Algebra Lineal I

TAREA EXAMEN

RESPUESTAS

Profesor: Pablo Barrera — Día 07 de abril, 2006

Fecha de Entrega: — Día 17 de abril, 2006

NOMBRE: ____________________

Resuelva adecuadamente los siguientes ejercicios.

1. Demostrar que las siguientes matrices tienen nucleo $\neq 0$

a) $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ x & 0 & & & \\ x & x & 1 & & \\ x & x & x & -1 & \\ x & x & x & x & 1 \end{bmatrix}$ Supongamos que $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ t_{21} & 0 & & & \\ t_{31} & t_{32} & 1 & & \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & -1 & \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 1 \end{bmatrix}$

considera $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -t_{32} \\ t_{42} - t_{32} * t_{43} \\ -t_{52} + t_{53} * t_{32} - t_{54} * (t_{42} - t_{32} * t_{43}) \end{pmatrix}$ observa que $a \neq 0$ y que $T * a = 0$ por lo tanto $Nuc(T) \neq 0$

b) $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ x & -1 & & & \\ x & x & -1 & & \\ x & x & x & 0 & \\ x & x & x & x & 1 \end{bmatrix}$ Supongamos que $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ t_{21} & 0 & & & \\ t_{31} & t_{32} & 1 & & \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & -1 & \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 1 \end{bmatrix}$

considera $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -t_{54} \end{pmatrix}$ observa que $a \neq 0$ y que $T * a = 0$ por lo tanto $Nuc(T) \neq 0$

c) $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ x & -1 & & & \\ x & x & 0 & & \\ x & x & x & 1 & \\ x & x & x & x & 1 \end{bmatrix}$ Supongamos que $T = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ t_{21} & 0 & & & \\ t_{31} & t_{32} & 1 & & \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & -1 & \\ t_{51} & t_{52} & t_{53} & t_{54} & 1 \end{bmatrix}$

considera $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -t_{43} \\ -t_{53} + t_{43} * t_{54} \end{pmatrix}$ observa que $a \neq 0$ y que $T * a = 0$ por lo tanto $Nuc(T) \neq 0$

2. Si T es triangular de nxn y el k-esímo elemento de la diagonal es cero $\Rightarrow N(T) \neq 0$
Supongamos que T es triangular inferior
$\Rightarrow T = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & & & & \\ \lambda_{21} & . & & & \\ & . & . & & \\ & . & . & . & \\ \lambda_{n1} & . & . & . & \lambda_{nn} \end{bmatrix}$ Supongamos que $\lambda_{ii} \neq 0 \, \forall \, i \in \{1, ..., k-1, k+1, ...n\}$
y supongamos que $\lambda_{kk} = 0$ considera $a = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \\ -\lambda_{k+1k} \\ -\lambda_{k+2k} + \lambda_{k+1k} * \lambda_{k+3k+2} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ observa que
el vector $a \neq 0$ ya que en el k-esímo renglón $a_k = 1$ y siempre podemos encontrar los $a_k \, \forall n \geq k+1$ ya que con la solución d a_{k+1} que si conocemos podemos encontrar las demás
Por lo tanto $Nuc(T) \neq 0$

3. $Im(A_1) \subset Im(A_2) \Rightarrow \exists \, X \, tal \, que \, A_1 = A_2 X$
Sabemos que la $Im(A_1)$ es subespacio vectorial del Codominio por lo tanto podemos hallar $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ base de la $Im(A_1)$ como $Im(A_1) \subset Im(A_2)$ entonces $v_i \, \forall \, i \in \{1, .., k\} \in Im(A_2)$ entonces $\exists' n \; x_1 ... x_k$ tales que $A_2 x_i = v_i \, \forall \, i \in \{1, .., k\}$ sea $X =< x_1, ..., x_k >$ por demostrar que $A_1 = A_2 \mid_X \; sabemos \, que \, A_2 \mid_X = A_2(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i)$ como A_2 es lineal $A_2(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i A_2(x_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i$ por lo tanto $A_2 \mid_X \subset Im(A1)$ como β es una base de la $Im(A_1)$ sea $u \in Im(A_1)$ entonces $u = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i = \sum_{i=1}^{k} a_i A_2(x_i) = A_2(\sum_{i=1}^{k} a_i x_i)$ por lo tanto $Im(A_1) \; \subset \; A_2 \mid_X$ por lo tanto $A_1 = A_2 \mid_X$

4. Si T es triangular $\Rightarrow T^{-1}$ es triangular

5. $A_{mxn} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Si $N(A) = \{0\} \Rightarrow$ A es inyectiva
Supongamos que $A(x) = A(y) \; \Rightarrow \; A(x) - A(y) = 0 \; \Rightarrow \; A(x-y) = 0 \; \Rightarrow \; x - y = 0 \; \Rightarrow \; x = y$ por lo tanto A es inyectiva

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ encuentre B tal que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow A^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ y encuentre $BA = I_2$
Considera $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ observa que C manda $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

observa que $A\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ por lo tanto $A^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ es igual a $\begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$

Si consideras $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ esta manda $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

si queremos obtener B solo componemos es decir $B = D * C$ por lo tanto $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ observa que $B * A = I_2$

7. $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}$ encuetre

$S_r = \{\ A \mid A\bar{1} = \bar{0}\}$

Obserba que $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in S_r$ Sean $A_1, A_2 \in S_r$ calculemos $A_1 + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$A_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Por lo tanto $A_1 + A_2 \in S_r$ por lo tanto $S_r \leq M_{3x3}$ debemos encontrar

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto obtengo un sistema de ecuaciones con 9 icognitas y 3 ecuaciones que nos dan un total de 6 grados de libertad que nos sugiere que existen una infinidad de soluciones por lo que trataremos de dar soluciones l.i.

Sea $\beta = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\}$ Sea $B = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix} \in S_r \Rightarrow \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_7 + x_8 + x_9 = 0 \end{array}$

Observa que $B = x_1 * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_2 * \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_4 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_5 *$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x_7 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + x_8 * \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & -(x_1 + x_2) \\ x_4 & x_5 & -(x_4 + x_5) \\ x_7 & x_8 & -(x_7 + x_8) \end{bmatrix}$

Como $B \in S_r \Rightarrow \begin{array}{c} x_3 = -(x_1 + x_2) \\ x_6 = -(x_4 + x_5) \\ x_9 = -(x_7 + x_8) \end{array}$ Por lo tanto $\forall A \in S_r$ A es combiancion lineal de elementos de β

$S_c = \{\ A \mid \bar{1}^t A = \bar{0}\}$ donde $\bar{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$S_{d1} = \{\ A \mid x_1 + x_5 + x_9 = 0\}$
$S_{d2} = \{\ A \mid x_3 + x_5 + x_7 = 0\}$

a) Calcular $\dim(S_r)$

b) Calcular $dim(S_c)$

c) Calcular $dim(S_{d1})$

d) Calcular $dim(S_{d2})$

e) Calcular $dim(S_r \cap S_c)$

f) Calcular $dim(S_{d1} \cap S_{d2})$

g) Calcular $dim(S_r \cap S_{d1})$

h) Calcular $dim(S_r \cap S_{d2})$

i) Calcular $dim(S_c \cap S_{d1} \cap S_{d2})$

j) Calcular $dim(S_r \cap S_c \cap S_{d1} \cap S_{d2})$

Nota: Argumente adecuadamente su respuesta; no serán tomadas en cuenta observaciones o señalamientos que realicen, sin su debida justificación.