Apéndice A

El Teorema de Lebesgue

Como se mencionó en el capítulo 1, el objetivo de este apéndice es probar el teorema de Lebesgue. Para ello, antes será necesario demostrar un par de resultados relacionados con los conjuntos de medida de Lebesgue cero. Con este fin, daremos de nuevo la definición de este tipo de conjuntos.

Definición A.1 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado. A tiene medida de Lebesgue cero si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad numerable de rectángulos $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $\mathbb{R}^n$ tales que:*

1. $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$
2. $\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) < \varepsilon$

Es importante hacer notar la similitud que tiene esta definición con la condición que se vio en el capítulo 1 y que resultó ser equivalente a que un conjunto fuera de medida de Jordan cero (teorema 1.25). De hecho, a partir de este teorema es que podemos concluir fácilmente que todo conjunto de medida de Jordan cero es, necesariamente, un conjunto de medida de Lebesgue cero (y más adelante contaremos con la herramienta suficiente para mostrar que lo recíproco es falso).

Para continuar, el primer resultado que probaremos establece una condición equivalente para que un conjunto tenga medida de Lebesgue cero, y dice lo siguiente.

Proposición A.2 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. A tiene medida de Lebesgue cero si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe una cantidad numerable de rectángulos $\left\{R'_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:*

1. $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{int}(R'_j)$, *y*
2. $\sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \varepsilon$

Dem. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero. Sean $\varepsilon > 0$ y $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ una colección numerable de rectángulos tal que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ y $\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) < \varepsilon/2$. Por el problema 2 del capítulo 1, sabemos que para cada rectángulo R_j existe otro rectángulo R'_j tal que $R_j \subset \operatorname{int}(R'_j)$ y $m(R'_j) < m(R_j) + \varepsilon/2^{j+1}$ de tal forma que la colección de rectángulos $\left\{R'_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ satisface que $A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{int}(R'_j)$, y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \sum_{j=1}^{\infty} \left(m(R_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

En cuanto a la suficiencia, su prueba es inmediata. ■

Lo último que formularemos, previo a la prueba del Teorema de Lebesgue, es una serie de condiciones bajo las cuales siempre obtenemos conjuntos de medida de Lebesgue cero.

Proposición A.3

1. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene medida de Lebesgue cero y $B \subset A$ entonces B tiene medida de Lebesgue cero*

2. *Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una colección de conjuntos de medida de Lebesgue cero entonces $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ tiene medida de Lebesgue cero*

3. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto a lo más numerable entonces A tiene medida de Lebesgue cero*

Dem. La prueba del inciso 1 es inmedita de la definición, razón por la cual empezaremos por la prueba del inciso 2. Sea $\varepsilon > 0$ y $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos de medida de Lebesgue cero; sabemos entonces que, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe una colección numerable $\left\{R_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ de rectángulos tales que $A_k \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^{(k)}$ y

$$
\sum_{j=1}^{\infty} m\left(R_j^{(k)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}
$$

Ahora, dado que la colección de rectángulos $\left\{R_j^{(k)} \mid j,k \in \mathbb{N}\right\}$ también es numerable[1] y que se satisface que

$$
\begin{aligned}
A &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \\
&\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R_j^{(k)} \right)
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} m\left(R_j^{(k)}\right) \right) &< \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

concluimos que A es un conjunto de medida de Lebesgue cero.
En cuanto al inciso 3, sea $A = \{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$; si hacemos $A_k = \{a_k\}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, es claro que cada conjunto A_k tiene medida de Lebesgue cero y que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, de tal forma que por el inciso anterior A tiene medida de Lebesgue cero. ■

[1] Una manera de probar esta afirmación es considerar la función $f(k,j) = (2j-1)\,2^{k-1}$, la cual es una biyección de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$

Con base en el inciso 3 de esta última proposición, es que podemos dar un ejemplo de un conjunto que tiene medida de Lebesgue cero el cual ni siquiera es Jordan-medible. Un ejemplo es el siguiente conjunto:

$$A = \left\{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 \mid x,y \in \mathbb{Q}\right\}$$

Que A es un conjunto de medida de Lebesgue cero se desprende del hecho de que A es un conjunto numerable, y que A ni siquiera es Jordan-medible es una consecuencia del hecho de que $Fr(A) = [0,1] \times [0,1]$ y la equivalencia entre los incisos 1 y 3 del teorema 1.24.

Una vez probados estos resultados, estamos en condiciones de probar el Teorema de Lebesgue y sólo recordaremos que, si $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $D_{f,R}$ denota al conjunto de puntos de R en los que f no es continua, es decir

$$D_{f,R} = \{\hat{x} \in R \mid f \text{ no es continua en } \hat{x}\}$$

Teorema A.4 (de Lebesgue) *Sea $f : R \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ acotada. f es integrable sobre R si y sólo si $D_{f,R}$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Dem. Sean $M = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$ y $m = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R\}$; obsérvese que, si $M = m$ entonces f es una función constante y tanto la necesidad como la suficiencia de este teorema son inmediatas. Supondremos entonces $M - m > 0$ y empezaremos por probar la suficiencia para lo cual, recurriremos al teorema 1.11.

($\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$; por la proposición A.2 sabemos que existe una colección $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ de rectángulos tales que $D_{f,R} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \operatorname{int}(R_j)$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} m(R_j) < \frac{\varepsilon}{2(M-m)}$$

Hacemos $C = R \backslash D_{f,R}$; como C es el conjunto de puntos de R en que f es continua, para cada $\hat{x} \in C$ existe $\delta_{\hat{x}} > 0$ con la propiedad de que si $\hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}}}(\hat{x}) \cap R$ entonces

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| < \frac{\varepsilon}{8m(R)} \tag{A.1}$$

Consideremos ahora la familia de conjuntos

$$\mathcal{U} = \{\operatorname{int}(R_j) \mid j \in \mathbb{N}\} \cup \left\{B_{\delta_{\hat{x}}/2}(\hat{x}) \mid \hat{x} \in C\right\}$$

la cual, se prueba fácilmente, es una cubierta abierta de R; entonces, dado que R es compacto, sabemos que existen $j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{N}$ y $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_l \in C$ tales que

$$R \subset [\operatorname{int}(R_{j_1}) \cup \cdots \cup \operatorname{int}(R_{j_r})] \cup \left[B_{\delta_{\hat{x}_1}/2}(\hat{x}_1) \cup \cdots \cup B_{\delta_{\hat{x}_l}/2}(\hat{x}_l)\right] \tag{A.2}$$

Una vez que se obtuvo este número finito de rectángulos de la colección original $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$, estamos en condiciones de dar la partición de R que se requiere en el teorema 1.11. Para empezar, para cada $i \in \{1, \ldots, r\}$ hacemos $R'_i = R \cap R_{j_i}$; a continuación, y procediendo como en la parte final de la prueba del teorema 1.24, "extendemos" los "lados" de estos subrectángulos de R para obtener una partición P' de R (veáse nuevamente la figura 1.15 que ilustra este procedimiento en $\mathbb{R}^2$) y tomemos $Q \in \mathcal{P}_R$ un refinamiento de P' tal que, si $Q_1, \ldots, Q_s$ son los subrectángulos de R inducidos por Q, entonces la diagonal de cada uno de ellos es menor que $\delta/2$ (es decir, $d(Q_i) < \delta/2$ para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$), en donde $\delta = \min\{\delta_{\hat{x}_1}, \ldots, \delta_{\hat{x}_l}\} > 0$.

Mostraremos que Q es una partición como la que estamos buscando. Para lograr esto, lo primero que se debe notar es que si algún subrectángulo Q_i es tal que $\operatorname{int}(R'_k) \cap Q_i \neq \emptyset$ para alguna $k \in \{1, \dots, r\}$, entonces $Q_i \subset R_{j_k}$; en efecto, basta observar que esta misma propiedad la satisfacen los subrectángulos inducidos por P' (que no escribimos para no perdernos con la notación) y recordar que todo subrectángulo inducido por Q está contenido en algún subrectángulo inducido por P' (sería útil leer nuevamente la discusión posterior a la definición 1.3).

Con base en lo anterior, definimos

$$I_1 = \{i \in \{1, \dots, s\} \mid Q_i \subset R_{j_k} \text{ para alguna } k \in \{1, \dots, r\}\}$$

e $I_2 = \{1, \dots, s\} \backslash I_1$; obsérvese que, si $i \in I_2$ entonces $\operatorname{int}(R_{j_k}) \cap Q_i = \emptyset$ para toda $k \in \{1, \dots, r\}$. Por otra parte, como $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, s\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{S}\,(f, Q) - \underline{S}\,(f, Q) &= \sum_{i=1}^{s} (M_i - m_i) m(Q_i) \\
&= \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) m(Q_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) m(Q_i)
\end{aligned}$$

en donde $M_i = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in Q_i\}$ y $m_i = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in Q_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, s\}$.

Lo siguiente que haremos será mostrar que cada una de las sumas anteriores es menor que $\varepsilon/2$. Para la primera, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) m(Q_i) &\leq \sum_{i \in I_1} (M - m) m(Q_i) \\
&\leq (M - m) \sum_{k=1}^{r} m(R_{j_k}) \\
&< (M - m) \frac{\varepsilon}{2\,(M - m)} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Para la segunda, sabemos que para cada $i \in \{1, \dots, s\}$ existen $\hat{x}, \hat{y} \in Q_i$ tales que

$$M_i - \frac{\varepsilon}{8m\,(R)} < f(\hat{x}) \qquad \text{y} \qquad f(\hat{y}) < m_i + \frac{\varepsilon}{8m\,(R)}$$

de modo que

$$M_i - m_i < f(\hat{x}) - f(\hat{y}) + \frac{\varepsilon}{4m\,(R)} \tag{A.3}$$

Si además $i \in I_2$, también sabemos que $\operatorname{int}(R_{j_k}) \cap Q_i = \emptyset$ para toda $k \in \{1, \dots, r\}$, de tal forma que, por la contención dada en A.2, existe $q \in \{1, \dots, l\}$ tal que $\hat{x} \in B_{\delta_{\hat{x}_q}/2}(\hat{x}_q) \cap R$, de donde por A.1, se tiene que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{x}_q)| < \frac{\varepsilon}{8m\,(R)} \tag{A.4}$$

Por otra parte, como $\hat{x}, \hat{y} \in Q_i$ entonces $\|\hat{x} - \hat{y}\| \leq d(Q_i) < \delta/2 \leq \delta_{\hat{x}_q}/2$ de modo que

$$\begin{aligned}
\|\hat{y} - \hat{x}_q\| &\leq \|\hat{y} - \hat{x}\| + \|\hat{x} - \hat{x}_q\| \\
&< \delta_{\hat{x}_q}
\end{aligned}$$

es decir, también se tiene que $\hat{y} \in B_{\delta_{\hat{x}_q}}(\hat{x}_q) \cap R$ de tal forma que por la misma desigualdad, sabemos que

$$|f(\hat{y}) - f(\hat{x}_q)| < \frac{\varepsilon}{8m\,(R)} \tag{A.5}$$

De las desigualdades A.4 y A.5 tenemos que

$$\begin{aligned}|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| &\leq |f(\hat{x}) - f(\hat{x}_q)| + |f(\hat{x}_q) - f(\hat{y})| \\ &< \frac{\varepsilon}{4m(R)}\end{aligned}$$

y por lo tanto, de A.3 obtenemos que

$$\begin{aligned}M_i - m_i &< f(\hat{x}) - f(\hat{y}) + \frac{\varepsilon}{4m(R)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2m(R)}\end{aligned}$$

para toda $i \in I_2$.

Con base en lo anterior, tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in I_2}(M_i - m_i)m(Q_i) &< \frac{\varepsilon}{2m(R)}\sum_{i\in I_2} m(Q_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2m(R)} \cdot m(R) \\ &= \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,Q) - \underline{S}(f,Q) &= \sum_{i\in I_1}(M_i - m_i)m(Q_i) + \sum_{i\in I_2}(M_i - m_i)m(Q_i) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

concluyendo con esto la prueba de que f es integrable sobre R.

($\Rightarrow$) Supongamos ahora que f es integrable sobre R. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$E_k = \left\{\hat{x} \in R \mid \text{para toda } \delta > 0 \text{ existe } \hat{y} \in B_\delta(\hat{x}) \cap R \text{ tal que } |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \geq \frac{1}{k}\right\}$$

De la definición de este conjunto, se tiene que $E_k \subset D_{f,R}$ para toda $k \in \mathbb{N}$ de modo que $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset D_{f,R}$. Recíprocamente, si $\hat{x} \in D_{f,R}$, esto significa que existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$ existe $\hat{y} \in B_\delta(\hat{x}) \cap R$ tal que $|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \geq \varepsilon$, de tal forma que si $k \in \mathbb{N}$ es tal que $\varepsilon \geq 1/k$ entonces $\hat{x} \in E_k$ de donde concluimos que $D_{f,R} \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ y por lo tanto que

$$D_{f,R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

Por tanto, por el inciso 2 de la proposición A.3, para probar que $D_{f,R}$ es un conjunto de medida de Lebesgue cero, sólo hará falta probar que para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto E_k tiene medida de Lebesgue cero.

Sean entonces $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como f es integrable sobre R, sabemos que existe $P \in \mathcal{P}_R$ tal que

$$\overline{S}(f,P) - \underline{S}(f,P) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Si $R_1, \ldots, R_s$ son los subrectángulos de R inducidos por la partición P, definimos $I_1 = \{i \in \{1, \ldots, s\} \mid \mathrm{int}(R_i) \cap E_k \neq \emptyset\}$ e $I_2 = \{1, \ldots, s\} \backslash I_1$. Dado que $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ e $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, s\}$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) m(R_i) + \sum_{i \in I_2} (M_i - m_i) m(R_i) &= \sum_{i=1}^{s} (M_i - m_i) m(R_i) \\
&= \overline{S}\,(f, P) - \underline{S}\,(f, P) \\
&< \frac{\varepsilon}{2k}
\end{aligned}$$

(en donde, como siempre, $M_i = \sup\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ y $m_i = \inf\{f(\hat{x}) \mid \hat{x} \in R_i\}$ para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$), y como cada una de las dos primeras sumas son números no negativos, se tiene que

$$\sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) m(R_i) < \frac{\varepsilon}{2k}$$

Ahora, si $i \in I_1$, sabemos que $\mathrm{int}(R_i) \cap E_k \neq \emptyset$ y por lo tanto, si $\hat{x} \in \mathrm{int}(R_i) \cap E_k$, por el hecho de que $\mathrm{int}(R_i)$ es un abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\hat{x}) \subset R$, y por la definición de E_k, existe $\hat{y} \in B_\delta(\hat{x}) \cap R$ tal que

$$|f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \geq \frac{1}{k}$$

Así, dado que $\hat{x}, \hat{y} \in R_i$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} &\leq |f(\hat{x}) - f(\hat{y})| \\
&\leq M_i - m_i
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \sum_{i \in I_1} m(R_i) &\leq \sum_{i \in I_1} (M_i - m_i) m(R_i) \\
&< \frac{\varepsilon}{2k}
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{i \in I_1} m(R_i) < \frac{\varepsilon}{2}$$

De esta última desigualdad, concluimos que la colección de rectángulos $\{R_i \mid i \in I_1\}$ es tal que la suma de sus medidas es menor que $\varepsilon/2$, sólo que éstos no cubren necesariamente a todo el conjunto E_k; los puntos de E_k que hace falta cubrir son aquellos que pertenecen a la frontera de algún R_i, con $i \in I_2$, es decir, nos hace falta cubrir al conjunto

$$\bigcup_{i \in I_2} (E_k \cap Fr(R_i)) \tag{A.6}$$

La buena noticia es que $E_k \cap Fr(R_i) \subset Fr(R_i)$ y que la $Fr(R_i)$ es un conjunto de medida de Jordan cero[2] y por lo tanto es de medida de Lebesgue cero. De esta forma, por el inciso 1 de la proposición A.3, el conjunto $E_k \cap Fr(R_i)$ también es de medida de Lebesgue cero (para cada $i \in I_2$). Así, por

[2]Este hecho es una consecuecia del problema 19 y la equivalencia entre los incisos 1 y 3 del teorema 1.24, ambos del capítulo 1

el inciso 2 de la misma proposición, el conjunto dado en A.6 también es de medida de Lebesgue cero.

Por todo lo anterior, sabemos entonces que existe una colección $\{R'_j\}_{j=1}^{\infty}$ de rectángulos tales que:

1. $\bigcup_{i\in I_2}(E_k \cap Fr(R_i)) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R'_j$, y
2. $\sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \frac{\varepsilon}{2}$

de modo que la colección de rectángulos $\{R_i \mid i \in I_1\} \cup \{R'_j\}_{j=1}^{\infty}$ es tal que:

1. $E_k \subset \left(\bigcup_{i\in I_1} R_i\right) \cup \left(\bigcup_{i\in I_2}(E_k \cap Fr(R_i))\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I_1} R_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} R'_j\right)$, y
2. $\sum_{i\in I_1} m(R_i) + \sum_{j=1}^{\infty} m(R'_j) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

lo que demuestra que E_k es un conjunto de medida de Lebesgue cero, y con lo cual termina la prueba del teorema. ■