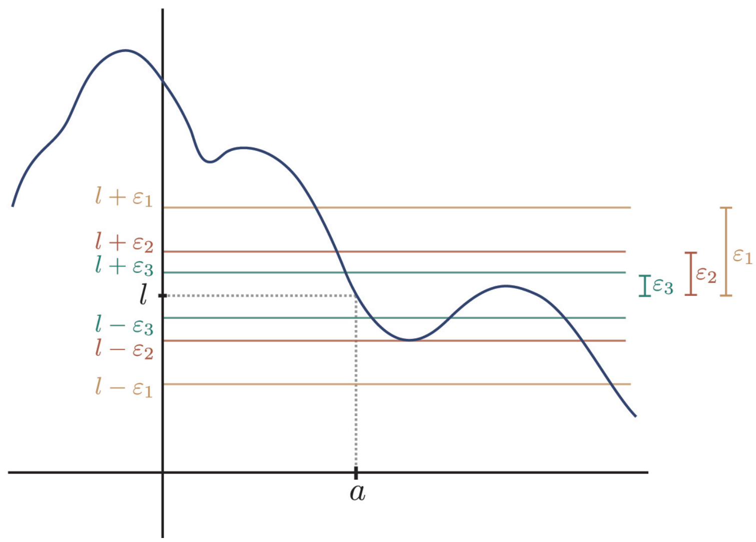
Cálculo Diferencial e Integral I
Semestre 2020-I
Problemas de Límites y continuidad

Profesor: Javier Páez Cárdenas
Ayudantes: Laurita, *el joven* Martín F., Argelia Hernández Recio.

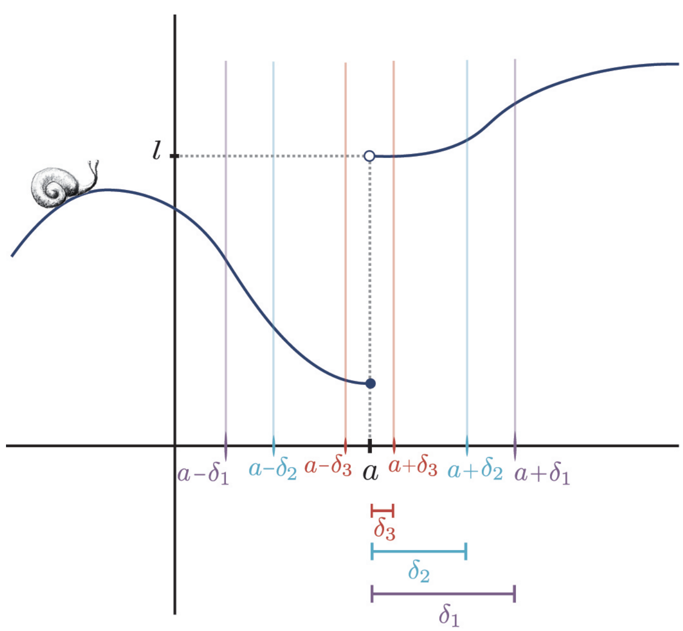
Límites

1. El objetivo de este ejercicio es entender geométricamente la definición ε δ de $\lim_{x\to a} f(x) = l$, y la definición de no existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$. Escriba dichas definiciones, intente "traducirlas", y luego:

   - Dado $\varepsilon_1 > 0$ encuentre un $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < |x-a| < \delta_1$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon_1$. Dibuje el intervalo $(a-\delta_1, a+\delta_1)$. Repita el ejercicio para ε_2 y ε_3.



   - Encuentre gráficamente un $\varepsilon > 0$ tal que para cualquier δ_i $i \in 1, 2, 3$ existe algún x_i que cumple $0 < |x_i - a| < \delta_i$, pero $|f(x_i) - l| \geq \varepsilon$. Dibuje el intervalo $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$.



2. Usando la definición ε δ de límite, pruebe que:

a) $\lim_{x\to 2} 4x = 8$ b) $\lim_{x\to 0} \sqrt{|x|} = 0$ c) $\lim_{x\to 2}(x^2+5x-2) = 12$

d) $\lim_{x\to 0} x(3-\cos(x^2)) = 0$ e) $\lim_{x\to 1} 100/x = 0$ f) $\lim_{x\to a} x^4 = a^4$

g) $\lim_{x\to 1} x^4 + 1/x = 2$ h) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} = 1$

3. Determine si las siguientes funciones tienen límite en a y en un futuro próximo diga si además son continuas en a. Justifique su respuesta.

a) $f(x) = 1/(x+1)$, $a=-1$

b) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ $a = 0$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = -2 \\ 0 & \text{si } x \ne -2 \end{cases}$ $a=-2$

d) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ x+4 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$ $a=2$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1/n^3,\ n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ $a=0$

f) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ a cualquier real

g) $f(x) = \sin(1/x)$, $a=0$

h) $f(x) = \dfrac{\sin(1/x)}{x}$, $a=0$

i) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ a cualquier real.

Sugerencia para inciso i) : Puede dar por hecho que para cualquier $x \in \mathbb{R}$ *existe una sucesión* $\{q_n\}$ *con* $q_n \in \mathbb{Q}$ *y otra sucesión* $\{y_n\}$ *con* $y_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$*, tales que* $q_n \longrightarrow x$ *y* $y_n \longrightarrow x$*.*

4. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y $l, l' \in \mathbb{R}$ con la propiedad de que para todo $\tilde{\varepsilon} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

a) Si $|x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - l| < 10{,}000{,}000^{10{,}000{,}000} \cdot \sqrt{\tilde{\varepsilon}}$.

b) Si $|x-a| < \delta$ entonces $|g(x) - l'| < 10{,}000{,}000^{10{,}000{,}000} + \tilde{\varepsilon}$.

Determine si f y g tienen límite en a. Justifique su respuesta.

5. Relacione cada figura con **todos** los enunciados que la describan. Cada enunciado está relacionado con al menos una figura. *Sugerencia: primero intente "traducir" cada enunciado.*

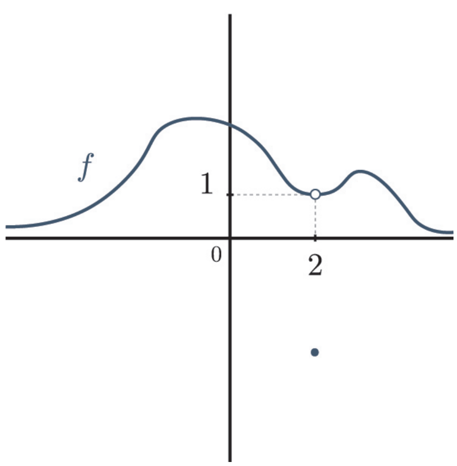


Figura 1

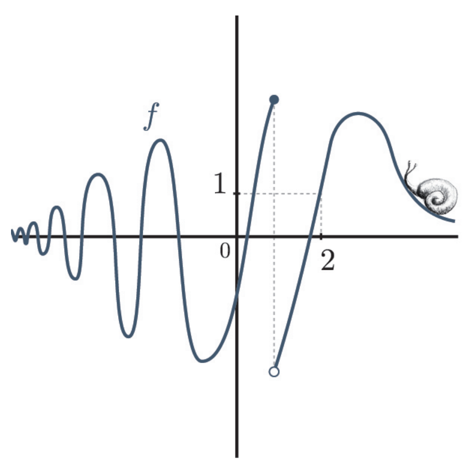


Figura 2

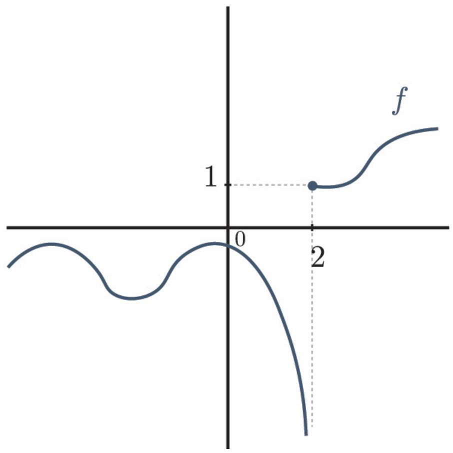


Figura 3

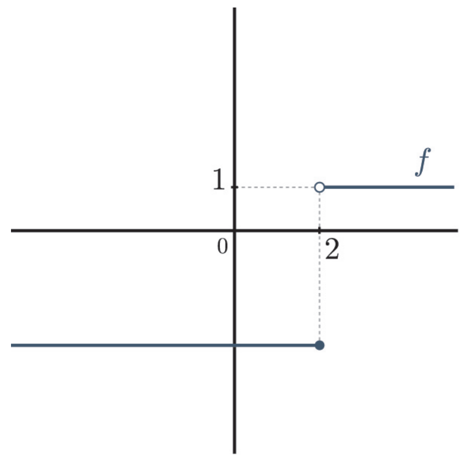


Figura 4

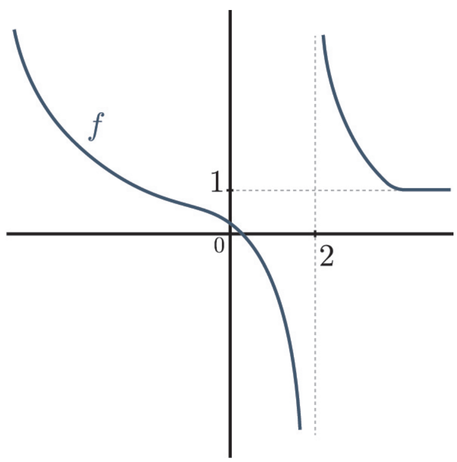


Figura 5

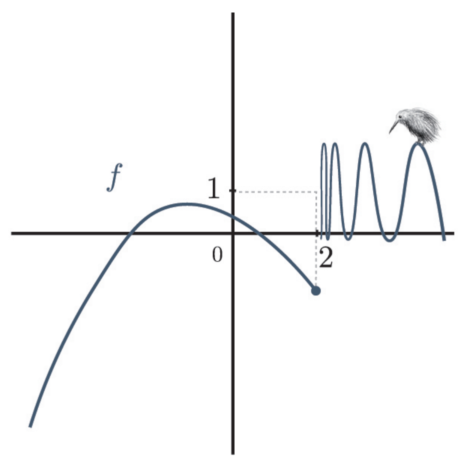


Figura 6

a) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

b) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x-2| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

c) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < x-2 < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

d) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta < 0$ tal que si $x < \delta$, entonces $|f(x)| > \varepsilon$.

e) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x| > \delta$, entonces $|f(x)| < \varepsilon$.

f) Para todo $\delta > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

g) Existe $\delta > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $x > \delta$ se tiene que $|f(x) - 1| < \varepsilon$.

h) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-2| < \delta$, entonces $|f(x)| > \varepsilon$.

i) Para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\delta > 0$ existe $x \in (a-\delta, a+\delta)$ tal que $|f(x)| > \varepsilon$.

j) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

k) Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in (2-\delta, 2+\delta) \setminus \{2\}$ tal que $|f(x) - 1| \geq \varepsilon$.

6. Pruebe los siguientes enunciados:

a) Demuestre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = l$.

b) Demuestre que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - l] = 0$.

c) Demuestre que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x \to 0} f(x^3) = l$.

d) Dé un ejemplo en el que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x^2)$, pero no $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

8. Demuestre que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces existe $M > 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| < M$ si $|x-a| < \delta$. Interprete geométricamente.

9. Demuestre que si $b \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x = l$, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(bx)/x = bl$

10. Verdadero o falso:

    a) Si $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ no existe entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existe.

    b) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ no existe.

    c) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ no existen, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ no existe.

    d) Si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existen.

    e) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ existe y $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe.

    f) Si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, entonces $l > 0$.

    g) Si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $\lim\limits_{x\to a} 1/f(x)$ existe.

11. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en algún intervalo $[b,c]$ tal que $a \in (b,c)$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$.

12. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ con $l \neq 0$ y g no tiene límite en a, entonces $f\cdot g$ no tiene límite en a.

13. Verdadero o falso *(sí, otro)*:

    a) Si $\lim\limits_{x\to a}(|f|+g)(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

    b) Si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}(f(x)+g^2(x)\cdot\cos(x))$ existe y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ existe.

    c) Si $\lim\limits_{x\to a^2} f(x) = 0$, y g es no acotada, entonces $\lim\limits_{x\to a}[f(x^2)\cdot\sin(g(x)+100x)]$ existe.

14. Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}$	b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$	c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x}$
d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x)}{x^2}$	e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$	f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan^2(x)+2x}{x+x^2}$
g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\operatorname{sen}(x)}{1-\cos(x)}$	h) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}$	i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$
j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2(3+\operatorname{sen}(x))}{(x+\operatorname{sen}(x))^2}$	k) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)^3\operatorname{sen}^3\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$	

15. Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) > 0$, pruebe que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para toda $x > M$. Haga un dibujo.

16. Pruebe que:

    a) $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \infty$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to a} 1/|f(x)| = 0$,

    b) $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)| = \infty$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to\infty} 1/|f(x)| = 0$.

17. Demuestre que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ si y sólo si $\lim_{x\to 0^+} f(1/x) = l$.
Deduzca cuánto vale $\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin(1/x)$.

18. Demuestre que
$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + \ldots a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots b_1 x + b_0}$$
existe si y sólo si $m \geq n$. ¿Cuál es el límite cuando $m = n$? ¿y cuando $m > n$?

19. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que g es acotada.

    a) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ calcule el siguiente límite:
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{f(x) + |g(x)|} - \sqrt{f(x)}$$

    b) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ calcule el siguiente límite:
$$\lim_{x\to a} \sqrt{f(x) + |g(x)|} - \sqrt{f(x)}$$

20. Pruebe que si f es creciente y acotada superiormente, entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe (y es finito).
Deduzca que si f es decreciente y acotada inferiormente entonces $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe (y es finito).

21. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con f decreciente y g creciente, tales que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $g(x) \leq f(x)$.
Pruebe que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} g(x)$ existen (y son finitos).

22. Determine si los siguientes límites existen:

    a) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{|x^2 - 4|}{x - 2}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$

    d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3}{x^2}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sqrt{1 + \pi x} - 1)}{x^2} \cdot (1 - \cos(x))$ f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{|\sin(x)| \cdot (\tan(x) - \sin(x))}{x^4}$

    g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$ h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^{13}\cos(x) + 4x^2 + 1}{\sin(1/x)x^2 + 28}$

    j) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$ k) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sqrt{1 + x^2 + |\sin(1/x)|} - \sqrt{x^2 + 1}$

Continuidad

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente y tal que el límite de f en a existe. Pruebe que f es continua en a.

24. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en a, pruebe que $|f|$ es continua en a. ¿Se cumple lo recíproco?

25. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Defina $f_+, f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como:
$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0. \end{cases}$$
Demuestre que f_+ y f_- son continuas.
Sugerencia: Pruebe que $f_+ = \frac{1}{2}(f + |f|)$.

26. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface $|f(x)| \leq |x|$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que f es continua en 0.

27. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en 0 y tal que $g(0) = 0$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $|f(x)| \leq |g(x)|$ para toda $x \in \mathbb{R}$, pruebe que f es continua en 0.

28. En cada caso, dé un ejemplo de una función f tal que:
    a) f sea discontinua en todo punto, pero $|f|$ sea continua en todo punto.
    b) f sea discontinua en todo punto $x \neq 0$, y f sea continua en 0.
    c) Dado cualquier a (fijo), f sea discontinua en todo punto $x \neq a$, y f sea continua en a.

29. Verdadero o falso (*El regreso del rey*)
    a) Si $f \circ g$ y $g \circ f$ son continuas en a, entonces f es continua en a o g es continua en a.
    b) Si $f \circ g$ es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces g es continua en a.
    c) Si $f \circ g$ es continua en a y g es continua en a, entonces f es continua en $g(a)$.
    d) Si $h(x) = (\cos(g(x)) + 2) \cdot f(x) + |g(x)|$ es continua a y g es continua en a, entonces f es continua en a.

30. Sean f y g funciones tales que g es continua en $[a, b]$, h es continua en $[b, c]$, y que $g(b) = h(b)$. Defina $f(x)$ como:
$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{si } x \in [a, b] \\ g(x) & \text{si } x \in [b, c] \end{cases}$$
Pruebe que f es continua en $[a, c]$.

31. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función que satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$, y tal que f es continua en 0.
    a) Pruebe que $f(0) = 0$.
    b) Pruebe que $f(-x) = -f(x)$.
    c) Deduzca que $f(x - y) = f(x) - f(y)$.
    d) Pruebe que para toda $a \in \mathbb{R}$, f es continua en a.

32. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es continua en $\mathbb{R}$. Suponga que para toda $x, y \in \mathbb{R}$ se satisface:
$$(x^2 + y^2)(f(x) - f(y)) \leq (g(x) - g(y))^2.$$
Pruebe que f es continua para toda $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

33. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{Q}$. Pruebe que $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

34. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que para toda $x \in \mathbb{R}$ y para toda $\delta > 0$ existen $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$ tales que $g(y) \leq f(y)$ y $f(z) \leq g(z)$. Pruebe que $f(x) = g(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$.