdo con el sistema coordenado con el que estamos trabajando, se tomaron de tal forma que fueran perpendiculares. Seguramente el lector podrá verificar en muchos más casos específicos que la perpendicularidad de dos vectores se corresponde con el hecho de que la expresión $x_1y_1 + x_2y_2$ vale 0).

También es fácil verificar que, dado el vector $\hat{x} = (x_1, x_2) \neq \hat{0}$ se tiene que el vector $\hat{y} = (-x_2, x_1) \neq \hat{0}$ es perpendicular a \hat{x} puesto que junto con el vector $\hat{x} - \hat{y}$ forman un triángulo rectángulo, lo que se deduce del hecho de que dicho triángulo satisface el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - \hat{y}\|^2 &= \|(x_1, x_2) - (-x_2, x_1)\|^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) + ((-x_2)^2 + x_1^2) \\ &= \|\hat{x}\|^2 + \|\hat{y}\|^2 \end{aligned}$$

(ver figura 1.7).

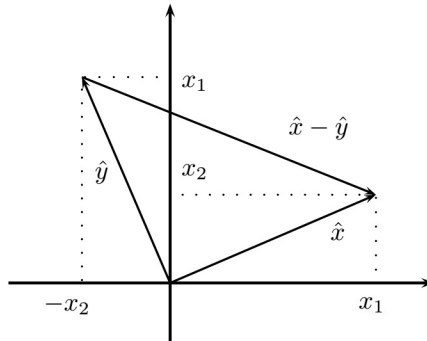


Figura 1.7: Los vectores $\hat{x} = (x_1, x_2)$ y $\hat{y} = (-x_2, x_1)$ son perpendiculares.

Por otra parte, es fácil ver que en este caso también se tiene que

$$\begin{aligned} x_1y_1 + x_2y_2 &= x_1(-x_2) + x_2x_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Además de sospechar que la perpendicularidad entre los vectores \hat{x} y \hat{y} está íntimamente relacionada con el hecho de que la expresión $x_1y_1 + x_2y_2$ es igual a cero, de la identidad 1.3 y las figuras 1.8 deducimos que esta expresión debe ser positiva si el ángulo formado por los vectores es agudo (mayor que 0 y menor que $\pi/2$), y negativa si el ángulo formado por los vectores es obtuso (mayor que $\pi/2$ y menor que π).

Con el fin terminar de reforzar nuestras sospechas sobre la relación que esta expresión tiene con el concepto de “ángulo” entre dos vectores, ahora vamos a resolver el problema planteado inicialmente recurriendo justamente a este concepto, y a las funciones trigonométricas básicas que se definen con base en éste.

Si θ es el ángulo formado por los vectores \hat{x} y \hat{y} , y éste es agudo (es decir que $0 < \theta < \pi/2$), sabemos que $\lambda > 0$ (ver figura 1.8 (a)) y que

$$\cos(\theta) = \frac{\|\lambda\hat{y}\|}{\|\hat{x}\|}$$

$$= \frac{\lambda \|\hat{y}\|}{\|\hat{x}\|}.$$

Si θ es un ángulo obtuso (es decir que $\pi/2 < \theta < \pi$), sabemos que $\lambda < 0$ (ver figura 1.8 (b)) y que

$$\begin{aligned} -\cos(\theta) &= \cos(\pi - \theta) \\ &= \frac{\|\lambda\hat{y}\|}{\|\hat{x}\|} \\ &= \frac{-\lambda \|\hat{y}\|}{\|\hat{x}\|}, \end{aligned}$$

de tal forma que en ambos casos obtenemos que

$$\lambda = \frac{\|\hat{x}\| \cos(\theta)}{\|\hat{y}\|}.$$

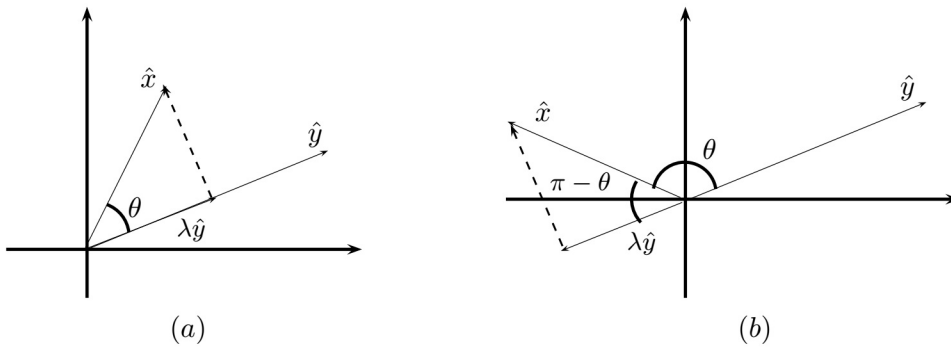


Figura 1.8: El cálculo de λ usando el ángulo θ .

Si ahora igualamos los valores que hemos obtenido de λ por estos dos caminos, tenemos que

$$\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|\hat{y}\|^2} = \frac{\|\hat{x}\| \cos(\theta)}{\|\hat{y}\|},$$

de donde

$$\cos(\theta) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|}. \quad (1.4)$$

Esta última identidad es sin duda toda una revelación en virtud de que nos proporciona una forma más específica y rigurosa de medir al ángulo formado por los vectores \hat{x} y \hat{y} en términos de sus coordenadas. En efecto, de la igualdad anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

en donde elegimos la “rama” de la función arccos que toma sus valores en el intervalo $[0, \pi]$.

Que la identidad anterior es una buena forma de medir dicho ángulo se confirma si observamos, por ejemplo, que este número no varía, como es de esperarse, si tomamos otro par de vectores que apunten en las mismas direcciones en las que apuntan los vectores \hat{x} y \hat{y} , respectivamente. Esta condición se traduce en tomar vectores de la forma $\lambda\hat{x}$ y $\mu\hat{y}$, con $\lambda, \mu > 0$; en este caso se tiene que, si $\hat{x} = (x_1, x_2)$ y $\hat{y} = (y_1, y_2)$, entonces $\lambda\hat{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ y $\mu\hat{y} = (\mu y_1, \mu y_2)$ de tal forma que si llamamos $\tilde{\theta}$ al ángulo formado por los vectores $\lambda\hat{x}$ y $\mu\hat{y}$ y lo calculamos en términos de sus coordenadas, de acuerdo con la ecuación 1.5, se tiene que

$$\tilde{\theta} = \cos^{-1} \left(\frac{(\lambda x_1)(\mu y_1) + (\lambda x_2)(\mu y_2)}{\|\lambda\hat{x}\| \|\mu\hat{y}\|} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \cos^{-1} \left(\frac{\lambda\mu(x_1y_1 + x_2y_2)}{\lambda\mu \|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \right) \\
&= \cos^{-1} \left(\frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \right) \\
&= \theta.
\end{aligned}$$

Nótese que este último hecho nos permite suponer que los vectores \hat{x} y \hat{y} tienen norma 1, puesto que si este no fuera el caso, bastaría con tomar $\lambda = 1/\|\hat{x}\|$ y $\mu = 1/\|\hat{y}\|$ para que los vectores $\lambda\hat{x}$ y $\mu\hat{y}$ sí tuvieran norma 1. Por cierto que, cuando a un vector $\hat{x} \neq \hat{0}$ le aplicamos el procedimiento de multiplicarlo por el recíproco de su norma, diremos que hemos “normalizado” al vector \hat{x} ; es decir, “normalizar” al vector \hat{x} significará tomar el vector $(1/\|\hat{x}\|)\hat{x}$, el vector que está en la misma dirección que \hat{x} y cuya norma es 1). Recurriremos con tanta frecuencia a este procedimiento de normalización, que en lugar de escribir $(1/\|\hat{x}\|)\hat{x}$ simplemente escribiremos $\hat{x}/\|\hat{x}\|$.

Resumiendo toda la discusión anterior y tomando en cuenta las identidades 1.4 y 1.5, podemos concluir que la expresión $x_1y_1 + x_2y_2$ contiene la información suficiente como para poder calcular el ángulo formado por los vectores \hat{x} y \hat{y} , en donde (x_1, x_2) es la pareja que representa (en un sistema coordenado cartesiano) a \hat{x} y (y_1, y_2) la que representa a \hat{y} . Por esta razón, usaremos dicha expresión para definir sobre el conjunto \mathbb{R}^n otra operación (a la que llamaremos “el producto punto” (o “el producto interior”) entre dos elementos $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$, y que denotaremos por $\hat{x} \cdot \hat{y}$.

Definición 1.9 *Dados $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$, con $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\hat{y} = (y_1, \dots, y_n)$, definimos el producto punto (o producto interior) de \hat{x} y \hat{y} , que denotaremos por $\hat{x} \cdot \hat{y}$, como el número real dado por $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$, es decir*

$$\begin{aligned}
\hat{x} \cdot \hat{y} &:= x_1y_1 + \dots + x_ny_n \\
&:= \sum_{i=1}^n x_iy_i.
\end{aligned}$$

Esta nueva operación tiene una serie de propiedades básicas, las cuales resumimos en la siguiente

Proposición 1.10 *Dados $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, el producto punto de vectores definido en 1.9 satisface las siguientes propiedades:*

1. $\hat{x} \cdot \hat{x} \geq 0$ y $\hat{x} \cdot \hat{x} = 0$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{0}$
2. $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{x}$
3. $\hat{x} \cdot (\hat{y} + \hat{z}) = \hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{x} \cdot \hat{z}$
4. $(\lambda\hat{x}) \cdot \hat{y} = \hat{x} \cdot (\lambda\hat{y}) = \lambda(\hat{x} \cdot \hat{y})$

Además de mencionar que la demostración de estas propiedades es muy sencilla (y que por esta razón se deja como ejercicio al lector), es importante señalar que a cualquier otra función definida de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R} que las satisfaga, también se le llamará un producto punto (o producto interior).

Si bien es cierto que es importante mostrar que la función dada en la definición 1.9 satisface las propiedades de la proposición anterior (pues con ello se prueba que dicha función sí es un producto punto), también es importante destacar la íntima relación que existe entre este producto y el concepto de norma euclídeana que definimos anteriormente, la cual queda expresada en la identidad

$$\|\hat{x}\|^2 = \hat{x} \cdot \hat{x}. \quad (1.6)$$

Pero sin lugar a dudas, la propiedad más importante que hay que destacar de esta nueva operación, está relacionada con la identidad 1.4. En efecto, si escribimos esa misma identidad usando la notación del producto punto, esta se traduce en la siguiente identidad:

$$\cos(\theta) = \frac{\hat{x} \cdot \hat{y}}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \quad (1.7)$$

la cual, por ahora, sólo podemos dar por cierta para el caso de \mathbb{R}^2 , y sin ignorar que su demostración se obtiene a partir de nuestro (no muy bien definido) concepto de ángulo y su relación con las funciones trigonométricas (las que por cierto, si están bien definidas).

La conclusión más importante que podemos obtener de la identidad 1.7 se deduce del hecho de que los valores de la función coseno se encuentran entre -1 y 1 . En efecto, tomando en cuenta esto, tendremos que para cualesquiera par de vectores $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^2$ diferentes de $\hat{0}$ se debe cumplir que

$$\frac{|\hat{x} \cdot \hat{y}|}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \leq 1$$

o que

$$|\hat{x} \cdot \hat{y}| \leq \|\hat{x}\| \|\hat{y}\|. \quad (1.8)$$

Nótese que si alguno de estos vectores fuera $\hat{0}$, entonces se debería satisfacer la igualdad.

Lo interesante de la desigualdad 1.8 es que no involucra a ningún ángulo y tiene todo el sentido preguntarse si es válida en cualquier \mathbb{R}^n . ¡Y lo mejor de todo es que la respuesta a esta pregunta es positiva! En efecto, la desigualdad 1.8 es válida para cualquier par de vectores en \mathbb{R}^n y es conocida como la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*². Esta desigualdad jugará un papel muy importante a lo largo de todo este texto, y por esta misma razón le concederemos el nivel de teorema.

Teorema 1.11 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz) *Para cualesquiera par de vectores $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ se satisface que*

$$|\hat{x} \cdot \hat{y}| \leq \|\hat{x}\| \|\hat{y}\|.$$

Demostración. Como ya se mencionó, esta desigualdad es inmediata si \hat{x} o \hat{y} es el vector $\hat{0}$. Por esta razón, supondremos que \hat{x} y \hat{y} son distintos de $\hat{0}$. Asimismo, probar la desigualdad del enunciado es equivalente a probar que

$$\left| \left(\frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|} \right) \cdot \left(\frac{\hat{y}}{\|\hat{y}\|} \right) \right| = \frac{|\hat{x} \cdot \hat{y}|}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \leq 1,$$

por lo que también podemos suponer que $\|\hat{x}\| = \|\hat{y}\| = 1$.

Una vez establecido lo anterior, por los incisos 1 y 3 de la proposición 1.10 y la identidad 1.6, sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\hat{x} - \hat{y}) \cdot (\hat{x} - \hat{y}) \\ &= \hat{x} \cdot \hat{x} - 2\hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{y} \cdot \hat{y} \\ &= 2(1 - \hat{x} \cdot \hat{y}), \end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$\hat{x} \cdot \hat{y} \leq 1.$$

Con base en las mismas propiedades, también sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\hat{x} + \hat{y}) \cdot (\hat{x} + \hat{y}) \\ &= \hat{x} \cdot \hat{x} + 2\hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{y} \cdot \hat{y} \\ &= 2(1 + \hat{x} \cdot \hat{y}) \end{aligned}$$

y ahora concluimos que

$$-1 \leq \hat{x} \cdot \hat{y},$$

con lo que hemos probado que

$$-1 \leq \hat{x} \cdot \hat{y} \leq 1,$$

²Llamada así en honor del matemático francés Augustin Louis Cauchy (París, 21 de agosto de 1789 - Sceaux, 23 de mayo de 1857), quien la publicó en 1821, y del matemático alemán Karl Hermann Amandus Schwarz (25 de enero 1843 - 30 de noviembre 1921), quien la publicó en 1888. Aunque dicha desigualdad también fue establecida por el matemático ruso Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (Bar, Ucrania, 16 de diciembre 1804 - San Petesburgo, Rusia, 12 de diciembre 1889) en 1859. (fuente: Wikipedia).

o equivalentemente, que

$$|\hat{x} \cdot \hat{y}| \leq 1,$$

que es lo que deseábamos demostrar. ■

Es importante llamar la atención del lector sobre el hecho de que en esta prueba no hubo necesidad de recurrir a las coordenadas de los vectores \hat{x} y \hat{y} , y que las herramientas importantes fueron las propiedades básicas del producto punto y su relación con la norma. Lo relevante de esta observación es que, si definimos otro producto punto sobre el conjunto \mathbb{R}^n que satisfaga las propiedades de la proposición 1.10, y con base en este otro producto punto definimos otra norma por medio de la identidad 1.6, esta otra norma cumplirá las propiedades de la proposición 1.8 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, usando ese otro producto punto y esa otra norma, ¡seguirá siendo cierta!

Como una primera muestra de la importancia y utilidad de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, ahora la usaremos para probar el inciso 3 de la proposición 1.8 (la desigualdad del triángulo), junto con otra desigualdad que también nos resultará muy útil a lo largo de este texto.

Proposición 1.12 *Para cualesquiera par de vectores $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ se satisface que:*

1. $\|\hat{x} + \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$ (desigualdad del triángulo)
2. $|\|\hat{x}\| - \|\hat{y}\|| \leq \|\hat{x} + \hat{y}\|$.

Demostración. Para la prueba de la desigualdad del triángulo (inciso 1), con base en la identidad 1.6 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\hat{x} + \hat{y}\|^2 &= (\hat{x} + \hat{y}) \cdot (\hat{x} + \hat{y}) \\ &= \hat{x} \cdot \hat{x} + 2\hat{x} \cdot \hat{y} + \hat{y} \cdot \hat{y} \\ &= \|\hat{x}\|^2 + 2\hat{x} \cdot \hat{y} + \|\hat{y}\|^2 \\ &\leq \|\hat{x}\|^2 + 2\|\hat{x}\| \|\hat{y}\| + \|\hat{y}\|^2 \quad (\text{desigualdad de Cauchy-Schwarz}) \\ &= (\|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|)^2, \end{aligned}$$

de modo que, sacando raíz cuadrada, llegamos a la desigualdad deseada.

Para la prueba del inciso 2, dado que

$$\|\hat{x}\| = \|(\hat{x} + \hat{y}) + (-\hat{y})\|,$$

usando el inciso anterior (la desigualdad del triángulo) y el hecho de que $\|-\hat{y}\| = \|(-1)\hat{y}\| = \|\hat{y}\|$ (inciso 2 de la proposición 1.8), se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= \|(\hat{x} + \hat{y}) + (-\hat{y})\| \\ &\leq \|\hat{x} + \hat{y}\| + \|\hat{y}\| \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\hat{x}\| - \|\hat{y}\| \leq \|\hat{x} + \hat{y}\|.$$

Análogamente, dado que $\|\hat{y}\| = \|(\hat{x} + \hat{y}) + (-\hat{x})\|$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|\hat{y}\| &= \|(\hat{x} + \hat{y}) + (-\hat{x})\| \\ &\leq \|\hat{x} + \hat{y}\| + \|\hat{x}\|, \end{aligned}$$

de donde

$$-\|\hat{x} + \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| - \|\hat{y}\|,$$

es decir, que

$$-\|\hat{x} + \hat{y}\| \leq \|\hat{x}\| - \|\hat{y}\| \leq \|\hat{x} + \hat{y}\|,$$

lo cual es equivalente a la desigualdad que se deseaba probar. ■

Para concluir esta sección, recordemos que la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos fue sugerida a partir de la identidad 1.7, identidad que surge de un problema geométrico, el cual a su vez se podía resolver a partir del concepto de ángulo. Todo ello en el plano, o en el conjunto \mathbb{R}^2 (pensando a este conjunto como una “representación” de dicho plano).

Lo importante de la prueba anterior es que ésta es válida para cualquier \mathbb{R}^n , y con base en la misma identidad, podemos “extender” (y definir de manera más precisa) el concepto de ángulo entre cualquier par de elementos (distintos de $\hat{0}$) de este conjunto, y por lo tanto, definir el concepto de ángulo entre cualquier par de elementos (distintos de $\hat{0}$) del espacio vectorial representado por el conjunto \mathbb{R}^n (como por ejemplo, el espacio de los polinomios de grado menor o igual a $n - 1$). Por todo lo anterior, damos la siguiente

Definición 1.13 Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ distintos del $\hat{0}$. Definimos el ángulo (agudo) entre \hat{x} y \hat{y} como el número θ dado por la fórmula

$$\begin{aligned}\theta &:= \cos^{-1} \left(\frac{\hat{x} \cdot \hat{y}}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \right) \\ &:= \arccos \left(\frac{\hat{x} \cdot \hat{y}}{\|\hat{x}\| \|\hat{y}\|} \right),\end{aligned}$$

donde \cos^{-1} (o arccos) es la función inversa de cos que tiene como contradominio el intervalo $[0, \pi]$.

1.4 Otras normas

Como el lector habrá notado, todo lo realizado en la sección anterior está basado en lo que comunmente conocemos como geometría euclidea. La idea de esta sección es mostrar que en particular el concepto de longitud (o magnitud, o distancia al origen, o “valor absoluto”) de un elemento $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se puede definir de otras formas, sin necesidad de recurrir a la geometría euclidea, y conservando las propiedades elementales que tiene la norma euclidea (y que establecimos en la proposición 1.8).

Sin que se pretenda profundizar en el tema, ahora es prudente mencionar que a cualquier función de \mathbb{R}^n en los reales no negativos (conjunto al que denotaremos por \mathbb{R}^+) que satisfaga las propiedades establecidas en la proposición 1.8, se le conoce con el nombre de *norma*. Y aunque existe (literalmente) una infinidad de maneras de definir una norma en \mathbb{R}^n (en realidad, muchas de ellas son muy “parecidas”), en esta breve sección sólo abordaremos dos de ellas; la *norma uno* (que denotaremos por $\|\cdot\|_1$) y la *norma infinito* (que denotaremos por $\|\cdot\|_\infty$), que definimos de la siguiente manera.

Definición 1.14 Dado $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos:

1. la norma uno de \hat{x} , que denotamos por $\|\hat{x}\|_1$, como

$$\|\hat{x}\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$$

2. la norma infinito de \hat{x} , que denotamos por $\|\hat{x}\|_\infty$, como

$$\|\hat{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}.$$

Queda como un ejercicio para el lector probar que las funciones definidas arriba satisfacen las propiedades enlistadas en la proposición 1.8, con lo que de paso quedará justificado el hecho de que a dichas funciones les llamemos normas.

Estas otras normas tienen algunas diferencias importantes con la norma euclidea. En particular, para ninguna de ellas se puede definir un producto punto en \mathbb{R}^n que satisfaga lo equivalente a la identidad 1.6. Aun así, en cuanto a formas de medir la longitud de un elemento $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, no resultan ser tan diferentes. En efecto, mostraremos que todas estas normas están relacionadas a través de ciertas desigualdades.

Más adelante, con base en el concepto de norma definiremos conceptos tales como: “estar en el interior de un conjunto”, “estar en el exterior de un conjunto”, y “estar en la frontera de un conjunto”. Las desigualdades que se formulan en la siguiente proposición permitirán establecer que todos ellos resultarán ser iguales sin importar qué norma usemos.

Proposición 1.15 Para cualquier elemento $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ se satisfacen las siguientes desigualdades:

1. $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|\hat{x}\| \leq \sqrt{n} \|\hat{x}\|_\infty$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}} \|\hat{x}\|_1 \leq \|\hat{x}\| \leq \|\hat{x}\|_1$.

Demostración. Dado que el cuadrado de un número real siempre es no negativo, se tiene que

$$x_i^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_n^2,$$

de modo que

$$|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \|\hat{x}\|. \quad (1.9)$$

Como la desigualdad anterior es válida para toda $i \in \{1, \dots, n\}$, concluimos que

$$\|\hat{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \leq \|\hat{x}\|.$$

Por otra parte, como

$$|x_i| \leq \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|\hat{x}\|_\infty$$

(para toda $i \in \{1, \dots, n\}$), se tiene que $x_i^2 \leq \|\hat{x}\|_\infty^2$ y por tanto

$$\|\hat{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq \|\hat{x}\|_\infty^2 + \cdots + \|\hat{x}\|_\infty^2 = n \|\hat{x}\|_\infty^2,$$

es decir,

$$\|\hat{x}\| \leq \sqrt{n} \|\hat{x}\|_\infty,$$

con lo que concluimos la prueba de las dos desigualdades del primer inciso.

Para obtener la primera desigualdad del segundo inciso, obsérvese que

$$|x_1| + \cdots + |x_n| = (1, \dots, 1) \cdot (|x_1|, \dots, |x_n|),$$

de tal forma que, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos que

$$\begin{aligned} |x_1| + \cdots + |x_n| &= (1, \dots, 1) \cdot (|x_1|, \dots, |x_n|) \\ &\leq \|(1, \dots, 1)\| \|(|x_1|, \dots, |x_n|)\| \\ &= \sqrt{n} \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ &= \sqrt{n} \|\hat{x}\|. \end{aligned}$$

Para obtener la segunda desigualdad, observe que

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (x_1, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, 0, x_n), \end{aligned}$$

de tal forma que, usando el problema 5 de este capítulo, concluimos que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| &= \|(x_1, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, 0, x_n)\| \\ &\leq \|(x_1, 0, \dots, 0)\| + \cdots + \|(0, 0, \dots, 0, x_n)\| \\ &= |x_1| + \cdots + |x_n| \\ &= \|\hat{x}\|_1, \end{aligned}$$

que es la desigualdad que se deseaba probar. ■

Para concluir esta sección mencionaremos la importancia adicional que tiene el hecho de que en \mathbb{R}^n podamos contar con al menos una norma (de hecho, hasta ahora en \mathbb{R}^n ¡tenemos tres!).

Como mencionamos anteriormente, el concepto de norma nos permite hablar de la longitud (o magnitud, o distancia al origen, o “valor absoluto”) de un elemento $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Si en particular pensamos a la norma como una forma de medir la distancia que hay entre el “punto” representado por el elemento $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ y el origen $\hat{0}$, esta interpretación nos permite entonces hablar de la distancia entre cualesquiera dos elementos $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$; en efecto, dados estos elementos, en virtud de que a $\hat{x} - \hat{y}$ lo podemos pensar como la flecha que tiene punto inicial en \hat{y} y punto final en \hat{x} , la norma de este vector será una medida de la distancia entre estos dos puntos.

Si recordamos que en \mathbb{R}^n hemos definido tres normas diferentes, con base en el razonamiento anterior estamos en condiciones de establecer tres formas diferentes de medir la distancia entre elementos de \mathbb{R}^n . Sin embargo, y como en el caso de la norma, la distancia que usaremos a lo largo de todo este texto es aquella que se obtiene a partir de la norma euclideana (y que por razones obvias, llamaremos la *distancia euclideana*). Este concepto lo formalizamos en la siguiente

Definición 1.16 *Dados $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ definimos la distancia (euclideana) de \hat{x} a \hat{y} , que denotamos por $d(\hat{x}, \hat{y})$, como*

$$d(\hat{x}, \hat{y}) := \|\hat{x} - \hat{y}\|.$$

Un resultado muy sencillo de probar es que la distancia euclideana (y cualquier otra distancia que se respete), cumple con las propiedades que establecemos en la siguiente proposición³.

Proposición 1.17 *La distancia (euclideana) satisface las siguientes propiedades:*

1. $d(\hat{x}, \hat{y}) \geq 0$ para toda $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$, y $d(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ si y sólo si $\hat{x} = \hat{y}$
2. $d(\hat{x}, \hat{y}) = d(\hat{y}, \hat{x})$ para toda $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$
3. $d(\hat{x}, \hat{y}) \leq d(\hat{x}, \hat{z}) + d(\hat{z}, \hat{y})$ para cualesquiera $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad del triángulo)

Como es de esperarse, la prueba de esta proposición se deja al lector.

1.5 Topología de \mathbb{R}^n

La Topología es un área de las matemáticas muy importante que se interesa por conceptos como proximidad, continuidad, conectividad (o conexidad), compacidad, y muchos otros más. Para abordarlos de manera precisa, primero es necesario definir un cierto tipo de conjuntos (que en Topología se les conoce como los *conjuntos abiertos*).

Cuando en un conjunto se cuenta con una forma de medir la distancia entre cualesquiera dos de sus elementos (como es el caso de \mathbb{R}^n), existe una manera de decir quiénes son los conjuntos abiertos y con base en éstos desarrollar los conceptos que mencionamos al principio de esta sección. Esto es lo que haremos y para ello comenzaremos por definir un cierto tipo de conjunto que resultará ser básico en esta tarea: vecindad de un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$.

En \mathbb{R}^n , definimos el concepto de vecindad apoyándonos en alguna de las formas que disponemos para medir la distancia entre elementos de \mathbb{R}^n , que en nuestro caso será la distancia euclideana (en los problemas mostraremos que, en términos topológicos, da lo mismo cuál de estas distancias elijamos o, en última instancia, cuál norma elijamos).

Algunos objetos geométricos son muy sencillos de describir en términos del concepto de distancia, y sin duda el más sencillo de ellos es el formado por los puntos que se encuentran a una distancia constante $r > 0$ de un punto fijo $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, que como todos sabemos, en \mathbb{R}^2 es una circunferencia de radio r , y en \mathbb{R}^3 es una esfera, también de radio r . Sin embargo, para nuestros objetivos, el conjunto que resultará de mayor interés no es tanto el formado por los puntos que se encuentran a una distancia r de $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, sino los que se encuentran a una distancia *menor a r* . En \mathbb{R}^2 este conjunto consistirá de los puntos que se encuentran “dentro” de la circunferencia de radio r , y en \mathbb{R}^3 consistirá de los que están “dentro” de la esfera, también de radio r (ver figura 1.9).

³De hecho, a cualquier función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en \mathbb{R}^+ que cumpla con estas tres propiedades se le llamará *una distancia* en \mathbb{R}^n . Aún y cuando en este texto podemos considerar tres diferentes distancias, con base en las tres diferentes normas que definimos, no todas las distancias en \mathbb{R}^n tienen que estar definidas a través de una norma.

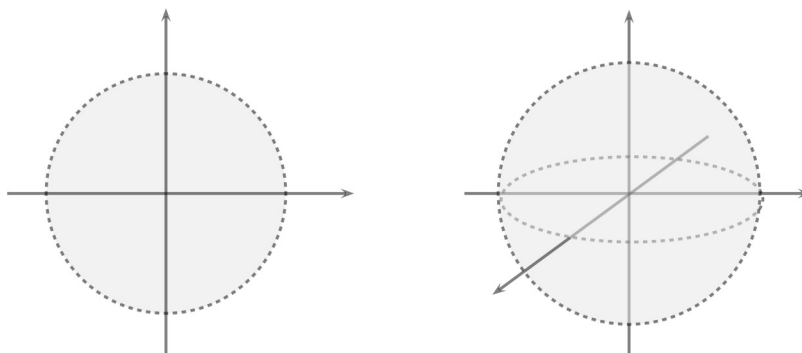


Figura 1.9: Las bolas de radio r con centro en el origen (en \mathbb{R}^2 y en \mathbb{R}^3).

Con base en lo anterior, definimos (en \mathbb{R}^n) el concepto de *vecindad (o bola) de radio $r > 0$ con centro en el punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$* , que denotaremos por $B_r(\hat{x})$, y formulamos en la siguiente

Definición 1.18 Dado $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, definimos la *vecindad (o bola) de radio $r > 0$ con centro en $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ como*

$$B_r(\hat{x}) := \{\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid d(\hat{x}, \hat{y}) = \|\hat{x} - \hat{y}\| < r\}.$$

1.5.1 Clasificación de puntos

Apoyándonos en este concepto, ahora nos daremos a la tarea de, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, clasificar a todos los puntos de \mathbb{R}^n en términos de su “localización” con respecto a dicho conjunto, en donde por localización nos referimos a algo más profundo que el simple concepto de pertenencia. A fin de precisar esta idea de localización con respecto a un conjunto A , recurriremos a la figura 1.10 en \mathbb{R}^2 .

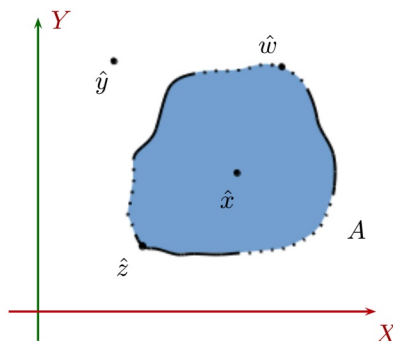


Figura 1.10: Las diferentes localizaciones que puede tener un punto de \mathbb{R}^n con respecto de un conjunto A .

Suponiendo que el conjunto A está formado por los puntos del área sombreada, incluyendo los puntos de la línea continua y excluyendo los puntos de la línea punteada, tenemos que los puntos \hat{x} y \hat{z} pertenecen al conjunto, mientras que los puntos \hat{y} y \hat{w} no pertenecen a A . Sin embargo, tanto los que pertenecen como los que no pertenecen a A , tienen una localización diferente con respecto a este conjunto.

En efecto, mientras que en el caso del punto \hat{x} existe un radio $r > 0$ tal que la vecindad de este radio y centro en \hat{x} está contenida en A (es decir, $B_r(\hat{x}) \subset A$), en el caso del punto \hat{z} no es posible encontrar un radio con esta misma característica; es decir, para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(\hat{z}) \cap A^c \neq \emptyset$ y $B_r(\hat{z}) \cap A \neq \emptyset$, en donde $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A$ (el complemento de A).

En el caso de los puntos \hat{y} y \hat{w} se tiene una situación análoga; mientras que para el punto \hat{y} existe un radio $r' > 0$ tal que la vecindad de este radio y centro en \hat{y} está contenida en A^c (es decir, $B_{r'}(\hat{y}) \subset A^c$), en el caso del punto \hat{w} también se tiene que para todo $r > 0$, sucede que $B_r(\hat{w}) \cap A^c \neq \emptyset$ y $B_r(\hat{w}) \cap A \neq \emptyset$ (véase la figura 1.11).

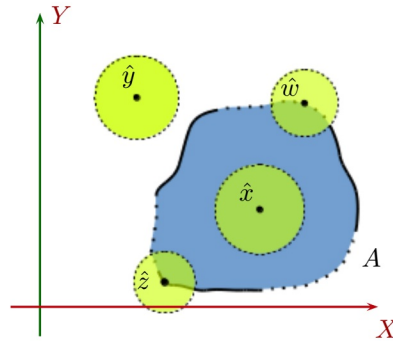


Figura 1.11: Caracterización, en términos de vecindades, de la localización de los puntos de \mathbb{R}^n con respecto al conjunto A .

Resumiendo lo anterior, tenemos que, si $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces se satisface una de las siguientes condiciones (y sólo una de ellas, pues serán mutuamente excluyentes):

1. existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$,
2. existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A^c$, o
3. para todo $r > 0$ se cumple que $B_r(\hat{x}) \cap A^c \neq \emptyset$ y $B_r(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$.

Seguramente el lector estará de acuerdo en que los puntos que satisfacen la condición 1 no sólo son puntos que deben pertenecer a A , sino que además están realmente “dentro” (o en “el interior”) de A ; los que cumplen la condición 2 no sólo son puntos que no pertenecen a A , sino que además están realmente “fuera” (o en “el exterior”) de A ; y finalmente, los que cumplen la condición 3 pueden o no pertenecer a A , pero lo importante es que no están ni “dentro” ni “fuera”, razón por la cual podemos decir que se encuentran en el “borde” (o en “la frontera”) de A .

Con base en lo anterior es que ahora estamos en condiciones de, dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, dar una clasificación de los puntos de \mathbb{R}^n en términos de su localización con respecto a dicho conjunto, cosa que haremos en la siguiente

Definición 1.19 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que:

1. \hat{x} es un punto interior de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$. Denotamos por $\text{int}(A)$ al conjunto formado por todos estos puntos, es decir

$$\text{int}(A) := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \text{ es un punto interior de } A\}$$

y diremos que este conjunto es el interior de A .

2. \hat{x} es un punto exterior de A si existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A^c$. Denotamos por $\text{ext}(A)$ al conjunto formado por todos estos puntos, es decir

$$\text{ext}(A) := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \text{ es un punto exterior de } A\}$$

y diremos que este conjunto es el exterior de A .

3. \hat{x} es un punto frontera de A si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$ y $B_r(\hat{x}) \cap A^c \neq \emptyset$. Denotamos por $\text{Fr}(A)$ al conjunto formado por todos estos puntos, es decir

$$\text{Fr}(A) := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \text{ es un punto frontera de } A\}$$

y diremos que este conjunto es la frontera de A .

Como seguramente el lector ya habrá notado (y podrá probar muy fácilmente), los conjuntos definidos anteriormente satisfacen unas propiedades muy elementales (además de algunas otras que veremos más adelante) y que dejamos expresadas en la siguiente

Proposición 1.20 Si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces:

1. $\text{int}(A) \subset A$
2. $\text{ext}(A) \subset A^c$
3. $\text{int}(A) \cap \text{ext}(A) = \text{int}(A) \cap \text{Fr}(A) = \text{Fr}(A) \cap \text{ext}(A) = \emptyset$
4. $\mathbb{R}^n = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A) \cup \text{ext}(A)$
5. $\text{int}(A^c) = \text{ext}(A)$ y $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c)$.

Aun cuando la definición del tipo de puntos (y sus respectivos conjuntos) que acabamos de dar fue motivada a partir de un subconjunto de \mathbb{R}^2 muy “bonito”, hay casos para los cuales dichos conjuntos no resultan ser los que esperamos que sean (¡claro, si acaso tuviéramos una idea de quiénes deberían de ser!). El ejemplo que a continuación presentamos es uno de esos casos.

Ejemplo 1.21 Sea

$$A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ y } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Determinaremos quiénes son el $\text{int}(A)$, el $\text{ext}(A)$ y la $\text{Fr}(A)$.

Primero mostraremos que si $\hat{x} = (x, y)$ es un punto arbitrario de \mathbb{R}^2 y r es cualquier número real positivo, entonces $B_r(\hat{x}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$ de tal forma que, como $A \subset \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, tendremos que $B_r(\hat{x}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus A) = B_r(\hat{x}) \cap A^c \neq \emptyset$. Sea pues $\hat{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y r cualquier número real positivo.

Como es por todos conocido, existe $x' \notin \mathbb{Q}$ tal que $x < x' < x + r$. De estas desigualdades concluimos que si $\hat{y} = (x', y)$, entonces $d(\hat{x}, \hat{y}) = \|(x, y) - (x', y)\| = |x - x'| < r$ de modo que $\hat{y} \in B_r(\hat{x})$, y como $\hat{y} \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ (pues $x' \notin \mathbb{Q}$), entonces $B_r(\hat{x}) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \neq \emptyset$.

De lo que acabamos de probar se desprende inmediatamente que $\text{int}(A) = \emptyset$ pues si $\hat{x} \in A$, no existe forma de encontrar $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$, pues cualquier vecindad, sin importar cuál es su radio (e incluso sin importar cuál es su centro) interseca a A^c de tal forma que por el inciso 1 de la proposición 1.20 tendremos que $\text{int}(A) = \emptyset$.

El siguiente paso será mostrar que $[0, 1] \times [0, 1] \subset \text{Fr}(A)$. Sea $\hat{x} = (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ y $r > 0$. Por el primer resultado que probamos, ya sabemos que $B_r(\hat{x}) \cap A^c \neq \emptyset$. Restaría probar que $B_r(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$.

Supongamos por ahora que $0 \leq x < 1$ y $0 \leq y < 1$. Por la densidad de los números racionales sabemos que existen $x', y' \in \mathbb{Q}$ tales que $x < x' < \min\{1, x + r/\sqrt{2}\}$ y $y < y' < \min\{1, y + r/\sqrt{2}\}$. Tenemos entonces que $(x', y') \in A$ y además, dado que $|x - x'| < r/\sqrt{2}$ y $|y - y'| < r/\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned} \|(x, y) - (x', y')\| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} \\ &< \sqrt{(r/\sqrt{2})^2 + (r/\sqrt{2})^2} \\ &= r \end{aligned}$$

de modo que $(x', y') \in B_r(\hat{x})$, es decir, $B_r(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$.

Ahora, escogiendo a x' y y' como en el caso anterior (siempre que se pueda), si $x = 1$ y $y < 1$, entonces nos fijamos en la pareja $(1, y')$; si $x < 1$ y $y = 1$, elegimos a la pareja $(x', 1)$; finalmente, si $x = 1$ y $y = 1$, elegimos a la pareja $(1, 1)$. En todos estos casos, dichas parejas pertenecen a $B_r(\hat{x}) \cap A$, con lo cual queda probado también en estos casos que $B_r(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$, y por lo tanto que $[0, 1] \times [0, 1] \subset \text{Fr}(A)$.

Finalmente, probaremos que $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1] \subset \text{ext}(A)$. Sea $\hat{x} = (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1]$ y supongamos por ahora que $x < 0$ o $1 < x$ (la otra posibilidad es que $y < 0$ o $1 < y$). Si $x < 0$ tomamos $r = |x| > 0$ y afirmamos que $B_r(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1] \subset A^c$. En efecto, si $(x', y') \in B_r(\hat{x})$, por la desigualdad 1.9 se tiene que

$$|x - x'| \leq \|(x, y) - (x', y')\|$$

$$\begin{aligned} &< r \\ &= |x| \\ &= -x. \end{aligned}$$

De esta forma, se tiene que $x < x - x' < -x$ y de la primera desigualdad concluimos que $x' < 0$. Por lo tanto, $(x', y') \notin [0, 1] \times [0, 1]$, con lo que probamos que $B_r(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1] \subset A^c$. Si $1 < x$ tomamos $r = x - 1 > 0$ y afirmamos nuevamente que $B_r(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1] \subset A^c$. En efecto, si $(x', y') \in B_r(\hat{x})$, otra vez por la desigualdad 1.9 se tiene que

$$\begin{aligned} |x - x'| &\leq \|(x, y) - (x', y')\| \\ &< r \\ &= x - 1, \end{aligned}$$

de modo que $1 - x < x - x' < x - 1$. Por la segunda desigualdad, concluimos que $1 < x'$ y por lo tanto se tiene que $(x', y') \notin [0, 1] \times [0, 1]$, con lo que probamos también que $B_r(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1] \subset A^c$. Si $y < 0$ o $1 < y$ procedemos de forma análoga.

Reuniendo lo que hemos probado hasta ahora, por los incisos 3 y 4 de la proposición 1.20, tenemos que

$$[0, 1] \times [0, 1] \subset \text{Fr}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus \text{ext}(A) \subset [0, 1] \times [0, 1],$$

de donde concluimos que $\text{Fr}(A) = [0, 1] \times [0, 1]$ y que $\text{ext}(A) = \mathbb{R}^2 \setminus [0, 1] \times [0, 1]$.

1.5.2 Conjuntos abiertos y cerrados

Una vez que hemos clasificado los puntos de \mathbb{R}^n con respecto a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, estamos en condiciones de dar una caracterización de cierto tipo de subconjuntos de \mathbb{R}^n .

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, ya sabemos que $\text{int}(A) \subset A$ y que $\text{ext}(A) \subset A^c$. Sin embargo, en el caso de la $\text{Fr}(A)$ no siempre se cumple alguna de estas relaciones de contención. El conjunto A de la figura 1.11 ilustra un caso de este tipo. Lo que sí se cumple en general es que $A = \text{int}(A) \cup (A \cap \text{Fr}(A))$, identidad que siempre vale la pena recordar.

Los conjuntos para los cuales se cumple que $\text{Fr}(A) \subset A$ o $\text{Fr}(A) \subset A^c$ (esto último equivalente a que $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$) merecen un nombre aparte. Cuando un conjunto no tenga a ninguno de sus puntos frontera (es decir que $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$), diremos que el conjunto es *abierto*, y si $\text{Fr}(A) \subset A$, diremos que el conjunto es *cerrado*. Dejamos expresada esta caracterización de conjuntos en la siguiente

Definición 1.22 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que:

1. A es un conjunto abierto si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
2. A es un conjunto cerrado si $\text{Fr}(A) \subset A$.

Una primera observación que es muy importante hacer con relación a las definiciones anteriores es que las condiciones $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$ y $\text{Fr}(A) \subset A$ no son excluyentes: la negación de una de ellas no es la otra. Es decir, el que $\text{Fr}(A) \cap A \neq \emptyset$ no implica que $\text{Fr}(A) \subset A$, y recíprocamente, el que $\text{Fr}(A) \not\subset A$ no implica que $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$. Dicho de otra forma, en términos de las definiciones que acabamos de dar: *que un conjunto A no sea abierto no implica que tenga que ser cerrado*, y recíprocamente, *que un conjunto A no sea cerrado no implica que tenga que ser abierto*. Más aún, dado que las condiciones $\text{Fr}(A) \cap A \neq \emptyset$ y $\text{Fr}(A) \not\subset A$ no se contraponen (es decir, pueden pasar ambas, como sucede con el conjunto A de la figura 1.11), confirmamos que *hay conjuntos que no son abiertos y tampoco son cerrados*, y que son justo aquellos que sólo contienen a algunos de sus puntos frontera, pero no a todos ellos.

La segunda observación importante con relación a las definiciones que acabamos de dar es que éstas no son las más frecuentes, razón por la cual lo primero que haremos será probar una proposición en la que se establecen las equivalencias con las definiciones más “populares” (o más conocidas, si se prefiere).

Proposición 1.23 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es un conjunto abierto si y sólo si para todo $\hat{x} \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$ (es decir, si $A \subset \text{int}(A)$ y por tanto que $A = \text{int}(A)$).
2. A es un conjunto cerrado si y sólo si A^c es abierto.

Demostración. Inciso 1) (\implies) Sea $\hat{x} \in A$; de acuerdo con el inciso 1 de la definición 1.22 se tiene que $\hat{x} \notin \text{Fr}(A)$ y por lo tanto, de acuerdo con el inciso 3 de la definición 1.19, debe existir $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \cap A = \emptyset$ o $B_r(\hat{x}) \cap A^c = \emptyset$. Como $\hat{x} \in B_r(\hat{x}) \cap A$, la identidad que se debe cumplir es la segunda, es decir, que $B_r(\hat{x}) \cap A^c = \emptyset$, lo que significa que $B_r(\hat{x}) \subset A$ (y por lo tanto que $\hat{x} \in \text{int}(A)$).

Inciso 1) (\impliedby) Si $A \subset \text{int}(A)$, como $\text{Fr}(A) \cap \text{int}(A) = \emptyset$, entonces $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$ de modo que A es abierto.

Inciso 2) (\implies) De acuerdo con el inciso 1 de la definición 1.22, como A es cerrado, se tiene que $\text{Fr}(A) \subset A$ y por tanto que $\text{Fr}(A) \cap A^c = \emptyset$; dado que $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(A^c)$ (inciso 5 de la proposición 1.20), tenemos que $\text{Fr}(A^c) \cap A^c = \emptyset$ y por lo tanto, de acuerdo con la definición 1.22, se tiene que A^c es un conjunto abierto.

Inciso 2) (\impliedby) ¡Lea “hacia atrás” el párrafo anterior! ■

En realidad, y para ser sinceros, las condiciones de la proposición anterior son las más populares porque suelen ser las más útiles cuando se trata de demostrar que un conjunto es abierto o que un conjunto es cerrado. Como prueba de esta afirmación, a continuación damos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.24 Observe que:

1. \mathbb{R}^n es un conjunto abierto. En efecto, nótese que para todo $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $B_r(\hat{x}) \subset \mathbb{R}^n$ sin importar cómo sea r (muy grande o muy pequeño). De forma, por el inciso 1 de la proposición anterior, \mathbb{R}^n es un conjunto abierto.
2. \mathbb{R}^n es un conjunto cerrado. En virtud de lo anterior, tenemos que $\mathbb{R}^n = \text{int}(\mathbb{R}^n)$, de forma tal que $\text{Fr}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ (de hecho, también $\text{ext}(\mathbb{R}^n) = \emptyset$). De esta modo, $\text{Fr}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^n$ y por el inciso 2 de la proposición anterior, \mathbb{R}^n también es un conjunto cerrado.
3. Por los dos incisos anteriores (y la multicitada proposición), se concluye que el conjunto \emptyset también es un conjunto abierto y cerrado (lo que por cierto prueba que los conjuntos (al menos algunos de ellos) no son como las puertas: los hay algunos que son abiertos y cerrados al mismo tiempo! ¿El lector podría mostrar otro ejemplo con la misma característica?).
4. Para todo $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ y toda $r > 0$ se tiene que $B_r(\hat{x})$ es un conjunto abierto. Para probarlo, veremos que se cumple la condición del inciso 1 de la susodicha proposición. Sea $\hat{y} \in B_r(\hat{x})$; como se ve en la figura 1.12 (para el caso de \mathbb{R}^2), parece que si tomamos $r' = r - \|\hat{x} - \hat{y}\| > 0$, entonces se debe tener que $B_{r'}(\hat{y}) \subset B_r(\hat{x})$. La clave para probar esta contención está en la desigualdad del triángulo (inciso 1 de la proposición 1.12) pues, con base en dicha desigualdad, tenemos que si $\hat{z} \in B_{r'}(\hat{y})$, entonces

$$\begin{aligned} \|\hat{x} - \hat{z}\| &= \|(\hat{x} - \hat{y}) + (\hat{y} - \hat{z})\| \\ &\leq \|\hat{x} - \hat{y}\| + \|\hat{y} - \hat{z}\| \\ &= \|\hat{x} - \hat{y}\| + \|\hat{z} - \hat{y}\| \\ &< \|\hat{x} - \hat{y}\| + r - \|\hat{x} - \hat{y}\| \\ &= r \end{aligned}$$

y por lo tanto $\hat{z} \in B_r(\hat{x})$, de donde $B_{r'}(\hat{y}) \subset B_r(\hat{x})$. Esto prueba que se satisface la condición del inciso 1 de la famosa proposición, y por lo tanto que $B_r(\hat{x})$ es un conjunto abierto.

Pareciera geoméricamente “natural” esperar que si a un conjunto A le “quitamos” sus puntos frontera, el conjunto que nos queda será un conjunto abierto (el conjunto de la figura 1.12 refuerza esta sospecha). Cuando a un conjunto A le quitamos sus puntos frontera, sólo nos quedamos con los puntos interiores de A , es decir que

$$A \setminus \text{Fr}(A) = \text{int}(A), \tag{1.10}$$

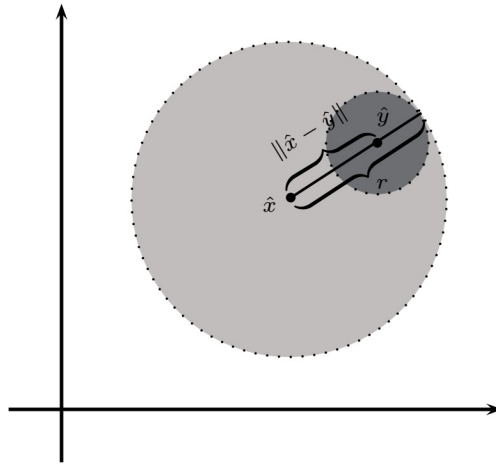


Figura 1.12: La bola de radio r con centro en \hat{x} es un conjunto abierto.

de donde nuestra sospecha se traduce en que el interior de todo subconjunto A de \mathbb{R}^n ($\text{int}(A)$) será un conjunto abierto (y por lo tanto el $\text{ext}(A)$ también será abierto dado que $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c)$ (inciso 5 de la proposición 1.20)).

Siguiendo la misma línea de pensamiento que en el párrafo anterior, ahora nos podemos preguntar qué sucede si a un conjunto A , en lugar de “quitarle” sus puntos frontera, se los agregamos. Es decir, ¿qué tipo de conjunto resultará ser $A \cup \text{Fr}(A)$?

Pues bien, como seguramente el lector ya intuía, este conjunto siempre resultará ser un conjunto cerrado y hasta tiene un nombre que refleja esta propiedad: *la cerradura* de A . Usaremos mucho este conjunto a lo largo de este texto, y por esta razón le dedicamos la siguiente

Definición 1.25 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Definimos la cerradura de A , que denotamos por \bar{A} , como

$$\bar{A} := A \cup \text{Fr}(A),$$

Resumiendo lo hecho hasta aquí, dado $A \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario, hemos definido (por ahora) cuatro conjuntos asociados a dicho conjunto: $\text{int}(A)$, $\text{ext}(A)$, $\text{Fr}(A)$ y \bar{A} . Ahora, si recordamos que, por el inciso 4 de la proposición 1.20, se tiene que

$$(\text{Fr}(A))^c = \mathbb{R}^n \setminus \text{Fr}(A) = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A),$$

todo parece indicar que el complemento de la $\text{Fr}(A)$ será un conjunto abierto, y por lo tanto éste será cerrado. Es decir, de estos cuatro conjuntos, el $\text{int}(A)$ y el $\text{ext}(A)$ serán conjuntos abiertos, mientras que $\text{Fr}(A)$ y \bar{A} serán conjuntos cerrados. Dada la importancia de estas propiedades, las dejaremos establecidas en la siguiente

Proposición 1.26 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ arbitrario. Las siguientes afirmaciones son ciertas:

1. el $\text{int}(A)$ y el $\text{ext}(A)$ son conjuntos abiertos,
2. la $\text{Fr}(A)$ y \bar{A} son conjuntos cerrados.

Demostración. Inciso 1) De acuerdo con el inciso 1 de la proposición 1.23, necesitamos mostrar que si $\hat{x} \in \text{int}(A)$, entonces existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset \text{int}(A)$. Ahora, como $\hat{x} \in \text{int}(A)$, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$; aseguramos que $B_r(\hat{x}) \subset \text{int}(A)$. En efecto, si $\hat{y} \in B_r(\hat{x})$, como se mostró en el inciso 4 del ejemplo 1.24, existe $r' > 0$ tal que $B_{r'}(\hat{y}) \subset B_r(\hat{x}) \subset A$, lo que prueba que $\hat{y} \in \text{int}(A)$ y por tanto que $B_r(\hat{x}) \subset \text{int}(A)$.

En cuanto al $\text{ext}(A)$, como mencionamos arriba, dado que $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c)$ (inciso 5 de la proposición 1.20), por la primera parte de este inciso tenemos que este conjunto también es abierto.

Inciso 2) Como también hicimos notar anteriormente, por el inciso 4 de la proposición 1.20, tenemos que

$$(\text{Fr}(A))^c = \mathbb{R}^n \setminus \text{Fr}(A) = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A),$$

de tal forma que, por el inciso (a) del problema 22 concluimos que $(\text{Fr}(A))^c$ es un conjunto abierto y por lo tanto que $\text{Fr}(A)$ es cerrado. Con respecto a \bar{A} obsérvese que, como $A = \text{int}(A) \cup (A \cap \text{Fr}(A))$, entonces $A \cup \text{Fr}(A) = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)$ y por tanto

$$(\bar{A})^c = \mathbb{R}^n \setminus (A \cup \text{Fr}(A)) = \mathbb{R}^n \setminus (\text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)) = \text{ext}(A),$$

de modo que $(\bar{A})^c$ es un conjunto abierto y por lo tanto \bar{A} será un conjunto cerrado. \blacksquare

1.5.3 Otra clasificación de puntos

Si en la definición 1.19 hicimos una clasificación de los puntos de \mathbb{R}^n en términos de su localización con respecto a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ (más allá de su relación de pertenencia con dicho conjunto), ahora introduciremos una nueva clasificación en la que trataremos de reflejar si un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ está “pegado a” (o contrariamente “aislado de”) un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$. Para hacer esto, nuevamente haremos uso de las vecindades (o bolas) centradas en el punto \hat{x} .

Parece “natural” pensar que un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, el cual ni siquiera tiene que pertenecer a A , está “pegado” a un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ si cualquiera de sus vecindades $B_r(\hat{x})$ (es decir, sin importar el tamaño de r) “comparte” muchos puntos con A .

Con base en esta idea intuitiva es que definimos los conceptos de *punto de acumulación* y *punto aislado* de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 1.27 Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que:

1. \hat{x} es un punto de acumulación de A si para toda $r > 0$ se tiene que $(B_r(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}) \cap A \neq \emptyset$ ⁴. Al conjunto formado por los puntos de acumulación de A lo denotamos por A' , es decir

$$A' := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^n \mid \hat{x} \text{ es punto de acumulación de } A\},$$

2. $\hat{x} \in A$ es un punto aislado de A si \hat{x} no es un punto de acumulación de A , es decir, si existe $r > 0$ tal que $(B_r(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}) \cap A = \emptyset$.

Es muy importante destacar que la relación definida en el inciso 1 entre un punto \hat{x} y un conjunto A es completamente independiente de la relación de pertenencia que \hat{x} tenga con el conjunto A . En efecto, si \hat{x} es un punto de acumulación de A , esto no significa que \hat{x} tenga que pertenecer a A , y recíprocamente, aún cuando $\hat{x} \in A$, puede suceder que \hat{x} no sea un punto de acumulación de A , es decir, puede suceder que \hat{x} sea un punto aislado de A . El siguiente ejemplo ilustra (en \mathbb{R}^2) estos hechos.

Ejemplo 1.28 Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2, 2)\} = B_1((0, 0)) \cup \{(2, 2)\}$ (ver figura 1.13). Afirmamos que:

1. el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, que no pertenece a A , es un punto de acumulación de A . En efecto, observe que dado $r > 0$, se tiene que el punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}(r+1)} (1, 1)$$

es tal que

$$\left\| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)} \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}(r+1)} \|(1, 1)\|$$

⁴Se dice que de la forma $B_r(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$ es una vecindad “agujerada” de \hat{x} .

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}(r+1)}\sqrt{2} \\
&= \frac{1}{r+1} \\
&< 1
\end{aligned}$$

y por lo tanto pertenece a A .

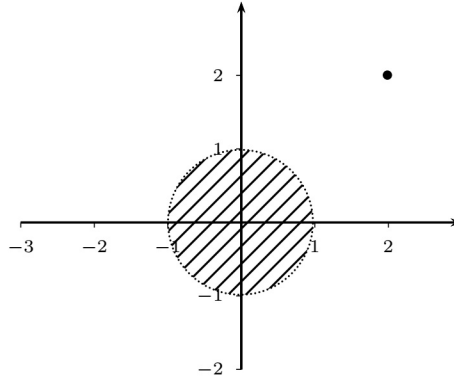


Figura 1.13: El conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(2, 2)\}$ del ejemplo 1.28.

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
0 &< \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}, \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)} \right) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}, \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)} \right) \right\| \\
&= \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)} \|(1, 1)\| \\
&= \frac{r}{\sqrt{2}(r+1)}\sqrt{2} \\
&= \frac{r}{(r+1)} \\
&< r,
\end{aligned}$$

de donde concluimos que este punto también pertenece al conjunto

$$B_r((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})) \setminus \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$$

y por lo tanto que

$$\left(B_r((1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})) \setminus \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\} \right) \cap A \neq \emptyset,$$

es decir, que $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ es un punto de acumulación de A .

2. el punto $(2, 2)$, que es un punto que pertenece a A , es un punto aislado de A . Obsérvese que si tomamos la bola (o vecindad) de radio 1 con centro en este punto, entonces

$$(B_1((2, 2)) \setminus \{(2, 2)\}) \cap A = \emptyset.$$

En efecto, si $(x, y) \in B_1((2, 2)) \setminus \{(2, 2)\}$, entonces $(x, y) \neq (2, 2)$. Además se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\|(2, 2)\| - \|(x, y)\| \leq \|(2, 2) - (x, y)\| < 1,$$

de modo que

$$\|(2, 2)\| - 1 < \|(x, y)\|.$$

Como

$$1 < 2\sqrt{2} - 1 = \|(2, 2)\| - 1 < \|(x, y)\|,$$

entonces $1 < x^2 + y^2$, es decir, $(x, y) \notin B_1((2, 2))$ y por lo tanto $(x, y) \notin A$.

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, la relación de sus puntos de acumulación con aquellos que se definieron en 1.19 no es muy estrecha, pues cada uno de ellos expresa una relación diferente con dicho conjunto. Sin embargo, existen algunas relaciones entre ellos que es importante destacar. Tal es el caso de los puntos interiores de A , los cuales siempre resultan ser puntos de acumulación; es decir, $\text{int}(A) \subset A'$.

También resulta natural que los puntos exteriores de A no sean puntos de acumulación de A . Es decir, que $A' \cap \text{ext}(A) = \emptyset$, o equivalentemente, que $A' \subset \mathbb{R}^n \setminus \text{ext}(A) = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)$. Estas contenciones establecen una relación muy específica entre los puntos de acumulación de un conjunto A y sus correspondientes puntos interiores y exteriores, lo que no sucede con los puntos frontera. En efecto, el conjunto A del ejemplo 1.28 nos es útil para ilustrar este hecho; en este caso, el $(0, 0)$ es un punto de acumulación de A (ya que es un punto interior de A) y no es un punto frontera de A (por la misma razón); sin embargo, el punto $(2, 2)$ es un punto frontera de A y, como se mostró en ese ejemplo, no es un punto de acumulación de A .

Las contenciones dadas en el párrafo anterior son muy importantes. Por esta razón las dejamos expresadas en la siguiente

Proposición 1.29 *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto arbitrario, entonces*

$$\text{int}(A) \subset A' \subset \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A).$$

Demostración. Como es de suponerse, la prueba de esta proposición se deja al lector. ■

Cuando expresamos en términos intuitivos lo que debería de pasar para que un punto $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ fuera un punto de acumulación de un conjunto A , dijimos que cualquier vecindad $B_r(\hat{x})$ (sin importar qué tan grande o pequeño fuera r) tendría que tener “muchos” puntos de A .

Lo siguiente que vamos a mostrar es que, de la definición formal que dimos, en efecto se desprende que esto debe ser así: $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A si y sólo si para toda $r > 0$, $B_r(\hat{x}) \cap A$ es un conjunto infinito.

Proposición 1.30 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Se satisface que $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A si y sólo si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(\hat{x}) \cap A$ es un conjunto infinito.*

Demostración. Para probar que esta propiedad es una condición necesaria del hecho de que \hat{x} es un punto de acumulación de A , procederemos por el método de la contrapuesta.

Supongamos entonces que existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \cap A$ es un conjunto finito. Si $(B_r(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}) \cap A = \emptyset$, entonces \hat{x} no es un punto de acumulación de A y por lo tanto ya habremos terminado.

Si $(B_r(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}) \cap A = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k\}$, hacemos $r' = \min\{\|\hat{x} - \hat{x}_i\| \mid i \in \{1, \dots, k\}\}$. Es claro que $r' > 0$ y además, como $r' \leq \|\hat{x} - \hat{x}_i\|$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $(B_{r'}(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}) \cap A = \emptyset$, con lo que de nuevo concluimos que \hat{x} no es un punto de acumulación de A .

Para probar la suficiencia, basta observar que si $B_r(\hat{x}) \cap A$ es un conjunto infinito para toda $r > 0$, entonces es inmediato que $(B_r(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}) \cap A \neq \emptyset$, de modo que \hat{x} es un punto de acumulación de A . ■

La proposición anterior tiene un corolario muy interesante, pues establece una condición suficiente para que un conjunto no tenga puntos de acumulación (o si se prefiere, una condición (o consecuencia) necesaria del hecho de que un conjunto sí tenga puntos de acumulación): si un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es finito, entonces $A' = \emptyset$ (o equivalentemente: si $A' \neq \emptyset$, entonces A es un conjunto infinito). Escribiremos el corolario de la segunda forma.

Corolario 1.31 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $A' \neq \emptyset$, entonces A es un conjunto infinito.*

Una pregunta muy importante es si la afirmación recíproca del corolario anterior es cierta: ¿si A es un conjunto infinito, entonces $A' \neq \emptyset$? La respuesta es negativa y el ejemplo es el conjunto A que se da en el problema 26.

La siguiente pregunta es entonces: además de ser infinito, ¿qué otra propiedad debe tener un conjunto A para que se pueda asegurar que al menos tiene un punto de acumulación? La clave para responder esta pregunta nos la dan el conjunto A que acabamos de usar como contraejemplo y el resultado del problema 36. En este problema se establece que, si un conjunto tiene al menos un punto de acumulación (es decir, que $A' \neq \emptyset$), entonces para cualquier cantidad positiva (sin importar cuán pequeña la tomemos), deben existir un par de elementos de A cuya distancia entre ellos sea menor que esa cantidad positiva. Es decir, sin importar que distancia elijamos, siempre debemos poder encontrar elementos en A tales que la distancia entre ellos sea menor que la distancia elegida. Si el lector observa con cuidado, el conjunto A del problema 26 no satisface esta propiedad, y peor aún, en este caso tenemos que $\|\hat{x} - \hat{y}\| \geq 1$ para todo $\hat{x}, \hat{y} \in A$, si $\hat{x} \neq \hat{y}$.

De la discusión anterior se desprende la siguiente pregunta: ¿qué propiedad tiene el conjunto A del problema 26, que además de ser infinito, permite que la distancia entre cualesquiera dos de sus elementos sea mayor o igual que una cierta cantidad positiva fija? Pues una propiedad del conjunto A que hasta ahora no hemos observado es que, sin importar cuán grande se elija un número $M > 0$, siempre podemos encontrar un $\hat{x} \in A$ tal que $\|\hat{x}\| \geq M$. Más aún, obsérvese que dado un número $M > 0$, sin importar lo “grande” que éste sea, la norma de casi todos los elementos del conjunto A (es decir, todos salvo un número finito de ellos) rebasa a este número M .

Cuando un conjunto A tiene la propiedad de que, sin importar cuán grande se elija un número $M > 0$, siempre podemos encontrar un $\hat{x} \in A$ tal que $\|\hat{x}\| \geq M$, se dice que este conjunto es no acotado. O dicho de manera positiva, cuando sucede lo contrario, decimos que el conjunto está acotado.

Este concepto resultará ser muy importante para la pregunta que nos hicimos con respecto a la proposición recíproca del corolario 1.31, y por esta razón lo dejamos plasmado en la siguiente

Definición 1.32 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto acotado (o simplemente que A está acotado) si existe $M > 0$ tal que $\|\hat{x}\| \leq M$ para todo $\hat{x} \in A$.

En términos geométricos, decir que un conjunto A está acotado significa que éste queda contenido en alguna bola (o vecindad) con centro en el origen (observe que, de la definición anterior, se desprende que $A \subset B_{M+1}(\hat{0})$).

Como seguramente el lector ya habrá sospechado, para que podamos asegurar que un conjunto infinito A tiene al menos un punto de acumulación, será suficiente que éste también sea acotado. Este es un resultado tan importante, que hasta tiene nombre: teorema de Bolzano-Weierstrass⁵. La prueba de este teorema requiere que contemos con la versión generalizada (a \mathbb{R}^n) de un conocido teorema de los números reales: el teorema de los intervalos anidados. Por esta razón, primero definiremos todo lo necesario para formular dicha generalización, la probaremos, y finalmente la usaremos para demostrar el teorema de Bolzano-Weierstrass.

Lo primero que haremos será generalizar el concepto de intervalo cerrado, de la siguiente manera.

Definición 1.33 Dados $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i \leq b_i$ para $i = 1, \dots, n$, decimos que el conjunto

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i \in \{1, \dots, n\}\}$$

es un rectángulo cerrado. Asimismo, definimos la diagonal de R , que denotamos por $\text{diag}(R)$, como

$$\text{diag}(R) := \|(b_1, \dots, b_n) - (a_1, \dots, a_n)\|.$$

⁵El teorema de Bolzano-Weierstrass lleva el nombre de los matemáticos Bernard Placidus Johann Gonzal Nepomuk Bolzano (Praga, Bohemia (actual República Checa), 5 de octubre de 1781 - ídem, 18 de diciembre de 1848), y Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (escrito Weierstrass cuando no está disponible el caracter "ß") (Ostenfelde, 31 de octubre de 1815 - Berlín, 19 de febrero de 1897). El primero, conocido como Bernard Bolzano, fue un matemático, lógico, filósofo y teólogo bohemio que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento. El segundo, conocido como Karl Weierstrass, fue un matemático alemán al que se suele citar como el “padre del análisis moderno”. En realidad, este teorema fue demostrado por primera vez en 1817 por Bolzano, como un lema en la demostración del teorema de valor intermedio. Unos cincuenta años más tarde, el resultado fue identificado como significativo por derecho propio, y demostrado una vez más por Weierstrass. Desde entonces se ha convertido en un teorema fundamental del análisis. (fuente: Wikipedia).

Establecemos las propiedades más elementales de este tipo de conjuntos en el siguiente

Lema 1.34 Sea $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, n\}$ un rectángulo cerrado. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:

1. R es un conjunto cerrado
2. si $\hat{x}, \hat{y} \in R$, entonces $\|\hat{x} - \hat{y}\| \leq \text{diag}(R)$
3. si $\hat{x} \in R$ y $\text{diag}(R) < r$, entonces $R \subset B_r(\hat{x})$
4. si $R' = [a'_1, b'_1] \times \cdots \times [a'_n, b'_n]$ se tiene que: $R' \subset R$ si y sólo si $[a'_i, b'_i] \subset [a_i, b_i]$ para toda $i \in \{1, \dots, n\}$.

El lector estará de acuerdo en que todas estas propiedades son muy sencillas de probar, razón por la cual se deja que él las haga.

Habiendo dado la definición y lema anteriores, estamos en condiciones de formular y probar lo que llamaremos el *teorema de los rectángulos anidados*, de la siguiente manera.

Teorema 1.35 (de los rectángulos anidados) Si $\{R_k\}$ es una sucesión anidada de rectángulos cerrados (es decir, $R_{k+1} \subset R_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$), entonces

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \emptyset.$$

Si además se tiene que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diag}(R_k) = 0$, entonces

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{\hat{x}_0\}.$$

para algún $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Esta prueba estará basada en el correspondiente teorema de los intervalos anidados. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$R_k = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \cdots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}].$$

Por el inciso 4 del lema 1.34 sabemos que, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión

$$\{I_k^{(i)} = [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}]\}$$

es una sucesión de intervalos (cerrados) anidados, de tal forma que $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k^{(i)} \neq \emptyset$. Por tanto, si para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ elegimos $x_i \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k^{(i)}$, entonces se verifica que $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$. En efecto, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se tiene que

$$x_i \in I_k^{(i)} = [a_i^{(k)}, b_i^{(k)}],$$

de tal forma que

$$\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \cdots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}] = R_k.$$

Como lo anterior es válido para cada $k \in \mathbb{N}$, entonces $\hat{x} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$, es decir que $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k \neq \emptyset$.

Supongamos ahora que $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diag}(R_k) = 0$ y que $\hat{x}, \hat{y} \in \bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$. Por el inciso 2 del lema 1.34 sabemos que

$$0 \leq \|\hat{x} - \hat{y}\| \leq \text{diag}(R_k),$$

de tal forma que, si en las desigualdades anteriores tomamos el límite cuando $k \rightarrow \infty$, obtenemos que

$$0 \leq \|\hat{x} - \hat{y}\| \leq 0,$$

es decir, que $\|\hat{x} - \hat{y}\| = 0$ y por tanto que $\hat{x} = \hat{y}$. Esto prueba que todos los elementos de $\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k$ son iguales, lo que significa que dicho conjunto consta de un sólo punto. ■

Ya casi todo está listo para poder formular y probar el teorema de Bolzano-Weierstrass; sólo resta mencionar la forma en que, en dicha demostración, subdividiremos a un rectángulo $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Simplemente partimos a cada intervalo coordenado $[a_i, b_i]$ en los subintervalos $[a_i, (a_i + b_i)/2]$ y $[(a_i + b_i)/2, b_i]$ y construimos todos los rectángulos que tengan como i -ésimo intervalo coordenado a alguno de estos subintervalos, para $i \in \{1, \dots, n\}$. Con este procedimiento obtenemos 2^n rectángulos cerrados R_k cuyas propiedades, que por ahora nos interesa destacar, son las siguientes: $R_k \subset R$, $R = \bigcup_{k=1}^{2^n} R_k$ y $\text{diag}(R_k) = \text{diag}(R)/2$ (propiedades que el lector podrá probar muy fácilmente).

Una vez hecho lo anterior, formularemos el teorema de Bolzano-Weierstrass, no sin antes mencionar que el procedimiento que usaremos en su demostración hasta tiene un nombre: *la cacería del león*.

Teorema 1.36 (de Bolzano-Weierstrass) *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto infinito y acotado, entonces A tiene al menos un punto de acumulación (es decir, $A' \neq \emptyset$).*

Demostración. Sea $M > 0$ tal que $\|\hat{x}\| \leq M$ para toda $\hat{x} \in A$. Si hacemos $R = [-M, M] \times \cdots \times [-M, M]$, tenemos entonces que $A \subset R$. Ahora subdividimos a R en la forma que mencionamos antes.

Dado que $A \subset R$, que R es la unión de todos los rectángulos inducidos por la subdivisión que hicimos, y que A es infinito, se debe tener entonces que en alguno de estos rectángulos inducidos, al que llamaremos R_1 , debe haber una infinidad de puntos de A . Es decir, $R_1 \subset R$ es un rectángulo cerrado tal que $A \cap R_1$ es un conjunto infinito y

$$\text{diag}(R_1) = \text{diag}(R)/2 = (2\sqrt{n}M)/2 = \sqrt{n}M.$$

Ahora subdividimos a R_1 en la forma que mencionamos antes. Dado que $A \cap R_1 \subset R_1$, que R_1 es la unión de todos los rectángulos inducidos por la subdivisión que le hicimos, y que $A \cap R_1$ es infinito, entonces en alguno de estos rectángulos inducidos, al que llamaremos R_2 , debe haber una infinidad de puntos de $A \cap R_1$. Es decir, $R_2 \subset R_1$ es un rectángulo cerrado tal que

$$(A \cap R_1) \cap R_2 = A \cap (R_1 \cap R_2) = A \cap R_2$$

es un conjunto infinito y

$$\text{diag}(R_2) = \text{diag}(R_1)/2 = \text{diag}(R)/2^2 = (2\sqrt{n}M)/2^2 = \sqrt{n}M/2.$$

Como el lector ya habrá notado, este es un procedimiento que podemos seguir indefinidamente, es decir, es un proceso inductivo. En efecto, si para una cierta $k \in \mathbb{N}$ ya hemos construido un rectángulo cerrado R_k con las siguientes propiedades:

1. $R_k \subset R_{k-1} \subset \cdots \subset R_1 \subset R$,
2. $A \cap R_k$ es un conjunto infinito, y
3. $\text{diag}(R_k) = \frac{\sqrt{n}M}{2^{k-1}}$,

entonces podemos construir un rectángulo cerrado R_{k+1} , que tenga las propiedades equivalentes. ¿Cómo? De la siguiente manera: subdividimos a R_k en la forma en que hemos venido haciéndolo. Dado que $A \cap R_k \subset R_k$, que R_k es la unión de todos los rectángulos inducidos por la subdivisión que le hicimos, y que $A \cap R_k$ es infinito, en alguno de los rectángulos inducidos por esta subdivisión, al que llamaremos R_{k+1} , debe haber una infinidad de puntos de $A \cap R_k$. Es decir, R_{k+1} será un rectángulo cerrado que satisface las propiedades deseadas:

1. $R_{k+1} \subset R_k$,
2. $(A \cap R_k) \cap R_{k+1} = A \cap (R_k \cap R_{k+1}) = A \cap R_{k+1}$ es un conjunto infinito, y
3. $\text{diag}(R_{k+1}) = \text{diag}(R_k)/2 = (\sqrt{n}M/2^{k-1})/2 = \sqrt{n}M/2^k$

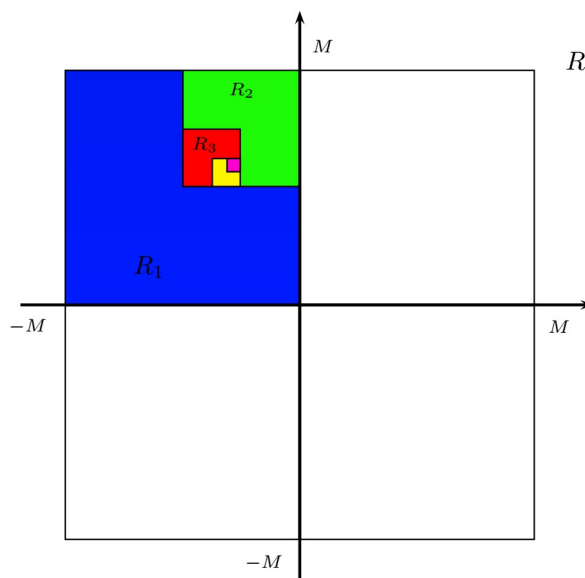


Figura 1.14: La cacería del león.

(ver figura 1.14).

Con base en este procedimiento obtenemos una sucesión (infinita) de rectángulos cerrados $\{R_k\}$ que satisfacen las propiedades que enlistamos anteriormente. De esta forma, por el teorema 1.35 (de los rectángulos anidados), sabemos que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} R_k = \{\hat{x}_0\}$$

para algún $\hat{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Aseguramos que \hat{x}_0 es un punto de acumulación de A . Sea $r > 0$; como

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{diag}(R_k) = 0,$$

existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$, entonces $0 \leq \text{diag}(R_k) < r$. Por otra parte, como $\hat{x}_0 \in R_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$, entonces por el inciso 3 del lema 1.34 se tiene que $R_k \subset B_r(\hat{x}_0)$, de tal forma que $A \cap R_k \subset A \cap B_r(\hat{x}_0)$, y como $A \cap R_k$ es un conjunto infinito, podemos concluir que $(B_r(\hat{x}_0) \setminus \{\hat{x}_0\}) \cap A \neq \emptyset$ y por lo tanto que \hat{x}_0 es un punto de acumulación de A . ■

1.5.4 Conjuntos conexos

Concluiremos esta sección mostrando de qué forma los conceptos que hasta ahora hemos desarrollado, se pueden usar para definir de manera muy precisa un hecho geométrico que es intuitivamente muy claro: ¿cuándo un conjunto está formado de una sola pieza? Es decir, ¿cuándo un conjunto no está “roto”?

En realidad lo que haremos será establecer cuándo se puede decir que un conjunto está “roto” o “separado” (y, consecuentemente, los conjuntos que son de una sola pieza (o conexos, como suele llamárseles) serán los que no están “rotos” o “separados”).

Intuitivamente, un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ estará “roto” si se puede poner como la unión de otros dos conjuntos B y C , para los cuales hay alguna forma de decir que están “separados”.

Tal vez la primera idea que se nos venga a la cabeza para decir que dos conjuntos están separados es que simplemente sean ajenos (y claro, ¡diferentes del vacío!). Desafortunadamente, aún cuando dos conjuntos sean ajenos, estos pueden embonar (o empatar) muy bien, de tal forma que al unirlos formen un conjunto que no esté “roto”.

Tal es el caso de los siguientes conjuntos: $B = [0, 1/2] \times [0, 1]$ y $C = (1/2, 1] \times [0, 1]$ (ver figura 1.15) cuya unión nos da el conjunto $A = [0, 1] \times [0, 1]$, el cual no es el tipo de conjunto del que se pudiera decir que está “roto”. De hecho, cualquier conjunto A con más de un punto (esté o no esté “roto”) podemos expresarlo como la unión de dos conjuntos ajenos; bastaría con tomar un subconjunto propio B (y no vacío) de A ($\emptyset \neq B \subsetneq A$) y $C = A \setminus B$ para que el conjunto A quedara expresado de esta forma.

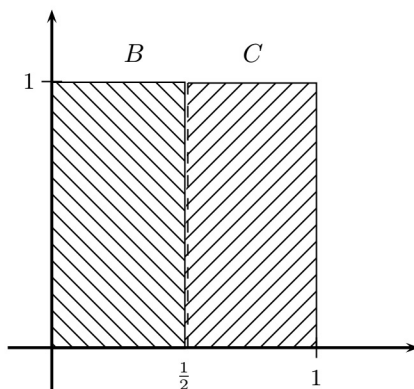


Figura 1.15: El conjunto $A = [0, 1] \times [0, 1]$, que no está “roto”, es la unión de los conjuntos ajenos $B = [0, 1/2] \times [0, 1]$ y $C = (1/2, 1] \times [0, 1]$.

Por el ejemplo (y la observación) anterior concluimos que pedir que dos conjuntos sólo sean ajenos, no es una buena forma de decir que éstos están separados. Pero no hay que desanimarse, pues la clave de nuestro problema se encuentra en la segunda clasificación que hicimos de los puntos de \mathbb{R}^n con respecto a un conjunto A . En efecto, como se recordará, intuitivamente los puntos de acumulación de un conjunto se pueden interpretar como los puntos que están “pegados” a A , de tal forma que si un conjunto no sólo es ajeno a A sino que tampoco tiene puntos que están “pegados” a A (es decir, es ajeno a A'), entonces sí que podremos decir que dicho conjunto está separado de A . De esta forma, si B y C son dos conjuntos tales que $B \cap C = \emptyset$ y además $B \cap C' = \emptyset$, entonces podemos decir que B está separado de C . Si también sucede que $B' \cap C = \emptyset$, entonces podemos decir que C está separado de B , o simplemente, que B y C están separados.

Con base en la discusión anterior definiremos lo que significa que dos conjuntos estén separados. Como seguramente el lector ya sospecha, en esta definición aparecerá la unión de un conjunto y su correspondiente conjunto de puntos de acumulación, es decir $A \cup A'$. Por esta razón, adelantaremos que el lector probará en el inciso (d) del ejercicio 28 que esta unión es igual a la cerradura de A , es decir que $A \cup A' = \bar{A}$, y que es como nos referiremos a ella en la siguiente

Definición 1.37 Sean $B, C \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que B y C están separados si $B \cap \bar{C} = \emptyset = \bar{B} \cap C$.

Si bien es cierto que en la discusión previa a esta definición hicimos notar que el hecho de que dos conjuntos sean ajenos no es suficiente para que estén separados, si los conjuntos son de cierto tipo, entonces el que sean ajenos sí es suficiente para que estén separados. Estos casos los dejaremos expresados en la siguiente proposición, cuya prueba quedará a cargo del lector.

Proposición 1.38 Sean $B, C \subset \mathbb{R}^n$.

1. Si B y C son abiertos, entonces B y C están separados si y sólo si B y C son ajenos (es decir, $B \cap C = \emptyset$).
2. Si B y C son cerrados, entonces B y C están separados si y sólo si B y C son ajenos (es decir, $B \cap C = \emptyset$).

Como habíamos adelantado, una vez que contamos con este concepto es muy sencillo definir lo que significa que un conjunto esté “roto”, o que sea *disconexo*, que es el término que realmente se usa.

Definición 1.39 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto *disconexo* si existen $B, C \subset \mathbb{R}^n$, no vacíos, tales que:

1. $A = B \cup C$, y
2. B y C están separados, es decir $B \cap \bar{C} = \emptyset = \bar{B} \cap C$.

Como también ya habíamos mencionado, un conjunto será *conexo* si no es disconexo (o dicho con toda propiedad, si es no disconexo), lo que formalizamos en la (casi) última definición de este capítulo.

Definición 1.40 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto conexo si A es no disconexo.

La definición anterior amerita un comentario importante: *el concepto de conexidad se define con base en una negación*. Esta es una característica que es importante resaltar, puesto que este tipo de conceptos son un poco más difíciles de manejar. Específicamente, si se quisiera demostrar *directamente* que un conjunto A es conexo, habría que *demostrar que no existen* $B, C \subset \mathbb{R}^n$, no vacíos y separados, tales que $A = B \cup C$. Como seguramente el lector a estas alturas ya habrá aprendido, demostrar que algo no existe siempre suele ser más difícil; casi siempre lo más práctico es suponer que ese algo sí existe, para después tratar de llegar a una contradicción. Es decir, proceder por contradicción.

Por esta misma razón, encontrar condiciones suficientes y/o necesarias para que un conjunto sea conexo adquiere particular importancia, y eso es justo lo que vamos a hacer en lo que resta de esta sección.

Para iniciar esta tarea, empezaremos por establecer una condición necesaria y suficiente para que un conjunto abierto sea conexo, para lo cual nos será útil dar la siguiente

Definición 1.41 Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$. Definimos el segmento (de recta) que une a \hat{x} con \hat{y} , y que denotamos por $[\hat{x}, \hat{y}]$, como el conjunto dado por

$$[\hat{x}, \hat{y}] := \{\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) = (1-t)\hat{x} + t\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq t \leq 1\}.$$

El primer resultado que probaremos, y que nos será muy útil en todo lo relacionado con la conexidad es “geoméricamente” muy claro: si dos conjuntos $B, C \subset \mathbb{R}^n$ están separados y tomamos un punto $\hat{x} \in B$ y otro punto $\hat{y} \in C$, es de esperarse que el segmento que une a estos puntos no esté contenido en la unión de B y C . Es decir que $[\hat{x}, \hat{y}] \not\subset B \cup C$. Este hecho lo probaremos en el siguiente

Lema 1.42 Sean $B, C \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\hat{x} \in B$ y $\hat{y} \in C$. Si B y C están separados, entonces el segmento que une a \hat{x} y \hat{y} no está contenido en la unión de B y C , es decir $[\hat{x}, \hat{y}] \not\subset B \cup C$.

Demostración. Construimos el siguiente conjunto:

$$S = \{s \in [0, 1] \mid \hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) \in (\bar{C})^c \text{ para toda } t \in [0, s]\}.$$

Observe que este conjunto es no vacío, pues tomando $s = 0$ en la definición del conjunto S obtenemos el punto \hat{x} que pertenece a $B \subset (\bar{C})^c$, en donde esta última contención se cumple ya que $B \cap \bar{C} = \emptyset$, lo cual a su vez es cierto puesto que B y C están separados. Por otra parte, S está contenido en el intervalo $[0, 1]$ y por lo tanto está acotado superiormente por el 1 (e inferiormente por el 0, lo que por ahora no resulta muy importante). De esta forma, por la propiedad del supremo de los números reales, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(S)$. Dado que $S \subset [0, 1]$, se tiene que $\alpha \in [0, 1]$, de modo que si $\hat{x}_0 = \hat{x} + \alpha(\hat{y} - \hat{x})$, entonces $\hat{x}_0 \in [\hat{x}, \hat{y}]$. Con respecto a este número α , es importante hacer notar que se satisface la siguiente contención:

$$[0, \alpha) \subset S. \tag{1.11}$$

En efecto, si $0 \leq s < \alpha$, de la definición de supremo sabemos que existe $s' \in S$ tal que $s < s' < \alpha$, de modo que, por la forma en que está definido el conjunto S , se tiene que $\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) \in (\bar{C})^c$ para toda $t \in [0, s']$ y por lo tanto para toda $t \in [0, s] \subset [0, s']$, por lo que se concluye que $s \in S$.

Otro hecho que podemos asegurar es que $\hat{x}_0 \notin B$. En efecto, si \hat{x}_0 estuviera en B , dado que $B \subset (\bar{C})^c$ (por la razón que ya explicamos), entonces $\alpha < 1$ y $\hat{x}_0 \in (\bar{C})^c$. Ahora, como \bar{C} es un conjunto cerrado (inciso 2 de la proposición 1.26), entonces $(\bar{C})^c$ es un conjunto abierto de modo que existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}_0) \subset (\bar{C})^c$. Nótese ahora que, si

$$r' = \min \left\{ \frac{1-\alpha}{2}, \frac{r}{2\|\hat{x} - \hat{y}\|} \right\},$$

entonces para toda $\alpha \leq t \leq \alpha + r'$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_0 - (\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}))\| &= \|(\hat{x} + \alpha(\hat{y} - \hat{x})) - (\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}))\| \\ &= \|(\alpha - t)(\hat{y} - \hat{x})\| \\ &= (t - \alpha)\|\hat{x} - \hat{y}\| \\ &\leq r'\|\hat{x} - \hat{y}\| \\ &\leq \frac{r}{2} \\ &< r \end{aligned}$$

y por lo tanto $\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) \in B_r(\hat{x}_0) \subset (\bar{C})^c$. De esta contención, y de la contención 1.11 concluimos que $\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) \in (\bar{C})^c$ para toda $t \in [0, \alpha + r'] \subset [0, 1]$ y por lo tanto que $\alpha + r' \in S$, pertenencia que contradice el hecho de que $\alpha = \sup(S)$.

Si $\hat{x}_0 \notin C$ ya habremos terminado, pues entonces $\hat{x}_0 \notin B \cup C$. Pero sí puede suceder que $\hat{x}_0 \in C$ (¿podría dar el lector un ejemplo en el que esto fuera cierto?). En este caso mostraremos que podemos obtener otro punto $\hat{x}'_0 \in [\hat{x}, \hat{y}]$ tal que $\hat{x}'_0 \notin B \cup C$, de la siguiente forma: si $\hat{x}_0 \in C$, dado que $\bar{B} \cap C = \emptyset$ (porque B y C están separados), entonces $0 < \alpha$ y $\hat{x}_0 \in (\bar{B})^c$, y como este es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}_0) \subset (\bar{B})^c$. Sea

$$t' = \min \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{r}{2\|\hat{x} - \hat{y}\|} \right\}.$$

Entonces, como $0 < \alpha - t' < \alpha \leq 1$, si tomamos $\hat{x}'_0 = \hat{x} + (\alpha - t')(\hat{y} - \hat{x}) \in [\hat{x}, \hat{y}]$ tenemos, por la contención 1.11, que $\alpha - t' \in S$ y por lo tanto que $\hat{x}'_0 \in (\bar{C})^c$, de donde concluimos que $\hat{x}'_0 \notin C$. Por otra parte, como

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_0 - \hat{x}'_0\| &= \|(\hat{x} + \alpha(\hat{y} - \hat{x})) - (\hat{x} + (\alpha - t')(\hat{y} - \hat{x}))\| \\ &= \|t'(\hat{y} - \hat{x})\| \\ &= t'\|\hat{x} - \hat{y}\| \\ &\leq \frac{r}{2} \\ &< r, \end{aligned}$$

se tiene que $\hat{x}'_0 \in B_r(\hat{x}_0) \subset (\bar{B})^c$ de donde ahora concluimos que $\hat{x}'_0 \notin B$. Es decir, $\hat{x}'_0 \notin B \cup C$. ■

Con base en este lema vamos a obtener resultados muy importantes; con el primero de ellos lograremos probar que una clase muy grande y muy importante de conjuntos son conexos. Nos referimos a los llamados *conjuntos convexos*, los cuales definimos a continuación.

Definición 1.43 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que A es un conjunto convexo si para cada par de puntos $\hat{x}, \hat{y} \in A$ se tiene que $[\hat{x}, \hat{y}] \subset A$.

Antes de probar el resultado que anunciamos, mostraremos algunos ejemplos de conjuntos convexos.

Ejemplo 1.44 Los siguientes conjuntos son ejemplos de conjuntos convexos:

1. El espacio total \mathbb{R}^n . Esto es un hecho inmediato, puesto que estamos hablando del conjunto que constituye el "universo" sobre el cual se está trabajando. De esta forma, si $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$, por supuesto que $[\hat{x}, \hat{y}] \subset \mathbb{R}^n$.
2. Para todo $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$, el segmento que los une: $[\hat{x}, \hat{y}]$. Observe que, si tomamos $\hat{x} + s(\hat{y} - \hat{x})$ y $\hat{x} + s'(\hat{y} - \hat{x})$, con $s, s' \in [0, 1]$, es decir $\hat{x} + s(\hat{y} - \hat{x}), \hat{x} + s'(\hat{y} - \hat{x}) \in [\hat{x}, \hat{y}]$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} (\hat{x} + s(\hat{y} - \hat{x})) + t(\hat{x} + s'(\hat{y} - \hat{x}) - (\hat{x} + s(\hat{y} - \hat{x}))) &= \hat{x} + (s + t(s' - s))(\hat{y} - \hat{x}) \\ &= \hat{x} + ((1 - t)s + ts')(\hat{y} - \hat{x}). \end{aligned}$$

Como $(1 - t)s + ts' \in [0, 1]$ para toda $t \in [0, 1]$, concluimos que $[\hat{x} + s(\hat{y} - \hat{x}), \hat{x} + s'(\hat{y} - \hat{x})] \subset [\hat{x}, \hat{y}]$. Es decir que $[\hat{x}, \hat{y}]$ es convexo.

3. La bola (o vecindad) de radio $r > 0$ con centro en el punto \hat{x}_0 ($B_r(\hat{x}_0)$), en donde $r > 0$ es cualquier cantidad positiva y \hat{x}_0 es un punto arbitrario en \mathbb{R}^n . En efecto, si $\hat{x}, \hat{y} \in B_r(\hat{x}_0)$ y $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|\hat{x}_0 - (\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}))\| &= \|(\hat{x}_0 + t(\hat{x}_0 - \hat{x})) - (\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}))\| \\ &= \|(t\hat{x}_0 + (1-t)\hat{x}) - (t\hat{y} + (1-t)\hat{x})\| \\ &= \|t(\hat{x}_0 - \hat{y}) + (1-t)(\hat{x}_0 - \hat{x})\| \\ &\leq t\|\hat{x}_0 - \hat{y}\| + (1-t)\|\hat{x}_0 - \hat{x}\| \\ &< tr + (1-t)r \\ &= r, \end{aligned}$$

lo que prueba que $[\hat{x}, \hat{y}] \subset B_r(\hat{x}_0)$.

4. Cualquier rectángulo cerrado $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Sean $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n), \hat{y} = (y_1, \dots, y_n) \in R$ sea $t \in [0, 1]$. Como $a_i \leq x_i, y_i \leq b_i$ y $t \in [0, 1]$, entonces $ta_i \leq ty_i \leq tb_i$ y $(1-t)a_i \leq (1-t)x_i \leq (1-t)b_i$, de tal forma que

$$a_i = ta_i + (1-t)a_i \leq ty_i + (1-t)x_i \leq tb_i + (1-t)b_i = b_i.$$

Es decir, tenemos que

$$a_i \leq ty_i + (1-t)x_i = x_i + t(y_i - x_i) \leq b_i$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, y por lo tanto que $\hat{x} + t(\hat{y} - \hat{x}) = (x_1 + t(y_1 - x_1), \dots, x_n + t(y_n - x_n)) \in R$ para toda $t \in [0, 1]$, lo que significa que $[\hat{x}, \hat{y}] \subset R$.

El resultado que probaremos a continuación tendrá como corolario un hecho muy importante: todos los conjuntos mencionados en el ejemplo anterior serán conjuntos conexos.

Proposición 1.45 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si A es convexo, entonces A es conexo.

Demostración. Supongamos que A no es conexo. Entonces existen $B, C \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos y separados, tales que $A = B \cup C$. Dado que B y C son no vacíos, elegimos $\hat{x} \in B$ y $\hat{y} \in C$. Por el lema 1.42 tenemos entonces que $[\hat{x}, \hat{y}] \not\subset B \cup C = A$ lo cual contradice el hecho de que A es convexo. Por lo tanto, A es conexo. ■

Una pregunta que siempre nos tenemos que hacer es si el recíproco de una proposición es cierto. En el caso de la proposición anterior, la respuesta es negativa. Para poder dar un ejemplo de este hecho, será necesario ampliar la familia de conjuntos para los cuales hayamos probado que son conexos. Justo eso es lo que haremos en la siguiente proposición que probaremos, la cual nos proporciona una condición necesaria y suficiente para que un conjunto abierto sea conexo.

Para facilitar la redacción de su prueba, introducimos el siguiente concepto: dados $\hat{x}, \hat{y}, \hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$, diremos que el conjunto $[\hat{x}, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \cdots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}]$ es una *poligonal* que une a \hat{x} con \hat{y} (o que empieza en \hat{x} y termina en \hat{y} , o que tiene extremos \hat{x} y \hat{y}).

Proposición 1.46 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto y no vacío. A es conexo si y sólo si para cada par de puntos $\hat{x}, \hat{y} \in A$, existen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k \in A$ tales que $[\hat{x}, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \cdots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}] \subset A$. Es decir, A es conexo si y sólo si para cada par de puntos $\hat{x}, \hat{y} \in A$ existe una poligonal contenida en A que une a \hat{x} con \hat{y} .

Demostración. Supongamos que A es conexo y sea $\hat{x}_0 \in A$ un punto fijo. Nótese que nuestra demostración se reduce a demostrar que para cualquier $\hat{x} \in A$, siempre existe una poligonal que une a \hat{x}_0 con \hat{x} (¿por qué?). Para lograr esto, definimos los siguientes conjuntos:

$$U = \{\hat{x} \in A \mid \text{existe una poligonal contenida en } A \text{ que une a } \hat{x}_0 \text{ con } \hat{x}\}$$

y

$$V = \{\hat{x} \in A \mid \text{no existe una poligonal contenida en } A \text{ que une a } \hat{x}_0 \text{ con } \hat{x}\}.$$

Observe que nuestro objetivo es probar que $U = A$.

Como se prueba fácilmente, los conjuntos U y V tienen las siguientes propiedades:

1. $A = U \cup V$,
2. $U \cap V = \emptyset$, y
3. $U \neq \emptyset$ (pues $\hat{x}_0 \in U$).

Lo que ahora vamos a demostrar es que U y V son conjuntos abiertos. En efecto, si $\hat{x} \in U \subset A$, como A es un conjunto abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$; aseguramos que $B_r(\hat{x}) \subset U$ ya que si $\hat{y} \in B_r(\hat{x})$ sabemos que $[\hat{x}, \hat{y}] \subset B_r(\hat{x}) \subset A$ (las bolas son convexas) de tal forma que si $[\hat{x}_0, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{x}]$ es una poligonal contenida en A que une a \hat{x}_0 con \hat{x} , entonces $[\hat{x}_0, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{x}] \cup [\hat{x}, \hat{y}]$ es una poligonal contenida en A que une a \hat{x}_0 con \hat{y} . De lo anterior concluimos que $\hat{y} \in U$, es decir, $B_r(\hat{x}) \subset U$ y por lo tanto que U es un conjunto abierto.

Análogamente, si $\hat{x} \in V \subset A$, como A es un conjunto abierto, sabemos que existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset A$; aseguramos que $B_r(\hat{x}) \subset V$. Si esta contención no se cumpliera, existiría $\hat{y} \in B_r(\hat{x}) \subset A$ tal que $\hat{y} \notin V$ y por tanto se tendría que $\hat{y} \in U$ en cuyo caso existiría $[\hat{x}_0, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}]$, una poligonal contenida en A que une a \hat{x}_0 con \hat{y} . Como $[\hat{y}, \hat{x}] \subset B_r(\hat{x}) \subset A$, entonces $[\hat{x}_0, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}] \cup [\hat{y}, \hat{x}]$ sería una poligonal contenida en A que uniría a \hat{x}_0 con \hat{x} , contradiciendo el hecho de que $\hat{x} \in V$. Así pues, se debe tener que $B_r(\hat{x}) \subset V$, con lo cual concluimos que V también es abierto.

Resumiendo, tenemos que A es la unión de dos conjuntos abiertos y ajenos U y V , que por la proposición 1.38 están separados. Por estas razones, si además también se cumpliera que $V \neq \emptyset$, obtendríamos que A no es conexo, lo que sería una contradicción. De esta forma se debe tener que $V = \emptyset$ y por tanto que $A = U$, que es justo lo que se quería probar.

La condición de suficiencia para la conexidad es una consecuencia inmediata del lema 1.42. Si A no fuera conexo sabríamos que existen B y C conjuntos no vacíos y separados tales que $A = B \cup C$. De esta forma, si elegimos $\hat{x} \in B$, $\hat{y} \in C$ y tomamos $[\hat{x}, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}]$ una poligonal que une a estos puntos, entonces aseguramos que $[\hat{x}, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}] \not\subset A$. En efecto, nótese que si $\hat{x}_i \notin A$ para alguna $i \in \{1, \dots, k\}$, entonces $[\hat{x}, \hat{x}_1] \cup [\hat{x}_1, \hat{x}_2] \cup \dots \cup [\hat{x}_k, \hat{y}] \not\subset A$. Si $\hat{x}_i \in A$ para toda $i \in \{1, \dots, k\}$, llamando $\hat{x}_0 = \hat{x}$ y $\hat{x}_{k+1} = \hat{y}$ podemos asegurar que existe $i \in \{0, \dots, k\}$ tal que $\hat{x}_i \in B$ y $\hat{x}_{i+1} \in C$, de tal forma que, por el lema 1.42, $[\hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}] \not\subset B \cup C = A$. Resumiendo, si A no fuera conexo, no existiría una poligonal contenida en A que una a \hat{x} y \hat{y} , lo que contradice nuestra hipótesis. ■

Volviendo al recíproco de la proposición 1.45, aún cuando geoméricamente es muy sencillo *mostrar* un ejemplo de un conjunto que sea conexo pero no convexo (ver figura 1.16), con base en el resultado anterior podemos *probar* que el siguiente ejemplo ilustra el mismo hecho.

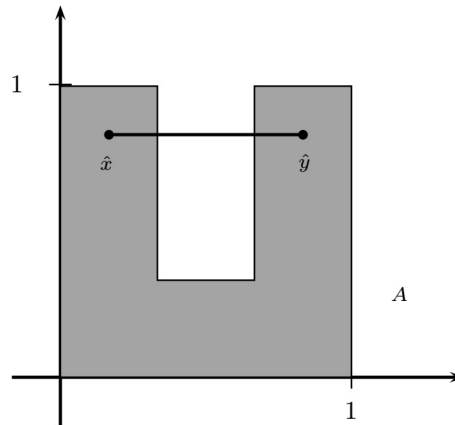


Figura 1.16: El conjunto A es conexo pero no es convexo, ya que el segmento $[\hat{x}, \hat{y}]$ no está contenido en A .

Ejemplo 1.47 Sea

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ y } y = 0\}.$$

El lector probará en el problema 17 que este conjunto es abierto. Aquí sólo mostraremos que dado cualquier $\hat{x} = (x, y) \in A$, el segmento que lo une con el punto $\hat{x}_0 = (1, 0) \in A$ está totalmente contenido en A (ver figura 1.17), lo que mostrará que este conjunto satisface la condición de suficiencia de la proposición anterior y por lo tanto será conexo.

Dado $(x, y) \in A$, distinguimos tres casos:

1. $y = 0$ y $x > 0$. En este caso, el segmento $[\hat{x}, \hat{x}_0] = [(x, 0), (1, 0)]$ está dado por

$$\{(x + t(1 - x), 0) = ((1 - t)x + t, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1]\}$$

y como $(1 - t)x + t > 0$ para toda $t \in [0, 1]$, se tiene que está contenido en A .

2. $y > 0$ y $x \in \mathbb{R}$. En este caso, el segmento $[\hat{x}, \hat{x}_0] = [(x, y), (1, 0)]$ está dado por

$$\{(x + t(1 - x), y - ty) = ((1 - t)x + t, (1 - t)y) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, 1]\}$$

de tal forma que, como $(1 - t)y > 0$ para toda $t \in [0, 1)$ y para $t = 1$ obtenemos el punto $(1, 0) = \hat{x}_0$, entonces en este caso también dicho segmento está contenido en A .

3. $y < 0$ y $x \in \mathbb{R}$. En este caso el segmento $[\hat{x}, \hat{x}_0] = [(x, y), (1, 0)]$ está dado por el mismo conjunto del inciso anterior, sólo que ahora $(1 - t)y < 0$ para toda $t \in [0, 1)$ y para $t = 1$ obtenemos otra vez el punto $(1, 0) = \hat{x}_0$, de modo que nuevamente el segmento estará contenido en A .

Ahora sólo resta probar que A no es convexo. En efecto, si tomamos los puntos $\hat{x} = (-1, 1)$ y $\hat{y} = (-1, -1)$ se tiene que $\hat{x}, \hat{y} \in A$ y sin embargo el punto $(-1, 0) = \hat{x} + (1/2)(\hat{y} - \hat{x}) \in [\hat{x}, \hat{y}]$ no pertenece a A , es decir, $[\hat{x}, \hat{y}] \not\subseteq A$.

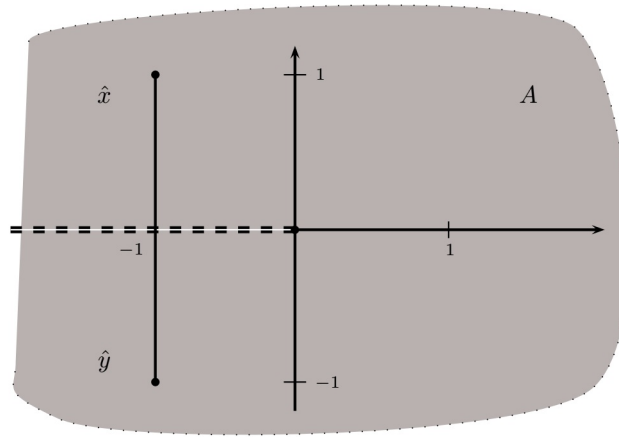


Figura 1.17: El conjunto $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ y } y = 0\}$ es conexo pero no es convexo, ya que el segmento $[\hat{x}, \hat{y}]$ no está contenido en A .

Concluimos esta sección con un resultado que nos permite caracterizar a los conjuntos disconexos (y por tanto a los conexos) en términos de conjuntos abiertos. Aún cuando no es la caracterización más conocida en términos de este tipo de conjuntos (la cual podremos probar hasta el capítulo 2), este caso también resultará ser de gran utilidad.

Proposición 1.48 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es disconexo si y sólo si existen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos tales que:

1. $A \subset U \cup V$,

2. $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, y
3. $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Demostración. Si A es desconexo, sabemos que existen $B, C \subset \mathbb{R}^n$ no vacíos y separados tales que $A = B \cup C$. Sea $U = \mathbb{R}^n \setminus \bar{C}$ y $V = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}$; nótese que U y V son abiertos puesto que cada uno de ellos es el complemento de un conjunto cerrado, razón por la cual sólo nos restará probar que satisfacen las propiedades requeridas.

Como B y C están separados, sabemos que $\bar{B} \cap C = \emptyset = B \cap \bar{C}$, de tal forma que $C \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{B} = V$ y $B \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{C} = U$. De aquí que

$$\begin{aligned} A &= B \cup C \\ &\subset (\mathbb{R}^n \setminus \bar{C}) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) \\ &= U \cup V. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} A \cap U &= A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{C}) \\ &\supset A \cap B \\ &= B \\ &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

y análogamente

$$\begin{aligned} A \cap V &= A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) \\ &\supset A \cap C \\ &= C \\ &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} A \cap U \cap V &= A \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{B}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \bar{C}) \\ &= A \cap (\mathbb{R}^n \setminus (\bar{B} \cup \bar{C})) \\ &= (B \cup C) \cap (\mathbb{R}^n \setminus (\bar{B} \cup \bar{C})) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Para probar la implicación recíproca, tomamos $B = A \cap U$ y $C = A \cap V$; por los incisos 1 y 2 de la hipótesis, tenemos que $B \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ y que $A = B \cup C$, de modo que sólo nos restaría mostrar que estos conjuntos están separados.

Supongamos que

$$\bar{B} \cap C = \overline{(A \cap U)} \cap (A \cap V) \neq \emptyset.$$

Si $\hat{x} \in \overline{(A \cap U)} \cap (A \cap V) \subset V$, como V es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_r(\hat{x}) \subset V$. Por otra parte, como $\hat{x} \in \overline{(A \cap U)}$, por el inciso (a) del problema 28 sabemos que

$$\emptyset \neq B_r(\hat{x}) \cap (A \cap U) \subset V \cap (A \cap U) = A \cap U \cap V.$$

lo que contradice el inciso 3 de la hipótesis. Por tanto $\bar{B} \cap C = \overline{(A \cap U)} \cap (A \cap V) = \emptyset$. Análogamente se prueba que $\bar{C} \cap B = \overline{(A \cap V)} \cap (A \cap U) = \emptyset$. ■

Como mencionamos anteriormente, como un corolario inmediato tenemos la siguiente caracterización de los conjuntos conexos.

Corolario 1.49 Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es conexo si y sólo si no existen $U, V \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos tales que:

1. $A \subset U \cup V$,
2. $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, y
3. $A \cap U \cap V = \emptyset$.

1.6 Otros sistemas coordenados

Al inicio de este capítulo mostramos algunas “situaciones” que se podían describir por medio de funciones cuyas variables (independiente y/o dependiente) eran una posición o una flecha. En todos estos ejemplos usamos el hecho de que una posición o una flecha (en el plano o en el espacio) se puede representar, una vez que se ha establecido un sistema coordenado cartesiano, por una pareja o una terna de números reales. Cabe recordar que en estos casos, la función involucrada se tendría que expresar en términos de estas coordenadas.

Hay “situaciones” en las que para representar una posición o una flecha es conveniente usar ciertas cantidades. Un ejemplo de estas cantidades, para el caso de posiciones o flechas en el plano, serían la distancia a un punto fijo y el ángulo con respecto a una recta fija. Estas cantidades dan lugar a otros sistemas coordenados, que son los que nos proponemos estudiar en esta sección.

Aún cuando no siempre es necesario, estos otros sistemas coordenados se pueden construir con base en un sistema cartesiano establecido previamente, que es justo como lo haremos en este texto.

1.6.1 Coordenadas polares

Para el caso del plano, si \hat{x} representa un punto o una flecha, además de asignarle sus coordenadas (x_0, y_0) en un sistema cartesiano dado, podemos asignarle otra pareja de números (ρ, θ) , a la que llamaremos *unas coordenadas polares* de \hat{x} , en donde ρ es igual a la distancia que hay de \hat{x} al origen (es decir, la magnitud o norma de \hat{x}), y θ es el ángulo (dirigido) formado por la parte positiva del eje X y la semirrecta que parte del origen y pasa por \hat{x} (ver figura 1.18).

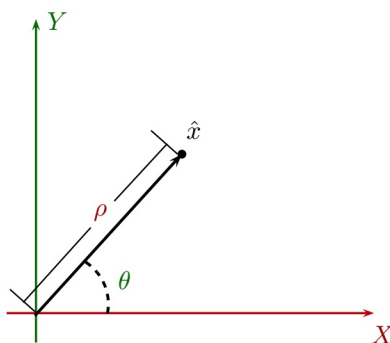


Figura 1.18: Obtención de coordenadas polares de un punto (o una flecha) \hat{x} del plano.

Como el lector recordará, la interpretación geométrica de las coordenadas cartesianas (x_0, y_0) de un punto \hat{x} en \mathbb{R}^2 , consiste en ver a \hat{x} como el único punto en el que se intersectan las rectas determinadas por las ecuaciones $x = x_0$ (paralela al eje Y , y que es justo todo el conjunto de puntos del plano cuya coordenada cartesiana x es igual a x_0) y $y = y_0$ (paralela al eje X , y que es justo todo el conjunto de puntos del plano cuya coordenada cartesiana y es igual a y_0).

En el caso de las coordenadas polares hay una interpretación geométrica análoga. En efecto, como el lector se podrá convencer fácilmente, dado un punto \hat{x} en \mathbb{R}^2 , distinto del origen $\hat{0}$, existen una única circunferencia con centro en el origen y una única semirrecta que parte del origen, cuya intersección es el punto \hat{x} . Pues bien, si (ρ_0, θ_0) son las coordenadas polares de este punto, ρ_0 proporciona el radio de la circunferencia (que es justo el conjunto de puntos del plano cuya coordenada polar ρ es igual a la constante ρ_0), y el ángulo θ_0 , medido con respecto a la parte positiva del eje X , determina a la semirrecta (que es justo todo el conjunto de puntos del plano cuya coordenada polar θ es igual a la constante θ_0), que tienen como intersección al punto (o vector) \hat{x} (ver figura 1.19).

Otro aspecto importante que hay que hacer notar con relación a estas nuevas coordenadas es que para asignarlas no es necesario recurrir a todas las parejas ordenadas de \mathbb{R}^2 ; es decir, basta con tomar las parejas (ρ, θ) tales que $0 \leq \rho$ y $0 \leq \theta < 2\pi$ para que todo punto (o flecha) del plano tenga asociada una de ellas.

De hecho, salvo por el origen $\hat{0}$ (cuyas coordenadas polares pueden estar dadas por cualquier pareja de la forma $(0, \theta)$, con θ cualquier número real), la asignación de unas coordenadas polares establece una

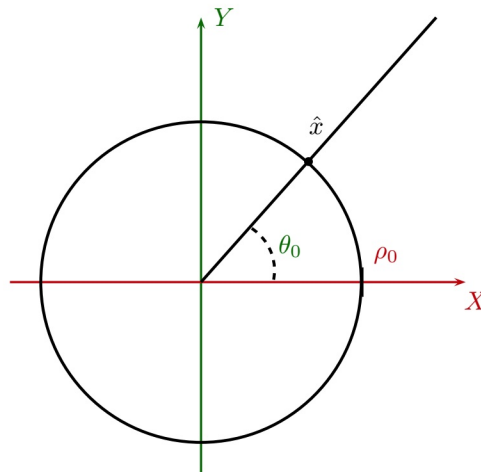


Figura 1.19: Las coordenadas polares (ρ_0, θ_0) nos proporcionan el radio (ρ_0) de la única circunferencia, y el ángulo (θ_0) de la única semirrecta que parte del origen, que tienen como intersección al punto (o vector) \hat{x} .

biyección entre un plano menos un punto (aquel que se haya elegido como el origen) y el subconjunto $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^2$. Más aún, nótese que el ángulo siempre se puede elegir en cualquier intervalo de la forma $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$, en donde θ_0 es un ángulo fijo.

De esta forma, un mismo punto (o vector) \hat{x} tiene muchas coordenadas polares, razón por la cual al inicio de esta subsección hablamos de *unas* (y no de *las*) coordenadas polares del punto \hat{x} .

En reciprocidad con lo anterior, también es importante hacer notar que cualquier pareja $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ (incluso con $\rho < 0$) se puede “interpretar” como coordenadas polares de un punto (o vector) \hat{x} del plano, obteniendo (o “construyendo”) \hat{x} de la siguiente manera: dada una pareja $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, hágase una rotación del eje X por θ radianes, y sobre ese eje rotado, localice el número ρ ; este será el punto \hat{x} que le corresponda a la pareja (ρ, θ) (ver figura 1.20).

Con base en lo anterior, nótese que podemos concluir que, si (ρ, θ) y (ρ', θ') son coordenadas polares de un mismo vector \hat{x} del plano, entonces se debe cumplir que $\rho = \pm\rho'$ y $\theta = \theta' + k\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$. Más específicamente, se tiene que $\rho = \rho'$ si y sólo si $\theta = \theta' + 2k\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$, y $\rho = -\rho'$ si y sólo si $\theta = \theta' + (2k + 1)\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$.

Hay otra observación importante con relación a las coordenadas polares: las operaciones de suma y producto por un escalar que definimos para las parejas de \mathbb{R}^2 , ya no se corresponden con la suma y producto por un escalar que definimos geoméricamente para vectores (o flechas) del plano. Es decir, si (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) son coordenadas polares de \hat{x}_1 y \hat{x}_2 , respectivamente, entonces la pareja $(\rho_1 + \rho_2, \theta_1 + \theta_2)$ no son necesariamente coordenadas polares de $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ (en donde esta última suma de vectores es la que se obtiene por medio de la ley del paralelogramo); y si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces la pareja $(\lambda\rho_1, \lambda\theta_1)$ no son necesariamente coordenadas polares de $\lambda\hat{x}_1$. Sin duda un problema interesante consiste en encontrar coordenadas polares para $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ y $\lambda\hat{x}_1$ en términos de coordenadas polares de \hat{x}_1 y \hat{x}_2 , y por lo mismo lo dejamos como un problema para el lector.

Lo que sí queremos mencionar aquí es la interpretación geométrica de ciertas “operaciones aritméticas” con coordenadas polares; específicamente, si (ρ, θ) son coordenadas polares de un vector \hat{x} y $h \in \mathbb{R}$, entonces $(\rho, \theta + h)$ son coordenadas polares de un vector \hat{x}'_h que se obtiene rotando h radianes a \hat{x} ; y $(\rho + h, \theta)$ son coordenadas polares de un vector \hat{x}_h que está en la misma dirección que está \hat{x} , sólo modificando su magnitud por una cierta cantidad h (y suponiendo que $\rho + h$ no tiene signo diferente a ρ ; ¿qué sucede geoméricamente si ρ y $\rho + h$ tienen signo diferente?) (ver figura 1.21).

Finalmente, con base en las funciones trigonométricas, deducimos las ecuaciones que nos permiten obtener, dadas cualesquiera coordenadas polares (ρ, θ) de un vector \hat{x} , sus correspondientes coordenadas cartesianas (x, y) (ambas consideradas sobre el mismo sistema coordenado cartesiano XY). Estas ecuaciones son las siguientes:

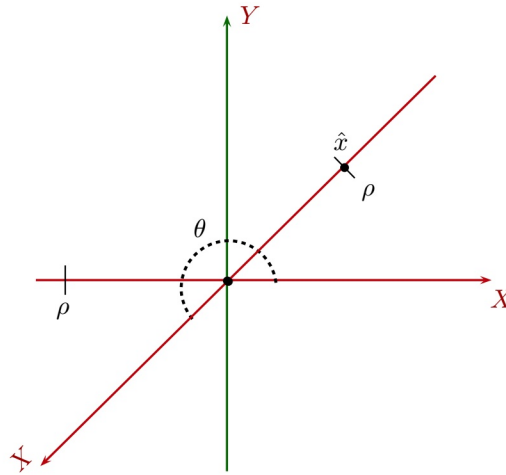


Figura 1.20: Cualquier pareja $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ (en este caso con $\rho < 0$) se puede “interpretar” como coordenadas polares de un punto (o vector) \hat{x} del plano, el cual se obtiene de la siguiente manera: hágase una rotación del eje X por θ radianes, y sobre ese eje rotado, localice el número ρ ; éste será el punto \hat{x} que le corresponda a la pareja (ρ, θ) .

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\theta) \\y &= \rho \operatorname{sen}(\theta)\end{aligned}\tag{1.12}$$

(ver figura 1.22).

Recíprocamente, si conocemos las coordenadas cartesianas (x, y) de un vector \hat{x} , podemos obtener unas coordenadas polares de \hat{x} de la siguiente forma: dado que ρ representa la distancia de \hat{x} al origen (es decir, la norma de \hat{x}), sabemos que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(lo que también se puede confirmar a partir de las dos identidades anteriores).

Obtener una expresión para θ es un poco más elaborado y hay que analizar algunos casos. Como ya habíamos mencionado, si $\hat{x} = \hat{0}$, cualquier pareja de la forma $(0, \theta)$ ($\theta \in \mathbb{R}$) son coordenadas polares de \hat{x} . Si $x = 0$ y $y > 0$ (es decir que \hat{x} está en la parte positiva del eje Y), bastará con tomar $\theta = \pi/2$ o en general

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Y si $x = 0$ y $y < 0$ (es decir que \hat{x} está en la parte negativa del eje Y), bastará con tomar $\theta = 3\pi/2$ o en general

$$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Si $x \neq 0$, de las identidades 1.12 se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta),\end{aligned}$$

de tal forma que si \arctan es la rama de la función inversa de la función tangente que toma sus valores entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, entonces, cuando se tenga $x > 0$, bastará con tomar $\theta = \arctan(y/x)$, o en general

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi$$

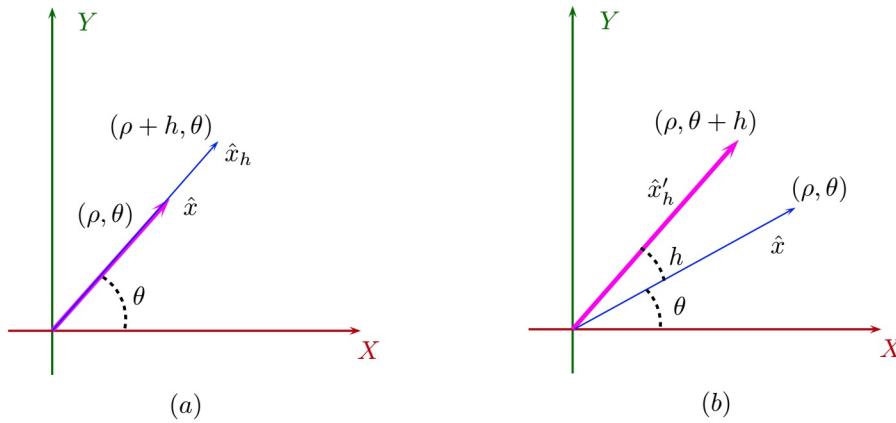


Figura 1.21: Si un vector \hat{x} tiene coordenadas polares (ρ, θ) , entonces el vector \hat{x}_h de coordenadas polares $(\rho+h, \theta)$ está en la misma dirección que \hat{x} (si ρ y $\rho+h$ tienen el mismo signo) (a), y el vector \hat{x}'_h de coordenadas polares $(\rho, \theta+h)$ se obtiene rotando h radianes el vector \hat{x} (b).

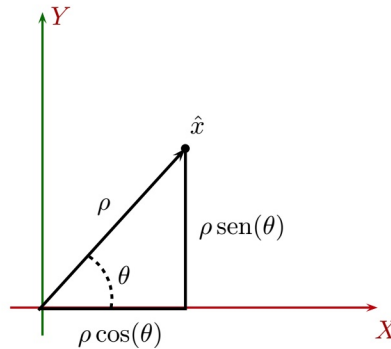


Figura 1.22: Dadas cualesquiera coordenadas polares (ρ, θ) de un vector \hat{x} , sus correspondientes coordenadas cartesianas son $(\rho \cos(\theta), \rho \text{sen}(\theta))$.

con $k \in \mathbb{Z}$; y si $x < 0$, bastará con tomar $\theta = \arctan(y/x) + \pi$ o en general

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + (2k+1)\pi,$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

1.6.2 Coordenadas cilíndricas

Para el caso de puntos y/o flechas en el espacio, y nuevamente partiendo de un sistema cartesiano dado, vamos a dar otra forma de asignarles ternas de números que los representen, de la siguiente manera.

Si \hat{x} es un punto o una flecha en el espacio cuyas coordenadas cartesianas (en el sistema XYZ dado) son (x_0, y_0, z_0) , nos fijamos en el vector del plano XY que tiene coordenadas cartesianas (x_0, y_0) (y que geoméricamente se obtiene de “proyectar” a \hat{x} en el plano XY). Si ahora la pareja (ρ_0, θ_0) son unas coordenadas polares del vector (x_0, y_0) , decimos entonces que la terna (ρ_0, θ_0, z_0) son *unas coordenadas cilíndricas* del vector \hat{x} (ver figura 1.23).

Como en el caso de las coordenadas polares, las coordenadas cilíndricas también se pueden interpretar geoméricamente. En efecto, dado un punto \hat{x} en \mathbb{R}^3 , también distinto del origen $\hat{0}$, el lector se podrá convencer fácilmente de que existen: un único cilindro circular recto cuyo eje sea el eje Z (¡que puede coincidir con este eje!); un único semiplano que tiene como “borde” al eje Z (y por tanto perpendicular al plano XY); y un único plano paralelo al plano XY , tales que su intersección sólo sea el punto \hat{x} (ver figura

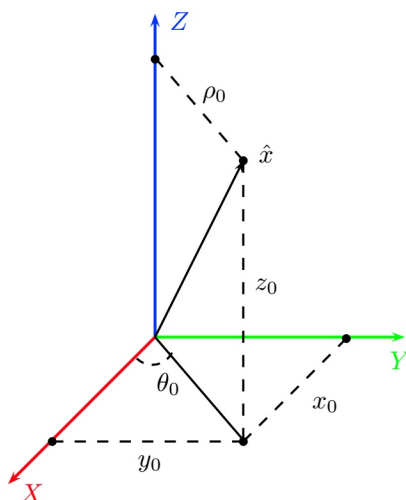


Figura 1.23: Si la pareja (ρ_0, θ_0) son unas coordenadas polares del vector (x_0, y_0) del plano XY , decimos entonces que la terna (ρ_0, θ_0, z_0) son *unas coordenadas cilíndricas* del vector \hat{x} .

1.24). Pues bien, si (ρ_0, θ_0, z_0) son las coordenadas cilíndricas de este punto, ρ_0 proporciona el radio de este cilindro (que es justo el conjunto de puntos del espacio cuya coordenada cilíndrica ρ es igual a la constante ρ_0), el ángulo θ_0 , medido con respecto a la parte positiva del eje X , determina al semiplano (que es justo todo el conjunto de puntos del espacio cuya coordenada cilíndrica θ es igual a la constante θ_0), y z_0 da la “altura” del plano paralelo al plano XY (que es justo todo el conjunto de puntos del espacio cuya coordenada cilíndrica z es igual a la constante z_0), que tienen como intersección al punto (o vector) \hat{x} .

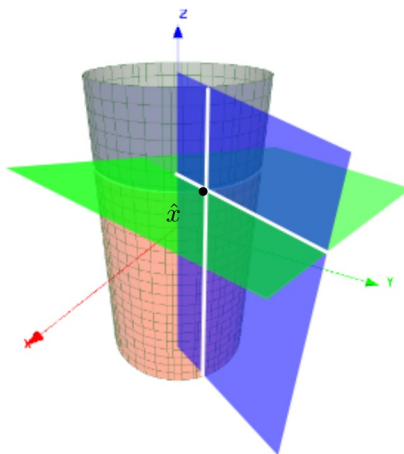


Figura 1.24: Las coordenadas cilíndricas (ρ_0, θ_0, z_0) de un punto \hat{x} nos proporcionan el radio ρ_0 del cilindro circular recto, el ángulo θ_0 del semiplano que tiene como “borde” al eje Z , y la altura z_0 del plano paralelo al plano XY , que tienen como intersección únicamente al punto \hat{x} .

Nuevamente es importante hacer notar que para asociar unas coordenadas cilíndricas a un vector \hat{x} , no es necesario recurrir a todas las ternas de \mathbb{R}^3 , pues basta con que $0 \leq \rho$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$. Es decir, a todo vector en el espacio se le puede asignar unas coordenadas cilíndricas de tal forma que éstas estén en el subconjunto $[0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^3$, e incluso, de manera más general, en un subconjunto de la forma $[0, \infty) \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi) \times (-\infty, \infty) \subset \mathbb{R}^3$, con $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fijo.

No obstante, como en el caso de las coordenadas polares, cualquier terna $(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3$ se puede interpretar

como coordenadas cilíndricas de un vector del espacio. Para hacer esto, basta con localizar en el plano XY el vector que se le debe asignar a la pareja (ρ, θ) (de acuerdo con el procedimiento descrito en la sección anterior) y después “evarlo” a la altura z (ver figura 1.25).

Con base en lo anterior tenemos que, si dos ternas (ρ, θ, z) y (ρ', θ', z') son coordenadas cilíndricas del mismo vector \hat{x} , entonces podemos asegurar que $\rho = \pm\rho'$, $\theta = \theta' + k\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$, y $z = z'$.

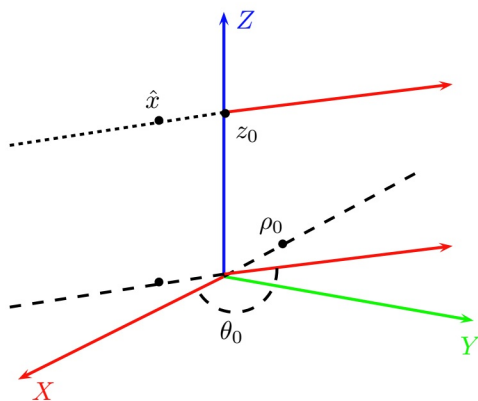


Figura 1.25: Cualquier terna $(\rho_0, \theta_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ se puede interpretar como coordenadas cilíndricas de un punto \hat{x} del espacio.

Análogamente a lo que sucede con las coordenadas polares, la “aritmética” definida entre ternas no se corresponde con la “aritmética” definida geoméricamente entre vectores del espacio. Sin embargo, también es importante identificar geoméricamente el efecto de sumar una cierta cantidad $h \in \mathbb{R}$ en una sólo de estas coordenadas.

Si (ρ_0, θ_0, z_0) son coordenadas cilíndricas de un vector \hat{x} , entonces $(\rho_0 + h, \theta_0, z_0)$ son coordenadas cilíndricas del vector que está en el mismo plano que pasa por \hat{x} y que contiene al eje Z (si suponemos que $\rho_0 + h$ no tiene signo diferente a ρ_0 ; ¿qué sucede geoméricamente si ρ_0 y $\rho_0 + h$ tienen signo diferente?), a la misma “altura” sobre el eje Z , pero con la diferencia de que su proyección sobre el plano XY es un vector de norma $\rho_0 + h$ ($|\rho_0 + h|$ en el caso general) (ver figura 1.26 (a)).

Si ahora consideramos $(\rho_0, \theta_0 + h, z_0)$, éstas serán coordenadas cilíndricas del vector que se obtiene al rotar, con respecto al eje Z , h radianes el vector \hat{x} (ver figura 1.26 (b)).

Finalmente, si ahora tomamos $(\rho_0, \theta_0, z_0 + h)$, éstas serán coordenadas cilíndricas del vector que se obtiene “cambiando” la punta del vector \hat{x} a la altura $z_0 + h$ (ver figura 1.26 (c)); en particular, este vector y el vector \hat{x} tendrán la misma proyección sobre el plano XY .

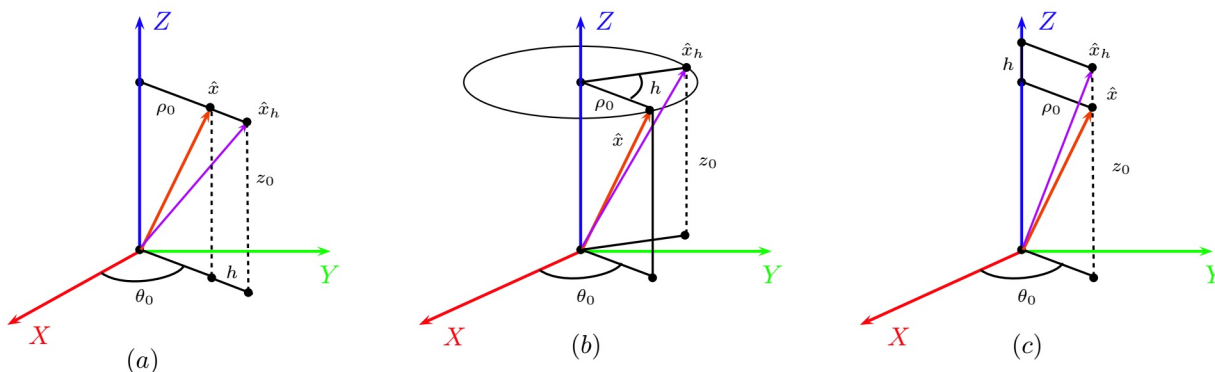


Figura 1.26: Si el vector \hat{x} tiene coordenadas cilíndricas (ρ_0, θ_0, z_0) , entonces en los siguientes casos el vector \hat{x}_h tiene coordenadas cilíndricas: (a) $(\rho_0 + h, \theta_0, z_0)$; (b) $(\rho_0, \theta_0 + h, z_0)$; (c) $(\rho_0, \theta_0, z_0 + h)$.

Como en el caso de las coordenadas polares, si (ρ, θ, z) son cualesquiera coordenadas cilíndricas de un

vector \hat{x} , usando nuevamente las funciones trigonométricas, obtenemos que la terna (x, y, z) , con

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos(\theta) \\y &= \rho \operatorname{sen}(\theta) \\z &= z\end{aligned}$$

son las coordenadas cartesianas de \hat{x} . Nótese que la tercera (y extraña) identidad anterior refleja el abuso de notación que cometemos al nombrar con la misma letra a la tercera coordenada cilíndrica y a la tercera coordenada cartesiana del vector \hat{x} , lo cual se “justifica” por el hecho de que ambas tienen el mismo significado geométrico.

Recíprocamente, para obtener unas coordenadas cilíndricas de un vector \hat{x} a partir de sus coordenadas cartesianas (x, y, z) , calculamos ρ y θ procediendo justo igual que en el caso de las coordenadas polares, y la coordenada polar z se toma igual a la coordenada cartesiana z (por las razones que ya explicamos en el párrafo anterior).

1.6.3 Coordenadas esféricas

Concluimos esta breve sección introduciendo una forma más de asignarle una terna de números reales a un vector \hat{x} del espacio.

Como en el caso anterior, partiendo de un sistema cartesiano XYZ dado, asignamos a \hat{x} la terna de números reales (ρ, θ, φ) , de la siguiente forma: ρ (como en el caso de las coordenadas polares) representa la magnitud de \hat{x} , θ es el ángulo (dirigido) formado por la parte positiva del eje X y la proyección del vector \hat{x} sobre el plano XY , siempre que esta proyección sea diferente del vector $\hat{0}$; si dicha proyección es el vector $\hat{0}$, hacemos $\theta = 0$; y finalmente, φ será el ángulo (dirigido) formado por la parte positiva del eje Z y el vector \hat{x} ⁽⁶⁾ (ver figura 1.27). A la terna (ρ, θ, φ) construida de esta forma le llamaremos *unas coordenadas esféricas* del vector \hat{x} .

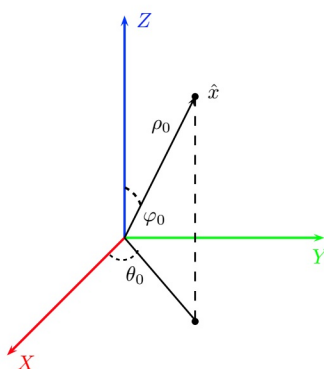


Figura 1.27: La terna $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ son *unas coordenadas esféricas* del vector \hat{x} .

Nuevamente, las coordenadas esféricas se pueden interpretar geoméricamente. En este caso, dado \hat{x} en \mathbb{R}^3 , también distinto del origen $\hat{0}$, se tiene que existen: una única esfera con centro en el origen; un único semiplano que tiene como “borde” al eje Z (y por tanto perpendicular al plano XY); y un único cono circular con vértice en el origen, tales que su intersección sólo sea el punto \hat{x} (ver figura 1.28). De esta forma, si $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ son las coordenadas esféricas de este punto, ρ_0 proporciona el radio de la esfera (que es justo el conjunto de puntos del espacio cuya coordenada esférica ρ es igual a la constante ρ_0), el ángulo θ_0 , medido con respecto a la parte positiva del eje X , determina al semiplano (que es justo todo el conjunto de puntos del espacio cuya coordenada esférica θ es igual a la constante θ_0), y φ_0 determina al cono (que es justo todo el conjunto de puntos del espacio cuya coordenada esférica φ es igual a la constante φ_0), que tienen como intersección al punto (o vector) \hat{x} .

⁶En algunos textos, el ángulo φ se toma como el ángulo (dirigido) formado por el plano XY y el vector \hat{x} .

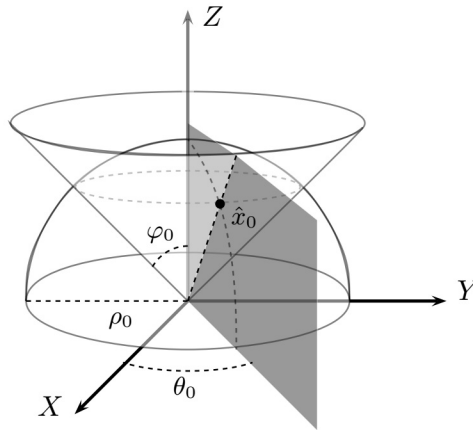


Figura 1.28: Las coordenadas esféricas $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ de un punto \hat{x}_0 nos proporcionan el radio ρ_0 de la esfera, el ángulo θ_0 del semiplano perpendicular al plano XY , y el ángulo φ_0 del cono que tienen como intersección únicamente al punto \hat{x}_0 .

De la misma forma que en los dos casos anteriores, para asignar unas coordenadas esféricas a un vector \hat{x} no es necesario recurrir a todas las ternas de \mathbb{R}^3 ; como se podrá notar, basta con que $0 \leq \rho$, $0 \leq \theta < 2\pi$ y $0 \leq \varphi \leq \pi$, o de manera más general, que $0 \leq \rho$, $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ y $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \pi$, con $\theta_0, \varphi_0 \in \mathbb{R}$ fijos.

También, como en los dos casos anteriores, toda terna $(\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ se puede “interpretar” como coordenadas esféricas de un vector \hat{x} del espacio, de la siguiente forma: sobre el plano XZ , y con respecto a la parte positiva del eje Z , rótese φ radianes el eje Z ; a continuación, tomando como eje de rotación el eje Z , y con respecto a la parte positiva del eje X , rote la recta real resultante (o si prefiere todo el plano XZ) θ radianes; finalmente, sobre esta última recta real que se obtiene, ubique el número ρ .

El vector \hat{x} determinado por el procedimiento anterior será el vector que asociaremos a la terna (ρ, θ, φ) y diremos que los elementos de esta terna también son coordenadas esféricas de \hat{x} . Todo lo anterior sin duda requiere de un

Ejemplo 1.50 Sea \hat{x} el vector que en un sistema cartesiano dado tiene coordenadas (cartesianas) $(1, 1, 1)$. De acuerdo con el procedimiento de asignación de coordenadas esféricas, tenemos que la terna $(\sqrt{3}, \pi/4, \pi/4)$ nos da unas coordenadas de este tipo para \hat{x} .

Por otra parte, y de acuerdo con el método de asignación de un vector a una terna, nótese que las ternas $(\sqrt{3}, -3\pi/4, -\pi/4)$, $(-\sqrt{3}, -3\pi/4, 3\pi/4)$, y $(-\sqrt{3}, \pi/4, -3\pi/4)$ también son coordenadas esféricas de nuestro vector \hat{x} (ver figura 1.29).

Aun cuando existen diferentes coordenadas esféricas para un mismo vector \hat{x} (como sucede con los otros tipos de coordenadas que hemos visto en esta sección), si (ρ, θ, φ) y $(\rho', \theta', \varphi')$ son dos de ellas, lo que podemos asegurar es que se debe tener que $\rho = \pm\rho'$, que $\theta = \theta' + k\pi$ para alguna $k \in \mathbb{Z}$, y que $\varphi = \varphi' + k'(\pi/2)$ también para alguna $k' \in \mathbb{Z}$.

Como en los casos anteriores, la “aritmética” definida entre ternas no se corresponde con la “aritmética” definida geoméricamente entre vectores del espacio. Sin embargo, como también hicimos en los otros casos, es importante identificar geoméricamente el efecto de sumar una cierta cantidad $h \in \mathbb{R}$ en una sólo de estas coordenadas.

De esta forma, si (ρ, θ, φ) son coordenadas esféricas de un vector \hat{x} , entonces el vector que tenga coordenadas esféricas $(\rho + h, \theta, \varphi)$ será aquel que está en la misma recta que tiene a \hat{x} , con norma $|\rho + h|$ y apuntando en la misma dirección que (o contraria a) \hat{x} , dependiendo de si ρ y $\rho + h$ tienen el mismo signo (o signo diferente); asimismo, el vector que tenga coordenadas esféricas $(\rho, \theta + h, \varphi)$ será aquel que se obtiene de rotar h radianes al vector \hat{x} , tomando como eje de rotación al eje Z ; finalmente, el vector que tenga coordenadas esféricas $(\rho, \theta, \varphi + h)$ será aquel que se obtiene de rotar h radianes al vector \hat{x} , realizando dicha rotación sobre el plano que contenga a \hat{x} y al eje Z (ver figura 1.30).

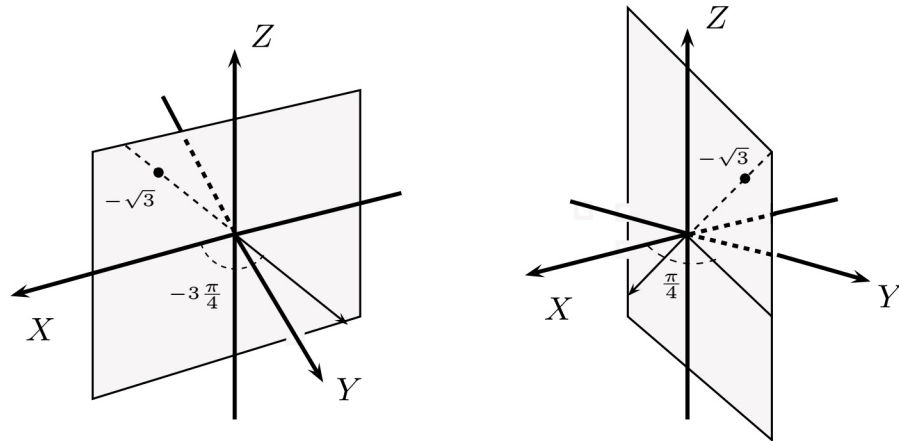


Figura 1.29: El punto \hat{x} , el cual también tiene como coordenadas esféricas a la terna $(-\sqrt{3}, \pi/4, -3\pi/4)$, se obtiene de la siguiente forma: sobre el plano XZ , y con respecto a la parte positiva del eje Z , rote $-\frac{3\pi}{4}$ radianes el eje Z ; a continuación, tomando como eje de rotación el eje Z , y con respecto a la parte positiva del eje X , rote la recta real resultante $\frac{\pi}{4}$ radianes; finalmente, sobre esta última recta real que se obtiene, ubique el número $-\sqrt{3}$.

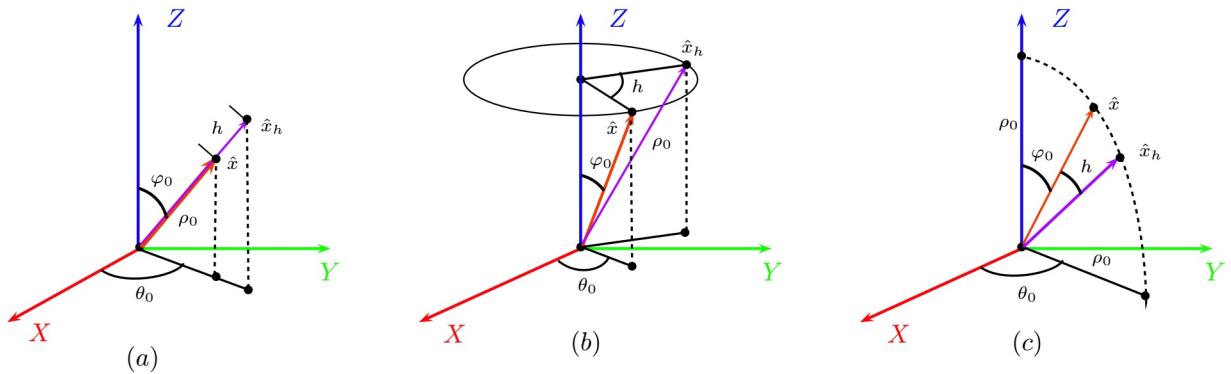


Figura 1.30: Si el vector \hat{x} tiene coordenadas esféricas $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$, entonces en los siguientes casos el vector \hat{x}_h tiene coordenadas esféricas: (a) $(\rho_0 + h, \theta_0, \varphi_0)$; (b) $(\rho_0, \theta_0 + h, \varphi_0)$; (c) $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0 + h)$.

Finalmente, recurriendo de nuevo a las funciones trigonométricas, si (ρ, θ, φ) son cualesquiera coordenadas esféricas de un vector \hat{x} , obtenemos que la terna (x, y, z) , con

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta) \\ y &= \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta) \\ z &= \rho \cos(\varphi) \end{aligned} \tag{1.13}$$

son las coordenadas cartesianas de \hat{x} (ver figura 1.31).

Para obtener unas coordenadas esféricas de un vector \hat{x} a partir de sus coordenadas cartesianas (x, y, z) , procedemos de la siguiente forma: en general, por la definición de la coordenada ρ , tenemos que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

identidad que también se deduce de las identidades anteriores.

Para determinar el ángulo φ basta con analizar dos casos; en el caso en que $x = 0 = y$ hacemos $\varphi = 0$ si $z \geq 0$ y $\varphi = \pi$ si $z < 0$. Si $x^2 + y^2 > 0$, nuevamente por las ecuaciones 1.13 concluimos que se debe cumplir

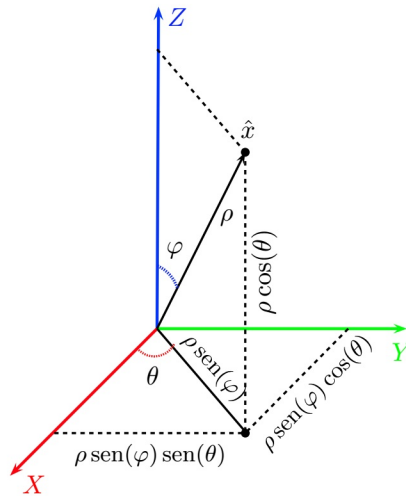


Figura 1.31: Recurriendo a las funciones trigonométricas, si (ρ, θ, φ) son coordenadas esféricas de un vector \hat{x} , deducimos que la terna $(x, y, z) = (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta), \rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta), \rho \cos(\varphi))$ son sus correspondientes coordenadas cartesianas.

que

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{x^2 + y^2} &= \frac{(\rho \cos(\varphi))^2}{(\rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta))^2 + (\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta))^2} \\ &= \frac{(\rho \cos(\varphi))^2}{(\rho \operatorname{sen}(\varphi))^2} \\ &= \cot^2(\varphi), \end{aligned}$$

de forma que

$$|\cot(\varphi)| = \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Con base en la identidad anterior, bastará con tomar

$$\varphi = \operatorname{arccot} \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right),$$

en donde arccot es la inversa de la función cotangente que toma sus valores entre 0 y π .

En cuanto al ángulo θ , si $x = 0$ y $y \geq 0$ hacemos $\theta = \pi/2$, y si $y < 0$, entonces tomamos $\theta = 3\pi/2$. Cuando $x \neq 0$, por las ecuaciones 1.13 debemos tener que

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= \frac{\rho \operatorname{sen}(\varphi) \operatorname{sen}(\theta)}{\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\theta)} \\ &= \tan(\theta) \end{aligned}$$

de modo que, en general, podemos obtener θ de la misma manera en que lo hicimos para el caso de las coordenadas polares.

1.7 Problemas

1. Pruebe las proposiciones 1.8 y 1.10.
2. Pruebe que las normas definidas en 1.14 son en efecto normas, es decir, que satisfacen las propiedades dadas en la proposición 1.8.

3. Pruebe que, si $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces $|x_i| \leq \|\hat{x}\|$, $|x_i| \leq \|\hat{x}\|_1$ y $|x_i| \leq \|\hat{x}\|_\infty$ para $i = 1, \dots, n$.

4. Sean $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Pruebe que $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n a_i^2$.

5. Pruebe que, si $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\|\hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_k\| \leq \|\hat{x}_1\| + \dots + \|\hat{x}_k\|$$

(recuerde que en el texto, la desigualdad del triángulo sólo se probó para dos vectores).

6. Sean $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k \in \mathbb{R}^n \setminus \{\hat{0}\}$ tales que $\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j = 0$ si $i, j \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$.

(a) Pruebe que:

$$\|\hat{x}_1 + \dots + \hat{x}_k\|^2 = \|\hat{x}_1\|^2 + \dots + \|\hat{x}_k\|^2.$$

(Este resultado es conocido como el teorema de Pitágoras. Nótese que $k \leq n$. ¿Por qué?).

(b) Si además $\|\hat{x}_i\| = 1$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$ y $\hat{x} = \alpha_1 \hat{x}_1 + \dots + \alpha_k \hat{x}_k$, pruebe que

$$\|\hat{x}\| = \sqrt{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2}.$$

7. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe e interprete geoméricamente los siguientes resultados:

(a) $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ si y sólo si $\|\hat{x} + \hat{y}\| = \|\hat{x} - \hat{y}\|$

(b) $\hat{x} \cdot \hat{y} > 0$ si y sólo si $\|\hat{x} + \hat{y}\| > \|\hat{x} - \hat{y}\|$

(c) $\hat{x} \cdot \hat{y} < 0$ si y sólo si $\|\hat{x} + \hat{y}\| < \|\hat{x} - \hat{y}\|$

8. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ diferentes de $\hat{0}$. Pruebe e interprete geoméricamente los siguientes resultados:

(a) $\|\hat{x} + \hat{y}\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$, tal que $\hat{x} = \lambda \hat{y}$

(b) $\|\hat{x} - \hat{y}\| = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0$, tal que $\hat{x} = \lambda \hat{y}$

(c) si $\|\hat{x}\| = \|\hat{y}\| = \|\hat{x} - \hat{y}\|$, entonces el ángulo entre \hat{x} y \hat{y} es $\pi/3$;

(d) si $\|\hat{x}\| = \|\hat{x} - \hat{y}\|$, entonces el ángulo entre \hat{x} y \hat{y} es igual al ángulo entre \hat{y} y $\hat{y} - \hat{x}$.

9. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que:

(a) $\|\hat{x} + \hat{y}\|^2 + \|\hat{x} - \hat{y}\|^2 = 2(\|\hat{x}\|^2 + \|\hat{y}\|^2)$

(b) $|\|\hat{x}\| - \|\hat{y}\|| \leq \|\hat{x} \pm \hat{y}\|$.

10. Sean $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\|\hat{x}\| = \|\hat{y}\| = \|\hat{z}\| = 1$. Pruebe que:

$$(\hat{x} \times \hat{y}) \times \hat{z} = \cos(\theta_1)\hat{y} - \cos(\theta_2)\hat{x}$$

en donde θ_1 es el ángulo entre \hat{x} y \hat{z} y θ_2 es el ángulo entre \hat{x} y \hat{y} .

11. Pruebe la proposición 1.17.

12. Sean $\hat{x}, \hat{y} \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ tales que $\hat{y} \in B_r(\hat{x})$. Si $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\hat{y} = (y_1, \dots, y_n)$, hacemos

$$\hat{x}_i = (y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \quad \text{y} \quad \hat{y}_i = (x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, $\hat{x}_0 = \hat{y}_n = \hat{x}$ y $\hat{y}_0 = \hat{x}_n = \hat{y}$. Pruebe que:

(a) $\hat{x}_i, \hat{y}_i \in B_r(\hat{x})$ para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$

(b) si $\hat{\xi}_i = \hat{x}_{i-1} + \xi(\hat{x}_i - \hat{x}_{i-1})$ y $\hat{\eta}_i = \hat{y}_{i-1} + \eta(\hat{y}_i - \hat{y}_{i-1})$ con $\xi, \eta \in (0, 1)$, pruebe que

$$\left\| \hat{\xi}_i - \hat{x} \right\| \leq \|\hat{y} - \hat{x}\| \quad \text{y} \quad \|\hat{\eta}_i - \hat{x}\| \leq \|\hat{y} - \hat{x}\|$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

(c) dibuje los puntos \hat{x}_i, \hat{y}_i para el caso de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 .

13. Sea $r > 0$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Definimos $B_r^{(1)}(\hat{x}) = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{y} - \hat{x}\|_1 < r\}$ y $B_r^{(\infty)}(\hat{x}) = \{\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{y} - \hat{x}\|_\infty < r\}$.

(a) Describa geoméricamente los conjuntos $B_r^{(1)}(\hat{0})$ y $B_r^{(\infty)}(\hat{0})$ cuando $n = 2$ y $n = 3$.

(b) En la definición 1.19, sustituya $B_r(\hat{x})$ por $B_r^{(1)}(\hat{x})$ y por $B_r^{(\infty)}(\hat{x})$ para definir $\text{int}_1(A)$, $\text{int}_\infty(A)$, $\text{ext}_1(A)$, $\text{ext}_\infty(A)$, $\text{Fr}_1(A)$ y $\text{Fr}_\infty(A)$, respectivamente. Pruebe que $\text{int}_1(A) = \text{int}_\infty(A) = \text{int}(A)$, $\text{ext}_1(A) = \text{ext}_\infty(A) = \text{ext}(A)$, y $\text{Fr}_1(A) = \text{Fr}_\infty(A) = \text{Fr}(A)$.

14. Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n . Diga si cada una de las siguientes identidades y contenciones son ciertas. Pruebe su respuesta.

- (a) $\text{int}(A \cup B) = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$; $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$
- (b) $\text{ext}(A \cup B) = \text{ext}(A) \cap \text{ext}(B)$; $\text{ext}(A \cap B) = \text{ext}(A) \cup \text{ext}(B)$
- (c) $\text{Fr}(A \cup B) = \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$; $\text{Fr}(A \cap B) = \text{Fr}(A) \cap \text{Fr}(B)$
- (d) si $A \subset B$, entonces: $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$; $\text{ext}(B) \subset \text{ext}(A)$; $\text{Fr}(A) \subset \text{Fr}(B)$.

15. Sea $r > 0$ y $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$. Si $A = B_r(\hat{x})$, pruebe que:

- (a) $\{\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{y} - \hat{x}\| > r\} \subset \text{ext}(A)$
- (b) $\{\hat{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\hat{y} - \hat{x}\| = r\} \subset \text{Fr}(A)$
- (c) las contenciones de los incisos anteriores son identidades.

16. Pruebe que, si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado, entonces $\text{int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$.

17. Pruebe que el conjunto A del ejemplo 1.47 es un conjunto abierto.

18. Sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Pruebe que el conjunto

$$\begin{aligned} A &= (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

es un conjunto abierto.

19. Sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i \leq b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Pruebe que el conjunto

$$\begin{aligned} A &= [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

es un conjunto cerrado.

20. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ y $B \subset \mathbb{R}^m$. Si $A \times B = \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \hat{x} \in A, \hat{y} \in B\}$, pruebe que:

- (a) si A y B son abiertos (en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente), entonces $A \times B$ es abierto (en \mathbb{R}^{n+m})
- (b) si A y B son cerrados (en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente), entonces $A \times B$ es cerrado (en \mathbb{R}^{n+m})
- (c) si A y B son acotados (en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente), entonces $A \times B$ es acotado (en \mathbb{R}^{n+m}).

21. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto no vacío y $\mathbb{Q}^n := \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} multiplicado n veces). Pruebe que:

- (a) $U \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$

- (b) U se puede poner como la unión de bolas (o vecindades) con centro en \mathbb{Q}^n y radio racional.
22. Sean A_1, \dots, A_k subconjuntos de \mathbb{R}^n . Pruebe que:
- (a) si cada A_i es abierto, entonces $A_1 \cup \dots \cup A_k$ y $A_1 \cap \dots \cap A_k$ son abiertos
 - (b) si cada A_i es cerrado, entonces $A_1 \cup \dots \cup A_k$ y $A_1 \cap \dots \cap A_k$ son cerrados.
- ¿Estas afirmaciones siguen siendo ciertas para un número infinito de conjuntos? Pruebe su respuesta.
23. Pruebe la proposición 1.29 y muestre con un ejemplo que las contenciones que se dan ahí pueden ser propias.
24. Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n . Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe su respuesta.
- (a) Si $A \subset B$, entonces $A' \subset B'$
 - (b) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
 - (c) $(A \cap B)' = A' \cap B'$.
25. Si $A = ([0, 1] \times [0, 1]) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \in \mathbb{Q} \text{ y } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.
- (a) ¿Quién es A' y \bar{A} ? Pruebe sus respuestas.
 - (b) ¿ A es abierto o cerrado? Pruebe sus respuestas.
26. Si $A = \{(m, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid m \in \mathbb{Z}\}$
- (a) ¿quién es $\text{int}(A)$, $\text{Fr}(A)$, $\text{ext}(A)$, A' y \bar{A} ? Pruebe sus respuestas.
 - (b) ¿ A es abierto o cerrado? Pruebe sus respuestas.
27. En la definición 1.27, sustituya $B_r(\hat{x})$ por $B_r^{(1)}(\hat{x})$ y por $B_r^{(\infty)}(\hat{x})$ para definir A'_1 y A'_∞ , respectivamente. Pruebe que $A'_1 = A'_\infty = A'$.
28. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Pruebe que:
- (a) A' es un conjunto cerrado
 - (b) $\hat{x} \in \bar{A}$ si y sólo si para todo $r > 0$ se tiene que $B_r(\hat{x}) \cap A \neq \emptyset$
 - (c) A es cerrado si y sólo si $A = \bar{A}$
 - (d) A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$
 - (e) $A \cup A' = \bar{A}$
 - (f) $(\bar{A})^c = \text{ext}(A)$
 - (g) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ y $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$
 - (h) $\text{Fr}(A) = \bar{A} \cap \overline{(A^c)}$.
29. Sea A un subconjunto de \mathbb{R}^n . Pruebe que:
- (a) si $B \subset A$ y B es abierto, entonces $B \subset \text{int}(A)$ (es decir, de los conjuntos abiertos que están contenidos en A , $\text{int}(A)$ es el más “grande”)
 - (b) si $A \subset B$ y B es cerrado, entonces $\bar{A} \subset B$ (es decir, de los conjuntos cerrados que contienen a A , \bar{A} es el más “chico”).
30. Sean A, B subconjuntos de \mathbb{R}^n . Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe sus respuestas.
- (a) si $A \subset B$, entonces $\bar{A} \subset \bar{B}$
 - (b) $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

- (c) $\overline{(A \cap B)} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$
 (d) $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

31. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que: A es un conjunto acotado si y sólo si para todo $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ existe $M > 0$ (que depende de \hat{x}) tal que $\|\hat{x} - \hat{y}\| \leq M$ para todo $\hat{y} \in A$.
32. Pruebe que el conjunto A definido en cada uno de los problemas 18 y 19 es un conjunto acotado.
33. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Pruebe que si A es cerrado y acotado, entonces $\inf(A), \sup(A) \in A$.
34. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto infinito. Pruebe que si A es un conjunto cerrado y acotado, entonces todo subconjunto infinito B de A tiene un punto de acumulación en A .
35. Sea $\{A_k\}$ una sucesión de subconjuntos de \mathbb{R}^n , cerrados, acotados y no vacíos, tales que $A_{k+1} \subset A_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$ (es decir, lo que se llama una sucesión “anidada” de conjuntos). Pruebe que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \neq \emptyset.$$

Este resultado sigue siendo cierto si los conjuntos A_k no son cerrados? o A_k no son acotados? Pruebe sus respuestas.

36. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A' \neq \emptyset$. Pruebe que para todo $\varepsilon > 0$ existen $\hat{x}, \hat{y} \in A$ tales que $0 < \|\hat{x} - \hat{y}\| < \varepsilon$.
37. Determine si la siguiente proposición es verdadera: si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto infinito y para todo $\varepsilon > 0$ existen $\hat{x}, \hat{y} \in A$ tales que $0 < \|\hat{x} - \hat{y}\| < \varepsilon$, entonces $A' \neq \emptyset$. Pruebe su respuesta.
38. Sean $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto infinito y $c \in \mathbb{R}$, con $c > 0$. Pruebe que, si $\|\hat{x} - \hat{y}\| \geq c$ para todo $\hat{x}, \hat{y} \in A$, entonces A es un conjunto no acotado.
39. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A' = \emptyset$. Pruebe que si $M > 0$ y $A_M = \{\hat{x} \in A \mid \|\hat{x}\| \leq M\}$, entonces A_M es finito.
40. Sean $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tales que $a_i < b_i$ para $i = 1, \dots, n$. Pruebe que el conjunto

$$\begin{aligned} A &= (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n) \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\} \end{aligned}$$

es un conjunto convexo.

41. Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Pruebe que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
- (a) A es conexo.
 (b) Si para todos $a, b \in A$, $a < b$, y $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$, entonces $c \in A$.
 (c) A es un intervalo (es decir, A es de alguna de las siguientes formas: $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞) , $[a, \infty)$ o $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$).
42. Pruebe la proposición 1.38.
43. Sea $\emptyset \neq A \subsetneq \mathbb{R}^n$. Pruebe que:
- (a) A no puede ser abierto y cerrado a la vez
 (b) $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$
 (c) si $\hat{x} \in A$ y $\hat{y} \in A^c$, entonces $[\hat{x}, \hat{y}] \cap \text{Fr}(A) \neq \emptyset$.
44. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $A \neq \emptyset$. Pruebe que A es disconexo sí y sólo si existen $B, C \subset \mathbb{R}^n$ tales que B y C son abiertos, ajenos, no vacíos y $A = B \cup C$.
45. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado, $A \neq \emptyset$. Pruebe que A es disconexo si y sólo si existen $B, C \subset \mathbb{R}^n$ tales que B y C son cerrados, ajenos, no vacíos y $A = B \cup C$.

46. Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$. Pruebe que si B y C están separados, entonces $C \cap A$ y $B \cap A$ están separados.
47. Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}^n$ tales que $\emptyset \neq A \subset B \cup C$. Pruebe que, si A es conexo y B y C están separados, entonces $A \cap B = \emptyset$ o $A \cap C = \emptyset$ (y por lo tanto $A \subset C$ o $A \subset B$, respectivamente).
48. Sean $A, D \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos conexos tales que $A \cap D \neq \emptyset$. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe su respuesta.
- (a) $A \cap D$ es conexo.
 - (b) $A \cup D$ es conexo.
49. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cap B$ y $A \cup B$ son conjuntos no vacíos y conexos. Determine si las siguientes afirmaciones son ciertas. Pruebe su respuesta.
- (a) los conjuntos A y B son conexos
 - (b) si A y B son conjuntos cerrados, entonces A y B son conexos
 - (c) si A y B son conjuntos abiertos, entonces A y B son conexos
50. ¿La proposición 1.46 es cierta si A no es abierto? Pruebe su respuesta.
51. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es un *conjunto estrellado* si existe $\hat{x}_0 \in A$ tal que para todo $\hat{x} \in A$ se satisface que $[\hat{x}_0, \hat{x}] \subset A$ (en cuyo caso se dice que A es estrellado con respecto de \hat{x}_0). Pruebe que todo conjunto estrellado es conexo.
52. Sean \hat{x}_1 y \hat{x}_2 vectores en el plano, y (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) coordenadas polares de éstos, respectivamente. Si $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ y $\lambda \hat{x}_1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) son la suma y producto por un escalar que se definieron geoméricamente en el texto, encuentre coordenadas polares para estos vectores en términos de las coordenadas polares (ρ_1, θ_1) y (ρ_2, θ_2) . Compruebe su respuesta convirtiendo a las coordenadas cartesianas correspondientes.