

# Introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas

Luis Rincón  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias UNAM  
Circuito Exterior de CU  
04510 México DF  
`lars@ciencias.unam.mx`

## Resumen

Se presenta una introducción breve y simple de la teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas. Las ecuaciones diferenciales que se estudian son ordinarias y el término estocástico que se usa es la integral de Itô respecto del movimiento Browniano. Se presentan además varios ejemplos y modelos particulares que ayudan a desarrollar la intuición y comprensión del comportamiento de la solución a una ecuación estocástica.

## Contenido

1. Probabilidad, procesos estocásticos y movimiento Browniano	2
2. Integración estocástica	9
3. Ecuaciones diferenciales estocásticas	22
4. Modelos y simulación	26

## §

Este trabajo constituye una exposición elemental al tema de ecuaciones estocásticas a tiempo continuo en su versión más simple. La intención es la de proporcionar un panorama introductorio al tema sin buscar el contexto general o las condiciones mínimas para que los resultados enunciados permanezcan válidos. En consecuencia la mayoría de las demostraciones se omiten o bien no se presentan con detalle. La integral estocástica que se utiliza es la establecida por Itô y se usa ésta únicamente respecto del movimiento Browniano.

El trabajo consta de las siguientes partes. Se inicia recordando algunas ideas básicas de probabilidad y procesos estocásticos. Particularmente se define el movimiento Browniano y se mencionan algunas de sus propiedades. Se construye después la integral de Itô respecto de este proceso en una serie de extensiones sucesivas. Finalmente y mediante algunos ejemplos y modelos particulares se muestran algunos aspectos de la teoría de ecuaciones estocásticas.

## 1. Probabilidad, procesos estocásticos y movimiento Browniano

En esta sección se revisan brevemente algunos conceptos básicos de probabilidad y de procesos estocásticos. En particular se estudia el movimiento Browniano, del cual se recuerda su definición y se enuncian sólo algunas de sus propiedades.

### Probabilidad

El modelo matemático básico de la teoría de la probabilidad es el así llamado *espacio de probabilidad*, que consta de una terna ordenada  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  en donde  $\Omega$  es un conjunto arbitrario no vacío que convenientemente puede ser interpretado como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Al conjunto  $\Omega$  se le llama *espacio muestral*, y a un elemento típico de él se le denota por  $\omega$ . El segundo elemento es una colección no vacía  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $\Omega$ , llamada  $\sigma$ -álgebra, que es cerrada bajo las operaciones de tomar complementos y uniones numerables. A los elementos de  $\mathcal{F}$ , subconjuntos de  $\Omega$ , se les llama *eventos* o *conjuntos medibles*. Finalmente el tercer elemento es una función  $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ , llamada *medida de probabilidad*, que cumple los siguientes axiomas establecidos en 1933 por A. Kolmogorov:  $P(\Omega) = 1$ ,  $P(A) \geq 0$  para cualquier  $A$  en  $\mathcal{F}$ , y  $P$  es  $\sigma$ -aditiva, es decir, si  $A_1, A_2, \dots$  es una sucesión de eventos, disjuntos dos a dos, entonces

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

Las leyes del azar están representadas por las distintas medidas de probabilidad existentes. El número  $P(A)$  es una medida de la *frecuencia* con la que se observa el evento  $A$  cuando se realiza el experimento aleatorio. Todo lo que se mencione en este trabajo tiene como estructura base un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . A la pareja  $(\Omega, \mathcal{F})$  se le llama *espacio medible*. En particular, si  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  denota la  $\sigma$ -álgebra más pequeña que contiene a todos los intervalos abiertos de  $\mathbb{R}$ , entonces

se tiene el espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ . A los elementos de la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  se les llama *Borelianos* o *conjuntos Borel medibles*.

Podemos ahora recordar el concepto ubicuo de *variable aleatoria*. Una variable aleatoria (v.a.) es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que transforma a los elementos de  $\Omega$  en números reales y es tal que para cualquier conjunto Boreliano  $B$  se cumple que  $X^{-1}(B)$  es un elemento de  $\mathcal{F}$ . En este caso también se dice que  $X$  es una *función medible*  $(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , o simplemente que es  $\mathcal{F}$ -medible. Mediante una de estas funciones uno puede pensar que el azar no escoge elementos de  $\Omega$  como resultados del experimento aleatorio, sino números reales. Las operaciones básicas de suma, diferencia, producto y cociente (cuando existe) de v.a.s producen v.a.s. Procesos límite de variables aleatorias (cuando existen) resultan también ser v.a.s.

El espacio medible  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  puede convertirse en un espacio de probabilidad con la ayuda de una variable aleatoria  $X$  de la siguiente manera. Para cada conjunto Boreliano  $B$  se define la función  $P_X(B) = P(X^{-1}B)$ , que resulta ser una medida de probabilidad sobre  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Se le llama la *distribución* de  $X$ , y encierra en ella toda la información probabilística de  $X$ . De manera equivalente puede estudiarse la *función de distribución* de  $X$  definida por  $F(x) = P(X \leq x)$  para cualquier número real  $x$ . Por ejemplo, la variable  $X$  tiene una distribución *normal* o *gausiana* con parámetros  $\mu \in (-\infty, \infty)$  y  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  si su función de distribución es

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(u-\mu)^2/2\sigma^2} du.$$

En este caso se dice que  $X$  tiene distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ . De particular importancia es el concepto de *esperanza* de una variable aleatoria o más generalmente el de esperanza de una función de una variable aleatoria. Si  $g$  es una función real de variable real tal que la composición  $g(X)$  es una variable aleatoria, entonces se define la esperanza de  $g(X)$  como sigue

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x),$$

en donde  $F(x)$  es la función de distribución de  $X$  y la integral indicada es una integral de Riemann-Stieltjes, sobre la cual se asume su existencia. Véase por ejemplo [8] para una exposición de este tipo de integrales en el contexto de la teoría de la probabilidad. En particular, cuando  $g(x) = x$ , se obtiene la esperanza de  $X$  denotada por  $E(X)$ , cuando  $g(x) = (x - E(X))^2$ , se obtiene la varianza de  $X$  denotada por  $\text{Var}(X)$ . Para la distribución normal mencionada antes puede demostrarse que  $E(X) = \mu$  y  $\text{Var}(X) = \sigma^2$ .

Más generalmente, la *esperanza condicional* de una variable aleatoria integrable  $X$ , dada una sub- $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ , es una variable aleatoria, denotada usualmente por

$E(X|\mathcal{G})$ , que es integrable,  $\mathcal{G}$ -medible y satisface la igualdad

$$\int_G E(X|\mathcal{G})dP = \int_G XdP,$$

para cualquier  $G$  en  $\mathcal{G}$ . Estas tres propiedades caracterizan de manera única, en el sentido casi seguro, a la esperanza condicional. En particular cuando la integral anterior se realiza sobre la totalidad  $\Omega$  se obtiene la igualdad

$$E(E(X|\mathcal{G})) = E(X).$$

Cuando  $X$  es  $\mathcal{G}$ -medible sucede que  $X$  mismo cumple con la definición de esperanza condicional y por la unicidad se tiene que  $E(X|\mathcal{G}) = X$ . Por otro lado también usaremos el hecho de que si  $X$  es independiente de  $\mathcal{G}$  entonces la esperanza condicional  $E(X|\mathcal{G})$  es la constante  $E(X)$ .

## Procesos estocásticos

El siguiente concepto de nuestro interés es el de proceso estocástico. Con este modelo se pretende representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo. Un *proceso estocástico* es una colección de variables aleatorias  $\{X_t : t \in \mathbb{T}\}$  parametrizada por un conjunto  $\mathbb{T}$ , usualmente interpretado como un conjunto de tiempos y llamado naturalmente espacio parametral. Se dice que el proceso es *a tiempo discreto* en caso de que el conjunto de parámetros sea un conjunto discreto, por ejemplo  $\mathbb{T} = \{0, 1, 2, \dots\}$ . En este caso el proceso consiste de una sucesión de variables aleatorias. Se dice en cambio que el proceso es *a tiempo continuo* cuando el conjunto de parámetros consiste de un subintervalo de  $\mathbb{R}$ , por ejemplo  $\mathbb{T} = (a, b)$ . En lo sucesivo consideraremos procesos en donde las variables aleatorias toman valores reales y el espacio parametral es el intervalo  $[0, \infty)$ . Un proceso estocástico es entonces una función de dos variables

$$X : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R},$$

tal que para cada  $t \geq 0$ , la función  $\omega \mapsto X_t(\omega)$  es una variable aleatoria, mientras que para cada  $\omega$  en  $\Omega$ , la función  $t \mapsto X_t(\omega)$  es una *trayectoria* del proceso. En principio no hay ninguna condición sobre estas trayectorias, pueden ser continuas o no serlo, aunque una hipótesis común es suponer trayectorias *càdlàg*<sup>1</sup>, es decir, continuas por la derecha con límite por la izquierda. Por simplicidad denotaremos un proceso por  $X_t$  anteponiendo tal adjetivo para evitar confusiones. Revisamos a continuación algunos conceptos técnicos generales relativos a procesos estocásticos.

Una familia de  $\sigma$ -álgebras  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una *filtración* si para  $0 \leq s \leq t$ , se cumple  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ . Al espacio  $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$  se le llama *espacio de probabilidad*

<sup>1</sup>Del francés: *continue à droite, limite à gauche*.

*filtrado*. Cuando  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible para cada  $t \geq 0$  entonces se dice que el proceso es *adaptado* a la filtración. Todo proceso estocástico  $X_t$  determina una *filtración natural* dada por  $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leq s \leq t\}$ . Claramente todo proceso es adaptado a su filtración natural. En este caso a la  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  se le interpreta como la “historia” del proceso al tiempo  $t$ , pues en ella se encuentran todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido hasta ese momento. Adicionalmente se dice que una filtración es continua por la derecha cuando  $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$  coincide con  $\mathcal{F}_t$ .

Es de utilidad también conocer alguna noción de igualdad entre procesos estocásticos. Se dice que dos procesos  $X_t$  y  $Y_t$  son *equivalentes*, o también que uno es una *versión* (o *modificación*) del otro, si para cada  $t \geq 0$  se cumple  $P(X_t = Y_t) = 1$ . En tal caso se dice que la variable  $X_t$  es igual a  $Y_t$  *casi seguramente* y se escribe  $X_t = Y_t$  c.s. Un tipo de igualdad más fuerte establece que los procesos son *indistinguibles* si

$$P(X_t = Y_t \text{ para cada } t \geq 0) = 1.$$

Esto significa que con probabilidad uno las trayectorias de los dos procesos son idénticas. Claramente la indistinguibilidad es más fuerte que la equivalencia. Sin embargo, cuando los procesos son continuos, es decir, cuando sus trayectorias son funciones continuas del parámetro, ambas nociones de igualdad coinciden.

Una característica importante que cumplen algunos procesos es la de tener *incrementos independientes*. Esta propiedad, que usaremos más adelante, puede escribirse de la siguiente forma: Para cualesquiera tiempos  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , las variables incremento  $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$  son independientes, es decir, la función de distribución conjunta de todas ellas coincide con el producto de las funciones de distribución individuales. Finalmente, para concluir esta breve sección mencionaremos a continuación dos tipos de procesos de reconocida importancia.

Un proceso estocástico  $X_t$  es *de Markov* (Markov, 1906) si para cada  $0 \leq s \leq t$  y  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , con probabilidad uno se cumple

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A | X_s).$$

Esta igualdad establece que el estado del proceso al tiempo futuro  $t > s$  es independiente del pasado (tiempos antes de  $s$ ) cuando el estado del proceso al tiempo presente  $s$  es conocido. Esta propiedad es equivalente a la que exhiben los sistemas dinámicos deterministas, cuya evolución queda perfectamente determinada una vez que se establece la ley de movimiento y un estado inicial del sistema, no influyendo lo sucedido antes del estado inicial. Un proceso de Markov determina por tanto una función de probabilidad de transición dada por

$$p(s, x, t, A) = P(X_t \in A | X_s = x),$$

en donde  $0 \leq s \leq t$ ,  $x \in \mathbb{R}$  y  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Esta función de cuatro variables proporciona la probabilidad de que el proceso se encuentre en el conjunto  $A$  al tiempo  $t$  dado que se encontró en el estado  $x$  en un tiempo anterior  $s$ . Inversamente, dada una función de transición de esta forma (junto con algunas hipótesis adicionales) y una distribución de probabilidad inicial, es posible construir un proceso de Markov cuya función de transición es la dada.

Otro ejemplo de proceso estocástico de interés es aquel conocido con el nombre de martingala. Un proceso  $X_t$  es una *martingala* (Lévy) si es adaptado, integrable y para  $0 \leq s \leq t$ , con probabilidad uno se cumple

$$E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s. \quad (1)$$

Las martingalas son procesos que estan relacionados con los juegos justos. Si  $X_t$  representa la fortuna de un jugador que apuesta continuamente entonces la igualdad anterior se interpreta del siguiente modo. En promedio la fortuna del jugador al tiempo  $t$  dada toda la historia del juego hasta el tiempo  $s \leq t$  es la fortuna del jugador al tiempo  $s$ , es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana. Cuando en lugar de (1) se cumple  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ , se dice que el proceso es una *supermartingala*, se trata entonces de un juego desfavorable al jugador pues en promedio su fortuna disminuye. En caso de la desigualdad contraria el proceso es una *submartingala*, juego favorable al jugador. Cuando se toma esperanza en la ecuación (1) se obtiene  $E(X_t) = E(X_s)$ . Esto quiere decir que todas las variables aleatorias que conforman una martingala tienen la misma esperanza. En particular, si la variable aleatoria inicial  $X_0$  es cero entonces  $E(X_t) = 0$  para cualquier  $t \geq 0$ . Estas observaciones sencillas sobre martingalas serán usadas más adelante.

El clásico libro de Karlin y Taylor [11] constituye una excelente referencia general e introductoria sobre el tema de los procesos estocásticos. En la siguiente sección estudiaremos muy brevemente el proceso estocástico de trayectorias continuas que posiblemente pueda considerarse de mayor importancia.

## Movimiento Browniano

El fenómeno natural conocido ahora como movimiento Browniano tiene una larga e interesante historia. El primer registro, aunque no así la primera observación del fenómeno, data de 1828 (véase [1]) cuando el botánico Robert Brown reportó en una revista científica que granos de polen suspendidos en una cierta substancia y vistos a través de un microscopio, realizaban un movimiento irregular e inexplicable. Este extraño movimiento fue objeto de muchas discusiones, y muy diversas hipótesis fueron formuladas en ese entonces con la intención de dar una explicación al fenómeno observado. Hoy en día este movimiento es entendido y explicado a través de las

múltiples colisiones aleatorias de las moléculas del líquido con los granos de polen. Llegar a tal aseveración tomó muchos años pues debió aceptarse la teoría cinético molecular de la materia, y el seminal trabajo de Einstein de 1905 sobre el movimiento Browniano [5] contribuyó decididamente a tal tarea. Las observaciones reales y directas del movimiento de los granos de polen u otras partículas sugieren que el fenómeno satisface las siguientes propiedades: (a) El movimiento es continuo. (b) Parece tener desplazamientos independientes en intervalos de tiempo disjuntos. (c) Debido al gran número de colisiones del grano de polen con las moléculas circundantes en longitudes de tiempo no pequeños, y teniendo en cuenta el teorema del límite central, los incrementos pueden modelarse como variables aleatorias gaussianas.

La estructura matemática de un proceso estocástico, es decir una colección de variables aleatorias  $\{B_t : t \geq 0\}$ , ha resultado exitosa para modelar este tipo de fenómenos. La variable  $B_t$  puede entonces interpretarse como la posición de una partícula Browniana al tiempo  $t$ . La definición matemática, en el caso unidimensional, es la siguiente.

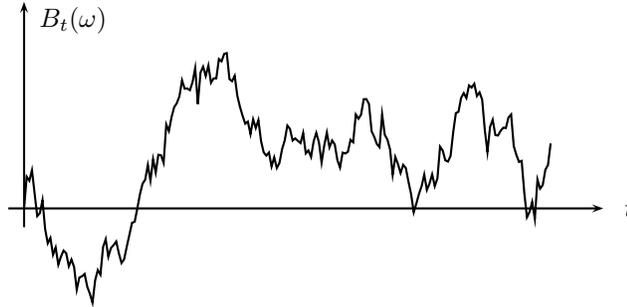
**Definición 1** *Un movimiento Browniano estándar unidimensional es un proceso estocástico  $\{B_t : t \geq 0\}$  tal que*

- a)  $B_0 = 0$  casi seguramente.
- b) Las trayectorias  $t \mapsto B_t$  son continuas.
- c) El proceso tiene incrementos independientes.
- d) La variable  $B_t - B_s$  tiene distribución  $N(0, t - s)$  para  $0 \leq s < t$ .

Las condiciones que aparecen en esta definición son consecuencia directa de las observaciones del fenómeno físico, pero ello no garantiza que tal objeto matemático exista. En 1923 el matemático norteamericano Norbert Wiener demostró la existencia de un proceso con tales condiciones. Es por esta razón que a menudo a este proceso también se le llama *proceso de Wiener* y se le denota también por  $\{W_t : t \geq 0\}$ . En sentido estricto el movimiento Browniano es el fenómeno físico mientras que su modelo matemático es el proceso de Wiener, aunque es común llamar a ambas cosas por el mismo nombre: movimiento Browniano. Se tiene entonces que cada variable aleatoria  $B_t$  tiene distribución  $N(0, t)$  y por lo tanto  $E(B_t) = 0$  y  $\text{Var}(B_t) = E(B_t^2) = t$ . En particular para  $0 \leq s < t$  se cumple  $E|B_t - B_s|^2 = t - s$ . También haremos uso de la identidad  $E|B_t - B_s|^4 = 3(t - s)^2$  para  $0 \leq s < t$ .

El movimiento Browniano físico se presenta en tres dimensiones y es completamente

errático. En la siguiente figura puede apreciarse una posible trayectoria Browniana cuando ésta se proyecta sobre una de sus coordenadas.



Una trayectoria del movimiento Browniano unidimensional.

Este movimiento tiene muchas propiedades y conexiones con otras ramas de las matemáticas, por ejemplo es un proceso de Markov y es también una martingala continua. Es interesante también mencionar que casi todas sus trayectorias son no diferenciables en ningún punto, las trayectorias Brownianas son entonces ejemplos de funciones, otrora consideradas extrañas, que son continuas pero no diferenciables en ningún punto. También puede demostrarse que sobre un intervalo de tiempo finito  $[a, b]$ , casi todas las trayectorias tienen variación no acotada, esto es,

$$\sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}| = \infty,$$

en donde  $\Delta$  es una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  del intervalo  $[a, b]$ . Esta propiedad es particularmente importante en el presente trabajo pues tiene como consecuencia el hecho de que no se pueden usar las trayectorias Brownianas como integradores en el sentido de Riemann-Stieltjes. Por otro lado puede demostrarse que la *variación cuadrática* sobre  $[a, b]$  es finita, y de hecho resulta ser la longitud del intervalo en cuestión, es decir,

$$\sup_{\Delta} \sum_{k=1}^{n-1} |B_{t_{k+1}} - B_{t_k}|^2 = b - a.$$

Tal convergencia en media cuadrática puede comprobarse como sigue. Si  $\Delta t_k$  denota el incremento  $t_{k+1} - t_k$  y  $\Delta B_k$  es  $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$  entonces

$$\| \sum_k (\Delta B_k)^2 - (b - a) \|^2 = E[(\sum_k (\Delta B_k)^2 - (b - a))^2]$$

$$\begin{aligned}
&= E\left[\sum_{k,j}(\Delta B_k)^2(\Delta B_j)^2\right] - 2(b-a)E\left[\sum_k(\Delta B_k)^2\right] + (b-a)^2 \\
&= \sum_k E[(\Delta B_k)^4] + \sum_{k \neq j} E[(\Delta B_k)^2]E[(\Delta B_j)^2] \\
&\quad - 2(b-a)\sum_k(\Delta t_k) + (b-a)^2 \\
&= \sum_k 3(\Delta t_k)^2 + \sum_{k \neq j}(\Delta t_k)(\Delta t_j) - (b-a)^2 \\
&= \sum_k 2(\Delta t_k)^2 \\
&\leq 2(b-a) \cdot \max_{0 \leq k < n} \Delta t_k \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Otro de los muchos resultados interesantes del movimiento Browniano es el *teorema de caracterización* de Paul Lévy que establece que un proceso cualquiera  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un movimiento Browniano si y sólo si tiene trayectorias continuas, empieza en cero, y tanto  $\{X_t : t \geq 0\}$  como  $\{X_t^2 - t : t \geq 0\}$  son martingalas. A través de este resultado o directamente de la definición, puede demostrarse que los siguientes procesos son versiones del movimiento Browniano: a)  $X_t = \frac{1}{c}B_{c^2t}$  con  $c > 0$  constante. b)  $X_t = tX_{1/t}$  para  $t > 0$ , con  $X_0 = 0$ . c)  $X_t = B_{t+s} - B_s$  con  $s \geq 0$  fijo.

El lector interesado puede encontrar una muy interesante y motivadora exposición histórica sobre el descubrimiento del movimiento Browniano en el excelente libro de Edward Nelson [17], ahora disponible en la red en formato electrónico en la página web del autor. El libro de Mazo [16] es también una excelente fuente para algunos aspectos físicos de este proceso. Para una primera introducción a algunos aspectos matemáticos puede consultarse por ejemplo [11].

## 2. Integración estocástica

Esta sección es un tanto técnica y está basada en [19] y principalmente en [20]. El objetivo es definir la integral de Itô de un proceso  $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  respecto del movimiento Browniano, es decir, una integral de la forma

$$\int_0^T X_t dB_t. \quad (2)$$

Llevar a cabo tal tarea nos conducirá a enunciar sin demostración algunos resultados técnicos pero los esfuerzos tendrán su recompensa hacia el final del trabajo donde haremos uso de este tipo de integrales. Igualmente la justificación para desear definir estas integrales se volverá evidente más adelante. Definiremos la integral estocástica

en varios pasos. Primero para procesos simples y después, por aproximación, para procesos más generales. Consideraremos entonces como elementos iniciales un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  y un movimiento Browniano estándar unidimensional  $\{B_t : t \geq 0\}$  junto con su filtración natural  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Asumiremos que el proceso  $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ , visto como función  $X : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , es  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$ -medible. El término  $\mathcal{F}_T \otimes \mathcal{B}[0, T]$  corresponde a la mínima  $\sigma$ -álgebra generada por el espacio producto  $\mathcal{F}_T \times \mathcal{B}[0, T]$ . Supondremos además que el proceso es adaptado, es decir, para cada  $t$  en el intervalo  $[0, T]$ , la variable aleatoria  $X_t$  es  $\mathcal{F}_t$ -medible.

Denotaremos por  $L^2(P)$  al espacio vectorial de variables aleatorias  $X$  que son cuadrado integrables, es decir, que cumplen la condición

$$\|X\|_{L^2(P)} = (E |X|^2)^{1/2} < \infty.$$

La función  $X \mapsto \|X\|_{L^2(P)}$  define una norma<sup>2</sup> en  $L^2(P)$ , y este espacio es completo respecto de esta norma, es decir, es un *espacio de Banach*. Esto quiere decir que toda sucesión de Cauchy en este espacio tiene límite en él. A la convergencia usando esta norma se le llama *convergencia en  $L^2(P)$* , o también *convergencia en media cuadrática*. Por ejemplo, la variable aleatoria  $B_t$  del movimiento Browniano pertenece a  $L^2(P)$ , pues

$$\|B_t\|_{L^2(P)} = (E |B_t|^2)^{1/2} = \sqrt{t} < \infty.$$

En lo que resta del trabajo consideraremos procesos con espacio parametral el intervalo  $[0, T]$ , con  $T > 0$  fijo. También denotaremos por  $L^2(P \times dt)$  al espacio de Banach de procesos  $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$ , que cumplen la condición

$$\|X\|_{L^2(P \times dt)} = (E \int_0^T |X_t|^2 dt)^{1/2} < \infty.$$

Por ejemplo el movimiento Browniano  $B = \{B_t : 0 \leq t \leq T\}$  pertenece a este espacio pues

$$\|B\|_{L^2(P \times dt)} = (E \int_0^T |B_t|^2 dt)^{1/2} = (\int_0^T E |B_t|^2 dt)^{1/2} = (\int_0^T t dt)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} T < \infty.$$

---

<sup>2</sup>Una *norma* es una función real denotada regularmente por  $\|\cdot\|$ , y definida sobre un espacio lineal que cumple:  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  y  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ .

## Integral para procesos simples

Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  una partición finita del intervalo  $[0, T]$ . Un proceso estocástico *simple* es un proceso de la forma

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} X^{t_k} \cdot 1_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

en donde  $X^{t_k}$  es una variable aleatoria  $\mathcal{F}_{t_k}$ -medible y cuadrado integrable. La expresión  $1_{[a,b)}(t)$  corresponde a la *función indicadora* del intervalo  $[a, b)$ . Un proceso simple es entonces un proceso “constante” por pedazos con trayectorias càdlàg, y las condiciones solicitadas garantizan que el proceso es adaptado y tiene trayectorias cuadrado integrables. Denotaremos por  $\mathcal{H}_0^2$  al espacio vectorial de todos los procesos simples. La integral estocástica de Itô de un proceso simple  $X$  respecto del movimiento Browniano, denotada por  $I(X)$ , se define entonces naturalmente como la variable aleatoria

$$I(X) = \int_0^T X_s dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} X^{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

Observe que esta integral es una variable aleatoria integrable pues es evidente que su esperanza es cero. Además es cuadrado integrable y cumple la siguiente igualdad fundamental llamada *isometría de Itô*:

$$\|I(X)\|_{L^2(P)} = \|X\|_{L^2(P \times dt)}. \quad (3)$$

En efecto, recordando que  $\Delta B_k$  denota la diferencia  $B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$ , y  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \|I(X)\|_{L^2(P)}^2 &= E\left(\left|\sum_{k=0}^{n-1} X^k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})\right|^2\right) \\ &= E\left(\sum_{j,k=0}^{n-1} X^j X^k \Delta B_j \Delta B_k\right) \\ &= E\left(\sum_{k=0}^{n-1} (X^k)^2 (\Delta B_k)^2\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E(X^k)^2 \Delta t_k \\ &= E\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) \\ &= \|X\|_{L^2(P \times dt)}^2. \end{aligned}$$

Hemos usado el hecho de que  $X_k$  es  $\mathcal{F}_{t_k}$ -medible, y teniendo el movimiento Browniano incrementos independientes, las variables  $X_k$  y  $\Delta B_k$  resultan ser independientes. Esta igualdad juega un papel primordial en la definición de integral estocástica como se verá más adelante. La integral estocástica asigna entonces a cada elemento del espacio  $\mathcal{H}_0^2$  una variable aleatoria dentro del espacio  $L^2(P)$ . De esta forma se tiene el mapeo lineal  $I : \mathcal{H}_0^2 \rightarrow L^2(P)$ , que resulta ser continuo por la isometría de Itô.

Observe que se puede tomar como ejemplo de proceso simple el movimiento Browniano discretizado, es decir, tomando  $X^{t_k} = B_{t_k}$ , y de esta forma tener la integral estocástica discreta

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}).$$

## Extensión por aproximación

Ahora extendemos la integral estocástica a procesos un poco más generales. Sea  $\mathcal{H}^2$  el espacio de todos los procesos  $\{X_t : 0 \leq t \leq T\}$  medibles y adaptados, tales que

$$E\left(\int_0^T |X_t|^2 dt\right) < \infty.$$

El espacio  $\mathcal{H}^2$  resulta ser un subespacio lineal cerrado de  $L^2(P \times dt)$ . Observe que la única diferencia entre estos dos espacios es que a los elementos de  $\mathcal{H}^2$  se les pide que sean medibles y adaptados. Claramente todo proceso simple es un elemento de  $\mathcal{H}^2$ . Tenemos entonces la contención de espacios  $\mathcal{H}_0^2 \subset \mathcal{H}^2 \subset L^2(P \times dt)$ , en donde puede probarse que  $\mathcal{H}_0^2$  es denso en  $\mathcal{H}^2$  respecto de la norma en  $L^2(P \times dt)$ . Esto significa que para cualquier proceso  $X$  en  $\mathcal{H}^2$  existe una sucesión de procesos  $X^k$  en  $\mathcal{H}_0^2$  tales que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|X - X^k\|_{L^2(P \times dt)} = 0. \quad (4)$$

Este procedimiento de aproximación puede llevarse a cabo de la siguiente forma. Mediante la técnica de truncación todo proceso en  $\mathcal{H}^2$  puede ser aproximado por un proceso acotado. A su vez todo proceso en  $\mathcal{H}^2$  que es acotado se puede aproximar por procesos acotados y continuos. Y éstos a su vez se aproximan por procesos simples de la forma

$$\sum_{k=0}^n X_{t_k} \cdot 1_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

en donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$  es una partición finita de  $[0, T]$ . Los detalles completos de esta sucesión de aproximaciones pueden encontrarse en [18].

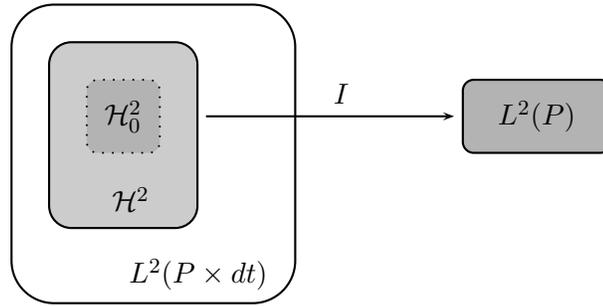
Usando la isometría de Itô es sencillo comprobar que la sucesión  $I(X^k)$  es una sucesión de Cauchy en el espacio  $L^2(P)$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \|I(X^k) - I(X^l)\|_{L^2(P)} &= \|I(X^k - X^l)\|_{L^2(P)} \\ &= \|X^k - X^l\|_{L^2(P \times dt)} \\ &\leq \|X - X^k\|_{L^2(P \times dt)} + \|X - X^l\|_{L^2(P \times dt)}. \end{aligned}$$

Debido a (4) la última expresión puede hacerse tan pequeña como se desee, tomando índices  $k$  y  $l$  suficientemente grandes. Entonces de manera natural se define, para cada  $X$  en  $\mathcal{H}^2$ ,

$$I(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} I(X^k),$$

en donde el límite debe entenderse dentro del espacio  $L^2(P)$ . Esto significa que la variable aleatoria  $I(X)$  es un elemento de  $L^2(P)$  y es tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|I(X) - I(X^k)\|_{L^2(P)} = 0$ . No es difícil verificar que tal definición es correcta en el sentido de que el límite no depende de la sucesión aproximante. De manera gráfica se tiene el siguiente diagrama:



Una primera extensión por aproximación de la integral estocástica.

La isometría de Itô se cumple también para procesos en  $\mathcal{H}^2$  como se muestra a continuación. Sea  $X$  en  $\mathcal{H}^2$  y sea  $X_n$  en  $\mathcal{H}_0^2$  tal que  $\|X - X_n\|_{L^2(P \times dt)} \rightarrow 0$ . Esta convergencia y la desigualdad  $|||a| - |b|| \leq \|a - b\|$  implican que  $\|X_n\|_{L^2(P \times dt)} \rightarrow \|X\|_{L^2(P \times dt)}$ . Análogamente, como  $\|I(X) - I(X_n)\|_{L^2(P)} \rightarrow 0$  se tiene que  $\|I(X_n)\|_{L^2(P)} \rightarrow \|I(X)\|_{L^2(P)}$ . El resultado buscado se obtiene entonces al tomar el límite en la isometría de Itô como se muestra en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \|I(X_n)\|_{L^2(P)} & = & \|X_n\|_{L^2(P \times dt)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \|I(X)\|_{L^2(P)} & = & \|X\|_{L^2(P \times dt)}. \end{array}$$

La propiedad de esperanza nula se cumple también para procesos en  $\mathcal{H}^2$ . De esta forma tenemos ahora el mapeo lineal y continuo  $I : \mathcal{H}^2 \rightarrow L^2(P)$ .

Observe nuevamente que el movimiento Browniano  $\{B_t : 0 \leq t \leq T\}$  es un ejemplo de un proceso en el espacio  $\mathcal{H}^2$ , y es posible demostrar que tal proceso puede ser aproximado en el sentido de la norma del espacio  $L^2(P \times dt)$ , por el proceso simple

$$X_t = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \cdot 1_{[t_k, t_{k+1})}(t),$$

en donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  es una partición de  $[0, T]$ . Se tiene entonces la siguiente integral estocástica particular, y su aproximación como límite en media cuadrática

$$\int_0^T B_t dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}),$$

en donde el límite debe entenderse en el sentido de que la distancia máxima entre dos puntos sucesivos de la partición tiende a cero. Más adelante calcularemos esta integral estocástica de dos maneras, primero usando esta representación como límite en el espacio  $L^2(P)$ , y después usando la fórmula de Itô.

## La integral como un proceso

Hagamos ahora una pequeña extensión. Para cada  $t$  en  $[0, T]$  y para  $X$  en  $\mathcal{H}^2$  se define

$$I_t(X) = \int_0^t X_s \cdot 1_{[0, t]}(s) dB_s = \int_0^t X_s dB_s.$$

Este artificio permite ver a la integral estocástica no como una variable aleatoria sino como un proceso. Es claro que tal proceso no es necesariamente continuo sin embargo puede demostrarse que existe una versión continua de él, y que esa versión es una martingala respecto de la filtración natural del movimiento Browniano. Denotaremos por el mismo símbolo a tal martingala continua.

## Extensión por localización

Mediante un procedimiento llamado de localización es posible extender la definición de integral de Itô a procesos medibles y adaptados que cumplen la condición menos restrictiva

$$P\left(\int_0^T |X_t|^2 dt < \infty\right) = 1.$$

Denotaremos por  $\mathcal{L}_{loc}^2$  el espacio de todos estos procesos. Este procedimiento de localización hace uso de tiempos de paro y explicaremos a continuación en qué consisten éstos. Un *tiempo de paro* relativo a una filtración  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  es una variable

aleatoria  $\tau$  con valores en el intervalo cerrado  $[0, \infty]$  tal que para cada  $t \geq 0$ , el evento  $(\tau \leq t)$  pertenece a  $\mathcal{F}_t$ . Cuando la filtración es continua por la derecha, la condición anterior es equivalente a  $(\tau \geq t) \in \mathcal{F}_t$ . El nuevo espacio  $\mathcal{L}_{loc}^2$  contiene a  $\mathcal{H}^2$  y es tal que para cada proceso  $X$  en  $\mathcal{L}_{loc}^2$  existe una sucesión creciente de tiempos de paro  $\{\tau_n : n \geq 1\}$  tal que  $X_t \cdot 1_{(\tau_n \geq t)} \in \mathcal{H}^2$  en donde  $\tau_n \nearrow T$  cuando  $n$  crece a infinito. Se define entonces la integral estocástica como el siguiente límite en el espacio  $L^2(P)$ :

$$\int_0^t X_s dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X_s \cdot 1_{(\tau_n \geq t)}(\omega) \cdot 1_{[0,t]}(s) dB_s.$$

Nuevamente es posible demostrar que tal límite existe, que existe una versión continua de él, y que es independiente de la sucesión de tiempos de paro localizante. En este caso la integral ya no es una martingala sino una *martingala local*, es decir, el proceso  $I_{t \wedge \tau_n}(X)$  es una martingala para cada natural  $n$ . En general, la isometría de Itô ya no se cumple cuando la integral estocástica tiene como dominio el conjunto  $\mathcal{L}_{loc}^2$ .

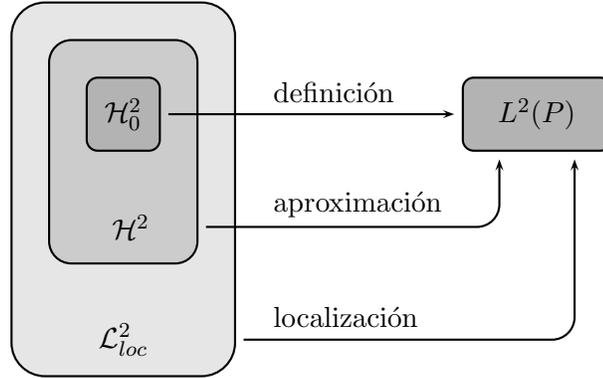
Observe que para cualquier función continua  $f$ , el proceso  $\{f(B_t) : 0 \leq t \leq T\}$  tiene trayectorias continuas y acotadas, por lo tanto es un elemento de  $\mathcal{L}_{loc}^2$ , y tiene sentido la expresión

$$\int_0^t f(B_s) dB_s.$$

Mencionaremos finalmente que es posible demostrar que la integral anterior puede ser calculada mediante el siguiente límite en el espacio  $L^2(P)$ , aunque también se verifica la convergencia en probabilidad:

$$\int_0^t f(B_s) dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(B_{t_k}) \cdot (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}), \quad (5)$$

en donde  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  es una partición de  $[0, t]$ , y nuevamente el límite debe entenderse en el sentido de que la distancia máxima entre dos puntos sucesivos de la partición tiende a cero. Con esto concluimos la serie de ideas generales bajo las cuales puede construirse la integral de Itô. Las demostraciones de algunos detalles técnicos que hemos simplemente mencionado se pueden encontrar en [20]. El esquema simplificado del procedimiento seguido para definir la integral estocástica se ilustra en el siguiente diagrama.



Extensiones sucesivas de la integral estocástica.

**Ejemplo 1** Con la ayuda de (5) calcularemos la integral estocástica

$$\int_0^t B_s dB_s.$$

Sea  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  una partición uniforme de  $[0, t]$ , es decir  $t_{i+1} - t_i = 1/n$ . Usando la identidad

$$a(b - a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a - b)^2$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_k} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{2}(B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) - \frac{1}{2}(B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t. \end{aligned}$$

Los límites indicados son válidos en el sentido de media cuadrática. Observe que el primer término del lado derecho corresponde a las reglas de integración usual. El término adicional se conoce como la corrección de Itô.

Ahora veamos el cambio en la solución cuando modificamos ligeramente la forma de calcular la integral, al hacer la evaluación del integrando en el extremo derecho de

cada subintervalo. Observe que en este caso el proceso a integrar ya no es adaptado y por lo tanto queda fuera de la teoría desarrollada antes. Usando la identidad

$$b(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a-b)^2$$

se obtiene, nuevamente en el sentido de media cuadrática,

$$\begin{aligned} \int_0^t B_s dB_s &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \frac{1}{2} (B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2) + \frac{1}{2} (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} B_t^2 + \frac{1}{2} t. \end{aligned}$$

El signo del segundo término cambió de negativo a positivo. Esto muestra que, a diferencia de la integral de Riemann, la integral estocástica es sensible al punto donde se evalúa el integrando. Al considerar en cambio el promedio de las evaluaciones en los extremos se obtiene la así llamada integral de Stratonovich, denotada de la forma siguiente

$$\int_0^t B_s \circ dB_s = \frac{1}{2} B_t^2.$$

Observe que el término adicional de la integral de Itô ha desaparecido. La integral de Stratonovich tiene algunas ventajas operacionales pues sigue algunas reglas usuales del cálculo integral, pero vista como proceso deja de ser una martingala.  $\square$

**Ejemplo 2** Como un ejemplo de uso de la isometría de Itô vamos a calcular la esperanza y varianza de la variable aleatoria

$$\int_0^t B_s dB_s.$$

Naturalmente la esperanza es cero pues la integral estocástica en este caso es una martingala. Entonces

$$\text{Var}\left(\int_0^t B_s dB_s\right) = E\left(\int_0^t B_s dB_s\right)^2 = E\left(\int_0^t B_s^2 ds\right) = \int_0^t E(B_s^2) ds = \int_0^t s ds = \frac{1}{2} t^2.$$

Alternativamente, como  $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t$ , las cantidades anteriores pueden calcularse usando el lado derecho de esta igualdad. Claramente  $E\left(\frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t\right) = 0$ . Además

$$\text{Var}\left(\frac{1}{2} B_t^2 - \frac{1}{2} t\right) = \frac{1}{4} \text{Var}(B_t^2) = \frac{1}{4} [E(B_t^4) - E^2(B_t^2)] = \frac{1}{4} [3t^2 - t^2] = \frac{1}{2} t^2.$$

$\square$

**Ejemplo 3** Sean  $X_t$  y  $Y_t$  dos procesos en  $\mathcal{H}^2$ . Entonces

$$E\left(\int_0^t X_s dB_s \cdot \int_0^t Y_s dB_s\right) = \int_0^t E(X_s \cdot Y_s) ds.$$

Esta fórmula es fácil de comprobar usando la isometría de Itô y la igualdad

$$ab = \frac{1}{2}(a+b)^2 - \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t X_s dB_s \cdot \int_0^t Y_s dB_s\right) &= E\left(\frac{1}{2}\left|\int_0^t (X_s + Y_s) dB_s\right|^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(E\left|\int_0^t X_s dB_s\right|^2 + E\left|\int_0^t Y_s dB_s\right|^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t E|X_s + Y_s|^2 ds \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\int_0^t E|X_s|^2 ds + \int_0^t E|Y_s|^2 ds\right) \\ &= \int_0^t E(X_s \cdot Y_s) ds. \end{aligned}$$

□

## Propiedades de la integral

La integral estocástica de Itô cumple varias propiedades aunque sólo mencionaremos algunas de ellas aquí, a manera de resumen de las características señaladas antes. Primeramente debemos mencionar que la integral  $I_t : \mathcal{L}_{loc}^2 \rightarrow L^2(P)$  es lineal y su esperanza es cero, es decir, para  $c$  constante y cualesquiera procesos  $X_s$  y  $Y_s$  en  $\mathcal{L}_{loc}^2$ ,

a.  $\int_0^t (cX_s + Y_s) dB_s = c \int_0^t X_s dB_s + \int_0^t Y_s dB_s, \quad \text{c.s.}$

b.  $E\left(\int_0^t X_s dB_s\right) = 0, \quad \text{c.s.}$

Cuando la integral estocástica se restringe al espacio  $\mathcal{H}^2$ , entonces se cumple también la isometría de Itô:

c.  $E\left|\int_0^t X_s dB_s\right|^2 = E\int_0^t |X_s|^2 ds.$

Y vista como un proceso, la integral es una martingala, es decir, es integrable, adaptada y para  $0 \leq s \leq t$ , se cumple

$$d. E\left(\int_0^t X_u dB_u \mid \mathcal{F}_s\right) = \int_0^s X_u dB_u.$$

Existe además una versión continua de tal proceso. En general, para  $X \in \mathcal{L}_{loc}^2$ , la integral ya no es una martingala sino una martingala local.

## Fórmula de Itô

En pocos casos una integral de Riemann se calcula usando directamente la definición, en lugar de ello existen fórmulas bien conocidas para calcular integrales. La misma situación se presenta para integrales estocásticas: en muy raros casos se calculan éstas a través de su definición. La famosa fórmula de Itô es la herramienta fundamental para este tipo de integrales. Se enuncia a continuación este resultado en una versión simple y se ejemplifica su uso. Más adelante se presenta una versión un poco más general.

En lo sucesivo haremos referencia a las siguientes espacios de funciones. Una función real de variable real es de *clase*  $C^1$ , cuando es diferenciable y su derivada es continua. Análogamente, una función es de *clase*  $C^2$ , si es dos veces diferenciable y su segunda derivada es una función continua.

**Teorema 1 (Fórmula de Itô)** *Si  $f$  es un función de clase  $C^2$  entonces*

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt.$$

Esta fórmula corresponde a la regla de la cadena del cálculo diferencial usual en su versión estocástica. Mencionaremos a continuación algunas ideas generales mediante las cuales esta importante fórmula puede obtenerse, haciendo uso de la expansión de Taylor. Para una función  $f$  suficientemente suave,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R(t),$$

en donde el residuo  $R(t)$  puede escribirse como sigue

$$R(t) = \int_{x_0}^x f''(t)(x - t) dt$$

$$= \int_0^1 (1 - \theta) f''(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2 d\theta.$$

La segunda línea se obtiene después de un sencillo cambio de variable. Dado lo anterior, se tiene que si  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  es una partición de  $[0, t]$  entonces

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \sum_{k=1}^n [f(B_{t_k}) - f(B_{t_{k-1}})] \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ f'(B_{t_{k-1}})(\Delta B_k) + \int_0^1 (1 - \theta) f''(B_{t_{k-1}} + \theta \Delta B_k)(\Delta B_k)^2 d\theta \right] \\ &= \sum_{k=1}^n f'(B_{t_{k-1}})(\Delta B_k) + \int_0^1 (1 - \theta) \left[ \sum_{k=1}^n f''(B_{t_{k-1}} + \theta \Delta B_k)(\Delta B_k)^2 \right] d\theta \end{aligned}$$

Puede comprobarse que al tomar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  las sumas convergen casi seguramente y entonces se obtiene la igualdad

$$\begin{aligned} f(B_t) - f(B_0) &= \int_0^t f'(B_s) dB_s + \int_0^1 (1 - \theta) \int_0^t f''(B_s) ds d\theta \\ &= \int_0^t f'(B_s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) ds. \end{aligned}$$

Esta es la formulación en términos de integrales de la fórmula de Itô, equivalente a la forma diferencial enunciada antes. Ilustraremos su uso mediante algunos ejemplos.

**Ejemplo 4** Si  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  entonces la fórmula de Itô establece que

$$\frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}B_0^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t 1 ds,$$

es decir,

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Este resultado había sido encontrado antes, ahora lo hemos obtenido de manera inmediata de la fórmula de Itô. De manera análoga, para la función  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$  se obtiene

$$\int_0^t B_s^2 dB_s = \frac{1}{3}B_t^3 - \int_0^t B_s ds.$$

Más generalmente, para  $f(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ , de la fórmula de Itô se sigue que

$$\int_0^t B_s^n dB_s = \frac{1}{n+1}B_t^{n+1} - \frac{1}{2} \int_0^t nB_s^{n-1} ds.$$

□



$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)dt$$

Itô Kiyosi (Japón, 1915–) y una versión de su fórmula.

Foto: MacTutor Archive, St. Andrews.

**Ejemplo 5** Se usa a continuación la fórmula de Itô para encontrar una expresión bien conocida de los momentos pares de una distribución normal centrada. Demostremos que

$$E(B_t^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!} t^n.$$

Los momentos impares de dicha distribución se anulan pues en tal caso el integrando correspondiente resulta ser una función impar. Consideremos entonces la función  $f(x) = \frac{1}{2n}x^{2n}$  para cualquier entero natural  $n$ . De la fórmula de Itô se sigue que

$$\frac{1}{2n}B_t^{2n} - \frac{1}{2n}B_0^{2n} = \int_0^t B_s^{2n-1}dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t (2n-1)B_s^{2n-2}ds.$$

Tomando esperanza y resolviendo de manera iterada se obtiene

$$\begin{aligned} E(B_t^{2n}) &= \frac{2n(2n-1)}{2} \int_0^t E(B_s^{2n-2})ds \\ &= \frac{2n(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} \int_0^t \int_0^{t_1} E(B_s^{2n-4})dsdt_1 \\ &\vdots \\ &= \frac{(2n)!}{2^n} \int_0^t \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{n-1}} 1 dsdt_{n-1} \cdots dt_1. \end{aligned}$$

No es difícil verificar que los resultados sucesivos de estas integrales son:  $t_{n-1}$ ,  $\frac{1}{2!}t_{n-2}^2$ ,  $\frac{1}{3!}t_{n-3}^3$ ,  $\dots$ ,  $\frac{1}{n!}t^n$ . De esta forma se obtiene la fórmula enunciada.  $\square$

### 3. Ecuaciones diferenciales estocásticas

Una ecuación diferencial estocástica es una ecuación de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad (6)$$

definida para valores de  $t$  en un intervalo  $[0, T]$ , y con condición inicial la variable aleatoria  $X_0$  que se asume  $\mathcal{F}_0$ -medible e independiente del movimiento Browniano. La incógnita de esta ecuación es el proceso  $X_t$ . Los coeficientes  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  son funciones reales definidas sobre  $[0, T] \times \mathbb{R}$ , y se conocen como los coeficientes de *tendencia* (*drift* en inglés o también *deriva* en español) y de *difusión* respectivamente. La ecuación diferencial (6) se interpreta como la ecuación integral

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s, \quad (7)$$

en donde la primera es una integral de Riemann mientras que la segunda es una integral estocástica de Itô. El proceso solución puede interpretarse como el estado de un sistema que evoluciona de manera determinista gobernado por la parte no aleatoria de la ecuación pero perturbado por un ruido aditivo dado por la integral estocástica. A un proceso de la forma (7) se le llama *proceso de Itô* y para que esta ecuación tenga alguna solución se deben imponer condiciones en los coeficientes. De manera análoga al caso determinista, existen teoremas básicos de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales estocásticas que establecen condiciones de regularidad para los coeficientes  $b$  y  $\sigma$ , bajo las cuales la ecuación (6) tiene solución única. El siguiente es uno de tales resultados.

**Teorema 2 (Existencia y unicidad)** *Si los coeficientes  $b(t, x)$  y  $\sigma(t, x)$  de la ecuación (6) satisfacen la condición de Lipschitz en la variable  $x$ ,*

$$|b(t, x) - b(t, y)|^2 + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 \leq K|x - y|^2,$$

*y la condición de crecimiento en  $x$ ,*

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq K(1 + |x|^2),$$

*para alguna constante  $K > 0$ , entonces existe proceso estocástico  $X_t$  solución de (6) que es adaptado, continuo, uniformemente acotado en  $L^2(P)$ , es decir,  $\sup_{0 \leq t \leq T} E(X_t^2) < \infty$ , y es además único en el sentido de indistinguibilidad.*

En este caso a tal solución se le llama *solución fuerte* de la ecuación. La demostración de este resultado es semejante al caso determinista, y hace uso del método de

iteraciones de Picard. Mediante este método se define la sucesión de procesos

$$\begin{aligned} X_t^{(0)} &= X_0, \\ X_t^{(n+1)} &= X_0 + \int_0^t b(s, X_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^{(n)}) dB_s. \end{aligned}$$

No repetiremos la demostración, simplemente comentaremos algunos aspectos de los que consta la prueba completa. Naturalmente para que las iteraciones de Picard tengan sentido es necesario verificar que los integrandos involucrados son efectivamente susceptibles de ser integrados respecto de la diferencial respectiva. Para comprobar que tal sucesión de procesos es convergente se demuestra que, con probabilidad uno, esta sucesión constituye una sucesión de Cauchy en el espacio de funciones continuas  $C[0, T]$ , respecto de la norma uniforme  $\|X\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|$ . Dado lo anterior, existe entonces un proceso continuo  $X$ , tal que con probabilidad uno,  $X_t^{(n)}$  converge a  $X_t$  de manera uniforme en el intervalo  $[0, T]$ . Adicionalmente puede demostrarse que el proceso límite es  $L^2$ -acotado en  $[0, T]$ , y que la convergencia  $X_t^{(n)} \rightarrow X_t$  también es válida en  $L^2(P)$ . También debe demostrarse que el proceso límite es efectivamente solución de la ecuación estocástica. Para ello se toma el límite en la ecuación que define las iteraciones, y se verifica la convergencia uniforme en  $[0, T]$  con probabilidad uno, término a término. Los detalles de esta demostración pueden encontrarse por ejemplo en [20].

Cuando algunas de las condiciones que requiere el teorema de existencia y unicidad no se cumplen, la solución de ecuación estocástica puede no existir, como se muestra en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 6** *Considere la ecuación diferencial determinista  $dX_t = X_t^2 dt$  con condición inicial  $X_0 = 1$ . Esto corresponde a tomar los coeficientes  $b(t, x) = x^2$  y  $\sigma(t, x) = 0$  en la ecuación estocástica general. Es sencillo verificar que la solución de esta ecuación es  $X_t = 1/(1-t)$  para valores de  $t$  en el intervalo  $[0, 1)$ . Es decir la solución no está definida para  $t = 1$ . En tal tiempo se dice que la solución explota pues crece hacia infinito. El Teorema 2 de existencia y unicidad no se aplica en este caso pues la condición de crecimiento en  $x$  del coeficiente  $b(t, x)$  no se cumple.*

□

Estos teoremas básicos no establecen la forma de encontrar la solución a una ecuación estocástica dada. La siguiente versión de la *fórmula de Itô* es el resultado clave para realizar algunos de estos cálculos, y generaliza la versión anteriormente enunciada.

**Teorema 3 (Fórmula de Itô)** Si  $X_t$  es un proceso de Itô dado por (6) y  $f(t, x)$  es un función de clase  $C^1$  en  $t$  y de clase  $C^2$  en  $x$ , entonces el proceso  $Y_t = f(t, X_t)$  es también un proceso de Itô y satisface la ecuación

$$dY_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)(dX_t)^2. \quad (8)$$

Los subíndices indican derivada y (6) se substituye en (8) usando la siguiente *tabla de multiplicación de McKean*:

$\times$	$dt$	$dB_t$
$dt$	0	0
$dB_t$	0	$dt$

Observe que como las derivadas involucradas son funciones continuas, las integrales estocásticas resultantes están bien definidas. La demostración de este resultado sigue las mismas líneas que la versión más simple. Ilustraremos a continuación el uso de esta fórmula con varios ejemplos.

**Ejemplo 7**  $\int_0^t s dB_s = tB_t - \int_0^t B_t dt.$

Para verificar esta fórmula puede tomarse el proceso  $X_t = B_t$  y la función  $f(t, x) = tx$ . Entonces

$$\begin{aligned} d(f(t, B_t)) &= f_t(t, B_t)dt + f_x(t, B_t)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B_t)(dB_t)^2 \\ d(tB_t) &= B_t dt + t dB_t. \end{aligned}$$

Integrando se obtiene la fórmula enunciada.

**Ejemplo 8** Considere la función  $f(x) = e^x$ . Por la fórmula de Itô,

$$e^{B_t} - e^{B_0} = \int_0^t e^{B_s} dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t e^{B_s} ds,$$

es decir, el proceso  $X_t = e^{B_t}$  satisface la ecuación diferencial

$$dX_t = X_t dB_t + \frac{1}{2} X_t dt,$$

con condición inicial  $X_0 = 1$ . A este proceso se le llama movimiento Browniano geométrico. Más adelante estudiaremos con más detalle este proceso. □

**Ejemplo 9** *Demostraremos que el proceso  $X_t = B_t/(1+t)$  es solución de la ecuación estocástica*

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{1}{1+t} dB_t,$$

con condición inicial  $X_0 = 0$ . Sea  $f(t, x) = x/(1+t)$ . El proceso  $X_t = f(t, B_t)$  cumple la condición inicial y por la fórmula de Itô satisface la ecuación

$$\begin{aligned} dX_t &= f_t(t, B_t)dt + f_x(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B_t) dt \\ &= -\frac{B_t}{(1+t)^2} dt + \frac{1}{1+t} dB_t \\ &= -\frac{X_t}{1+t} dt + \frac{1}{1+t} dB_t. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 10** *Usando el método de igualación de coeficientes resolveremos la ecuación*

$$dX_t = -X_t dt + e^{-t} dB_t,$$

cuando la condición inicial es  $X_0 = 0$ . Se busca un función  $f(t, x)$  tal que el proceso solución pueda escribirse como  $X_t = f(t, B_t)$ . Igualando los coeficientes de esta ecuación con los de la fórmula de Itô

$$dX_t = f_t(t, B_t)dt + f_x(t, B_t) dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, B_t) dt,$$

se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_x &= e^{-t} \\ f_t + \frac{1}{2}f_{xx} &= -f. \end{aligned}$$

De la primera ecuación se obtiene  $f(t, x) = e^{-t}x + c(t)$ . Substituyendo en la segunda ecuación y simplificando se obtiene  $c'(t) = -c(t)$ , cuya solución es  $c(t) = ce^{-t}$  en donde  $c$  es una constante. Por lo tanto  $f(t, x) = e^{-t}(x + c)$ . Para que el proceso  $X_t = f(t, B_t) = e^{-t}(B_t + c)$  cumpla la condición inicial  $X_0 = 0$  forzosamente la constante  $c$  debe ser cero. De esta forma la función buscada es  $f(t, x) = e^{-t}x$ . En tal caso la fórmula de Itô asegura que efectivamente

$$\begin{aligned} dX_t &= -e^{-t}B_t dt + e^{-t} dB_t \\ &= -X_t dt + e^{-t} dB_t. \end{aligned}$$

□

## 4. Modelos y simulación

El modelo de ecuación estocástica ha resultado muy útil para representar sistemas que están fuertemente afectados por ruido o perturbaciones aleatorias. Aplicaciones de tales modelos se estudian en ingeniería, finanzas y física entre muchas otras áreas. Debido a la imposibilidad de encontrar soluciones explícitas a ciertas ecuaciones de interés, los métodos numéricos del caso determinista se han extendido al caso estocástico. En esta sección se exponen algunos modelos particulares de ecuaciones estocásticas, y se explica un mecanismo para simular las trayectorias del proceso solución.

### Simulación

Una trayectoria del proceso  $X_t$  que sigue la ley de movimiento de una ecuación de la forma

$$\begin{aligned}dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \\X_0 &= x_0,\end{aligned}$$

puede obtenerse mediante el método de discretización de Euler-Maruyama. En este procedimiento se divide el intervalo  $[0, t]$  de manera uniforme en  $n$  subintervalos de idéntica longitud  $\Delta t = t/n$ , y se define  $t_j = j\Delta t$  para  $j = 0, 1, 2, \dots, N$ . Suponiendo que  $Y_j$  es un valor al azar de la distribución normal estándar, se definen los valores sucesivos de la trayectoria solución de la ecuación estocástica como sigue

$$\begin{aligned}X_0 &= x_0, \\X_{t_{j+1}} &= X_{t_j} + b(t_j, X_{t_j})\Delta t + \sigma(t_j, X_{t_j}) \sqrt{\Delta t} Y_j.\end{aligned}$$

Más adelante se presentará una implementación de este procedimiento en MATLAB para simular trayectorias de soluciones de ecuaciones particulares. En [9] puede encontrarse una primera lectura de algunos métodos para simular ecuaciones estocásticas.

### Movimiento Browniano geométrico

Considere la ecuación estocástica

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \tag{9}$$

con condición inicial  $X_0 = x_0 > 0$ , en donde  $\mu$  y  $\sigma > 0$  son constantes. Este ecuación es de amplio uso en finanzas para modelar el precio de algunos bienes que fluctúan siguiendo los vaivenes de los mercados financieros, y puede interpretarse de la siguiente forma. En ausencia del término estocástico, la ecuación se reduce a  $dX_t = \mu X_t dt$ , cuya solución es  $X_t = x_0 e^{\mu t}$ . Esta función representa el comportamiento en el tiempo de un capital inicial positivo  $x_0$  que crece de manera continua y determinista a una tasa efectiva<sup>3</sup> del  $100 \cdot \mu$  % suponiendo  $\mu > 0$ .

Por otro lado la parte estocástica corresponde a la volatilidad de una inversión con riesgo sujeta a las fluctuaciones de los mercados financieros. El modelo asume que dicha variabilidad es proporcional al valor de la inversión. Observe que los coeficientes de esta ecuación satisfacen las condiciones para la existencia y unicidad de la solución. Es posible resolver la ecuación (9) usando el método de *igualación de coeficientes*. Para ello se necesita encontrar una función  $f(t, x)$  tal que al aplicar la fórmula de Itô al proceso  $X_t = f(t, B_t)$  se obtenga la ecuación (9). Comparando entonces los coeficientes de la fórmula general

$$dX_t = f_t(t, X_t)dt + f_x(t, X_t)dB_t + \frac{1}{2}f_{xx}(t, X_t)dt$$

con los de (9), se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned}\mu f(t, x) &= f_t(t, x) + \frac{1}{2}f_{xx}(t, x), \\ \sigma f(t, x) &= f_x(t, x).\end{aligned}$$

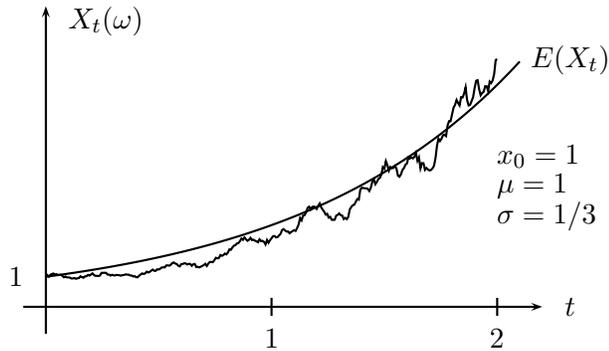
De la segunda ecuación se obtiene que  $f(t, x) = \exp[\sigma x + g(t)]$  para alguna función  $g(t)$ . Substituyendo en la primera ecuación se obtiene  $g'(t) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  cuya solución es  $g(t) = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$ . Por lo tanto la solución de (9) es

$$X_t = x_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t].$$

A este proceso se le llama *movimiento Browniano geométrico*, y también se le conoce con el nombre de *movimiento Browniano exponencial*. En la siguiente figura puede apreciarse una trayectoria de este proceso con una inversión inicial  $x_0$  de una unidad monetaria, y con parámetros  $\mu = 1$  y  $\sigma = 1/3$ . La curva creciente corresponde al crecimiento determinista de la inversión cuando no hay aleatoriedad, es decir, cuando el coeficiente de difusión es cero.

---

<sup>3</sup>Esto es equivalente a una tasa continua o nominal del  $100 \cdot \ln(1 + \mu)$  %. Por ejemplo si  $\mu = 0.1$  entonces al final de una unidad de tiempo, el capital inicial  $x_0$  crecerá a  $x_0 \cdot e^{0.1} = x_0 \cdot 1.10517092 = x_0 \cdot (1 + 0.10517092)$  unidades monetarias.



Simulación del movimiento Browniano geométrico.

En el siguiente programa de computadora se muestra una manera de simular trayectorias de este proceso. El código es una traducción a MATLAB de la discretización de la ecuación estocástica, y es una adaptación del código que aparece en [9]. Este programa puede ser encontrado en la página web de Desmond J. Higham, junto con la implementación de otros modelos y otras técnicas de discretización. La función `randn` produce un valor al azar de la distribución normal estándar.

```

randn('state',100)
T=2; N=300; dt=T/N; xcero=1; mu=1; sigma=1/3;
dW=zeros(1,N); MBG=zeros(1,N);
dW(1)=sqrt(dt)*randn;
MBG(1)=xcero+mu*dt+sigma*xcero*dW(1);
for j=2:N
    dW(j)=sqrt(dt)*randn
    MBG(j)=MBG(j-1)+mu*MBG(j-1)*dt+sigma*MBG(j-1)*dW(j)
end
plot([0:dt:T],[xcero,MBG],'r-')

```

Código MATLAB para simular el movimiento Browniano geométrico.

Recordando que la función generadora de momentos de la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$  es  $M(s) = \exp(\mu s + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2)$ , es sencillo comprobar que  $E(X_t) = x_0 e^{\mu t}$ , en efecto,

$$\begin{aligned}
 E(X_t) &= E(x_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t]) \\
 &= x_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] E(\exp[\sigma B_t]) \\
 &= x_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] \exp[\frac{1}{2}t\sigma^2] \\
 &= x_0 e^{\mu t}.
 \end{aligned}$$

Similarmente es fácil verificar que  $\text{Var}(X_t) = x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1)$ , pues

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_t) &= \text{Var}(x_0 \exp[(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t]) \\
 &= x_0^2 \exp[2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] \text{Var}(\exp[\sigma B_t]) \\
 &= x_0^2 \exp[2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] (E(\exp[2\sigma B_t]) - E^2(\exp[\sigma B_t])) \\
 &= x_0^2 \exp[2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t] (\exp[\frac{1}{2}t(2\sigma)^2] - \exp[2(\frac{1}{2}t\sigma^2)]) \\
 &= x_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2 t} - 1).
 \end{aligned}$$

## Proceso de Ornstein-Uhlenbeck

Considere ahora la ecuación estocástica

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dB_t, \quad (10)$$

en donde  $\alpha$  y  $\sigma$  son constantes positivas. Esta ecuación fue propuesta por Ornstein y Uhlenbeck para modelar la variación de la velocidad en el movimiento difuso de una partícula para tiempos pequeños. La variable  $X_t$  se interpreta entonces como la velocidad de la partícula al tiempo  $t$ . La parte determinista  $-\alpha X_t$  corresponde a la fuerza de fricción y el sumando  $\sigma dB_t$  es un ruido aleatorio. Encontraremos la solución de (10) suponiendo que el proceso inicia en  $x_0$ . Considere una solución de la forma

$$X_t = a(t)[x_0 + \int_0^t b(s)dB_s], \quad (11)$$

en donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables. Derivando (11) y usando la fórmula de Itô (8) se obtiene

$$\begin{aligned}
 dX_t &= a'(t)[x_0 + \int_0^t b(s)dB_s]dt + a(t)b(t)dB_t \\
 &= \frac{a'(t)}{a(t)}X_t dt + a(t)b(t)dB_t.
 \end{aligned}$$

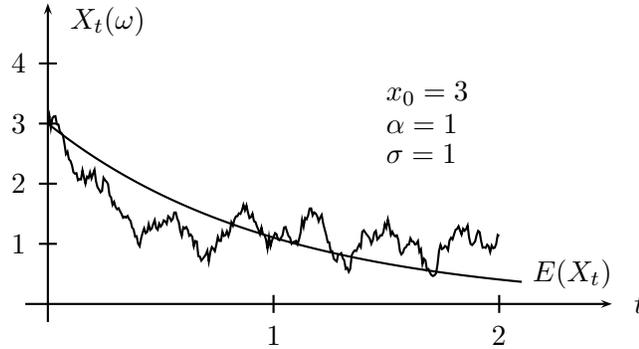
Comparando con (10) las funciones  $a$  y  $b$  deben entonces cumplir

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = -\alpha, \quad a(t)b(t) = \sigma.$$

Suponiendo  $a(0) = 1$  se obtiene  $a(t) = \exp(-\alpha t)$  y  $b(t) = \sigma \exp(\alpha t)$ . Por lo tanto el proceso solución de (10), llamado proceso de *Ornstein-Uhlenbeck*, es

$$X_t = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s.$$

En la siguiente figura se muestra una simulación de este proceso y se compara con  $E(X_t)$ . Naturalmente el proceso muestra un decaimiento conforme el tiempo avanza debido a la fricción que sufre el movimiento de la partícula.



Simulación del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

Por ser la integral estocástica una martingala se tiene que  $E(X_t) = x_0 e^{-\alpha t}$ . Se puede calcular también la varianza de  $X_t$  como una aplicación de la isometría de Itô:

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(X_t) &= \sigma^2 \text{Var}\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right) \\
 &= \sigma^2 \mathbb{E}\left(\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s\right)^2 \\
 &= \sigma^2 \left(\int_0^t e^{-2\alpha(t-s)} ds\right) \\
 &= \sigma^2 e^{-2\alpha t} \left[\frac{1}{2\alpha} e^{2\alpha s}\right]_0^t \\
 &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}).
 \end{aligned}$$

## Puente Browniano

Considere la ecuación estocástica

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t,$$

para  $t \in [0, 1)$  y con condicional inicial  $X_0 = 0$ . Esta ecuación puede resolverse proponiendo nuevamente una solución de la forma

$$X_t = a(t) \left[ X_0 + \int_0^t b(s) dB_s \right],$$

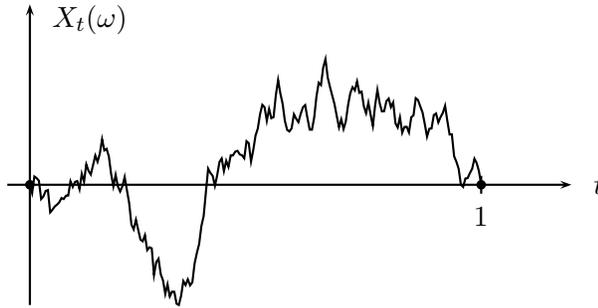
en donde  $a$  y  $b$  son funciones diferenciables. Derivando se obtiene nuevamente

$$\begin{aligned} dX_t &= a'(t)[x_0 + \int_0^t b(s)dB_s]dt + a(t)b(t)dB_t \\ &= \frac{a'(t)}{a(t)}X_tdt + a(t)b(t)dB_t. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes se obtienen las ecuaciones  $a'(t)/a(t) = -1/(1-t)$  y  $a(t)b(t) = 1$ . Suponiendo  $a(0) = 1$  se obtiene  $a(t) = 1-t$  y  $b(t) = 1/(1-t)$ . Por lo tanto para  $t \in [0, 1)$ ,

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{1}{1-s} dB_s.$$

Este proceso cumple la condición de tomar el valor cero en los tiempos  $t = 0$  y  $t = 1$ , y por ello se le llama *punte Browniano* en el intervalo  $[0, 1]$ . No es muy difícil probar que, efectivamente, con probabilidad uno, estas trayectorias se anulan cuando  $t$  tiende a uno. Una trayectoria de este proceso se muestra en siguiente figura.



Una trayectoria del puente Browniano en  $[0, 1]$ .

Es sencillo calcular la esperanza, varianza y covarianza de este proceso. Primero observe que  $E(X_t) = 0$ . Usando este resultado y la isometría de Itô calcularemos la covarianza entre  $X_s$  y  $X_t$  para  $0 \leq s \leq t$ :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X_s, X_t) &= E(X_s X_t) \\ &= (1-s)(1-t)E\left(\int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u \int_0^t \frac{1}{1-u} dB_u\right). \end{aligned}$$

La segunda integral puede descomponerse en la suma de dos integrales, una sobre el intervalo  $[0, s]$  y otra sobre  $(s, t]$ . Dada la propiedad de incrementos independientes del movimiento Browniano, el segundo sumando desaparece. De modo que

$$\text{Cov}(X_s, X_t) = (1-s)(1-t)E\left(\int_0^s \frac{1}{1-u} dB_u\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= (1-s)(1-t) \int_0^s \left(\frac{1}{1-u}\right)^2 du \\
&= (1-s)(1-t) \left[ \frac{1}{1-u} \right]_0^s \\
&= s(1-t).
\end{aligned}$$

En particular,  $\text{Var}(X_t) = t(1-t)$ . El puente Browniano en  $[0, 1]$  también puede representarse de las siguientes formas equivalentes

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_t &= B_t - tB_1 \quad \text{para } t \in [0, 1], \\
\tilde{\tilde{X}}_t &= \tilde{X}_{1-t}.
\end{aligned}$$

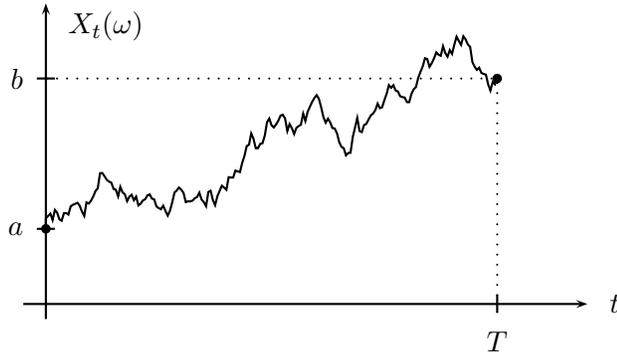
Más generalmente puede definirse el puente browniano a través de la ecuación

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dB_t,$$

para  $t \in [0, T)$  y con condicional inicial  $X_0 = a$ . Esta ecuación determina un proceso que inicia en  $a$  y termina en  $b$ . La media y covarianza son

$$\begin{aligned}
E(X_t) &= a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{bt}{T}, \\
\text{Cov}(X_s, X_t) &= \min\{s, t\} - \frac{st}{T}.
\end{aligned}$$

Una trayectoria de este proceso se muestra a continuación:



Una trayectoria del puente Browniano en  $[0, T]$  de  $a$  a  $b$ .

**Comentarios finales.** Espero este trabajo haya logrado el objetivo de dar una introducción simple a las ecuaciones estocásticas, y que los varios ejemplos presentados hayan hecho más transparente el concepto de integral estocástica. Tal vez no

sea necesario mencionar que la teoría matemática de estos temas se ha desarrollado de manera mucho más general que la presentada en estas notas, y muchos temas de aplicación y relación con otras ramas de las matemáticas han sido dejados de lado. Se requiere por supuesto de una lectura más extensa para conocer con mayor detalle los varios aspectos del cálculo estocástico. En este sentido se recomiendan a continuación algunos textos. Una introducción elemental sobre simulación de ecuaciones estocásticas puede encontrarse en [9]. Otros modelos de ecuaciones estocásticas y una gran variedad de aplicaciones pueden encontrarse en el libro de Kloeden y Platen [13]. Para un estudio sistemático y detallado de estos temas pueden consultarse por ejemplo los textos [4], [6], [10], [12], [18] o [20].

**Agradecimientos.** Agradezco sinceramente al revisor de este trabajo por su lectura cuidadosa y por sus valiosas sugerencias que me permitieron mejorar varios aspectos de este escrito. También deseo expresar mi agradecimiento a los organizadores del primer congreso regional en probabilidad: Jorge A. León, José Villa, Juan Ruiz de Chávez y Jorge E. Macías, por la invitación a presentar este trabajo en la Universidad Autónoma de Aguascalientes.

## Referencias

- [1] Brown R. (1828) *A brief account of Microscopical Observations made in the Months of June, July, and August, 1827, on the Particles contained in the Pollen of Plants; and on the general Existence of active Molecules in Organic and Inorganic Bodies*, Philosophical Magazine N. S. 4, 161-173.
- [2] Brzeźniak Z. y Zastawniak T. (1999) *Basic stochastic processes*. Springer.
- [3] Cherny A. S., Engelbert H. J. (2005) *Singular stochastic differential equations*. Springer.
- [4] Chung K. L. y Williams R. J. (1983) *Introduction to stochastic integration*. Birkhäuser.
- [5] Einstein A. (1956) *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Dover.
- [6] Gard T. C. (1988) *Introduction to stochastic differential equations*. Marcel Dekker, Inc.
- [7] Hernández-Hernández D. (2004) Movimiento Browniano y ecuaciones de Hamilton-Jacobi. *Carta Informativa* **42**, SMM.
- [8] Harris B. (1966) *Probability theory*. Addison-Wesley.

- [9] Higham D. J. (2001) An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM REVIEW* Vol. 43, No. 3, 525–546.
- [10] Karatzas I. y Shreve S. E. (1991) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer.
- [11] Karlin S. y Taylor H. M. (1975) *A first course in stochastic processes*. Academic Press, Inc.
- [12] Klebaner F. C. (1998) *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press.
- [13] Kloeden P. E. y Platen E. (1999) *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer–Verlag.
- [14] Korn R. y Korn E. (2001) *Option pricing and portfolio optimization: modern methods of financial mathematics*. Graduate Studies in Mathematics **31**. AMS.
- [15] León J. A. (2001) Una introducción a las ecuaciones diferenciales estocásticas. *Carta Informativa*, SMM.
- [16] Mazo R. (2002) *Brownian motion: fluctuations, dynamics, and applications*. Oxford University Press.
- [17] Nelson E. (1967) *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton University Press.
- [18] Øksendal B. (1992) *Stochastic differential equations: an introduction with applications*. Springer–Verlag.
- [19] Rincón L. (2005) Construyendo la integral estocástica de Itô. *Aportaciones Matemáticas*, Serie Comunicaciones **35**, 265–283. SMM.
- [20] Steele J. M. (2001) *Stochastic calculus and financial applications*. Springer–Verlag.

## Índice

- $\sigma$ -álgebra, 2
- Conjunto
  - Borel medible, 3
  - medible, 2
- Distribución, 3
- Espacio
  - $C^1$ , 19
  - $C^2$ , 19
  - $L^2(P)$ , 10
  - $L^2(P \times dt)$ , 10
  - $\mathcal{H}^2$ , 12
  - $\mathcal{H}_0^2$ , 11
  - $\mathcal{L}_{loc}^2$ , 14
  - de probabilidad, 2
  - filtrado, 4
  - medible, 2
  - muestral, 2
- Esperanza, 3
  - condicional, 3
- Eventos, 2
- Filtración, 4
  - natural, 5
- Función
  - de distribución, 3
  - medible, 3
- Integración estocástica, 9
  - como un proceso, 14
  - extensión por aproximación, 12
  - extensión por localización, 14
  - para procesos simples, 11
  - propiedades, 18
- Itô
  - fórmula de, 19, 24
  - isometría de, 11
  - proceso de, 22
- Medida de probabilidad, 2
- Movimiento Browniano, 7
  - caracterización, 9
  - geométrico, 26
  - variación, 8
  - variación cuadrática, 8
- Proceso
  - càdlàg*, 4
  - adaptado, 5
  - de Markov, 5
  - de Ornstein-Uhlenbeck, 29
  - equivalencia, 5
  - estocástico, 4
  - indistinguibilidad, 5
  - martingala, 6
  - modificación, 5
  - simple, 11
  - submartingala, 6
  - supermartingala, 6
  - trayectorias, 4
  - versión, 5
- Puente Browniano, 30
- Tiempo de paro, 14
- Variable aleatoria, 3