Introducción a la teoría del riesgo

Luis Rincón
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias UNAM
Circuito Exterior de CU
04510 México DF

Enero 2012

Prólogo

El presente texto contiene los temas del curso semestral de teoría del riesgo que el autor ha impartido a estudiantes de último semestre de la carrera de actuaría en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Contiene el material básico para un curso introductorio a ciertos temas de la teoría del riesgo aplicada a seguros, e incluye una colección de ejercicios. La mayor parte del material que se presenta aquí fue compilado de las fuentes que aparecen al final del texto. Espero que este material sea de alguna ayuda para los numerosos alumnos de las distintas escuelas de actuaría y de matemáticas aplicadas de países de habla hispana, y contribuya también a apoyar el trabajo docente de sus profesores. El texto fue escrito en el sistema LaTeX, las ilustraciones fueron elaboradas usando el paquete PSTRICKS. La última versión disponible de este texto en su formato digital puede encontrarse en la página web

http://www.matematicas.unam.mx/lars

Agradezco sinceramente los comentarios, correcciones y sugerencias que he recibido por parte de alumnos y profesores para mejorar este material. Y agradezco también el apoyo del proyecto PAPIME PE103111 a través del cual pudo ser posible el desarrollo y la edición de este texto. Toda comunicación puede enviarse a la cuenta de correo que aparece abajo.

Luis Rincón
Enero 2012
Ciudad Universitaria UNAM
lars@fciencias.unam.mx

Contenido

1. Modelo individual vs modelo colectivo **1**
1.1. Introducción 1
1.2. Modelo individual 3
1.3. Fórmula de De Pril 8
1.4. Modelo colectivo 16
1.5. Modelo colectivo Poisson 23
1.6. Ejercicios 30

2. Fórmula de Panjer y métodos de aproximación **41**
2.1. Fórmula de Panjer 41
2.2. Aproximación normal 49
2.3. Aproximación gamma trasladada 50
2.4. Aproximación de Edgeworth 51
2.5. Ejercicios 55

3. Principios para el cálculo de primas **61**
3.1. Principios generales 61
3.2. Propiedades 69
3.3. Primas y funciones de utilidad 71
3.4. Ejercicios 72

4. Reaseguro **79**
4.1. Reaseguro proporcional 81
4.2. Reaseguro no proporcional 82
4.3. Ejercicios 87

5. Teoría de la credibilidad **95**
5.1. Credibilidad clásica 95
5.2. Credibilidad Bayesiana 101
5.3. Ejercicios 106

6. Procesos estocásticos **109**
6.1. Filtraciones y tiempos de paro 110
6.2. Cadenas de Markov 110
6.3. Proceso de Poisson 111
6.4. Martingalas 112
6.5. Ejercicios 113

7. Teoría de la ruina **117**
7.1. Un proceso de riesgo a tiempo discreto 117
7.2. Modelo clásico de Cramér-Lundberg 127
7.3. Probabilidad de ruina 130
7.4. Severidad de la ruina 134
7.5. El coeficiente de ajuste 138
7.6. Aproximación de De Vylder 149
7.7. Fórmula de Pollaczek-Khinchin 151
7.8. Ejercicios 154

A. Formulario y resultados varios **157**

Bibliografía **179**

Índice analítico **181**

Capítulo 1

Modelo individual vs modelo colectivo

En este capítulo se presenta una introducción al esquema del seguro y al concepto general de riesgo. Se presentan además las perspectivas individual y colectiva para modelar el riesgo correspondiente al conjunto de reclamaciones que afronta una compañía aseguradora. Se estudian también algunas propiedades y relaciones entre estas dos perspectivas. En el resto del texto se adopta el modelo colectivo como modelo fundamental.

1.1. Introducción

El término *riesgo* tiene muchas acepciones dependiendo del área de estudio que se trate, y en términos imprecisos puede definirse como la posibilidad de experimentar ciertos eventos de interés y las consecuencias derivadas de dichos eventos. Los riesgos pueden tener un sentido positivo o negativo, pero en general tienen una connotación de pérdida. El objetivo es identificar los riesgos, ponderarlos con base en sus consecuencias, decidir la aceptación o no de los mismos, y tomar provecho de su existencia. Por lo tanto no se trata necesariamente de evitarlos o de protegerse contra ellos. El quehacer cotidiano del hombre, ya sea en el ámbito personal o profesional, implica necesariamente y a cada momento hacer frente a ciertos riesgos, y ello puede tener consecuencias no deseadas pero también puede ofrecer oportunidades. Por ejemplo, el comprar un boleto de lotería conlleva el riesgo de perder el importe pagado por el boleto, pero al mismo tiempo la posibilidad de ganar una gran cantidad de dinero. Cada uno de nosotros pondera estas dos posibilidades de manera distinta y toma una decisión al respecto. Otro ejemplo en donde es evidente la evaluación (a veces inconsciente) de los riesgos es cuando una persona decide viajar en avión, en este caso se considera primordial la rapidez y comodidad del viaje, y se desdeña convenientemente cualquier posibilidad de accidente. Como hemos mencionado, el término riesgo se define de manera distinta dependiendo de la disciplina de estudio. En ingeniería, por ejemplo, puede definirse el riesgo como el producto de la probabilidad de que un evento no deseable ocurra y el daño esperado debido a la ocurrencia del evento, es decir, Riesgo=(Probabilidad de un accidente)×(Daños como consecuencia del accidente). En finanzas, puede definirse el riesgo en términos de la variación o volatilidad de una inversión, o también como la posible pérdida en una inversión; en general, se considera que una inversión en la bolsa de valores (tasa de interés variable) es más riesgosa comparada con una inversión en un banco (tasa de interés fija). Finalmente, en seguros, el riesgo puede definirse como el monto de las reclamaciones totales de los asegurados. Veremos a continuación con más detalle este último caso pues es al que están dirigidos principalmente los modelos matemáticos que estudiaremos.

A grandes rasgos, la forma en la que opera un seguro es la siguiente: un grupo de personas reconocen que están expuestas a sufrir algún tipo de siniestro en sus bienes o en sus personas, y que dichos siniestros pueden causarles consecuencias irreparables como la pérdida de sus vidas, o bien pérdidas económicas considerables. Al contratar un seguro (es decir, firmar una *póliza de seguro*), cada una de estas personas paga por adelantado una cantidad de dinero (generalmente pequeña) llamada *prima* a una compañía aseguradora, quien se compromete a resarcir monetariamente a todas aquellas personas aseguradas que sufrieron algún siniestro durante el tiempo de vigencia del seguro y según lo pactado en la póliza del seguro. De esta manera, aunque no se conozca de manera individual exactamente a las personas que sufrirán un siniestro, el capital obtenido de manera colectiva debe ser suficiente para solventar los gastos de los siniestros individuales que se presentan. Es claro que bajo este mecanismo las pérdidas económicas del colectivo se distribuyen en todos y cada uno de los individuos logrando así garantizar la sobrevivencia financiera de cada uno de ellos, en otras palabras, mediante el contrato de un seguro se logran disminuir los daños económicos de aquellas personas que tuvieron la mala fortuna de sufrir un siniestro. Naturalmente, para que tal mecanismo de asistencia colectiva sea factible, es necesario que el número de asegurados sea suficientemente grande, y que se establezcan con precisión las características de los siniestros a considerar. Es claro también que, tanto el número de siniestros, como el monto de las reclamaciones, así como los tiempos en los que se efectúan las reclamaciones son variables desconocidas, y que los modelos de la teoría de la probabilidad podrían ser de alguna ayuda en su estudio. En efecto, en las siguientes páginas estudiaremos algunos modelos matemáticos que han ayudado a entender y controlar el aspecto aleatorio de ciertas variables relevantes en los seguros.

1.2. Modelo individual

Suponga que se tiene un portafolio de n pólizas individuales de seguros válidas por un año como se muestra en la Figura 1.1.

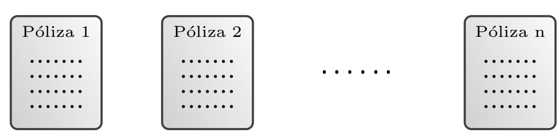


Figura 1.1

Sea p_j la probabilidad de que el j-ésimo asegurado no efectúe ninguna reclamación durante el tiempo de vigencia del seguro, y sea q_j la probabilidad de que se observe exactamente una reclamación. Suponga que la igualdad $p_j + q_j = 1$ se cumple, ello significa que no puede haber más de una reclamación por cada asegurado. Tal situación puede corresponder, por ejemplo, a los seguros de vida. Defina la variable aleatoria

$$D_j = \begin{cases} 1 & \text{si hay reclamación en la póliza } j, \\ 0 & \text{si no hay reclamación en la póliza } j. \end{cases}$$

Claramente D_j tiene distribución Bernoulli con parámetro q_j. El uso de la letra D viene del término en inglés *Death.* Observe que el número total de reclamaciones está dado por la variable aleatoria $N = D_1 + \cdots + D_n$. Ahora suponga artificialmente que cada póliza efectúa una reclamación, y sea la variable aleatoria $C_j > 0$ el monto de la reclamación efectuada por la póliza j. Debido a que los siniestros pueden presentarse con características distintas y ello puede derivar en distintos montos de reclamación, consideraremos de manera general a C_j no como una constante sino como una variable aleatoria. La letra C proviene del término en inglés *Claim*, que se traduce en español como *reclamación*. La verdadera reclamación de la póliza j está dada por el producto

$$D_jC_j = \begin{cases} C_j & \text{si } D_j = 1, \\ 0 & \text{si } D_j = 0. \end{cases}$$

Observe que esta variable aleatoria puede ser mixta, es decir, no ser continua ni discreta. Véase la Figura 1.2 en donde se muestran posibles gráficas de la función de distribución de esta variable aleatoria. De esta forma se considera como datos en este modelo la colección de vectores aleatorios $(D_1, C_1), \ldots, (D_n, C_n)$, que supondremos independientes. Consideraremos además que las variables D_j y C_j también son independientes entre sí.

Definición 1.1 *El monto de reclamaciones agregadas, o también llamado agregado de reclamaciones, en el modelo individual, es la variable aleatoria*

$$S = \sum_{j=1}^{n} D_jC_j. \tag{1.1}$$

Esta variable es el monto que afronta una compañía aseguradora por concepto de reclamaciones durante el periodo completo del seguro. La ecuación (1.1) representa el *modelo individual* para una póliza de seguros de las características señaladas. El modelo tiene este nombre pues supone conocer las probabilidades de reclamación y posible monto de reclamación de todos y cada uno de los asegurados de manera individual. Una posible desventaja de este modelo es que presupone que el número de asegurados en la cartera se mantiene constante durante todo el tiempo de vigencia del seguro.
Desde el punto de vista matemático, y también desde la perspectiva del ne-

gocio del seguro, nuestro objetivo es conocer las características de la variable S, a quien llamaremos *riesgo*. Si $F_j(x)$ denota la función de distribución del producto D_jC_j, entonces la función de distribución $F(x)$ del riesgo S adquiere la siguiente expresión en términos de convoluciones:

$$F(x) = (F_1 * \cdots * F_n)(x).$$

Esta fórmula general y compacta es, sin embargo, un tanto difícil de calcular y no la utilizaremos con frecuencia. Como primeros resultados generales se presentan a continuación algunas características de S. Denotaremos por $G_j(x)$ la función de distribución de C_j, y como es costumbre, cuando exista, $M_X(t)$ denota la función generadora de momentos de una variable X cualquiera.

Proposición 1.1 *Bajo la notación e hipótesis del modelo individual se tienen los siguientes resultados.*

1. $E(S) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j E(C_j)$.

2. $Var(S) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} [\, q_j\, Var(C_j) + q_j p_j E^2(C_j)\,]$.

3. $F_j(x) = \begin{cases} 1 + q_j\,(G_j(x) - 1) & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

4. $M_{D_jC_j}(t) = 1 + q_j\,(M_{C_j}(t) - 1)$.

5. $M_S(t) = \displaystyle\prod_{j=1}^{n} [\, 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)\,]$.

Demostración.
1. Por la hipótesis de independencia,

$$E(S) = \sum_{j=1}^{n} E(D_jC_j) = \sum_{j=1}^{n} E(D_j)E(C_j) = \sum_{j=1}^{n} q_j E(C_j).$$

2. Primeramente tenemos que

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(D_jC_j) &= E(D_j^2C_j^2) - E^2(D_jC_j)\\ &= q_jE(C_j^2) - q_j^2E^2(C_j)\\ &= q_j\,[\mathrm{Var}(C_j) + E^2(C_j)] - q_j^2E^2(C_j)\\ &= q_j\mathrm{Var}(C_j) + q_jp_jE^2(C_j).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(D_jC_j) = \sum_{j=1}^{n} [\, q_j\,\mathrm{Var}(C_j) + q_jp_jE^2(C_j)\,].$$

3. Para cualquier número real $x \geqslant 0$,

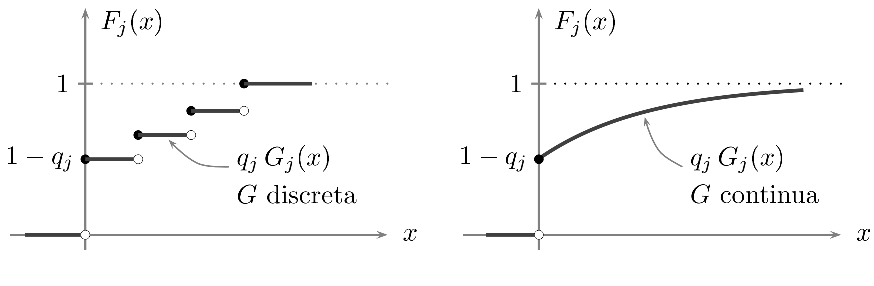
$$\begin{aligned}F_j(x) &= P(D_jC_j \leqslant x)\\ &= P(D_jC_j \leqslant x \mid D_j = 0)\,P(D_j = 0)\\ &\quad + P(D_jC_j \leqslant x \mid D_j = 1)\,P(D_j = 1)\\ &= P(0 \leqslant x \mid D_j = 0)\,p_j + P(C_j \leqslant x \mid D_j = 1)\,q_j\\ &= p_j + q_j\,G_j(x)\\ &= 1 + q_j(G_j(x) - 1).\end{aligned}$$

4. Nuevamente condicionando sobre el valor de D_j,

$$\begin{aligned}M_{D_jC_j}(t) &= E(e^{tD_jC_j})\\ &= E(e^{tD_jC_j} \mid D_j = 0)P(D_j = 0)\\ &\quad + E(e^{tD_jC_j} \mid D_j = 1)P(D_j = 1)\\ &= p_j + q_jM_{C_j}(t)\\ &= 1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1).\end{aligned}$$

5. Esta igualdad se sigue directamente de la anterior usando la hipótesis de independencia. ■

Puede considerarse que la variable S tiene una distribución binomial generalizada en el siguiente sentido: se tienen n ensayos independientes Bernoulli, en donde la probabilidad de éxito en el ensayo j es q_j, y el valor asociado



(a) (b)

Figura 1.2

al resultado éxito no es 1 como en el esquema usual sino el monto $C_j > 0$. Puede comprobarse que cuando q_j es constante p, y los montos C_j son todos iguales a 1, la variable S tiene distribución $\text{bin}(n, p)$, y las fórmula generales demostradas para S se reducen a las de esta distribución. Al respecto véase el ejercicio 15. Es también interesante observar que aunque inicialmente el modelo individual de riesgo que hemos presentado puede aplicarse a esquemas de seguros en donde hay como máximo una reclamación por póliza, esta única reclamación puede considerarse como el monto total conformado por la suma de varias posibles reclamaciones efectuadas por una póliza a lo largo del periodo de vigencia del seguro. De este modo el modelo individual puede también aplicarse al caso de reclamaciones múltiples. En cualquier caso, los datos que deben tenerse o estimarse estadísticamente para aplicar el modelo individual a una situación real son el número de asegurados n, las probabilidades de reclamación $q_1, q_2, \ldots, q_n$, y las distribuciones de probabilidad de los montos $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Aproximación normal

Cuando n es grande y el portafolio de asegurados es homogéneo en el sentido de que las variables $D_j C_j$ son idénticamente distribuidas con segundo momento finito, puede usarse el teorema central del límite para aproximar la distribución de S mediante la distribución normal, es decir,

$$P(S \leqslant x) = P\left(\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \leqslant \frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right) \approx \Phi\left(\frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}\right).$$

Esta aproximación puede ser adecuada para ciertos riesgos pero tiene la desventaja de que asigna una probabilidad positiva al intervalo $(-\infty, 0)$, lo cual no es consistente con el hecho de que $S \geqslant 0$. Sin embargo, dado que la distribución $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ se concentra principalmente en el intervalo $(\mu - 4\sigma, \mu + 4\sigma)$, cuando la esperanza y la varianza de S son tales que $E(S) - 4\sqrt{\mathrm{Var}(S)} \geqslant 0$, la probabilidad asignada a la parte negativa del eje es realmente pequeña, ello alivia un poco el hecho de que esta distribución no tenga soporte en el intervalo $[0, \infty)$. Tal vez la situación más comprometedora sea que la función de densidad normal decae muy rápidamente pues existen riesgos cuyas funciones de densidad no cumplen con tal característica. Más adelante mencionaremos esta propiedad de las distribuciones de los riesgos en términos de colas pesadas y ligeras.
En la siguiente sección encontraremos una forma recursiva para calcular la función de probabilidad de S cuando el monto de las reclamaciones se modela mediante una variable aleatoria discreta.

1.3. Fórmula de De Pril

Presentaremos a continuación la fórmula de De Pril. Este resultado fue demostrado por Nelson De Pril en 1986 y proporciona una expresión exacta, aunque recursiva, de la distribución de probabilidad de un riesgo en el modelo individual [8]. La fórmula es bastante general aunque presupone que las reclamaciones toman los valores en el conjunto $\{1, 2, \ldots\}$. Este supuesto no es realmente una restricción fuerte pues en la práctica el pago de siniestros se realiza siempre usando alguna unidad monetaria. Para establecer la fórmula de De Pril es necesario dividir el portafolio de n asegurados de acuerdo a la tasa de mortalidad y la suma asegurada. Denotaremos por n_{ij} al número de asegurados que tienen probabilidad de reclamación q_j y monto de reclamación i, en donde i toma valores en $\{1, 2, \ldots, I\}$, y j en $\{1, 2, \ldots, J\}$. De esta forma se tiene la tabla de la Figura 1.3 en donde la suma de las entradas es n, es decir,

$$n = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij}.$$

Denotaremos por Y_{ij} el monto real reclamado por un asegurado cuya pro-

Probabilidades de reclamación

	q_1	q_2	$\cdots$	q_j	$\cdots$	q_J
1	n_{11}	n_{12}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n_{1J}
2	n_{21}	n_{22}	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n_{2J}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
i	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{iJ}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
I	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	n_{Ij}	$\cdots$	n_{IJ}

Monto de la reclamación

Figura 1.3

babilidad de reclamación es q_j, y posible monto reclamado i, es decir,

$$Y_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{con probabilidad } 1 - q_j, \\ i & \text{con probabilidad } q_j. \end{cases}$$

Teorema 1.1 (Fórmula de De Pril [i]) *Sea n_{ij} el número de pólizas cuyos asegurados tienen tasa de mortalidad q_j y suma asegurada i. Suponga que $j = 1, 2, \ldots, J$, e $i = 1, 2, \ldots, I$. Entonces las probabilidades $g_x = P(S = x)$, están dadas por*

$$\begin{aligned} g_x &= \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x \wedge I} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik}\, h(i,k), \qquad \text{para } x \geqslant 1 \\ g_0 &= \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (1 - q_j)^{n_{ij}}, \end{aligned}$$

en donde

$$h(i,k) = i(-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, (\frac{q_j}{1 - q_j})^k$$

Demostración. La función generadora de probabilidad del monto reclamado Y_{ij} por un asegurado con probabilidad de reclamación q_j, y monto reclamado i, es

$$E(t^{Y_{ij}}) = (1 - q_j) + q_j t^i.$$

Por lo tanto, usando la hipótesis de independencia, la función generadora de probabilidad de la cartera completa es

$$G(t) = E(t^S) = \sum_{r=0}^{\infty} t^r g_r = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (1 - q_j + q_j t^i)^{n_{ij}},$$

en donde $g_r = P(S = r)$. Tomando logaritmo y después derivando,

$$\ln G(t) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \ln(1 - q_j + q_j t^i).$$

$$\frac{d}{dt} \ln G(t) = \frac{G'(t)}{G(t)} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, \frac{i q_j t^{i-1}}{1 - q_j + q_j t^i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} tG'(t) &= G(t) \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, \frac{i q_j t^i}{1 - q_j + q_j t^i} \\ &= G(t) \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, i \, \frac{q_j t^i}{1 - q_j} (1 + \frac{q_j t^i}{1 - q_j})^{-1} \\ &= G(t) \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, i \, \frac{q_j t^i}{1 - q_j} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (\frac{q_j t^i}{1 - q_j})^{k-1}, \end{aligned}$$

en donde hemos usado la expansión $(1-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$, válida para $|x| < 1$. Por lo tanto, para valores suficientemente pequeños de t,

$$tG'(t) = G(t) \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, i \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (\frac{q_j}{1 - q_j})^k t^{ik}.$$

Defina ahora la función

$$h(i,k) = i(-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{J} n_{ij} \, (\frac{q_j}{1 - q_j})^k.$$

La doble suma respecto de los índices j y k es absolutamente convergente en cualquiera de los dos órdenes que se efectúen estas sumas y el resultado es el mismo. Por lo tanto es válido el intercambio en el orden de las sumas y la expresión anterior puede escribirse como sigue

$$tG'(t) = G(t) \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{\infty} t^{ik}\, h(i,k).$$

Substituyendo las expresiones para $G'(t)$ y $G(t)$ en sus correspondientes series de potencias se obtiene

$$\sum_{r=1}^{\infty} r t^r g_r = \sum_{r=0}^{\infty} t^r g_r \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{\infty} t^{ik}\, h(i,k).$$

Para $x \geqslant 1$, el coeficiente de t^x en el lado izquierdo es xg_x, mientras que en el lado derecho es la suma de los términos $g_{x-ik}h(i,k)$, para aquellos valores de i y k tales que $1 \leqslant ik \leqslant x$. Se pueden primero establecer los posibles valores para i de la siguiente forma $i = 1, \ldots, x \wedge I$, y por lo tanto los valores para k son $k = 1, \ldots, \lfloor x/i \rfloor$, en donde $x \wedge I$ es el valor mínimo entre x e I, y $\lfloor x/i \rfloor$ es la parte entera del cociente x/i. Igualando estos coeficientes se tiene que

$$xg_x = \sum_{i=1}^{x \wedge I} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik}\, h(i,k),$$

De esta forma se llega a la siguiente expresión, para $x \geqslant 1$,

$$g_x = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{x \wedge I} \sum_{k=1}^{\lfloor x/i \rfloor} g_{x-ik}\, h(i,k).$$

Por otro lado, como $S = 0$ sólo cuando ningún asegurado efectúa ninguna reclamación, para $x = 0$ se tiene que

$$g_0 = \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} (1 - q_j)^{n_{ij}},$$

■

Para un mejor entendimiento de la fórmula recursiva de DePril [i] escribiremos a continuación de manera explícita los primeros términos de este desarrollo.

$$
\begin{aligned}
g_0 &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}(1-q_j)^{n_{ij}} \\
g_1 &= g_0\,h(1,1) \\
g_2 &= \frac{1}{2}\left\{g_0\left[h(1,2)+h(2,1)\right]+g_1 h(1,1)\right\} \\
g_3 &= \frac{1}{3}\left\{g_0\left[h(1,3)+h(3,1)\right]+g_1\left[h(1,2)+h(2,1)\right]+g_2 h(1,1)\right\} \\
&\;\vdots
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1.1 *Para los datos que se muestran en la tabla de la Figura 1.4 en donde se tienen 48 pólizas de seguros con las probabilidades de reclamación y los montos de reclamaciones indicados, la correspondiente función de densidad para este riesgo es la que se muestra en la Figura 1.5. En el apéndice A se encuentra el código en R de una implementación de la fórmula de De Pril [i]. Debe tenerse cuidado en la implementación numérica de esta fórmula pues dado su caracter recursivo y que algunas de las probabilidades involucradas pueden ser muy pequeñas, pueden generarse resultados incorrectos debido al inevitable redondeo de cifras en una computadora.*

Probabilidades de reclamación

Monto de la reclamación	$i \setminus q$	0.03	0.04	0.05
	1	1	3	1
	2	3	5	4
	3	5	3	4
	4	2	2	6
	5	2	3	4

Figura 1.4: Cartera de 48 pólizas individuales.

La fórmula que hemos denominado de De Pril [i] y que se encuentra expresada en el contexto de un portafolio de asegurados individuales puede escribirse como un resultado teórico de la teoría de la probabilidad. Este es

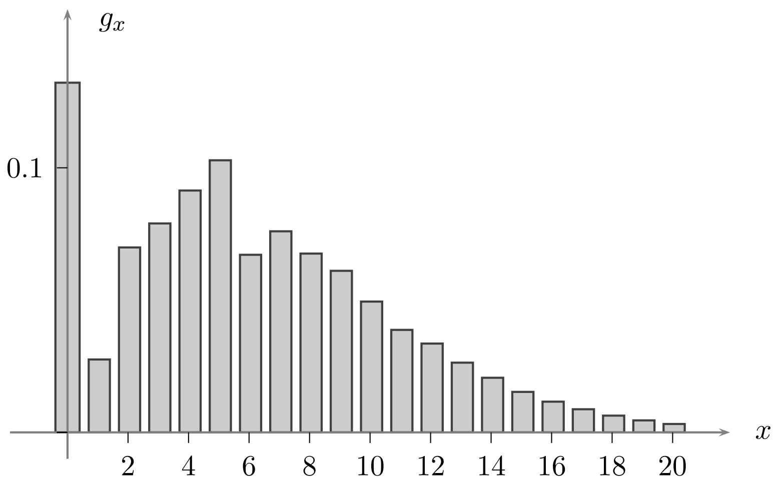


Figura 1.5

el contenido de la siguiente proposición. La fórmula tiene una expresión más simple y la demostración sigue los mismos lineamientos que la que hemos presentado, sin embargo, escribiremos nuevamente los detalles de la prueba en esta versión simplificada.

Proposición 1.2 (Fórmula de De Pril [ii]) *Sean* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *v.a.i.i.d. con valores en el conjunto* $\{0, 1, 2, \ldots\}$*. Para cada entero* $j \geqslant 0$*, defina la probabilidad* $f_j = P(X = j)$*, y suponga* $f_0 \neq 0$*. Sea* $S = X_1 + \cdots + X_n$*. Entonces las probabilidades* $g_x = P(S = x)$ *se pueden calcular recursivamente mediante la siguiente fórmula*

$$\begin{aligned} g_0 &= (f_0)^n, \\ g_x &= \frac{1}{f_0} \sum_{j=1}^{x} [\frac{j\,(n+1)}{x} - 1]\, f_j\, g_{x-j}, \quad \text{para } x \geqslant 1. \end{aligned}$$

Demostración. Primeramente observemos que el evento $(S = 0)$ ocurre si y sólo si todos los sumandos de S son cero, de modo que por independencia,

$g_0 = (f_0)^n$. Ahora veamos la forma de obtener la fórmula recursiva. Sean $P_X(t)$ y $P_S(t)$ las funciones generadoras de probabilidad de las variables discretas X y S respectivamente, es decir,

$$P_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, f_k,$$
$$P_S(t) = E(t^S) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, g_k.$$

Por independencia e idéntica distribución, $P_S(t) = [P_X(t)]^n$. Derivando respecto de t,

$$P_S'(t) = n[P_X(t)]^{n-1}\, P_X'(t).$$

Multiplicando ambos lados por $t\, P_X(t)$,

$$P_X(t)\, t\, P_S'(t) = n\, P_S(t)\, t\, P_X'(t),$$

que en términos de sumas se escribe como sigue

$$\sum_{j=0}^{\infty} t^j\, f_j \sum_{k=1}^{\infty} k\, t^k\, g_k = n \sum_{k=0}^{\infty} t^k\, g_k \sum_{j=1}^{\infty} j\, t^j\, f_j.$$

El siguiente paso es identificar el coeficiente del término t^x en cada lado de la ecuación, para $x \geqslant 1$. Por ejemplo, para el lado izquierdo el coeficiente es el término $f_j\, k\, g_k$ para todos aquellos valores de $j \geqslant 0$ y $k \geqslant 1$ tales que $j + k = x$. Esta doble suma puede escribirse como $\sum_{j=0}^{x-1} f_j\,(x-j)\, g_{x-j}$. De manera similar se encuentra el coeficiente del lado derecho. Igualando estos coeficientes se llega a la identidad

$$\sum_{j=0}^{x-1} (x-j)\, f_j\, g_{x-j} = n \sum_{j=1}^{x} j\, f_j\, g_{x-j}.$$

Separando el primer sumando del lado izquierdo y añadiendo en esa misma suma el término correspondiente a $j = x$, que es cero, se obtiene

$$x f_0 g_x + \sum_{j=1}^{x} (x-j)\, f_j\, g_{x-j} = n \sum_{j=1}^{x} j\, f_j\, g_{x-j}.$$

Finalmente se despeja el término g_x para llegar a la fórmula anunciada,

$$g_x = \frac{1}{f_0} \sum_{j=1}^{x} [\frac{j(n+1)}{x} - 1]\, f_j\, g_{x-j}, \quad x \geqslant 1.$$

■

Los primeros términos de la fórmula de De Pril [ii] se muestran a continuación.

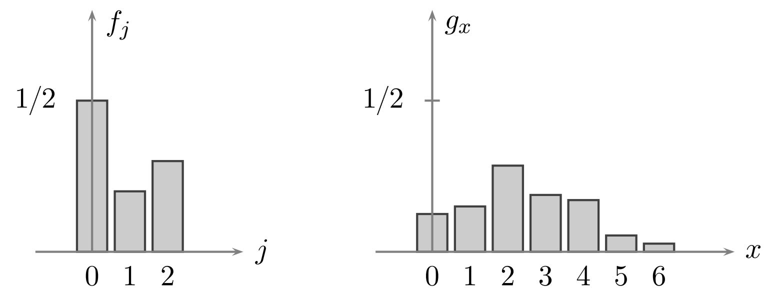
$$\begin{aligned}
g_0 &= (f_0)^n, \\
g_1 &= \frac{1}{f_0}(n\, f_1\, g_0) = \binom{n}{1} f_1\, (f_0)^{n-1}, \\
g_2 &= \frac{1}{f_0}(\frac{n-1}{2}\, f_1\, g_1 + n\, f_2\, g_0) = \binom{n}{2} (f_1)^2\, (f_0)^{n-2} + \binom{n}{1} f_2\, (f_0)^{n-1}, \\
g_3 &= \frac{1}{f_0}(\frac{n-2}{3}\, f_1\, g_2 + \frac{2n-1}{3}\, f_2\, g_1 + n\, f_3\, g_0) \\
&= \binom{n}{3} (f_1)^3\, (f_0)^{n-3} + 2!\binom{n}{2} f_2\, f_1\, (f_0)^{n-2} + \binom{n}{1} f_3\, (f_0)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Observe que las expresiones simplificadas tienen una interpretación natural en términos combinatoriales. Por ejemplo, la expresión para g_2 involucra dos situaciones: la primera cuando dos sumandos distintos de S toman cada uno el valor uno y el resto toma el valor cero, y la segunda situación cuando uno de los sumandos toma el valor dos y el resto es cero. Los coeficientes binomiales dan cuenta de las distintas formas en las que se pueden presentar estos arreglos.

Ejemplo 1.2 *Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes con idéntica distribución dada por la tabla que aparece abajo y cuya gráfica se muestra en la Figura 1.6(a). Usando la fórmula de De Pril [ii] encontraremos la distribución de $S = X_1 + X_2 + X_3$.*

j	*0*	*1*	*2*
f_j	*0.5*	*0.2*	*0.3*

Observe que la variable suma puede tomar cualquiera de los valores $0, 1, \ldots, 6$. Usando la misma notación que en la fórmula de De Pril se muestran a continuación los cálculos para encontrar la función de probabilidad de S y la



(a) (b)

Figura 1.6

gráfica correspondiente aparece en la Figura 1.6(b).

$$
\begin{aligned}
g_0 &= (f_0)^3 = 0.125, \\
g_1 &= \frac{1}{f_0}(3f_1g_0) = 0.15, \\
g_2 &= \frac{1}{f_0}(f_1g_1 + 3f_2g_0) = 0.285, \\
g_3 &= \frac{1}{f_0}(\frac{1}{3}f_1g_2 + \frac{8}{3}f_2g_1) = 0.188, \\
g_4 &= \frac{1}{f_0}(f_2g_2) = 0.171, \\
g_5 &= \frac{1}{f_0}(-\frac{1}{5}f_1g_4 + \frac{3}{5}f_2g_3) = 0.054, \\
g_6 &= \frac{1}{f_0}(-\frac{1}{3}f_1g_5 + \frac{1}{3}f_2g_4) = 0.027.
\end{aligned}
$$

En la sección de ejercicios el lector puede encontrar algunas aplicaciones de la fórmula de DePril [ii] para obtener la función de probabilidad de variables aleatorias que pueden construirse como sumas de variables discretas con distribución conocida, por ejemplo, las distribuciones binomial y Poisson.

1.4. Modelo colectivo

Considere un conjunto de un número no determinado de contratos de seguros con vigencia en un periodo de tiempo $[0, T]$. Este periodo puede corresponder a un año por ejemplo. Sea N la variable aleatoria que denota el número de reclamaciones ocurridas en este intervalo, y sean las variables positivas $Y_1, \ldots, Y_N$ los montos de estas reclamaciones. Gráficamente una posible realización de tal esquema se muestra en la Figura 1.7.

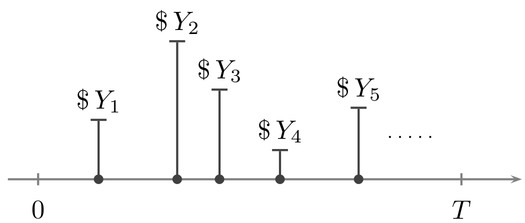


Figura 1.7

Consideraremos que el número de reclamaciones y los montos de éstas son variables aleatorias independientes. Más aún, supondremos que las reclamaciones mismas son independientes entre sí, y que comparten la misma distribución de probabilidad.

Definición 1.2 *El monto agregado o monto acumulado de todas las reclamaciones efectuadas es la variable aleatoria S, llamada* riesgo*, y definida como sigue*

$$S = \sum_{j=1}^{N} Y_j. \tag{1.2}$$

Observe que cada sumando es una variable aleatoria y que el número de sumandos es también aleatorio. La suma (1.2) se define como cero cuando $N = 0$. Observe además que S puede ser una variable aleatoria mixta, es decir, no ser discreta ni continua, pues cuando los montos de las reclamaciones Y son variables continuas estrictamente positivas, la variable S puede tomar el valor 0 con probabilidad $P(S = 0) = P(N = 0) > 0$, y puede además tomar cualquier valor en el intervalo $(0, \infty)$. La ecuación (1.2) representa el *modelo colectivo* para un contrato de seguros, cuyas posibles realizaciones como función del tiempo tienen la forma de la gráfica de la Figura 1.8.

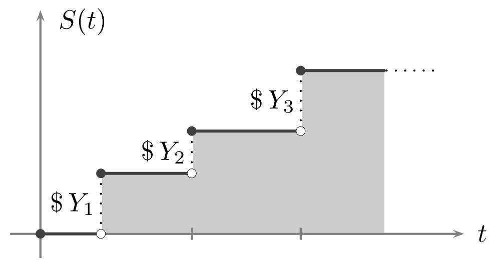


Figura 1.8

A la función de distribución de cada reclamación Y la denotaremos por la letra G. Se asume naturalmente que $G(0) = 0$, ello equivale a decir que la variable Y es positiva. Adicionalmente usaremos la notación $\mu_n := E(Y^n)$, en particular se escribe μ en lugar de $\mu_1 := E(Y)$. Nuevamente el problema central es encontrar la distribución de probabilidad de S, la cual depende de la distribución de Y y de N. Un primer resultado general al respecto es el que aparece a continuación. Antes de enunciarlo recordemos que la 0-convolución de una función de distribución G se define como

$$G^{*0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Proposición 1.3 *La función de distribución del riesgo S en el modelo colectivo es*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)\, P(N = n).$$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(S \leqslant x \,|\, N = n)\, P(N = n) \\
&= P(S \leqslant x \,|\, N = 0)\, P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(Y_1 + \cdots + Y_n \leqslant x)\, P(N = n) \\
&= G^{*0}(x)\, P(N = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} G^{*n}(x)\, P(N = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} G^{*n}(x)\, P(N = n).
\end{aligned}
$$

■

Algunas características numéricas de la variable S se muestran a continuación.

Proposición 1.4 *Suponiendo que las cantidades y funciones indicadas existen, el riesgo S en el modelo colectivo cumple las siguientes propiedades.*

1. $E(S) = E(N)E(Y)$.
2. $E(S^2) = E(N)E(Y^2) + E(N(N-1))E^2(Y)$.
3. $Var(S) = Var(N)E^2(Y) + Var(Y)E(N)$.
4. $M_S(t) = M_N(\ln(M_Y(t)))$.

Demostración.
1. Condicionaremos sobre el valor de N, y después usaremos la hipótesis de independencia. El resultado del cálculo es el mismo cuando la variable N

inicia en el valor 0 o en valor 1.

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{j=1}^{N} Y_j \,|\, N=n)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{j=1}^{n} Y_j \,|\, N=n)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y)\, P(N=n) \\
&= E(N)\, E(Y).
\end{aligned}$$

2. Nuevamente condicionando sobre el valor de N,

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} E((\sum_{j=1}^{N} Y_j)^2 \,|\, N=n)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E((\sum_{j=1}^{n} Y_j)^2 \,|\, N=n)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E((\sum_{j=1}^{n} Y_j)^2)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\, \sum_{j=1}^{n} E(Y_j^2) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{n} E(Y_j Y_k)\,]\, P(N=n).
\end{aligned}$$

Observe que segunda suma es nula cuando $n = 0$, y a su vez la tercera suma se anula cuando $n = 0$ o 1. Así, por la idéntica distribución tenemos que

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= \sum_{n=0}^{\infty} nE(Y^2)\, P(N=n) + \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, E^2(Y)\, P(N=n) \\
&= E(N)\, E(Y^2) + E(N(N-1))\, E^2(Y).
\end{aligned}$$

3. Por las fórmulas anteriores,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(S) &= E(S^2) - E^2(S) \\
&= E(N)\, E(Y^2) + E(N(N-1))\, E^2(Y) - E^2(N)\, E^2(Y) \\
&= E(N)\, [\, E(Y^2) - E^2(Y)\,] + [\, E(N^2) - E^2(N)\,]\, E^2(Y) \\
&= E(N)\, \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{Var}\,(N)\, E^2(Y).
\end{aligned}$$

4. De manera análoga a los dos primeros incisos,

$$\begin{aligned}
M_S(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{r(Y_1+\cdots+Y_N)} \mid N=n)\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E(e^{r(Y_1+\cdots+Y_n)})\, P(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (M_Y(t))^n\, P(N=n) \\
&= E((M_Y(t))^N) \\
&= E(e^{N\ln(M_Y(t))}) \\
&= M_N(\ln(M_Y(t))).
\end{aligned}$$

■

Véase la sección de ejercicios para los terceros momentos de S. Consideraremos a continuación algunos casos particulares del modelo colectivo.

Modelo binomial compuesto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución $\text{bin}(n,p)$ se dice que el riesgo S tiene una distribución binomial compuesta, y se escribe $S \sim \text{bin comp}(n,p,G)$, en donde G es la función de distribución de cada sumando en la definición de S. Bajo esta hipótesis se tienen los siguientes resultados.

Proposición 1.5 *Si N tiene distribución $bin(n,p)$, entonces*

a) $E(S) = np\mu$.

b) $E(S^2) = np\mu_2 + n(n-1)p^2\mu^2$.

c) $Var(S) = np(\mu_2 - p\mu^2)$.

d) $M_S(t) = (1-p+pM_Y(t))^n$.

Estas expresiones se siguen fácilmente de las fórmulas generales demostradas antes, basta recordar que si N tiene distribución $\text{bin}(n,p)$, entonces $E(N) = np$, $\text{Var}(N) = np(1-p)$, y $M_N(t) = (1-p+pe^t)^n$. Véase la sección de ejercicios para los terceros momentos de este modelo. Observe que en este caso se tiene una cota superior para el número de reclamaciones que pueden efectuarse.

Modelo binomial negativo compuesto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución binomial negativa se dice que el riesgo S tiene una distribución *binomial negativa compuesta*. Esto es, si $N \sim \text{bin neg}(k,p)$, entonces $S \sim \text{bin neg comp}(k,p,G)$, donde nuevamente G hace referencia a la función de distribución de cada sumando de S. En este caso se cumple lo siguiente.

Proposición 1.6 *Si N tiene distribución bin neg(k,p), entonces*

a) $E(S) = k(1/p-1)\mu$.

b) $E(S^2) =$.

c) $Var(S) = k(1/p-1)(1/p)\mu^2 + k(1/p-1)(\mu_2 - \mu^2)$.

d) $M_S(t) = (\dfrac{p}{1-(1-p)M_Y(t)})^k$.

Para encontrar estas fórmulas es suficiente recordar que si N tiene distribución bin neg(k,p), entonces $E(N) = k(1-p)/p$, $\text{Var}(N) = k(1-p)/p^2$, y $M_N(t) = [p/(1-(1-p)e^t)]^k$. Véase la sección de ejercicios para los terceros momentos de este modelo. En el caso particular cuando $k = 1$, la distribución de N se reduce a la distribución geométrica de parámetro p, y se dice que S tiene distribución geométrica compuesta.

Modelo Poisson compuesto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución Poisson se dice que el riesgo S tiene una distribución *Poisson compuesta*, y se escribe $S \sim \text{Poisson comp}(\lambda, G)$, en donde λ es el parámetro de la distribución Poisson y G es la función de distribución de cada sumando de S. Para este modelo se tienen los siguientes resultados.

Proposición 1.7 *Si N tiene distribución Poisson(λ), entonces*

a) $E(S) = \lambda\mu$.

b) $E(S^2) = \lambda\mu_2 + \lambda^2\mu^2$.

c) $Var(S) = \lambda\mu_2$.

d) $M_S(t) = \exp\left[\,\lambda(M_Y(t) - 1)\,\right]$.

Nuevamente estas expresiones son consecuencia de las fórmulas generales demostradas antes, y del hecho de que si N tiene distribución Poisson(λ), entonces $E(N) = \lambda$, $\mathrm{Var}(N) = \lambda$, y $M_N(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$. Véase la sección de ejercicios para los terceros momentos de este modelo. Observe que el parámetro λ y la distribución de la variable Y determinan por completo al modelo Poisson compuesto. Estudiaremos con más detalle este modelo en la siguiente sección.

1.5. Modelo colectivo Poisson

En esta sección retomamos el caso cuando el número de reclamaciones en el modelo colectivo sigue una distribución Poisson. Primeramente explicaremos la forma en la que se puede obtener un modelo colectivo Poisson a partir del modelo individual. Después mostraremos cómo este modelo Poisson compuesto aproxima al modelo individual. Finalmente estudiaremos algunas propiedades interesantes y útiles del modelo colectivo Poisson.

■ **Modelo Poisson compuesto asociado al modelo individual**
Considere el modelo individual de riesgo $S^i = \sum_{j=1}^{n} D_j C_j$, junto con la notación e hipótesis correspondientes. El superíndice i indica que se trata de un modelo individual. A partir de este modelo se construye a continuación un modelo colectivo con distribución Poisson compuesta. Para ello recuerde que únicamente se necesita establecer el valor del parámetro λ de

la distribución Poisson y la función de distribución $G(x)$ del monto de las reclamaciones. Sean entonces

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n} q_j, \tag{1.3}$$

$$\text{y} \qquad G(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} G_j(x), \tag{1.4}$$

en donde $G_j(x)$ es la función de distribución de la variable C_j. Mediante la primera igualdad se establece que el número esperado de reclamaciones en ambos modelos sea el mismo. En la segunda ecuación se define a la función de distribución de una reclamación en el modelo colectivo como la suma ponderada de las funciones de distribución del monto de las reclamaciones en el modelo individual. De esta forma se construye el modelo colectivo $S^c = \sum_{j=1}^{N} Y_j$, a quien llamaremos modelo colectivo Poisson compuesto asociado al modelo individual, en donde el superíndice c indica que se trata de un modelo colectivo. Para este modelo particular se cumplen las siguientes igualdades:

a) $E(S^c) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j \, E(C_j)$.

b) $\mathrm{Var}(S^c) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j \, E(C_j^2)$.

c) $E(Y^k) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} E(C_j^k)$.

d) $M_Y(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t)$.

Estas expresiones se siguen directamente de resultados previos acerca del modelo Poisson compuesto y de las igualdades (1.3) y (1.4). Por ejemplo, usando integrales de Riemann-Stieltjes (véase el apéndice), el k-ésimo momento de una reclamación del modelo S^c es,

$$E(Y^k) = \int_0^\infty y^k dG(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} \int_0^\infty y^k dG_j(y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} E(C_j^k).$$

De manera análoga se verifican las otras identidades. A modo de comparación se tiene que $E(S^i) = E(S^c)$, mientras que $\text{Var}(S^i) \leqslant \text{Var}(S^c)$.

El modelo Poisson compuesto asociado como límite del modelo individual

Sea S^i el riesgo en un modelo individual y sea S^c el riesgo del modelo colectivo Poisson compuesto asociado. En esta sección se demuestra que este modelo colectivo puede ser obtenido como un proceso límite en el modelo individual. Consideremos entonces el modelo individual junto con la notación e hipótesis usuales. Por resultados previos sabemos que

$$M_{S^i}(t) = \prod_{j=1}^{n} [1 + q_j(M_{C_j}(t) - 1)].$$

Se construye un modelo individual adicional de la siguiente forma: cada póliza j se reemplaza por k subpólizas idénticas en cada una de las cuales la probabilidad de reclamación se define como q_j/k, y la función de distribución del monto de una reclamación es la misma $G_j(y)$. Véase la Figura 1.9. En consecuencia, el portafolio consiste ahora de kn pólizas.

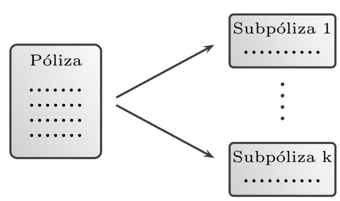


Figura 1.9

Por lo tanto, si S^i_k denota el riesgo asociado a tal portafolio, entonces se tiene que

$$M_{S^i_k}(t) = \prod_{j=1}^{n} [1 + \frac{q_j}{k}(M_{C_j}(t) - 1)]^k.$$

Se hace ahora tender k a infinito y usando el resultado $\lim\limits_{k\to\infty} (1 + x/k)^k = e^x$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} M_{S^i_k}(t) &= \prod_{j=1}^{n} \exp\,[\, q_j(M_{C_j}(t)-1)\,] \\
&= \exp\,[\, \sum_{j=1}^{n} q_j M_{C_j}(t) - \lambda\,] \\
&= \exp\,[\, \lambda(M_Y(t)-1)\,] \\
&= M_{S^c}(t).
\end{aligned}$$

Puesto que la convergencia de funciones generadoras de momentos es equivalente a la convergencia en distribución de las correspondientes variables aleatorias, se obtiene entonces que el modelo colectivo Poisson compuesto asociado es el límite en distribución del modelo individual cuando el número de pólizas crece y las probabilidades de reclamación se hacen cada vez más pequeñas. El argumento presentado en esta sección justifica el uso del modelo Poisson compuesto bajo las condiciones mencionadas. Para reforzar esta idea, el siguiente argumento intuitivo también favorece al modelo Poisson compuesto como una generalización del modelo individual. Recordemos nuevamente que la función generadora de momentos del riesgo S^i es

$$M_{S^i}(t) = \prod_{j=1}^{n} [1 + q_j(M_{C_j}(t)-1)].$$

El término $q_j(M_{C_j}(t)-1)$ es pequeño para valores pequeños de t. Usando la fórmula $\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 + \cdots$, se puede escribir la aproximación $\ln(1+x) \approx x$. De modo que

$$\begin{aligned}
\ln(M_{S^i}(t)) &= \sum_{j=1}^{n} \ln[1 + q_j(M_{C_j}(t)-1)] \\
&\approx \sum_{j=1}^{n} q_j(M_{C_j}(t)-1) \\
&= \lambda\,[\, \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t) - 1\,],
\end{aligned}$$

en donde $\lambda = q_1 + \cdots + q_n$. Por lo tanto

$$M_{S^i}(t) \approx \exp\,(\,\lambda\,[\,\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t) - 1\,]\,).$$

Esta es nuevamente la función generadora de momentos del riesgo con distribución Poisson compuesta, en donde los montos de las reclamaciones tienen función generadora de momentos $\sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{\lambda} M_{C_j}(t)$.

Modelo Poisson compuesto con varios tipos de riesgos

Se demuestra ahora que la suma de riesgos independientes que siguen el modelo Poisson compuesto también es Poisson compuesto. Esta es una propiedad interesante y útil.

Proposición 1.8 *Sean S_1 y S_2 dos riesgos independientes con distribución Poisson compuesta con parámetros λ_1 y λ_2, y reclamaciones $Y^{(1)}$ y $Y^{(2)}$ con función de distribución $G_1(x)$ y $G_2(x)$ respectivamente. Entonces el riesgo $S = S_1 + S_2$ también sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, y las reclamaciones tienen función de distribución*

$$G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}\, G_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda}\, G_2(x).$$

Demostración. Por independencia tenemos que

$$\begin{aligned} M_{S_1+S_2}(t) &= M_{S_1}(t) M_{S_2}(t) \\ &= \exp[\lambda_1(M_{Y^{(1)}}(t) - 1)]\,\exp[\lambda_2(M_{Y^{(2)}}(t) - 1)] \\ &= \exp[\lambda(\frac{\lambda_1}{\lambda} M_{Y^{(1)}}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda} M_{Y^{2}}(t) - 1)], \end{aligned}$$

en donde $\frac{\lambda_1}{\lambda} M_{Y^{(1)}}(t) + \frac{\lambda_2}{\lambda} M_{Y^{(2)}}(t)$ es la función generadora de momentos de la función de distribución $G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda} G_1(x) + \frac{\lambda_2}{\lambda} G_2(x)$. ■

El resultado anterior puede extenderse fácilmente al caso $S = S_1 + \cdots + S_n$. Véase el enunciado del ejercicio 40 en la página 38.

Modelo Poisson compuesto con reclamaciones clasificadas
Sea S un riesgo con distribución Poisson compuesta de parámetro λ. Suponga que los montos de las reclamaciones pueden ser clasificadas en m categorías excluyentes y exhaustivas denotadas por $A_1, \ldots, A_m$. Típicamente estas categorías pueden ser intervalos de valores para las reclamaciones. Sea $p_k = P(Y \in A_k) > 0$ tal que $p_1 + \cdots + p_m = 1$. Sea N_k el número de reclamaciones del tipo k. Entonces $N = N_1 + \cdots + N_m$ y debido a la independencia de los montos en las reclamaciones, el vector $(N_1, \cdots, N_m)$ tiene una distribución condicional multinomial$(p_1, \ldots, p_m; n)$ cuando $N = n$, es decir, para enteros no negativos $n_1, \ldots, n_m$ tales que $n_1 + \cdots + n_m = n$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m \mid N = n) &= \binom{n}{n_1 \; \cdots \; n_m} p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m} \\
&= \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}\, p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}.
\end{aligned}
$$

La distribución no condicional del vector $(N_1, \ldots, N_m)$ es el contenido del siguiente resultado.

Proposición 1.9 *Las variables aleatorias $N_1, \ldots, N_m$ son independientes y cada variable N_k tiene distribución Poisson(λp_k).*

Demostración. Sean $n_1, \ldots, n_m$ enteros no negativos cualesquiera, y sea n la suma de todos estos números, es decir, $n_1 + \cdots + n_m = n$. Entonces

$$
\begin{aligned}
P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m) &= P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m, N = n) \\
&= P(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m \mid N = n) P(N = n) \\
&= \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!}\, p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}\, \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \frac{(\lambda p_k)^{n_k}}{n_k!} e^{-\lambda p_k}.
\end{aligned}
$$

Se desprende de esta igualdad que la variable N_k tiene distribución marginal Poisson(λp_k). De esta identidad se verifica también la independencia. ∎

Observe que, condicionadas al evento $(N = n)$, las variables $N_1, \ldots, N_m$ no son independientes, mientras que sin tal condición, lo son. Por otro lado, como los montos de las reclamaciones son independientes de N, el riesgo de tipo k está dado por la variable

$$S_k = \sum_{j=1}^{N_k} Y_j^{(k)},$$

en donde $Y_j^{(k)}$ es una variable aleatoria con función de distribución

$$G_k(x) = P(Y_j \leqslant x \mid Y_j \in A_k) = \frac{P(Y_j \leqslant x, Y_j \in A_k)}{P(Y_j \in A_k)}.$$

Por lo anterior, el riesgo S_k tiene distribución Poisson compuesta con parámetros λp_k, y $G_k(x)$. En particular, cuando $A_k = (x_{k-1}, x_k]$, con $0 \leqslant x_0 < x_1 < \cdots < x_m$, la función de distribución $G_k(x)$ tiene la siguiente forma:

$$G_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x < x_k, \\ \dfrac{G(x) - G(x_{k-1})}{G(x_k) - G(x_{k-1})} & \text{si } \; x_{k-1} \leqslant x < x_k, \\ 1 & \text{si } \; x \geqslant x_k. \end{cases}$$

Modelo Poisson compuesto mixto

Cuando el número de reclamaciones N tiene una distribución Poisson(λ) y el parámetro λ es a su vez una variable aleatoria, se dice que el riesgo S tiene una distribución Poisson compuesta mixta. Algunas características de esta distribución se muestran a continuación.

Proposición 1.10 *Si N tiene distribución Poisson(Λ) en donde Λ es una variable aleatoria con función de distribución $F_\Lambda(\lambda)$, entonces*

a) $P(N = n) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}\, dF_\Lambda(\lambda)$.

b) $E(S) = E(\Lambda)\mu$.

c) $E(S^2) = E(\Lambda)\mu_2 + E(\Lambda^2)\mu^2$.

d) $Var(S) = Var(\Lambda)\mu^2 + E(\Lambda)\mu_2$.

e) $M_S(t) = M_\Lambda(M_Y(t) - 1)$.

Para obtener todas las identidades que aparecen en esta proposición es suficiente condicionar sobre el valor de Λ. Véase la sección de ejercicios para los terceros momentos de este modelo.

1.6. Ejercicios

Modelo individual

1. Considere el modelo individual para un portafolio de n pólizas de seguros. Bajo la notación e hipótesis usuales, demuestre que el número esperado de reclamaciones es $q_1 + \cdots + q_n$.

2. Para un modelo individual de riesgo, encuentre la distribución de probabilidad del número total de reclamaciones en una cartera de n asegurados cuando D_j tiene distribución Ber(q), es decir, $q_j = q > 0$ es constante.

3. Considere el modelo individual de riesgo en donde D_j tiene distribución Ber(q), es decir, $q_j = q > 0$ es constante. Suponga además que cada reclamación C_j es constante $c > 0$, es decir, se trata de una misma suma asegurada para todos. Encuentre una expresión para la esperanza y la varianza de S.

4. Considere el modelo individual para un portafolio de n pólizas de seguros de vida. Suponga que el j-ésimo asegurado tiene una suma asegurada constante c_j. Demuestre que

   a) $E(S) = \sum_{j=1}^{n} q_j c_j$.

   b) $\text{Var}(S) = \sum_{j=1}^{n} q_j p_j c_j^2$.

5. Demuestre que si $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ son funciones diferenciables que no se anulan, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\prod_{j=1}^{n} f_j(x)\right] = \left[\prod_{j=1}^{n} f_j(x)\right]\left[\sum_{j=1}^{n} \frac{f_j'(x)}{f_j(x)}\right].$$

   Use esta fórmula y la expresión encontrada para $M_S(t)$ en el modelo individual de riesgo para encontrar nuevamente $E(S)$ y $\text{Var}(S)$.

6. Para un riesgo S que sigue el modelo individual demuestre que

   a. $E(S^2) = \sum_{j=1}^{n} q_j E(C_j^2) + \sum_{i \neq j} q_i q_j E(C_i) E(C_j)$.

   b. $E(S^3) = \sum_{j=1}^{n} q_j E(C_j^3) + 3 \sum_{i \neq j} q_i q_j E(C_i) E(C_j^2) + \sum_{\substack{i,j,k \\ \text{distintos}}} q_i q_j q_k E(C_i) E(C_j) E(C_k)$.

7. Suponga que D y C son dos variables aleatorias independientes tales que D tiene distribución $\text{Ber}(q)$ y C se distribuye $\exp(\lambda)$. Calcule y grafique la función de distribución de la variable aleatoria mixta DC.

8. Para el modelo individual, suponga que D_j tiene distribución $\text{Ber}(q)$, es decir, $q_j = q > 0$ es constante. Encuentre la distribución del

riesgo S cuando $n = 3$ y C_j tiene la siguiente distribución de probabilidad

$$\begin{aligned} P(C_j = 1) &= 0.6, \\ P(C_j = 2) &= 0.3, \\ P(C_j = 3) &= 0.1. \end{aligned}$$

9. Considere un portafolio de 21 pólizas individuales de seguros de vida válidas por un año como se indica en la tabla que aparece abajo. Usando el modelo individual calcule $E(S)$ y $\mathrm{Var}(S)$.

Tasa de mortalidad q_j	Suma asegurada			
	\$2	\$3	\$4	\$5
0.04	1	1	2	1
0.05	0	2	3	3
0.06	1	1	2	4

10. Sean $q_{j,0}$, $q_{j,1}$ y $q_{j,2}$ las probabilidades de que el j-ésimo asegurado presente 0, 1 y 2 reclamaciones respectivamente durante el tiempo de vigencia del seguro. Suponga que cada una de las posibles reclamaciones de la póliza j es constante z_j y que $q_{j,0} + q_{j,1} + q_{j,2} = 1$. Encuentre fórmulas para $E(S)$ y $\mathrm{Var}(S)$ en el modelo individual.

11. Una compañía aseguradora tiene una cartera con pólizas de seguros de vida y diferentes sumas aseguradas como se muestra en la tabla que aparece abajo. Calcule $E(S)$ y $\mathrm{Var}(S)$ usando el modelo individual.

Suma asegurada	Número de pólizas	Probabilidad de reclamación
\$10,000	50	0.0040
\$20,000	75	0.0035
\$30,000	100	0.0030

12. Considere el modelo individual de riesgo para una cartera de $n = 56$ asegurados divididos en cinco subgrupos de la siguiente forma: 11 asegurados con probabilidad de reclamación $q = 0.01$, 7 asegurados con $q = 0.015$, 20 asegurados con $q = 0.02$, 10 asegurados con $q = 0.025$ y 8 asegurados con $q = 0.03$. Todos ellos con suma asegurada

\$100. Calcule el valor esperado del agregado de reclamaciones del riesgo correspondiente a esta cartera de asegurados.

13. Para el modelo individual, suponga que D_j tiene distribución $\mathrm{Ber}(q)$, es decir, $q_j = q > 0$ es constante, y que cada reclamación C_j tiene distribución $\exp(\lambda)$. Encuentre la distribución de probabilidad del riesgo S.

14. Considere el modelo individual de riesgo $S = \sum_{j=1}^{n} D_j C_j$, en donde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ son constantes posiblemente distintas todas ellas, y cada D_j tiene distribución $\mathrm{Ber}(q_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.

    a) Demuestre que la función de probabilidad de la variable $D_j C_j$ es
    $$f_{D_j C_j}(x) = \begin{cases} 1 - q_j & \text{si } \; x = 0, \\ q_j & \text{si } \; x = C_j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

    b) Defina $S_j = S_{j-1} + D_j C_j$ para $j = 2, 3, \ldots, n$ y $S_1 = D_1 C_1$. Demuestre que la función de probabilidad de la variable S_j puede calcularse recursivamente de la siguiente forma. Para $j = 2, 3, \ldots, n$,
    $$f_{S_j}(x) = (1 - q_j) f_{S_{j-1}}(x) + q_j f_{S_{j-1}}(x - C_j).$$

15. Considere el modelo individual de riesgo en donde todas las tasas de muerte q_j son una misma probabilidad p, y los montos de las reclamaciones son iguales a 1. Verfique que las fórmula generales de la Proposición 1.1 se reducen a las de la distribución binomial(n, p), es decir,

    a) $E(S) = np$.
    b) $\mathrm{Var}(S) = np(1 - p)$.
    c) $F_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - p & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1. \end{cases}$
    d) $M_{D_j C_j}(t) = 1 - p + pe^t$.
    e) $M_S(t) = (1 - p + pe^t)^n$.

Fórmula de De Pril

16. Sean X_1, X_2, X_3, X_4 variables aleatorias independientes con distribución común como aparece en la tabla de abajo. Encuentre la distribución de $X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

j	0	1	2	3
f_j	0.1	0.2	0.3	0.4

17. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes con distribución Ber(p). Mediante la fórmula de De Pril [ii] compruebe que la variable $S = X_1 + \cdots + X_n$ tiene distribución bin(n, p).

18. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con idéntica distribución Poisson(λ). Use la fórmula de De Pril [ii] para demostrar que $X_1 + X_2$ tiene distribución Poisson(2λ).

19. Sean X_1 y X_2 dos variables aleatorias independientes con idéntica distribución bin(n, p). Use la fórmula de De Pril [ii] para demostrar que $X_1 + X_2$ tiene distribución bin$(2n, p)$.
    Sugerencia: $\displaystyle\sum_{j=0}^{x} \binom{n}{j}\binom{m}{x-j} = \binom{n+m}{x}$.

20. Demuestre que la fórmula recursiva de De Pril [ii] produce efectivamente una función de probabilidad.

21. A partir de la fórmula de De Pril [ii] y siguiendo la misma notación de dicho enunciado, demuestre que
    a) $E(S) = nE(X)$.
    b) $\mathrm{Var}(S) = n\mathrm{Var}(X)$.

22. Suponga que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ en la fórmula de De Pril [ii] son estrictamente positivas y toman valores en el conjunto $\{1, 2, \ldots\}$, con $f_1 = P(X = 1) \neq 0$. Demuestre que la distribución de $S = X_1 + \cdots + X_n$ ahora es la siguiente

$$\begin{aligned} g_n &= (f_1)^n, \\ g_{x+n} &= \frac{1}{f_1} \sum_{j=1}^{x} [\frac{j(n+1)}{x} - 1]\, f_{j+1}\, g_{x+n-j}, \quad \text{para } x \geqslant 1. \end{aligned}$$

Véase el siguiente ejercicio para una extensión de esta fórmula.

23. *Extensión de la fórmula de De Pril [ii].* Suponga que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ son independientes e idénticamente distribuidas pero ahora con valores en el conjunto $\{m, m+1, \ldots\}$ para algún entero $m \geqslant 1$. Sea nuevamente $S = X_1 + \cdots + X_n$, $f_j = P(X = j)$ para $j \geqslant m$, con $f_m \neq 0$, y $g_x = P(S = x)$ para $x \geqslant nm$. Demuestre que

$$\begin{aligned} g_{nm} &= (f_m)^n, \\ g_x &= \frac{1}{f_m} \sum_{j=1}^{x-nm} [\frac{j(n+1)}{x-nm} - 1]\, f_{j+m}\, g_{x-j}, \quad \text{para } x \geqslant nm+1. \end{aligned}$$

Sugerencia: Las variables $X_i - m$, para $i = 1, \ldots, n$, ahora ya tienen soporte en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$, aplique entonces la fórmula de De Pril [ii] demostrada y un cambio de variable adecuado.

Modelo colectivo

24. Para el modelo colectivo de riesgo demuestre que

    a. $E(S^3) = E(N)E(Y^3) + 3E[N(N-1)]E(Y)E(Y^2)$
    $\quad + E[N(N-1)(N-2)]E^3(Y)$.

    b. $E((S - E(S))^3) =$.

25. Suponga que las variables $Y_1, Y_2, \ldots$ en el modelo colectivo de riesgo son discretas con valores en el conjunto $\{1, 2, \ldots\}$. Sea $f_j = P(Y = j)$ para $j \geqslant 1$, $g_x = P(S = x)$ para $x \geqslant 0$, y $p_n = P(N = n)$ para $n \geqslant 0$. Demuestre que

$$\begin{aligned} g_0 &= p_0, \\ g_x &= \sum_{n=1}^{\infty} f_x^{*n}\, p_n, \quad \text{para } x \geqslant 1. \end{aligned}$$

26. A partir de la fórmula encontrada para $M_S(t)$ en el modelo colectivo de riesgo, encuentre nuevamente las expresiones para $E(S)$, $E(S^2)$ y $\mathrm{Var}(S)$.

27. Considere el modelo colectivo de riesgo $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$, en donde N tiene distribución Poisson(λ) y Y sigue una distribución log normal(m, σ^2). Demuestre que

   a) $E(Y) = \exp(\sigma^2/2 + m)$.
   b) $E(Y^n) = \exp(nm + n^2\sigma^2/2), \quad n \geqslant 1$.
   c) $\text{Var}(Y) = (e^{\sigma^2} - 1)\exp(\sigma^2 + 2m)$.
   d) $E(S) = \lambda \exp(\sigma^2/2 + m)$.
   e) $\text{Var}(S) = \lambda \exp(2\sigma^2 + 2m)$.
   f) $\alpha_3 := \dfrac{E[(S - E(S))^3]}{[\text{Var}(S)]^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \exp(3\sigma^2/2)$.

28. La *transformada de Laplace-Stieltjes* de una variable aleatoria X o de su distribución se define como la función

$$l_X(t) = E(e^{-tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx}\, dF_X(x).$$

A diferencia de la función generadora de momentos, la transformada de Laplace-Stieltjes siempre existe para variables aleatorias positivas. Demuestre que para el modelo colectivo de riesgo se cumple la identidad

$$l_S(t) = P_N(l_Y(t)),$$

en donde $P_N(t)$ es la función generadora de probabilidad de N.

29. Sea $P_X(t) = E(t^X)$ la función generadora de probabilidad de una variable aleatoria discreta X. Considere un modelo colectivo de riesgo en donde las reclamaciones son discretas con valores en $\{0, 1, \ldots\}$. Suponiendo la existencia de las funciones involucradas, demuestre que se cumple la identidad

$$P_S(t) = P_N(P_X(t)).$$

Modelo binomial compuesto

30. Verifique la validez de las fórmulas para el modelo binomial compuesto que aparecen en la Proposición 1.5 de la página 21.

31. Para el modelo binomial compuesto, demuestre las siguientes fórmulas.

    a. $E(S^3) = .$
    b. $E[(S - E(S))^3] = n(p\mu_3 - 3p^2\mu_2\mu + 2p^3\mu^3).$
    c. $\alpha_3 := \dfrac{E[(S-E(S))^3]}{[\mathrm{Var}(S)]^{3/2}} = - > 0.$

32. Sean S_1 y S_2 dos riesgos independientes con distribución binomial compuesta con parámetros $(n_1, p; G)$ y $(n_2, p; G)$ respectivamente. Suponga que los montos de las reclamaciones de cada uno de estos riesgos son $Y^{(1)}$ y $Y^{(2)}$ con idéntica distribución G. Demuestre que el riesgo $S = S_1 + S_2$ también sigue una distribución binomial compuesta con parámetros $(n_1 + n_2, p; G)$, es decir, la distribución del monto de las reclamaciones para S es nuevamente G.

Modelo binomial negativo compuesto

33. Verifique la validez de las fórmulas para el modelo binomial negativo compuesto de la Proposición 1.6 en la página 22.

34. Para el modelo binomial negativo compuesto, demuestre las siguientes fórmulas.

    a. $E(S^3) = .$
    b. $E[(S - E(S))^3] = k(1/p - 1)\mu_3 + 3k(1/p - 1)^2\mu_2\mu + 2k(1/p - 1)^3\mu^3.$
    c. $\alpha_3 := \dfrac{E[(S-E(S))^3]}{[\mathrm{Var}(S)]^{3/2}} = - > 0.$

35. Sea N con distribución bin neg(k, p). Demuestre que $P(N = 0) = p^k$, y para $n \geqslant 0$ se cumple la relación recursiva

$$P(N = n + 1) = \frac{k + n}{n + 1}\,(1 - p)\,P(N = n).$$

Modelo Poisson compuesto

36. Verifique la validez de las fórmulas para el modelo Poisson compuesto que aparecen en la Proposición 1.7 de la página 23.

37. Para el modelo Poisson compuesto, demuestre las siguientes fórmulas.

    a. $E(S^3) = \lambda\mu_3 + 3\lambda^2\mu_2\mu + \lambda^3\mu^3$.

    b. $E[(S - E(S))^3] = \lambda\mu_3$.

    c. $\alpha_3 := \dfrac{E[(S-E(S))^3]}{[\text{Var}(S)]^{3/2}} = \dfrac{\mu_3}{\sqrt{\lambda\mu_2^3}} > 0$.

38. Demuestre las fórmulas para el modelo Poisson compuesto asociado de la página 24.

39. Sean $F_1(x)$ y $F_2(x)$ dos funciones de distribución con funciones generadoras de momentos $M_1(t)$ y $M_2(t)$ respectivamente. Demuestre que para cualquier $\alpha \in [0,1]$, la función $\alpha F_1(x) + (1-\alpha)F_2(x)$ es una función de distribución cuya función generadora de momentos asociada es $\alpha M_1(t) + (1-\alpha)M_2(t)$. Este resultado fue utilizado en el análisis de la suma de dos riesgos con distribución Poisson compuesta.

40. Sean $S_1, \ldots, S_n$ riesgos independientes con distribución Poisson compuesta con parámetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, respectivamente. Suponga que los montos de las reclamaciones de estos riesgos son $Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n)}$, con función de distribución $G_1(x), \ldots, G_n(x)$, respectivamente. Demuestre que el riesgo $S = S_1 + \cdots + S_n$ también sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, y la función de distribución de las reclamaciones es

$$G(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda}G_1(x) + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}G_n(x).$$

41. Sean S_1 y S_2 dos riesgos independientes, el primero con distribución Poisson comp(λ_1, F_1) con $\lambda_1 = 50$, y el segundo con distribución Poisson comp(λ_2, F_2) con $\lambda_2 = 100$, en donde $F_1(x) = \text{mín}\{x, 1\}$ para $x \geqslant 0$, y $F_2(x) = 1 - e^{-x}$ para $x \geqslant 0$. Encuentre la distribución

de $S = S_1 + S_2$ y la función de distribución de las reclamaciones del riesgo S.

42. Sean S_1 y S_2 dos riesgos independientes con distribución Poisson compuesta, el primero Poisson comp(λ_1, F_1) con $\lambda_1 = 10$, y el segundo Poisson comp(λ_2, F_2) con $\lambda_2 = 20$. Suponga que las reclamaciones de ambos riesgos son de magnitud 50 o 100, y por lo tanto tienen la siguiente función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 50, \\ p & \text{si } 50 \leqslant x < 100, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 100. \end{cases}$$

Suponga que el parámetro p es igual a $1/2$ para el primer riesgo y es $1/3$ para el segundo riesgo. Encuentre la distribución de $S = S_1 + S_2$ y la función de distribución de las reclamaciones del riesgo S.

43. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes cada una de ellas con distribución Ber(q), y sea $X_0 = 0$. Sea N otra variable aleatoria con distribución Poisson(λ) independiente de las anteriores. Demuestre que la variable $X = \sum_{i=0}^{N} X_i$ tiene distribución Poisson(λq). Esta variable tiene la siguiente interpretación: si N representa el total de siniestros ocurridos y cada siniestro es reportado con probabilidad q, entonces X representa el total de siniestros ocurridos reportados.

44. Sea Y una variable aleatoria con función de distribución $F(y)$, y sean $a < b$ dos números tales que $F(a) < F(b)$. Demuestre que la función de distribución condicional de Y dado el evento $(Y \in (a, b])$ es

$$F(y \,|\, Y \in (a, b]) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < a, \\ \dfrac{F(y) - F(a)}{F(b) - F(a)} & \text{si } a \leqslant y \leqslant b, \\ 1 & \text{si } y > b. \end{cases}$$

Aplique este resultado al caso cuando Y tiene distribución $\exp(\alpha)$. Encuentre y grafique ambas funciones de distribución: la original y la condicional.

Modelo Poisson compuesto mixto

45. Verifique la validez de las fórmulas de la Proposición 1.10 de la página 30.

46. Para el modelo Poisson compuesto mixto, demuestre que

    a. $E(S^3) = E(\Lambda)\mu_3 + 3E(\Lambda^2)\mu_2\mu + E(\Lambda^3)\mu^3$.

    b. $E[(S - E(S))^3] = E[(\Lambda - E(\Lambda))^3]\mu^3 + 3\text{Var}(\Lambda)\mu_2\mu + E(\Lambda)\mu_3$.

Esperanza condicional

47. Sea (X, Y) un vector aleatorio discreto con la función de probabilidad que aparece abajo. Encuentre la distribución de la variable aleatoria $E(X \mid Y)$ y compruebe que $E(E(X \mid Y)) = E(X) = 78/36$.

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} (x + y)/36 & \text{si } x, y = 1, 2, 3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Capítulo 2

Fórmula de Panjer y algunos métodos de aproximación

En este capítulo se presenta la famosa fórmula de Panjer. Este resultado proporciona una expresión exacta, aunque recursiva, de la distribución de probabilidad de un riesgo en el modelo colectivo, y es válida cuando la distribución del número de reclamaciones y los montos cumplen ciertas condiciones. Se presentan además algunos métodos de aproximación con validez general para estimar la distribución de un riesgo. Estos métodos generales de aproximación pueden ser útiles cuando no se cumplen las condiciones requeridas para aplicar la fórmula de Panjer.

2.1. Fórmula de Panjer

Primeramente se enuncia la condición que debe satisfacer el número de reclamaciones para obtener la fórmula de Panjer.

Proposición 2.1 *Sea N una variable aleatoria discreta con valores en $\{0, 1, \ldots\}$ y sea $p_k = P(N = k)$ para $k = 0, 1, \ldots$ Sean a y b dos constante. Entonces la igualdad*

$$p_k = (a + \frac{b}{k})\, p_{k-1}, \qquad k \geqslant 1, \tag{2.1}$$

se cumple cuando

1. *N es bin(n, p), con $a = -p/(1-p)$ y $b = (n+1)p/(1-p)$.*
2. *N es Poisson(λ), con $a = 0$ y $b = \lambda$.*
3. *N es bin neg(r, p), con $a = 1 - p$ y $b = (r-1)(1-p)$.*

La demostración de este resultado es inmediata después de realizar algunos cálculos algebraicos sencillos, y se dejan como ejercicio al lector. Toda distribución de probabilidad con soporte en $\{0, 1, \ldots\}$ que cumple la identidad (2.1) se le llama distribución de clase $(a, b, 0)$, los términos a y b se refieren a las constantes del mismo nombre que aparecen en la fórmula (2.1) y el cero se refiere a que la probabilidad de inicio de la fórmula recursiva es aquella que tiene subíndice cero, es decir, p_0. Observe que la identidad (2.1) es muy atractiva pues permite generar la distribución de probabilidad de estas variables aleatorias discretas de una forma recursiva: se calcula primero p_0, a partir de ella se obtiene p_1, a partir de p_1 se obtiene p_2, y así sucesivamente. Supondremos entonces que la distribución del número de reclamaciones cumple con la condición (2.1) y la proposición establece que tal condición es válida para las tres distribuciones señaladas. En el ejercicio 48 en la página 55 se pide demostrar el resultado recíproco de la proposición anterior, es decir, que las únicas distribuciones discretas de probabilidad no degeneradas que cumplen (2.1) son las tres mencionadas. Recordando la notación e hipótesis del modelo colectivo de riesgo $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$, definido en el capítulo anterior, tenemos las siguientes hipótesis y notación adicionales. Supondremos que las reclamaciones Y_j son tales que $P(Y_j \in \mathbb{N}) = 1$, lo cual no es ningún problema pues puede considerarse que las reclamaciones se efectúan en unidades monetarias, cualesquiera que estas sean. En los cálculos que haremos a continuación usaremos los siguientes símbolos.

Notación:

$p_k = P(N = k)$	$k = 0, 1, \ldots$
$f_r = P(Y = r)$	$r = 1, 2, \ldots$
$f_r^{*k} = P(Y_1 + \cdots + Y_k = r)$	$1 \leqslant k \leqslant r = 1, 2, \ldots$
$g_r = P(S = r)$	$r = 0, 1, \ldots$

En particular, para $1 \leqslant k + 1 \leqslant r$,

$$f_r^{*(k+1)} = (f^{*k} * f)_r = \sum_{i=1}^{r-1} f_i^{*k} f_{r-i}.$$

Además, $g_0 = P(S = 0) = P(N = 0) = p_0$, y para $r \geqslant 1$,

$$g_r = P(S = r) = \sum_{k=1}^{\infty} P(S = r \,|\, N = k) P(N = k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_r^{*k} p_k.$$

Proposición 2.2 *Bajo la notación e hipótesis anteriores, se cumplen las siguientes igualdades:*

1. $E(\ Y_1 \mid \ \sum_{j=1}^{k} Y_j = r\ ) = \dfrac{r}{k}$, *para* $k \geqslant 1$.

2. $p_k\, f_r^{*k} = p_{k-1} \sum_{i=1}^{r-1} (a + \dfrac{bi}{r})\, f_{r-i}^{*(k-1)}\, f_i$, *para* $k \geqslant 2$.

Demostración. Para el primer inciso, por idéntica distribución,

$$\begin{aligned} E(\ Y_1 \mid \sum_{j=1}^{k} Y_j = r\ ) &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} E(\ Y_i \mid \sum_{j=1}^{k} Y_j = r\ ) \\ &= \frac{1}{k} E(\sum_{i=1}^{k}\ Y_i \mid \sum_{j=1}^{k} Y_j = r\ ) \\ &= \frac{r}{k}. \end{aligned}$$

Para el segundo inciso desarrollamos el lado derecho,

$$\begin{aligned} p_{k-1}\sum_{i=1}^{r-1}(a+\frac{bi}{r}) f_{r-i}^{*(k-1)} f_i &= p_{k-1}\sum_{i=1}^{r}(a+\frac{bi}{r}) P(Y_2+\cdots+Y_k = r-i) P(Y_1 = i) \\ &= p_{k-1}\sum_{i=1}^{r}(a+\frac{bi}{r}) P(Y_1 = i, Y_2+\cdots+Y_k = r-i) \\ &= p_{k-1}\sum_{i=1}^{r}(a+\frac{bi}{r}) P(Y_1 = i, \sum_{j=1}^{k} Y_j = r) \\ &= p_{k-1}\sum_{i=1}^{r}(a+\frac{bi}{r}) P(Y_1 = i \mid \sum_{j=1}^{k} Y_j = r) f_r^{*k} \\ &= p_{k-1} E(a+\frac{bY_1}{r} \mid \sum_{j=1}^{k} Y_j = r) f_r^{*k} \\ &= p_{k-1}(a+\frac{b}{k}) f_r^{*k} \\ &= p_k f_r^{*k} \end{aligned}$$

■

Ahora estamos listos para enunciar y demostrar la fórmula de Harry Panjer [17], publicada en 1981.

Teorema 2.1 (Fórmula de Panjer) *Para el modelo colectivo de riesgo, y bajo las hipótesis y notación arriba enunciados, la probabilidad* $g_r = P(S = r)$ *está dada por*

$$\begin{aligned} g_r &= \sum_{i=1}^{r} (a + \frac{bi}{r})\, f_i\, g_{r-i}, \quad \text{para } r \geqslant 1. \\ g_0 &= p_0. \end{aligned}$$

Demostración. Hemos observado antes que $g_0 = P(N = 0) = p_0$. Para el caso $r \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} g_r &= \sum_{k=1}^{\infty} P(S = r \mid N = k) P(N = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} p_k f_r^{*k} \\ &= p_1 f_r + \sum_{k=2}^{\infty} p_k f_r^{*k} \\ &= (a+b) p_0 f_r + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{i=1}^{r-1} (a + \frac{bi}{r}) p_{k-1} f_{r-i}^{*(k-1)} f_i \\ &= (a+b) p_0 f_r + \sum_{i=1}^{r-1} (a + \frac{bi}{r}) f_i \sum_{k=2}^{\infty} p_{k-1} f_{r-i}^{*(k-1)} \\ &= (a+b) p_0 f_r + \sum_{i=1}^{r-1} (a + \frac{bi}{r}) f_i g_{r-i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} (a + \frac{bi}{r}) f_i g_{r-i}. \end{aligned}$$

■

Observe que cuando las reclamaciones son constantes y unitarias, es decir,

$f_1 = P(Y = 1) = 1$, entonces $S = N$ y la fórmula de Panjer se reduce a la fórmula recursiva (2.1) de las distribuciones $(a, b, 0)$. A continuación escribimos explícitamente los primeros términos de la fórmula recursiva de Panjer:

$$\begin{aligned}
g_0 &= p_0 = P(N = 0) \\
g_1 &= (a + \frac{b}{1}) f_1 g_0 \\
g_2 &= (a + \frac{b}{2}) f_1 g_1 + (a + \frac{2b}{2}) f_2 g_0 \\
g_3 &= (a + \frac{b}{3}) f_1 g_2 + (a + \frac{2b}{3}) f_2 g_1 + (a + \frac{3b}{3}) f_3 g_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como un ejemplo consideremos el caso cuando N sigue una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 3.5$, y el monto de las reclamaciones tiene la siguiente función de densidad

r	1	2	3	4	5
f_r	0.1	0.1	0.2	0.3	0.3

Entonces la fórmula de Panjer produce la función de probabilidad para S que se muestra en la Figura 2.1. El código en R correspondiente se encuentra en el Apéndice B.

Harry Panjer

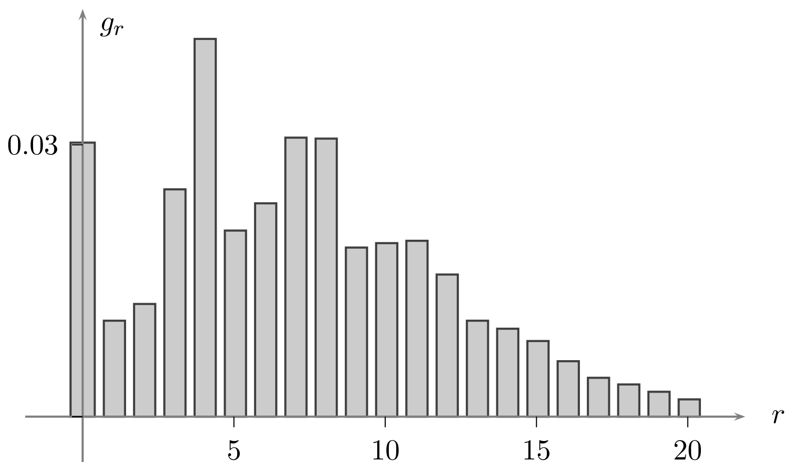


Figura 2.1

Aproximación en el caso de montos de reclamaciones continuas

Cuando los montos de las reclamaciones toman valores continuos, pueden usarse el siguiente método de discretización de estos montos para poder aplicar la fórmula de Panjer. Se toma cualquier unidad monetaria $\rho > 0$, y se definen las variables aleatorias enteras

$$\begin{aligned} \overline{Y}_j &= \operatorname{ínf}\{\, n \in \mathbb{N} : Y_j \leqslant n\rho \,\}, \\ \text{y} \quad \underline{Y}_j &= \sup\{\, n \in \mathbb{N} : Y_j \geqslant n\rho \,\}, \end{aligned}$$

en donde también se define $\operatorname{ínf}\varnothing = 0$. Entonces $\rho\underline{Y}_j \leqslant Y_j \leqslant \rho\overline{Y}_j$. Por ejemplo, para la situación que se muestra en la Figura 2.2 se tiene que $\overline{Y}_j = 4$ y $\underline{Y}_j = 3$, y efectivamente $3\rho \leqslant Y_j \leqslant 4\rho$.

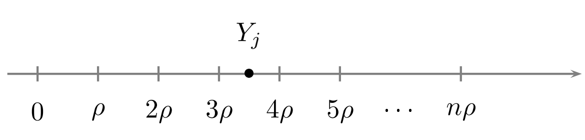


Figura 2.2

Se definen entonces los siguientes riesgos cuyas reclamaciones ahora son enteras

$$\overline{S} = \sum_{j=1}^{N} \overline{Y}_j, \qquad \text{y} \qquad \underline{S} = \sum_{j=1}^{N} \underline{Y}_j.$$

Y entonces se cumple que

$$\rho\underline{S} \leqslant S \leqslant \rho\overline{S}.$$

Por lo tanto, para cualquier $x > 0$,

$$P(\overline{S} \leqslant x/\rho) \leqslant P(S \leqslant x) \leqslant P(\underline{S} \leqslant x/\rho).$$

Esto provee de cotas superior e inferior, calculadas usando la fórmula de Panjer, para la función de distribución del riesgo. Conforme más pequeña sea la unidad monetaria ρ mejor es la aproximación. Debe observarse, sin embargo, que surge una dificultad técnica para aquellas reclamaciones Y_j con valores en $(0, \rho)$, pues estas reclamaciones llevan a la definición $\underline{Y}_j = 0$, lo cual no es un caso contemplado en el esquema de la fórmula de Panjer. En una situación real el monto de las reclamaciones es grande comparado con el parámetro ρ, de modo que la probabilidad de que una reclamación tome un valor entre 0 y ρ es realmente muy pequeña. Existe también un caso particular simple que es cuando $\rho = 1$, es decir, se aproximan las reclamaciones mediante valores enteros: para cada valor de Y_j existe un entero $n \geqslant 0$ tal que $n \leqslant Y_j < n + 1$, y por lo tanto,

$$\underline{Y}_j = n, \qquad \text{y} \qquad \overline{Y}_j = n + 1.$$

Entonces se tienen nuevamente las relaciones $\underline{S} \leqslant S \leqslant \overline{S}$, y en consecuencia para cualquier $x > 0$,

$$P(\overline{S} \leqslant x) \leqslant P(S \leqslant x) \leqslant P(\underline{S} \leqslant x),$$

en donde $\overline{S}$ y $\underline{S}$ son riesgos con reclamaciones enteras para los cuales puede aplicarse la fórmula de Panjer y obtener su distribución (exceptuando un pequeño error obtenido por el caso $\underline{Y}_j = 0$). En cualquier caso podemos ser prudentes y tomar las reclamaciones de manera sobre estimada: para $n \geqslant 0$,

$$\overline{Y}_j = n + 1 \quad \text{cuando} \quad Y \in (n, n + 1].$$

De esta forma cualquier valor continuo de una reclamación en el intervalo $(n, n + 1]$ se considera como si fuera de magnitud $n + 1$. Por lo tanto, los montos de las reclamaciones están siendo ligeramente sobrevaluadas. Si $G(x)$ denota la función de distribución de una reclamación Y cualquiera, entonces se ha definido la distribución discreta

$$P(\overline{Y}_j = n+1) = G(n+1) - G(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

En las siguientes secciones estudiaremos algunos métodos generales para aproximar la distribución de probabilidad de un riesgo en el modelo colectivo. Estas aproximaciones son muy generales y no presuponen el cumplimiento de las hipótesis para la validez de la fórmula de Panjer, es decir, el número de reclamaciones no necesariamente tiene una distribución en la clase $(a, b, 0)$, ni el monto de las reclamaciones es necesariamente discreto. Por otro lado, el problema de estimar el error en estas aproximaciones es también muy general y no nos ocuparemos de ello.

2.2. Aproximación normal

Si la distribución de probabilidad del número de reclamaciones N se concentra mayormente en valores grandes, entonces el teorema central del límite sugiere aproximar la distribución del riesgo S mediante la distribución normal. Suponga que la esperanza de S es m y la varianza es σ^2. Entonces, para $x > 0$,

$$P(S \leqslant x) = P(\frac{S-m}{\sigma} \leqslant \frac{x-m}{\sigma}) \approx \Phi(\frac{x-m}{\sigma}).$$

Derivando esta expresión se encuentra una fórmula aproximada para la función de densidad de S.

Proposición 2.3 (Aproximación normal) *Sea S es una riesgo con media m y varianza finita σ^2. Para cualquier $x > 0$,*

$$f_S(x) \approx \frac{1}{\sigma}\,\phi(\frac{x-m}{\sigma}). \tag{2.2}$$

Esta aproximación hace uso únicamente de la media y la varianza del riesgo, y en general no es una buena aproximación a menos que la densidad del riesgo presente la forma de campana o bien el número de reclamaciones sea grande. Se puede particularizar esta aproximación cuando la distribución de N es conocida, por ejemplo, cuando el número de reclamaciones N sigue una distribución Poisson con parámetro λ, la aproximación (2.2) adquiere la expresión

$$f_S(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu_2}}\,\phi(\frac{x-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}).$$

Otro caso particular se obtiene cuando N es $\mathrm{bin}(n,p)$, entonces la expresión (2.2) se reduce a la fórmula siguiente

$$P(S \leqslant x) \approx \Phi(\frac{x-np\mu}{\sqrt{np(\mu_2-\mu^2 p)}}).$$

En el caso cuando N es bin $\mathrm{neg}(r,p)$ se tiene que (2.2) es

$$P(S \leqslant x) \approx \Phi(\frac{x-r(1-p)\mu/p}{\sqrt{r(1-p)[\mu_2/p+(1-p)\mu^2/p^2]}}).$$

2.3. Aproximación gamma trasladada

Puesto que la función de densidad o de probabilidad de algunos riesgos pueden presentar un aspecto semejante a la forma de la distribución gamma, se propone substituir la distribución del riesgo S por la distribución de la variable aleatoria $k+Z$, en donde k es una constante y Z es una variable aleatoria con distribución $\mathrm{gamma}(\gamma,\alpha)$. Para ello se deben escoger adecuadamente valores para los tres parámetros k, γ y α, que determinan la distribución de $k+Z$. Supongamos entonces conocidas o estimadas las siguientes cantidades

a) $E(S) = m$.

b) $\mathrm{Var}(S) = \sigma^2$.

c) $\dfrac{E[(S-E(S))^3]}{[\mathrm{Var}(S)]^{3/2}} = \alpha_3$.

La correspondiente media, varianza y coeficiente de asimetría (de Fisher) de la variable aleatoria aproximante $k+Z$ son

a) $E(k+Z) = k + \gamma/\alpha$.

b) $\mathrm{Var}(k+Z) = \gamma/\alpha^2$.

c) $\dfrac{E[(k+Z-E(k+Z))^3]}{[\mathrm{Var}(k+Z)]^{3/2}} = 2/\sqrt{\gamma}$.

La idea es hacer que las distribuciones de S y $k+Z$ coincidan en el sentido de que las tres cantidades mencionadas sean las mismas para las dos distribuciones. Haciendo coincidir estas cantidades se obtiene el sistema de ecuaciones

$$k + \frac{\gamma}{\alpha} = m, \qquad \frac{\gamma}{\alpha^2} = \sigma^2, \qquad \frac{2}{\sqrt{\gamma}} = \alpha_3,$$

cuya solución es

$$k = m - \frac{2\sigma}{\alpha_3}, \qquad \gamma = \frac{4}{\alpha_3^2}, \qquad \alpha = \frac{2}{\sigma\alpha_3}.$$

De esta forma se tiene la siguiente aproximación.

Proposición 2.4 (Aproximación gamma trasladada) *La distribución del riesgo S en el modelo colectivo puede aproximarse mediante la distribución de la variable aleatoria*

$$m - \frac{2\sigma}{\alpha_3} + Z,$$

en donde Z se distribuye gamma$(\frac{4}{\alpha_3^2}, \frac{2}{\sigma\alpha_3})$.

Pueden substituirse las expresiones generales para la media, varianza y coeficiente de asimetría de un riesgo que sigue el modelo colectivo para obtener fórmulas un poco más particulares de esta aproximación.

2.4. Aproximación de Edgeworth

Considere un cierto riesgo S modelado mediante una variable aleatoria con esperanza m, varianza finita σ^2, y tal que su función generadora de momentos existe. Defina la variable $Z = (S - m)/\sigma$, cuya esperanza es cero y varianza es uno. Sea $M_Z(r)$ la función generadora de momentos de Z. La serie de Taylor de la función $\ln M_Z(r)$ alrededor de cero es

$$\ln M_Z(r) = a_0 + a_1 r + \frac{a_2}{2!}r^2 + \frac{a_3}{3!}r^3 + \frac{a_4}{4!}r^4 + \cdots$$

en donde los coeficientes son $a_k = \frac{d^k}{dr^k} \ln M_Z(r)\Big|_{r=0}$. Calculando las derivadas y evaluando en cero se encuentra que los primeros cinco coeficientes son

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, \\ a_1 &= E(Z) = 0, \\ a_2 &= E(Z^2) = 1, \\ a_3 &= E(Z^3), \\ a_4 &= E(Z^4) - 3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

La aproximación de Edgeworth consiste en truncar la serie de Taylor de la función $\ln M_Z(r)$ hasta algún término adecuado. Por ejemplo, la aproximación hasta la cuarta potencia de r es

$$\ln M_Z(r) \approx \frac{1}{2!}r^2 + \frac{a_3}{3!}r^3 + \frac{a_4}{4!}r^4.$$

Entonces

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx \exp(\frac{1}{2!}r^2 + \frac{a_3}{3!}r^3 + \frac{a_4}{4!}r^4) \\ &= e^{r^2/2} \exp(\frac{a_3}{6}r^3 + \frac{a_4}{24}r^4). \end{aligned}$$

Ahora se usa la serie $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots$ en el segundo factor y se obtiene la aproximación

$$\begin{aligned} M_Z(r) &\approx e^{r^2/2}\,(1 + \frac{a_3}{6}r^3 + \frac{a_4}{24}r^4 + \frac{a_3^2}{72}r^6) \\ &= e^{r^2/2} + \frac{a_3}{6}r^3 e^{r^2/2} + \frac{a_4}{24}r^4 e^{r^2/2} + \frac{a_3^3}{72}r^6 e^{r^2/2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

El siguiente paso es *invertir* cada término de esta ecuación encontrando una distribución aproximada para Z. El resultado que utilizaremos es el siguiente.

Proposición 2.5 *Si $\phi(x)$ es la función de densidad de la distribución normal estándar, entonces para cualquier entero $n \geqslant 0$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}(-1)^n \phi^{(n)}(x)\, dx = r^n e^{r^2/2}.$$

Demostración. Primeramente tenemos que para $n = 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\phi(x)\, dx = e^{r^2/2},$$

es decir, $e^{r^2/2}$ es la función generadora de momentos de la distribución normal estándar. Multiplicando por r tenemos que

$$\begin{aligned} re^{r^2/2} &= \int_{-\infty}^{\infty} re^{rx}\phi(x)\, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{d}{dx}e^{rx})\phi(x)\, dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{rx}\phi'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Es decir, $re^{r^2/2}$ es la transformada de Laplace de $-\phi'(x)$. Procediendo de manera análoga, multiplicando sucesivamente por r, se llega a la fórmula anunciada. ■

En particular, se ha demostrado que $re^{r^2/2}$ es la transformada de Laplace de $-\phi'(x)$. En este caso usamos el término transformada de Laplace y no función generadora de momentos pues la función $-\phi'(x)$ no es una función de densidad. Entonces el resultado anterior establece que la función $r^n e^{r^2/2}$ es la transformada de Laplace de $(-1)^n\phi^{(n)}(x)$. El siguiente paso es *invertir* cada uno de los términos de la igualdad (2.3), aunque realmente que no se está calculando de manera formal la inversa de la función generadora de momentos (o transformada de Laplace) sino que se está usando el hecho de que si dos distribuciones de probabilidad tienen la misma función generadora de momentos, entonces las distribuciones coinciden. Así, *invirtiendo* término a término la igualdad (2.3), se obtiene

$$f_Z(z) \approx \phi(z) - \frac{a_3}{6}\,\phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24}\,\phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72}\,\phi^{(6)}(z). \tag{2.4}$$

Recordemos que hemos definido $Z = (S-m)/\sigma$, por lo tanto la función de densidad de $S = m + \sigma Z$ está dada por

$$f_S(x) = \frac{1}{\sigma}\, f_Z(\frac{x-m}{\sigma}),$$

y de esta forma se llega al siguiente resultado.

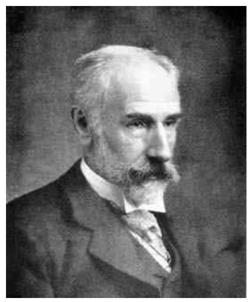
Proposición 2.6 (Aproximación de Edgeworth) *Sea S un riesgo con media m, varianza finita σ^2, y cuya función generadora de momentos existe. Entonces la función de densidad de S puede aproximarse de la siguiente forma*

$$f_S(x) \approx \frac{1}{\sigma}\,[\,\phi(\frac{x-m}{\sigma}) - \frac{a_3}{6}\,\phi^{(3)}(\frac{x-m}{\sigma}) + \frac{a_4}{24}\,\phi^{(4)}(\frac{x-m}{\sigma}) + \frac{a_3^2}{72}\,\phi^{(6)}(\frac{x-m}{\sigma})\,].$$

Derivando directamente la función de densidad $\phi(x)$ de la distribución normal estándar puede demostrarse que

$$\begin{aligned}
\phi^{(3)}(x) &= (3x - x^3)\,\phi(x),\\
\phi^{(4)}(x) &= (3 - 6x^2 + x^4)\,\phi(x),\\
\phi^{(6)}(x) &= (-15 + 45x^2 - 15x^4 + x^6)\,\phi(x).
\end{aligned}$$

Estas expresiones pueden substituirse en la aproximación de Edgeworth para obtener una expresión en términos de únicamente la función $\phi(x)$. Observe que el primer sumando en la aproximación de Edgeworth corresponde a la función de densidad normal con media m y varianza σ^2. No es difícil verificar además que cuando el riesgo S sigue una distribución normal, la aproximación de Edgeworth es exacta pues produce como resultado la misma distribución con los mismos parámetros.



Francis Ysidro Edgeworth
(Irlanda 1845–1926)

La aproximación de Edgeworth puede expresarse también en términos de la función de distribución de la siguiente forma. Integrando (2.4) se obtiene

$$F_Z(z) \approx \Phi(z) - \frac{a_3}{6}\Phi^{(3)}(z) + \frac{a_4}{24}\Phi^{(4)}(z) + \frac{a_3^2}{72}\Phi^{(6)}(z).$$

Considerando la identidad $F_S(x) = F_Z((x-m)/\sigma)$, se tiene que la aproximación de Edgeworth para un riesgo S en términos de la función de distribución es

$$F_S(x) \approx \Phi(\frac{x-m}{\sigma}) - \frac{a_3}{6}\Phi^{(3)}(\frac{x-m}{\sigma}) + \frac{a_4}{24}\Phi^{(4)}(\frac{x-m}{\sigma}) + \frac{a_3^2}{72}\Phi^{(6)}(\frac{x-m}{\sigma}),$$

en donde derivando directamente la función $\Phi(z)$ puede demostrarse que

$$\begin{aligned}
\Phi^{(3)}(z) &= (z^2-1)\,\phi(z),\\
\Phi^{(4)}(z) &= (-z^3+3z)\,\phi(z),\\
\Phi^{(6)}(z) &= (-z^5+10z^3-15z)\,\phi(z).
\end{aligned}$$

2.5. Ejercicios

Distribuciones de la clase $(a, b, 0)$

48. *Las cuatro distribuciones de la clase* $(a, b, 0)$. Sea $\{p_k\}$ una distribu-

ción de probabilidad en la clase $(a, b, 0)$, es decir, se trata de una distribución discreta con soporte el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$ y tal que cumple la relación $p_k = (a + b/k)\, p_{k-1}$ para $k \geqslant 1$, en donde a y b son dos constantes. Observe que tomando el caso particular cuando $k = 1$, se llega a la conclusión de que las constantes deben satisfacer la desigualdad $a + b \geqslant 0$.

a) Demuestre que en el caso $a+b = 0$, la distribución se concentra en cero, es decir, $p_0 = 1$.

b) Demuestre que si $a + b > 0$ y $a = 0$ entonces $\{p_k\}$ es la distribución Poisson(λ) con $\lambda = b > 0$.

c) Demuestre que si $a + b > 0$ y $a > 0$ entonces para cualquier $k \geqslant 1$,

$$p_k = \frac{a^k}{k!}(k + \frac{b}{a})(k - 1 + \frac{b}{a}) \cdots (2 + \frac{b}{a})(1 + \frac{b}{a})p_0. \qquad (2.5)$$

Defina $r = 1 + b/a$, e incorpore este valor en (2.5). Concluya que $\{p_k\}$ es la distribución bin neg(r, p) con $p = 1 - a$.

d) Observe que si $a + b > 0$ y $a < 0$, y si la relación iterativa es válida para cualquier $k \geqslant 1$ como hemos supuesto, entonces necesariamente los valores de las constantes a y b deben ser tales que exista un entero $n \geqslant 1$ tal que

$$a + \frac{b}{n} > 0, \quad \text{y} \quad a + \frac{b}{n+1} = 0.$$

Y por lo tanto se debe tener que $p_k = 0$ para $k = n+1, n+2, \ldots$. De la igualdad anterior obtenga $n = -b/a - 1$. Compruebe la validez de la ecuación (2.5) para $0 \leqslant k \leqslant n$, e incorpore allí el valor de n. Concluya que $\{p_k\}$ es la distribución binomial(n, p) con $p = a/(a - 1)$.

49. *Función generadora de probabilidad de una distribución en la clase* $(a, b, 0)$. Sea N una variable aleatoria con distribución de probabilidad en la clase $(a, b, 0)$.

a) Demuestre que la correspondiente función generadora de probabilidad $P_N(t) = E(t^N)$ satisface la ecuación diferencial

$$(1 - at)\, P_N^{'}(t) = (a + b)\, P_N(t). \qquad (2.6)$$

b) Demuestre que la solución a la ecuación (2.6) con condición inicial $P_N(1) = 1$ y para $a \notin \{0, 1\}$ es

$$P_N(t) = \left(\frac{1 - at}{1 - a}\right)^{-(a+b)/a}.$$

c) En particular, demuestre que

c.1) $P(N = 0) = (1 - a)^{(a+b)/a}$ para $a \neq 0$.

c.2) $\lim\limits_{a \to 0} P(N = 0) = e^{-b}$.

50. *Fórmula para la esperanza de una distribución en la clase* $(a, b, 0)$. Sea N una variable aleatoria con distribución de probabilidad $\{p_k\}$ en la clase $(a, b, 0)$. A partir de la definición elemental de esperanza o bien usando la fórmula (2.6) del ejercicio anterior, demuestre que para $a \neq 1$,

$$E(N) = \frac{a + b}{1 - a}.$$

Fórmula de Panjer

51. Compruebe que la fórmula recursiva de Panjer efectivamente produce una función de probabilidad.

52. A partir de la fórmula recursiva de Panjer compruebe nuevamente que

$$E(S) = E(N)E(Y).$$

53. *Fórmula recursiva para los momentos de S.* Use la fórmula de Panjer y la misma notación e hipótesis de dicho resultado para demostrar que para $a \neq 1$ y para $n \geqslant 1$,

$$E(S^n) = \frac{1}{1 - a} \sum_{i=0}^{n-1} \left[a\binom{n}{i} + b\binom{n-1}{i} \right] E(S^i)\, E(Y^{n-i}).$$

54. *Fórmula recursiva para la función de distribución de S en un caso particular.* En general es difícil encontrar una expresión recursiva para la función de distribución $F(x)$ de un riesgo S en el modelo

colectivo. Sin embargo, para el siguiente caso particular es posible encontrar dicha relación. Usando la notación e hipótesis de la fórmula de Panjer y en el caso cuando N tiene una función de probabilidad geo(p), es decir, $p_k = P(N = k) = (1-p)^k p$, para $k \geqslant 0$, demuestre que para $x \geqslant 1$,

$$F(x) = p + (1-p) \sum_{j=1}^{x} f_j \, F(x-j).$$

55. Suponga que un riesgo S sigue un modelo colectivo en donde N tiene una distribución Poisson de parámetro $\lambda = 2$, y el monto de las reclamaciones tiene la función de probabilidad que aparece abajo. Use la fórmula de Panjer para encontrar la función de probabilidad de S.

r	1	2
f_r	1/2	1/2

56. Suponga que un riesgo S sigue un modelo colectivo en donde N tiene una distribución geométrica de parámetro $p = 1/2$, y el monto de las reclamaciones tiene la función de probabilidad que aparece abajo. Use la fórmula de Panjer para encontrar la función de probabilidad de S.

r	1	2
f_r	1/2	1/2

Aproximación normal

57. Suponga que un cierto riesgo S tiene una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = 30$, en donde los montos de las reclamaciones siguen una distribución uniforme$(0, 10)$. Use la aproximación normal para encontrar el valor de la prima p tal que

    a) $P(S > p) \leqslant 0.05$.

    b) $P(S > p) \leqslant 0.01$.

58. Suponga que un riesgo S sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = 20$, y los montos de las reclamaciones tienen distribución $\exp(\alpha)$ con $\alpha = 10$. Use la aproximación normal para estimar la probabilidad $P(S > E(S))$.

59. Suponga que un riesgo S sigue una distribución Poisson compuesta con parámetro $\lambda = 20$, y los montos de las reclamaciones tienen distribución Pareto$(4, 3)$. Use la aproximación normal para comprobar que el valor de la prima p que cumple la condición $P(S > p) \leqslant 0.01$ es $p = 38.0194$.

Aproximación gamma trasladada

60. Demuestre que si S es un riesgo con distribución gamma(γ, α), entonces $E[(S - \gamma/\alpha)^3] = 2\gamma/\alpha^3$. Compruebe entonces que la aproximación gamma trasladada para S coincide con S.

61. Durante la derivación de la aproximación gamma trasladada se usa el hecho de que la variable aleatoria $k + Z$, en donde Z tiene una distribución gamma(γ, α), tiene media, varianza y coeficiente de asimetría $k + \gamma/\alpha$, γ/α^2 y $2/\sqrt{\gamma}$ respectivamente. Demuestre estas fórmulas.

62. Durante la derivación de la aproximación gamma trasladada se llega al sistema de ecuaciones $k + \gamma/\alpha = m$, $\gamma/\alpha^2 = \sigma^2$ y $2/\sqrt{\gamma} = \alpha_3$, en donde k, γ y α son las incógnitas. Demuestre que la solución a este sistema es efectivamente $k = m - 2\sigma/\alpha_3$, $\gamma = 4/\alpha_3^2$ y $\alpha = 2/\sigma\alpha_3$.

63. Encuentre una expresión para la aproximación gamma trasladada cuando el riesgo sigue una distribución

    a) Poisson compuesta.

    b) binomial compuesta.

    c) binomial negativa compuesta.

64. Suponga que Z tiene una distribución gamma(γ, α). Demuestre que si 2γ es un número entero natural, entonces $2\alpha Z$ tiene una distribución $\chi^2(2\gamma)$.

Aproximación de Edgeworth

65. Demuestre que la aproximación de Edgeworth para un riesgo con distribución normal con media m y varianza σ^2 produce esta misma distribución con los mismos parámetros. Recuerde que si Z tiene una distribución normal estándar, entonces los momentos impares de esta variable aleatoria se anulan, y para cualquier número natural n,
$$E(Z^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}.$$

66. Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta de parámetro $\lambda > 0$, y que se desea usar la aproximación de Edgeworth para S. Demuestre que
$$a_k = \frac{d^k}{dr^k} \ln M_Z(r)\bigg|_{r=0} = \lambda\mu_k(\lambda\mu_2)^{-k/2}, \quad \text{para } k = 2, 3, 4.$$
En consecuencia
$$\begin{aligned} P(S \leqslant x) \quad \approx \quad & \Phi(\frac{x-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}) - \frac{\lambda\mu_3(\lambda\mu_2)^{-3/2}}{6}\Phi^{(3)}(\frac{x-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}) \\ & + \frac{\lambda\mu_4(\lambda\mu_2)^{-2}}{24}\Phi^{(4)}(\frac{x-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}) \\ & + \frac{\lambda^2\mu_3^2(\lambda\mu_2)^{-3}}{72}\Phi^{(6)}(\frac{x-\lambda\mu}{\sqrt{\lambda\mu_2}}). \end{aligned}$$

67. Suponga que S tiene una distribución Poisson compuesta de parámetro $\lambda > 0$, y que se desea usar la aproximación de Edgeworth para S. Suponga adicionalmente que el monto de las reclamaciones siguen una distribución Pareto$(4, 3)$. Demuestre que $\mu_4 = \infty$, y por lo tanto la fórmula del ejercicio anterior no puede aplicarse.

Capítulo 3

Principios para el cálculo de primas

Hemos mencionado antes que una prima es un pago por adelantado que un asegurado realiza a una compañía aseguradora para obtener una cobertura parcial o completa contra un riesgo determinado, en los términos y condiciones que establece la póliza del seguro. En este capítulo vamos a estudiar algunas reglas generales para calcular el valor de una prima tomando en consideración únicamente los aspectos matemáticos del riesgo, es decir, no consideraremos cuestiones administrativas o mercadológicas del negocio del seguro, las cuales en situaciones prácticas son indispensables de considerar. Denotaremos por p, o p_S, la prima para cubrir un riesgo S. De esta manera, a la fórmula para calcular una prima se le puede considerar como una función numérica de la variable aleatoria S o de su distribución.

3.1. Principios generales

La prima pura de riesgo está dada por $p = E(S)$. Aunque esta fórmula podría parecer justa para el asegurado, no lo es así para el asegurador, quien debe solventar los diversos gastos de administración del seguro, y quien por otro lado no tendría ningún margen de ganancia promedio por operar el negocio del seguro. Veremos a continuación la posible situación catastrófica que podría presentarse cuando se toma $p = E(S)$. Considere un portafolio homogéneo de n pólizas de seguro de un mismo riesgo y válidas por un tiempo determinado. Suponga que se cobra una misma prima p por cada póliza, y que S_j representa el monto de las reclamaciones efectuadas por la póliza j, las cuales se presuponen independientes y con idéntica distribución. Si u es el capital inicial de la aseguradora, entonces el capital de la misma al término de la vigencia de las pólizas es

$$X_n = u + np - \sum_{j=1}^{n} S_j = u + \sum_{j=1}^{n} (p - S_j).$$

Tenemos las siguientes dos situaciones:

a) Cuando $p = E(S)$, al tomar esperanza en la ecuación anterior se obtiene $E(X_n) = u + n\,(p - E(S)) = u$. Es decir, en promedio la compañía aseguradora permanece con su capital inicial, sin embargo puede demostrarse que cuando $n \to \infty$, casi seguramente,

$$\limsup_{n\to\infty} X_n = -\liminf_{n\to\infty} X_n = \infty.$$

Esto quiere decir que el capital X_n puede oscilar y tomar valores grandes, tanto negativa como positivamente.

b) Cuando $p \neq E(S)$, por la ley de los grandes números, la variable X_n tiene el siguiente comportamiento límite en el sentido casi seguro,

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > E(S), \\ -\infty & \text{si } p < E(S). \end{cases}$$

En vista de estos resultados, es natural y deseable suponer $p > E(S)$. Esta condición se conoce con el nombre de condición de ganancia neta (*net profit condition*), y debe prevalecer en cualquier método para calcular p. En general no existe un mecanismo de cálculo para la prima que sea el mejor pues existen varias condiciones que afectan la forma de calcular primas, entre ellas, las restricciones legales y financieras, las condiciones del asegurado, las condiciones de la propia aseguradora y de las otras aseguradoras, así como las condiciones del mercado del seguro. Todos estos son factores que determinan, directa o indirectamente, el valor de una prima para cubrir un riesgo particular en una situación real.

■ **Principio del valor esperado**
Este principio es uno de los más sencillos y establece que la prima puede calcularse de la siguiente forma

$$p = (1 + \theta)E(S),$$

en donde $\theta > 0$ es una constante llamada factor de recargo (*safety loading*). Es decir, se trata de la reclamación promedio mas un porcentaje de ésta. En el factor de recargo se encuentran inmersos los costos administrativos y comerciales del seguro, así como los márgenes de utilidad de la aseguradora. La forma simple en la que se calculan las primas mediante este principio es una de sus características principales, sin embargo puede observarse que una desventaja de esta fórmula es que asigna la misma prima a dos riesgos con distinta distribución pero con media común, y no toma en cuenta otro aspectos. Por ejemplo, si las varianzas de los riesgos fueran distintas, entonces las primas tal vez deberían ser distintas.

■ **Principio de la varianza**
Este principio hace uso de la esperanza y la varianza del riesgo. En este caso el factor de recargo $\theta > 0$ se aplica sobre el valor de la varianza de la siguiente forma

$$p = E(S) + \theta \operatorname{Var}(S).$$

■ **Principio de la desviación estándar**
Sea nuevamente $\theta > 0$ una constante. En este principio el factor de recargo se aplica sobre la desviación estándar del riesgo como indica la fórmula que aparece abajo. A diferencia del principio de la varianza, en este caso las unidades de medición del riesgo y de la prima coinciden. Y es evidente que la prima calculada mediante este principio produce una prima menor o igual a aquella calculada mediante el principio de la varianza.

$$p = E(S) + \theta \sqrt{\operatorname{Var}(S)}.$$

■ **Principio de utilidad cero**
Este principio hace uso de una función de utilidad, esto es, una función $v(x)$ definida sobre $[0, \infty)$ o un subconjunto de este intervalo y con valores en $\mathbb{R}$, que cumple las propiedades que se mencionan a continuación, y cuya gráfica en términos generales se muestra en la Figura 3.1.

a) Es estrictamente creciente.

b) Es cóncava.

Suponiendo diferenciabilidad, la primera condición se escribe $v'(x) > 0$, y la segunda condición significa que $v''(x) \leqslant 0$. A veces se añade la condición $v(0) = 0$ pues toda función de utilidad (definida en $x = 0$) puede modificarse de tal forma que cumpla esa condición sin afectar el resultado en los procesos de decisión que llevaremos a cabo usando estas funciones. La nueva función de utilidad sería $v(x) - v(0)$. Véase la sección sobre este tema en el apéndice.

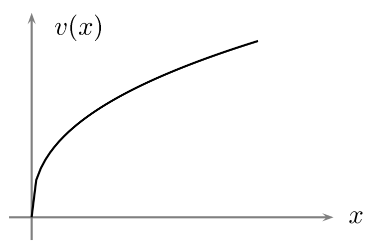


Figura 3.1: Función cóncava.

El principio de utilidad cero establece que la prima para cubrir un cierto riesgo S es aquel número p que satisface la ecuación

$$v(u) = E[v(u + p - S)], \tag{3.1}$$

en donde u es el capital inicial de la aseguradora. Es decir, la utilidad que representa para la aseguradora el capital inicial u debe ser idéntica a la utilidad esperada al cubrir el riesgo. Así pues, el cálculo de p está dado implícitamente por la ecuación (3.1), y para que la prima esté bien definida supondremos el caso cuando esta ecuación tiene una única solución p. Debemos mencionar, sin embargo, que resolver ecuaciones de la forma (3.1) para p, no es sencillo. El siguiente ejemplo es un caso muy particular y atípico.

Ejemplo 3.1 *Considere la función de utilidad $u(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$. La prima se calcula como aquel valor de p que es solución de la ecuación*

$$1 - e^{-\alpha u} = E[1 - e^{-\alpha(u+p-S)}].$$

En este caso la solución se puede encontrar con facilidad. Después de algunos cálculos, de la identidad anterior se obtiene la expresión

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha). \tag{3.2}$$

Se presentan a continuación algunos ejemplos de funciones de utilidad.

a) Función de utilidad exponencial.

$v(x) = 1 - e^{-\alpha x}, \quad \alpha > 0.$

b) Función de utilidad cuadrática.

$v(x) = x - \alpha x^2, \quad \alpha > 0, \quad \text{para } 0 \leqslant x \leqslant 1/(2\alpha).$

c) Función de utilidad logarítmica.

$v(x) = \alpha \ln x, \quad \alpha > 0.$

d) Función de utilidad de potencia fraccional.

$v(x) = x^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$

Demostraremos a continuación que el principio de utilidad cero produce primas que cumplen la condición $p \geqslant E(S)$. Por la desigualdad de Jensen en el caso de funciones cóncavas,

$$v(u) = E[v(u + p - S)] \leqslant v(E(u + p - S)) = v(u + p - E(S)).$$

Como v es una función estrictamente creciente, es uno-a-uno, y por lo tanto su inversa v^{-1} existe y también es estrictamente creciente. Al aplicar entonces la inversa se preserva la desigualdad anterior y se obtiene $p \geqslant E(S)$. La igualdad se logra, por ejemplo, cuando S es constante.

Principio del valor medio

Este principio hace uso de una función de valor, esto es, una función $v(x)$ que cumple las propiedades que aparecen abajo y cuya gráfica general se muestra en la Figura 3.2.

a) $v(0) = 0$.

b) Es estrictamente creciente.

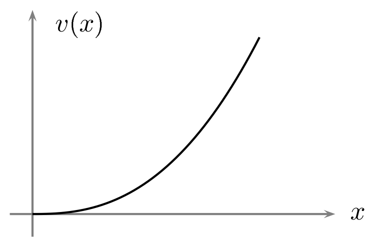


Figura 3.2: Función convexa.

c) Es estrictamente convexa.

El principio del valor medio establece que la prima p debe calcularse a partir de la igualdad

$$v(p) = E[v(S)]. \tag{3.3}$$

Esta identidad significa que la compañía aseguradora asigna el mismo valor a la prima que al valor promedio de la reclamación. Como v es estrictamente creciente, es uno-a-uno, su inversa por lo tanto existe y es también estrictamente creciente. De hecho, la inversa de cualquier función de utilidad que se anula en cero es un ejemplo de una función de valor. Así, la prima mediante este principio se puede escribir de la siguiente forma

$$p = v^{-1}(E(v(S))).$$

Por la desigualdad de Jensen para la función convexa v, $E(v(S)) \geqslant v(E(S))$, o bien por la misma desigualdad para la función cóncava v^{-1}, $v^{-1}(E(X)) \geqslant E(v^{-1}(X))$. Ambos caminos llevan a la desigualdad

$$p \geqslant E(S).$$

Ejemplo 3.2 *Considere la función de valor $v(x) = e^{\alpha x} - 1$, con $\alpha > 0$. Bajo este principio, la igualdad (3.3) se escribe $e^{\alpha p} - 1 = E(e^{\alpha S} - 1)$, lo que lleva a la siguiente solución, que es idéntica a (3.2),*

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha). \tag{3.4}$$

Principio exponencial

Este es el principio de utilidad cero aplicado a la función de utilidad $v(x) = 1 - e^{-\alpha x}$, con $\alpha > 0$. Y coincide también con el principio del valor medio aplicado a la función de valor $v(x) = e^{\alpha x} - 1$, con $\alpha > 0$. Hemos visto que la prima calculada bajo estos principios es

$$p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha).$$

Observe que en este caso la prima no depende del capital inicial u. Puede verificarse directamente que $p \geqslant E(S)$, lo cual hemos demostrado de manera general en dos ocasiones.

Principio del porcentaje

Sea $\epsilon > 0$ una constante. El principio del porcentaje sugiere que la prima p puede calcularse mediante la expresión aparece abajo. El significado geométrico de esta fórmula se muestra en la Figura 3.3.

$$p = \text{ínf}\,\{x > 0 : P(S > x) \leqslant \epsilon\}.$$

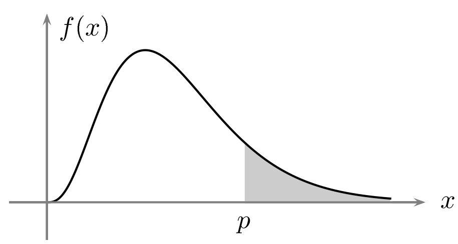


Figura 3.3

De esta forma la probabilidad de que el riesgo exceda el monto de la prima debe ser pequeño o controlable mediante el parámetro ϵ. A este principio también se le conoce también como principio de pérdida máxima. Por ejemplo, si S sigue una distribución exponencial de parámetro λ, entonces $P(S > x) = e^{-\lambda x}$. Y por lo tanto p es aquel valor numérico tal que $e^{-\lambda p} = \epsilon$, es decir, $p = -\frac{1}{\lambda} \ln \epsilon$. Así, para este ejemplo particular, se cumple la condición $p \geqslant E(S)$ si, y sólo si, $-\frac{1}{\lambda} \ln \epsilon \geqslant \frac{1}{\lambda}$, es decir, $\epsilon \leqslant e^{-1}$. Esto muestra que el principio del porcentaje no produce en general primas que cumplen la condición de ganancia neta.

Principio de Esscher

Antes de establecer este principio es necesario primero definir la transformada de Esscher de una distribución. Sea S un riesgo con función de densidad $f(x)$, función de distribución $F(x)$, y para la cual existe la función generadora de momentos $M_S(h)$, para algunos valores de $h > 0$. La transformada de Esscher con parámetro h de la función de densidad $f(x)$ es

$$g(x) = \frac{1}{M_S(h)}\, e^{hx} f(x). \tag{3.5}$$

Es inmediato comprobar que esta función es efectivamente de densidad. El principio de Esscher establece que la prima para cubrir el riesgo S es la esperanza de esta nueva función de densidad, es decir,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{M_S(h)} \int_0^\infty x\, e^{hx} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{M_S(h)} E(Se^{hS}). \end{aligned}$$

Habiendo definido la forma de calcular primas bajo este principio, vamos a hacer ahora algunas observaciones acerca de la nueva función de densidad (3.5), la cual es la función de densidad original ponderada por la función $x \mapsto e^{hx}/M_S(h)$. Para valores de x menores a $E(S)$ esta ponderación es menor a uno pues

$$\frac{e^{hx}}{M_S(h)} < \frac{e^{hE(S)}}{M_S(h)} \leqslant 1,$$

en donde la segunda desigualdad se obtiene de la desigualdad de Jensen. Ello tiene como consecuencia que la esperanza de (3.5) sea mayor a la esperanza de S, cumpliendose así la condición de ganancia neta. Observe además que la correspondiente función de distribución de (3.5) es

$$G(x) = \frac{1}{M_S(h)} \int_0^x e^{hy} f(y)\, dy.$$

A esta función también se le llama la transformada de Esscher de la función de distribución $F(x)$. Sea $\tilde{S}$ una variable aleatoria asociada a esta función de distribución. Algunos cálculos sencillos muestran que la función generadora de momentos de esta nueva variable aleatoria está dada por

$$M_{\tilde{S}}(t) = \frac{M_S(t+h)}{M_S(h)}.$$

■ **Principio del riesgo ajustado**
Este principio, así como el de Esscher, está basado en una transformación de la distribución del riesgo. Para un riesgo S con función de distribución $F(x)$ se define una nueva función de distribución de la siguiente forma

$$G(x) = 1 - (1 - F(x))^{1/\rho},$$

en donde $\rho \geqslant 1$ es un parámetro conocido como el índice del riesgo. Puesto que $1 - F(x)$ es un número entre cero y uno, y $\rho \geqslant 1$, se cumple que $(1 - F(x))^{1/\rho} \geqslant 1 - F(x)$. De donde se obtiene que $F(x) \geqslant G(x)$ y ello se muestra en la Figura 3.4.

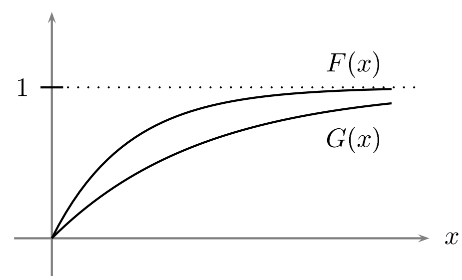


Figura 3.4

La prima por el principio del riesgo ajustado para el riesgo S se define como la esperanza de la nueva función de distribución es , es decir,

$$p = \int_0^\infty (1 - G(x))\, dx = \int_0^\infty (1 - F(x))^{1/\rho}\, dx.$$

Se verifica la condición $p \geqslant E(S)$ pues

$$p = \int_0^\infty (1 - F(x))^{1/\rho}\, dx \geqslant \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx = E(S).$$

3.2. Propiedades

En esta sección se enuncian algunas propiedades generales que son deseables que posea cualquier método para calcular primas.

■ **Simplicidad**
El cálculo de la prima debe ser fácil de calcular, por ejemplo, los principios del valor esperado, el de la varianza y el de la desviación estándar cumplen plenamente esta primera propiedad. La simplicidad en el cálculo de la prima es deseable que se cumpla por varias razones, entre ellas está el aspecto práctico del cálculo mismo, así como el de lograr una cabal comprensión del cálculo de la prima por parte del asegurado y del resto de las personas involucradas en los procesos administrativos y legales del seguro.

■ **Cota inferior**
Por lo explicado antes, la prima debe tener siempre como cota inferior estricta la prima de riesgo, es decir, $p > E(S)$, en otras palabras, las primas deben tener siempre un recargo positivo. Sin embargo, como hemos constatado en algunos cálculos, es más sencillo verificar la condición $p \geqslant E(S)$.

■ **Consistencia**
Si un riesgo se incrementa en una constante, entonces la prima debe reflejar ese cambio incrementándose en la misma cantidad, es decir, si $c > 0$ es una constante, entonces $p(S + c) = p(S) + c$. Los principios de varianza, de la desviación estándar, de utilidad cero, el principio exponencial y el principio del porcentaje cumplen con esta propiedad.

■ **Aditividad**
La prima de un portafolio consistente en dos riesgos independientes debe ser la suma de las primas individuales, es decir, $p(S_1 + S_2) = p(S_1) + p(S_2)$, cuando S_1 y S_2 son dos riesgos independientes. Es claro que cuando se cumple esta propiedad, el intentar combinar o separar los riesgos no resulta en ninguna ventaja o provecho alguno ni para el asegurado ni para el asegurador. Los principios de valor esperado, el de la varianza y el principio exponencial cumplen esta propiedad.

■ **Invarianza de escala**
Si $a > 0$ es una constante, entonces $p(aS) = ap(S)$, es decir, si la cuantificación del riesgo S cambia de escala y se considera ahora el riesgo aS, la prima para este nuevo riesgo debe ser $ap(S)$, esto es, la prima original modificada con la misma escala.

■ **Cota superior**
Si un riesgo está acotado superiormente, entonces la prima para cubrir este riesgo también debe tener la misma cota superior, es decir, si $S \leqslant M$ para alguna constante $M > 0$, entonces $p(S) \leqslant M$.

3.3. Primas y funciones de utilidad

Hemos mencionado que el principio de utilidad cero establece que la prima que una aseguradora está dispuesta a cobrar a un asegurado para cubrir un cierto riesgo S, y tomando como función de utilidad $v_1(x)$ es aquel número p que satisface la ecuación

$$v_1(u_1) = E[v_1(u_1 + p - S)], \tag{3.6}$$

en donde u_1 es el capital inicial de la aseguradora. Denotemos por p^- a esta prima puesto que en realidad la aseguradora estaría contenta en cobrar una prima p que sea mayor o igual a p^-, es decir, desde el punto de vista de la aseguradora y bajo el criterio de utilidad cero, la prima p^- es la mínima prima a cobrar, y por lo tanto $p \geqslant p^-$. En contraparte, un asegurado con capital inicial o riqueza u_2 y con función de utilidad $v_2(x)$, considera que puede aceptar contratar un seguro para cubrirse contra el riesgo S cuando, de acuerdo al principio de utilidad cero, la prima p está dada por

$$v_2(u_2 - p) = E[v_2(u_2 - S)]. \tag{3.7}$$

El posible valor de p solución de esta ecuación representa el punto de balance (misma utilidad) para el asegurado entre la decisión de contratar el seguro o no contratarlo. Denotemos ahora por p^+ a la solución de (3.7). Nuevamente ese valor es en realidad la prima máxima que el asegurado está dispuesto a pagar para cubrirse contra S, pues es claro que una prima menor o igual a tal valor es conveniente para él. De esta manera el principio de utilidad cero establece las condiciones de ambas partes para tomar un decisión respecto a firmar o no firmar el contrato del seguro. Es claro que habrá un acuerdo entre ambas partes si existe un valor de p tal que

$$p^- \leqslant p \leqslant p^+.$$

En tal caso se dice que el riesgo es asegurable bajo el criterio y condiciones mencionados. La situación se ilustra en la Figura 3.5.

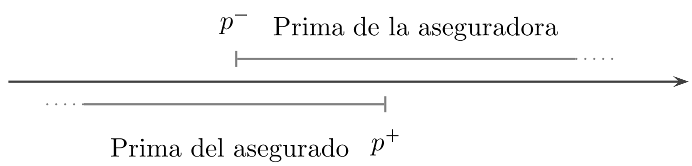


Figura 3.5

Ejemplo 3.3 *Suponga que una compañıa aseguradora con capital inicial $u_1 > 0$ decide asegurar un riesgo S y el cálculo de la prima se determina de acuerdo al principio de utilidad cero usando la función de utilidad $v_1(x) = 1 - e^{-\alpha_1 x}$, con $\alpha_1 > 0$. De este modo, la prima mínima que la aseguradora está dispuesta a cobrar es p^- dada por la solución de la ecuación*

$$v_1(u_1) = E[v_1(u_1 + p^- - S)].$$

Resolviendo esta ecuación como se ha hecho antes se encuentra que $p^- = \frac{1}{\alpha_1} \ln M_S(\alpha_1)$. Por otro lado, un asegurado con capital inicial u_2 está dispuesto a pagar una prima máxima p^+ para asegurarse contra este riesgo, determinada por la ecuación $v_2(u_2 - p^+) = E[v_2(u_2 - S)]$, en donde $v_2(x)$ es la función de utilidad particular $v_2(x) = 1 - e^{-\alpha_2 x}$, con $\alpha_2 > 0$. La solución de esta ecuación es $p^+ = \frac{1}{\alpha_2} \ln M_S(\alpha_2)$. Así, el riesgo mencionado es asegurable bajo las condiciones mencionadas si, y sólo si, las constantes α_1 y α_2 satisfacen la relación

$$\frac{1}{\alpha_1} \ln M_S(\alpha_1) \leqslant \frac{1}{\alpha_2} \ln M_S(\alpha_2).$$

3.4. Ejercicios

Desigualdad de Jensen

68. Una función $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ es *convexa* si para cualesquiera números $x < y$ en (a, b), y para cualquier $t \in [0, 1]$ se cumple la desigualdad

$$u(tx + (1 - t)y) \leqslant tu(x) + (1 - t)u(y).$$

Geométricamente esta desigualdad significa que la recta que une los puntos $(x, u(x))$ y $(y, u(y))$ se encuentra por arriba de la función en el intervalo $[x, y]$. Cuando u es dos veces diferenciable, la condición de convexidad se escribe $u''(x) > 0$. La desigualdad de Jensen establece que si u es una función convexa y X es una variable aleatoria tal que tanto X como $u(X)$ tienen esperanza finita, entonces

$$u(E(X)) \leqslant E(u(X)).$$

Demuestre esta desigualdad en el caso cuando u es dos veces diferenciable siguiendo los siguientes pasos:

a) Escriba la serie de Taylor de la función u alrededor de un punto x_0, hasta la segunda derivada.
b) Use la condición $u''(x) > 0$ para concluir que $u(x) \geqslant u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0)$.
c) Substituya x por X, x_0 por $E(X)$, y después tome esperanza de ambos lados.

Funciones de utilidad y el principio de utilidad cero

69. Sean $a > 0$ y $\alpha > 0$ constantes. Demuestre que la función $v(x) = a(1 - e^{-\alpha x})$ definida para $x \geqslant 0$, es una función de utilidad y que usada bajo el principio de utilidad cero determina que la prima para cubrir un riesgo S debe ser $p = \frac{1}{\alpha} \ln M_S(\alpha)$.

70. Suponga que una persona con capital u tiene dos opciones de inversión, las cuales le reportan ganancias o pérdidas dadas por las variables aleatorias I_1 e I_2. Es decir, al cabo de cada una de las inversiones su capital será $u + I_1$ o $u + I_2$. Suponga que la persona decide tomar la inversión que le otorga una utilidad esperada mayor, en donde su función de utilidad es exponencial. Demuestre que su decisión es independiente del capital inicial u.

Funciones de valor y el principio del valor medio

71. Suponga que un riesgo S tiene distribución $\exp(\lambda)$. Use el principio del valor medio para calcular la prima para cubrir este riesgo usando

la función de valor $v(x) = x^2$.

Principio de la varianza

72. Usando el principio de la varianza calcule la prima p para cubrir un riesgo S con distribución unif$(0, 1)$, y encuentre el valor del factor θ tal que $P(S > p) = 0.1$.

Principio exponencial

73. Use la desigualdad de Jensen para demostrar directamente que la prima calculada mediante el principio exponencial cumple la desigualdad $p \geqslant E(S)$.

Principio del porcentaje

74. Usando el principio del porcentaje, calcule la prima para cubrir un riesgo S con distribución exp(λ).

75. Mediante el principio del porcentaje calcule la prima para cubrir un riesgo con distribución Pareto(a, b).

76. Mediante el principio del porcentaje calcule la prima para cubrir un riesgo con distribución Weibull(r, α).

77. Considere un riesgo S con función de densidad como aparece abajo. Calcule la prima para cubrir S mediante el principio del porcentaje.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/2}, \quad x > 0.$$

Transformada de Esscher

78. Calcule la transformada de Esscher de parámetro $h > 0$ de la distribución

    a) unif(a, b).

b) Poisson(λ).

c) N(μ, σ^2).

79. Sea S un riesgo con función de densidad $f(x)$. Demuestre que la doble transformada de Esscher de $f(x)$ con parámetros h_1 y h_2, respectivamente, es

$$g(x) = \frac{1}{M_S(h_1 + h_2)}\, e^{(h_1+h_2)x} f(x),$$

y que la función generadora de momentos de esta nueva función de densidad es

$$M(t) = \frac{M_S(t + h_1 + h_2)}{M_S(h_1 + h_2)}.$$

Principio de Esscher

80. Calcule la transformada de Esscher de parámetro h de la distribución gamma(α, λ), y encuentre la prima mediante el principio de Esscher para cubrir un riesgo con esta distribución. ¿Se verifica la condición de ganancia neta?

81. Demuestre que la transformada de Esscher de parámetro h de un riesgo S con distribución exp(λ) es nuevamente la distribución

$$\exp(\lambda - h), \quad \text{para } h < \lambda.$$

Grafique ambas funciones de densidad para efectos de comparación. Determine la prima por el principio de Esscher para cubrir el riesgo S. ¿Se verifica la condición de ganancia neta?

Principio del riesgo ajustado

82. Demuestre que la transformada del principio del riesgo ajustado de parámetro ρ de un riesgo S con distribución exp(λ) es nuevamente la distribución exp(λ/ρ). Determine la prima por este principio para cubrir el riesgo S, y verifique la condición de ganancia neta para $\rho > 1$.

83. Demuestre que la transformada del principio del riesgo ajustado de parámetro ρ de un riesgo S con distribución Pareto(a, b) es nuevamente la distribución Pareto$(a/\rho, b)$. Determine la prima para cubrir S usando este principio, y verifique la condición de ganancia neta para $\rho > 1$.

84. Calcule la prima para cubrir un riesgo S con distribución unif$(0, 1)$, usando el principio del riesgo ajustado con índice de riesgo ρ, y verifique la condición de ganancia neta.

Propiedades

85. Complete la siguiente tabla determinando si cada uno de los principios mencionados para calcular primas cumple la propiedad correspondiente. En cada caso demuestre su afirmación o proporcione un contraejemplo. Para simplificar las cosas considere que la propiedad de cota inferior se refiere a la desigualdad no estricta $p \geqslant E(S)$.

	Cota inferior	Consis-tencia	Aditi-vidad	Inva-rianza	Cota superior
Valor esperado					
Varianza					
Desv estándar					
Utilidad cero					
Valor medio					
Exponencial					
Porcentaje					
Esscher					
Riesgo ajustado					

Primas y funciones de utilidad

86. Calcule la prima máxima que un asegurado está dispuesto a pagar para cubrirse contra un riesgo S que puede tomar los valores 0 y 100, con idéntica probabilidad 1/2. Suponga que como función de utilidad se toma la función identidad.

87. Considere un riesgo S con distribución Poisson(λ) con $\lambda = 10$. Sea $v_1(x) = 1 - \alpha e^{-\alpha x}$ con $\alpha = 1/2$ la función de utilidad de la

aseguradora. Sea $v_2(x) = x + 1$ la función de utilidad del solicitante del seguro. Determine si el riesgo S es asegurable. Observe que en este caso no es necesario conocer el capital inicial del asegurado ni del asegurador.

88. Sea $v(x)$ una función de utilidad, y sean a y b dos constantes con $a > 0$. Demuestre que $a\,v(x) + b$ es una función de utilidad.

89. Suponiendo diferenciabilidad, demuestre que la composición de dos funciones de utilidad es una función de utilidad.

90. *Aversión al riesgo.* Suponga que una persona con capital inicial u tiene la posibilidad de participar en un juego justo en el que recibirá una cantidad positiva x con probabilidad $1/2$, o perderá dicha cantidad con probabilidad $1/2$. En caso de no desear participar en este juego, el capital de la persona no se modifica y permanece con el valor u. Suponga que la persona toma la decisión de participar o no participar en el juego usando el criterio de la utilidad esperada máxima, es decir, tomará aquella decisión que le reditúe una utilidad promedio máxima. Demuestre que si la función de utilidad usada es estrictamente cóncava, es decir, $v''(x) < 0$, entonces la decisión será siempre no participar en el juego, a pesar de que éste es justo. Esto ilustra la interpretación de que las funciones de utilidad estrictamente cóncavas representan la utilidad de personas con aversión al riesgo.

91. *Coeficiente de aversión al riesgo.* Se define el coeficiente de aversión al riesgo de una función de utilidad $v(x)$ como la función $-v''(x)/v'(x) \geqslant 0$. Calcule este coeficiente en el caso de la función de utilidad exponencial, cuadrática, logarítmica y potencia fraccional.

Capítulo 4

Reaseguro

En este capítulo estudiaremos algunas ideas simples y generales del reaseguro. El reaseguro se presenta cuando una aseguradora firma un contrato para cubrir ciertos riesgos con otra compañía aseguradora llamada reaseguradora. De esta manera ambas aseguradoras adquieren la obligación de solventar las posibles reclamaciones del riesgo en cuestión. De esta manera nos encontramos nuevamente en el esquema general de un asegurado y una aseguradora, en donde debe existir un acuerdo entre ambas partes acerca de las condiciones del contrato, las características del riesgo, las condiciones para el pago de la suma asegurada y, por supuesto, el cálculo de la prima correspondiente. Desde el punto de vista de la aseguradora, el reaseguro le ayuda a evitar posibles fuertes montos en las reclamaciones, aunque naturalmente disminuyen sus ingreso por primas pues tiene que compartir éstas con la reaseguradora. Consideremos entonces un riesgo S, y denote por S^A la parte del riesgo asumido por el asegurador y sea S^R la parte asumida por el reasegurador. Las letras A y R indican los términos Asegurador y Reasegurador, respectivamente. Debe entonces cumplirse la igualdad

$$S = S^A + S^R.$$

Los distintos tipos de reaseguro corresponden a las distintas formas en las que esta descomposición puede llevarse a cabo. El objetivo ahora es estudiar las características probabilísticas de las variables aleatorias S^A y S^R, y si se dan las condiciones adecuadas, pueden aplicarse los resultados encontrados antes en este curso para lograr dicho objetivo. El reaseguro puede tomar por lo menos dos perspectivas: actuar sobre las reclamaciones individuales o sobre el total del riesgo.

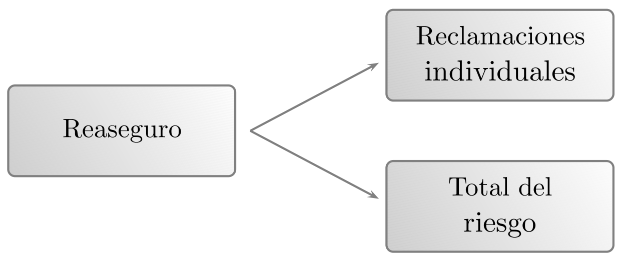


Figura 4.1

En ambos esquemas de reaseguro se aplica una función continua h del intervalo $[0, \infty)$ en sí mismo tal que $h(0) = 0$ y $h(x) \leqslant x$. Las dos funciones de este tipo que consideraremos son $h(x) = ax$, para $a \in (0, 1)$, y $h(x) = \text{mín}\{x, M\}$, para alguna constante $M > 0$. Gráficamente estas funciones se muestran a la Figura 4.2.

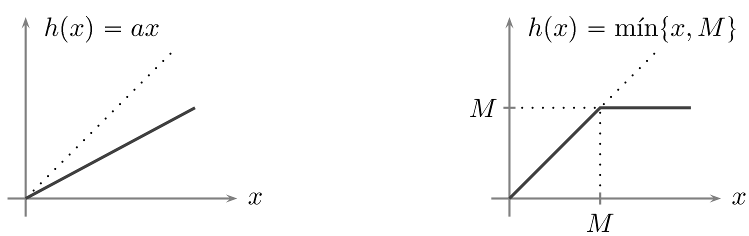


Figura 4.2

Bajo el esquema de reaseguro, la aseguradora afronta únicamente el riesgo resultante de aplicar la función h al riesgo original o a cada una de sus reclamaciones. Cuando se utiliza la primera de las funciones h mencionadas, el reaseguro se llama proporcional, y en el segundo caso se le llama no proporcional. Estudiaremos a continuación estos dos tipos de reaseguro.

4.1. Reaseguro proporcional

Suponga que una compañía aseguradora reasegura un riesgo de la forma $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$. En el reaseguro proporcional se usa la función $h(x) = ax$, para algún valor de la constante a en el intervalo $(0,1)$. Usando la linealidad de esta función, es claro que es equivalente aplicar la función a cada reclamación por separado o al riesgo completo. Dada una reclamación Y, la aseguradora hace frente a una proporción de ésta, aY, y la reaseguradora cubre el porcentaje restante, $(1-a)Y$. El riesgo total asumido por la aseguradora es aS, y la reaseguradora cubre $(1-a)S$, es decir,

$$S^A = aS = \sum_{j=1}^{N} a\,Y_j\,,$$

$$\text{y} \qquad S^R = (1-a)S = \sum_{j=1}^{N} (1-a)\,Y_j.$$

Las características probabilísticas de S^A, o bien de S^R, se encuentran fácilmente de las de S, pues no es difícil comprobar los siguientes resultados.

a) $F_{S^A}(x) = F_S(x/a)$.

b) $f_{S^A}(x) = \dfrac{1}{a} f_S(x/a)$, cuando S es absolutamente continua.

c) $M_{S^A}(r) = M_S(ar)$.

d) $E(S^A) = a\,E(S) \leqslant E(S)$.

e) $\operatorname{Var}(S^A) = a^2 \operatorname{Var}(S) \leqslant \operatorname{Var}(S)$.

Probabilidad de insolvencia

Comprobaremos a continuación que el reaseguro proporcional es conveniente para la aseguradora en el sentido de que la probabilidad de insolvencia bajo este tipo de reaseguro es menor o igual a la probabilidad de insolvencia cuando no hay reaseguro. Suponga que una compañía aseguradora adquiere un riesgo S durante un cierto periodo y por el cual cobra una prima p. Suponga que esta aseguradora tiene un capital inicial u. La probabilidad de que la compañía aseguradora no pueda solventar el riesgo es $P(S > p + u)$.

Ahora suponga que la compañía decide reasegurarse mediante el esquema de reaseguro proporcional. Suponga además que el asegurador retiene una parte de la prima original p dada por ap, con $0 < a < 1$, y el reasegurador obtiene al aceptar reasegurar este riesgo la cantidad $(1-a)p$. La probabilidad de que la aseguradora no pueda solventar el nuevo riesgo bajo este esquema es

$$P(aS > ap + u) = P(S > p + \frac{u}{a}) \leqslant P(S > p + u).$$

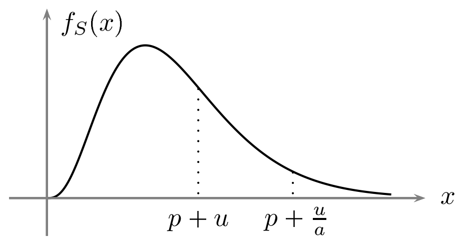


Figura 4.3

De esta forma hemos comprobado que la probabilidad de insolvencia bajo el esquema de reaseguro proporcional es menor o igual a la probabilidad del mismo evento cuando no hay reaseguro. La ventaja para la aseguradora al contratar el reaseguro es que la incertidumbre disminuye pero sus ganancias también disminuyen al ceder un porcentaje de sus ingresos por primas. Esta propiedad de disminución de insolvencia mediante el reaseguro es un tanto más difícil de verificar en otros tipos de reaseguro y dependerá, en general, del cálculo de la prima para el reaseguro.

4.2. Reaseguro no proporcional

En el reaseguro no proporcional se toma la función $h(x) = \text{mín}\{x, M\}$, para alguna constante $M > 0$ llamada nivel de retención. Distinguiremos dos casos: cuando se aplica esta función a cada reclamación y cuando se aplica sobre el total del riesgo.

■ **Reaseguro en el riesgo completo (*stop loss*)**

En este caso se aplica la función $h(x) = \text{mín}\{x, M\}$ sobre el totalidad del riesgo para obtener la parte del riesgo que cubre la aseguradora, y el riesgo excedente lo cubre la reaseguradora. De esta manera cada una de las aseguradoras cubren los riesgos

$$S^A = \text{mín}\{S, M\} \qquad \text{y} \qquad S^R = \text{máx}\{0, S - M\},$$

en donde puede verificarse la identidad $S = S^A + S^R$. Mediante este mecanismo la aseguradora tiene la certidumbre de que cubrirá un monto máximo de M para el riesgo S. A este tipo de reaseguro se le llama reaseguro de pérdida máxima (*stop loss*). Tanto la variable S^A como S^R son, en general, variables aleatorias mixtas, es decir, no son discretas ni continuas. Por ejemplo, la variable S^A tiene una masa de probabilidad en el punto M de valor $P(S \geqslant M)$, es decir, $P(S^A = M) = P(S \geqslant M)$. Puede demostrarse que su función de distribución toma la expresión

$$F_{S^A}(x) = \begin{cases} F_S(x) & \text{si } x < M, \\ 1 & \text{si } x \geqslant M, \end{cases}$$

la cual se muestra en la Figura 4.4 (a) en el caso cuando $F_S(x)$ es continua. Debido a su condición de variable aleatoria mixta, la función de densidad del riesgo S^A no puede expresarse como una función tradicional sino que hay que usar funciones generalizadas. El n-ésimo momento de S^A, sin embargo, puede expresarse de la siguiente forma suponiendo que S es absolutamente continua,

$$E[(S^A)^n] = \int_0^M x^n f_S(x)\, dx + M^n P(S \geqslant M).$$

Por su parte, la variable S^R tiene una masa de probabilidad en el punto 0 de valor $F_S(M)$, es decir, $P(S^R = 0) = F_S(M)$, y su función de distribución es

$$F_{S^R}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ F_S(M + x) & \text{si } x \geqslant 0, \end{cases}$$

la cual se muestra en la Figura 4.4 (b) en el caso cuando $F_S(x)$ es continua. Nuevamente, no es posible escribir la función de densidad de S^R en términos tradicionales pero el n-ésimo momento adquiere la siguiente expresión,

$$E[(S^R)^n] = \int_0^\infty x^n f_S(M + x)\, dx.$$

Es interesante notar que la variable S^R puede tomar el valor 0 con probabilidad positiva, y que en la práctica tal situación no es relevante para la

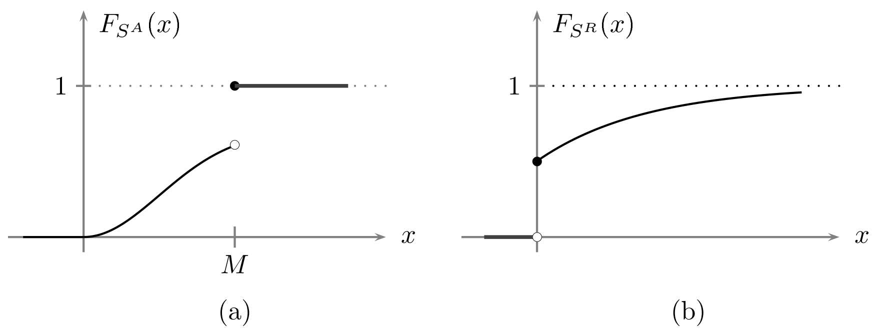


Figura 4.4

reaseguradora, quien está interesada en los valores positivos de S^R. No es difícil comprobar que la función de distribución de S^R condicionada a tomar valores positivos es, para $x > 0$,

$$F_{S^R \,|\, S^R>0}(x) = P(S^R \leqslant x \,|\, S^R > 0) = \frac{F_S(M+x) - F_S(M)}{1 - F_S(M)}.$$

En el caso absolutamente continuo, diferenciando la identidad anterior se encuentra la función de densidad correspondiente.

$$f_{S^R \,|\, S^R>0}(x) = \frac{f_S(M+x)}{1 - F_S(M)}, \quad \text{para } x > 0.$$

Seguros con deducible fijo

Algunos tipos de seguros, como el seguro contra accidentes de automóviles, contemplan el pago de una cantidad llamada *deducible* cada vez que el asegurado presenta una reclamación ante la compañía aseguradora. En este caso particular estamos suponiendo que dicho deducible es una cantidad fija de d unidades monetarias, y que la reclamación se modela con la variable aleatoria S. Si el monto de la reclamación es menor a d, el asegurado cubre la totalidad de la reclamación, es decir, no hay reclamación para la aseguradora. En cambio, si el monto de la reclamación excede el valor de d, entonces el asegurado paga el deducible d y la aseguradora cubre la cantidad restante, es decir, $\max\{0, S-d\}$. De esta forma, los riesgos para este tipo de pólizas de seguros se modelan con las herramientas que hemos mencionado para el reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención d.

Reaseguro en cada reclamación (*excess of loss*)

Si se aplica la función $h(x)$ a cada reclamación Y, entonces el asegurador cubre $Y^A = \text{mín}\{Y, M\}$, y el reasegurador cubre el monto restante $Y^R = Y - \text{mín}\{Y, M\} = \text{máx}\{0, Y - M\}$. Por lo tanto, cada una de las aseguradoras asume los siguientes riesgos

$$S^A = \sum_{j=1}^{N} \text{mín}\{Y_j, M\} \qquad \text{y} \qquad S^R = \sum_{j=1}^{N} \text{máx}\{0, Y_j - M\}.$$

A este esquema de reaseguro se le conoce también con el nombre de reaseguro por exceso de pérdida (*excess of loss*). Observe nuevamente que si se supone una distribución continua para la variable aleatoria Y_j con soporte el intervalo $(0, \infty)$, entonces las variables $\text{mín}\{Y_j, M\}$ y $\text{máx}\{0, Y_j - M\}$ serán mixtas. La primera de ellas tendrá una masa de probabilidad en el punto M, y la segunda en el origen. Observe además que las expresiones para S^A y S^R corresponden exactamente a lo que hemos llamado modelo colectivo de riesgo. Es decir, se trata de sumas aleatorias de variables aleatorias no negativas. En la parte inicial del curso hemos encontrado fórmulas y procedimientos que podrían ayudar a conocer las características de estas variables aleatorias.

Número de reclamaciones

Sea N^A el número de reclamaciones que un asegurador afronta bajo un reaseguro por exceso de pérdida (*excess of loss*) con nivel de retención M sin recurrir a la reaseguradora, es decir,

$$N^A = \sum_{j=1}^{N} 1_{(Y_j \leqslant M)}.$$

Por otro lado, el número de reclamaciones que el reasegurador atiende para este tipo de reaseguro es

$$N^R = \sum_{j=1}^{N} 1_{(Y_j > M)}.$$

Es claro que se cumple la identidad $N = N^A + N^R$. Observe además que, condicionado al evento $(N = n)$, cada una de estas variables aleatorias tiene una distribución binomial en donde n es el número de ensayos y las probabilidades de éxito son $p = P(Y_j \leqslant M)$ en el primer caso, y $1-p = P(Y_j > M)$ en el segundo caso. La distribución no condicional de estas variables es el contenido del siguiente resultado en donde supondremos que la distribución de N es conocida y corresponde a uno de tres casos.

Proposición 4.1 *Sea $a = P(Y_j \leqslant M)$. Entonces*

1. *si N tiene distribución bin(n,p),*
   a) $N^A \sim$ *bin*(n, ap).
   b) $N^R \sim$ *bin*$(n,(1-a)p)$.
2. *si N tiene distribución Poisson(λ),*
   a) $N^A \sim$ *Poisson*(λa).
   b) $N^R \sim$ *Poisson*$(\lambda(1-a))$.
3. *si N tiene distribución bin neg(k,p),*
   a) $N^A \sim$ *bin neg*$(k, p/(p + a(1-p)))$.
   b) $N^R \sim$ *bin neg*$(k, p/(p+(1-a)(1-p)))$.

Demostración. Verificaremos únicamente el primer resultado aplicando la fórmula general $M_S(t) = M_N(\ln(M_Y(t))$ cuando el riesgo S es la variable N^A y Y es la variable aleatoria con distribución Bernoulli dada por la función indicadora $1_{(Y_j \leqslant M)}$. Primeramente observemos que

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = 1 - a + ae^t.$$

Entonces $M_{N^A}(t) = M_N(\ln(1-a+ae^t))$. Cuando N tiene distribución bin(n,p) tenemos que $M_N(t) = (1-p+pe^t)^n$. Por lo tanto,

$$M_{N^A}(t) = (1-p+p(1-a+ae^t))^n = (1-ap+ape^t)^n.$$

Es decir N^A tiene distribución bin(n, ap). Análogamente puede verse que N^R tiene distribución bin$(n,(1-a)p)$. De la misma forma se demuestran los otros casos. Para ello debe recordarse que si N tiene distribución Poisson(λ), entonces $M_N(t) = \exp\{\lambda(e^t - 1)\}$, y si N es bin neg(k, p), entonces $M_N(t) = (p/(1 - (1 - p)e^t))^k$. ■

A manera de resumen de los tipos de reaseguro mencionados se tiene el diagrama de la Figura 4.5.

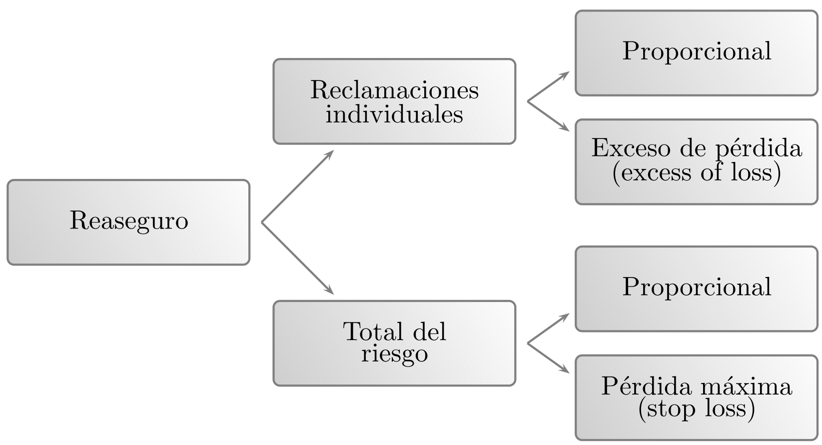


Figura 4.5

4.3. Ejercicios

Reaseguro proporcional

92. Para un reaseguro proporcional demuestre que

    a) $E(S^A) = a\,E(S)$.
    b) $\mathrm{Var}(S^A) = a^2\,\mathrm{Var}(S)$.
    c) $\dfrac{E[(S^A - E(S^A))^3]}{[\mathrm{Var}(S^A)]^{3/2}} = \dfrac{E[(S - E(S))^3]}{[\mathrm{Var}(S)]^{3/2}}$.

93. Considere un riesgo S bajo un esquema de reaseguro proporcional. Es claro que, en general, las variables aleatorias $S^A = aS$ y $S^R =$

$(1-a)S$ no son independientes, de hecho hay una dependencia lineal entre ellas. Demuestre que

a) $\mathrm{Cov}(S^A, S^R) = a(1-a)\mathrm{Var}(S)$.

b) $\rho(S^A, S^R) = 1$.

c) $S^R = \frac{1-a}{a} S^A$.

94. Suponga que un riesgo S sigue una distribución Poisson compuesta con parámetros $\lambda = 100$ y $F(x)$ dada por la distribución exponencial de media 500. Bajo un esquema de reaseguro proporcional con $a = 0.7$, encuentre la distribución y los parámetros de los riesgos $S^A = aS$, y $S^R = (1-a)S$.

95. Suponga que un riesgo S sigue una distribución binomial compuesta con parámetros $n = 100$, $p = 2/3$, y $F(x)$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 50, \\ 1/2 & \text{si } 50 \leqslant x < 100, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 100. \end{cases}$$

Bajo un esquema de reaseguro proporcional con $a = 0.9$, encuentre la esperanza y varianza de los riesgos $S^A = aS$, y $S^R = (1-a)S$.

96. Bajo el esquema de reaseguro proporcional de un cierto riesgo S, el riesgo asumido por el asegurador es $S^A = aS$, y la prima recibida es ap. Suponga que el capital inicial de la aseguradora para afrontar dicho riesgo es u. Demuestre que la probabilidad de insolvencia $P(aS > ap + u)$ es una función creciente de $a \in (0, 1)$.

97. Suponga que un riesgo S se modela mediante la distribución $\exp(\lambda)$. Demuestre que bajo un reaseguro proporcional el riesgo asumido por la aseguradora $S^A = aS$ tiene distribución $\exp(\lambda/a)$. ¿Cuál es la distribución de S^R?

98. Suponga que un riesgo S se modela mediante la distribución gamma(γ, λ). Demuestre que bajo un reaseguro proporcional el riesgo asumido por la aseguradora $S^A = aS$ tiene distribución gama$(\gamma, \lambda/a)$. ¿Cuál es la distribución de S^R?

99. Suponga que un riesgo S sigue una distribución Poisson compuesta con parámetros $\lambda = 100$, y $F(x)$ dada por la distribución gama(γ, λ_0). Bajo un esquema de reaseguro proporcional con $a = 0.9$, encuentre la distribución y los parámetros de los riesgos $S^A = aS$, y $S^R = (1-a)S$.

100. Suponga que un riesgo S se modela mediante la distribución log normal(μ, σ^2). Demuestre que bajo un reaseguro proporcional el riesgo asumido por la aseguradora $S^A = aS$ tiene distribución log normal$(\mu + \ln a, \sigma^2)$. ¿Cuál es la distribución de S^R?

101. Suponga que un riesgo S sigue una distribución Poisson compuesta con parámetros $\lambda = 100$, y $F(x)$ dada por la distribución log normal(μ, σ^2). Bajo un esquema de reaseguro proporcional con $a = 0.9$, encuentre la distribución y los parámetros de los riesgos $S^A = aS$, y $S^R = (1-a)S$.

Reaseguro de pérdida máxima (*stop loss*)

102. Demuestre que bajo un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención M, los riesgos S^A y S^R tienen las siguientes funciones de distribución.

$$
\begin{aligned}
F_{S^A}(x) &= \begin{cases} F_S(x) & \text{si } x < M, \\ 1 & \text{si } x \geqslant M, \end{cases} \\
\text{y} \quad F_{S^R}(x) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ F_S(M+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

103. Considere un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención M para un riesgo S que sigue una distribución exp(λ). Demuestre que las funciones generadoras de momentos de los riesgos S^A y S^R están dadas por las siguientes expresiones.

    a) $M_{S^A}(t) = (\lambda - te^{-(\lambda-t)M})/(\lambda - t)$, para $t < \lambda$.
    b) $M_{S^R}(t) = 1 - e^{-\lambda M} + \lambda e^{-\lambda M}/(\lambda - t)$, para $t < \lambda$.

104. Suponga que un riesgo S se modela mediante la distribución exp(λ). Demuestre que bajo un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención M, se tiene que

   a) $E(S^A) = \frac{1}{\lambda}(1 - e^{-\lambda M})$.
   b) $E(S^R) = \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda M}$.

105. Suponga que el riesgo S sigue una distribución lognormal(μ, σ^2). Bajo un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención M, demuestre que

$$\begin{aligned} E[(S^A)^n] &= e^{n\mu + n^2\sigma^2/2}\, \Phi((\ln M - \mu - n\sigma^2)/\sigma) \\ &\quad + M^n(1 - \Phi((\ln M - \mu)/\sigma)). \end{aligned}$$

106. Suponga que un riesgo S tiene la distribución de probabilidad que aparece en la tabla de abajo. Calcule la distribución de probabilidad de los pagos positivos que efectúa una reaseguradora en un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención $M = 350$.

x	100	200	300	400	500
P(S=x)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

107. Suponga que se establece como función de probabilidad para un riesgo S la que aparece en la tabla de abajo. Calcule la distribución de probabilidad de los pagos positivos que efectúa una reaseguradora en un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención $M = 30$.

x	10	20	30	40	50
P(S=x)	0.2	0.3	0.1	0.1	0.3

108. Suponga que el riesgo S sigue una distribución Pareto(a, b). Bajo el reaseguro de pérdida máxima, demuestre que la distribución del riesgo S^R condicionada al evento $(S^R > 0)$ es nuevamente Pareto($a, b + M$).

109. Suponga que el riesgo S sigue una distribución exp(λ). Bajo un reaseguro de pérdida máxima con nivel de retención M, demuestre que la distribución del riesgo S^R condicionado a ser positivo es nuevamente exp(λ).

Reaseguro en cada reclamación (*excess of loss*)

110. Suponga que se establece como función de probabilidad para la variable aleatoria Y la que aparece en la tabla de abajo. Esta variable aleatoria representa el monto de una reclamación en un seguro. Considere una reaseguro *excess of loss* para Y, con nivel de retención $M = 100$.

y	50	100	150	200
P(Y=y)	0.2	0.3	0.4	0.1

a) Calcule la función de probabilidad para las variables $Y^A = \min\{Y, M\}$ y $Y^R = \max\{0, Y - M\}$.

b) Calcule las esperanzas de estas variables aleatorias y compruebe que $E(Y) = E(Y^A) + E(Y^R)$.

111. Suponga que el monto de una reclamación Y se modela mediante una variable aleatoria con distribución $\exp(\lambda)$. Para un valor de retención $M > 0$ fijo, calcule la función de distribución y la esperanza de las variables aleatorias $\min\{Y, M\}$ y $\max\{0, Y - M\}$.

112. Demuestre que la función generadora de probabilidad de la variable N^R (número de reclamaciones que la reaseguradora afronta) en un reaseguro por exceso de pérdida con nivel de retención M es

$$P_{N^R}(t) = P_N(1 - p + pt),$$

en donde $p = P(Y_j > M)$ y $P_N(t)$ es la función generadora de probabilidad del número total de reclamaciones N.

113. Considere un reaseguro por exceso de pérdida, y sean N^A y N^R el número de reclamaciones afrontadas por el segurador y por el reasegurador respectivamente. El total de reclamaciones es

$$N = N^A + N^R.$$

Suponga que N tiene distribución Poisson(λ).

a) Condicionando sobre el valor de N, demuestre que las variables N^A y N^R son independientes.

b) Compruebe que N^A y N no son independientes. Verifique, por ejemplo, que $P(N^A = 0, N = 0) \neq P(N^A = 0)\, P(N = 0)$.

Suponga ahora que N tiene distribución bin(n, p). Evaluando, por ejemplo, en el valor cero para ambas variables aleatorias, demuestre que

c) N^A y N^R no son independientes.

d) N y N^A no son independientes.

114. Suponga que un cierto riesgo S se representa mediante un modelo colectivo. Condicionando sobre los posibles valores de la variable aleatoria N, demuestre que las variables N^A y N^R correspondientes al número de reclamaciones en un reaseguro por exceso de pérdida tienen la misma distribución que N pero con distintos parámetros en los casos cuando N es Poisson, binomial y binomial negativa. Este método es alternativo al presentado en el texto en donde se usó la función generadora de momentos.

115. Considere un riesgo S con distribución Poisson compuesta de parámetro λ. Suponga que cada reclamación Y tiene distribución Pareto(a, b). Se adquiere un reaseguro por exceso de pérdida con nivel de retención M, y por lo tanto la reclamación afrontada por la aseguradora es $Y^A = \text{mín}\{Y, M\}$. Demuestre que

a) $E(Y^A) = E(Y) - (\frac{b}{b+M})^{a-1}\, E(Y)$.

b) $E(S^A) = E(S) - (\frac{b}{b+M})^{a-1}\, E(S)$.

116. Suponga se tiene un riesgo de la forma $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$, según el modelo colectivo, en donde cada reclamación se modela mediante una variable aleatoria con distribución exp(α). Bajo un reaseguro por exceso de pérdida con nivel de retención M, el monto a pagar por la aseguradora por cada reclamación es $Y^A = \text{mín}\{Y, M\}$. Demuestre que

a) $E(Y^A) = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha M})$.

b) $E((Y^A)^2) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^2}e^{-\alpha M} - \frac{2M}{\alpha}e^{-\alpha M}$.

c) $\text{Var}(Y^A) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2M}{\alpha}e^{-\alpha M} - \frac{1}{\alpha^2}e^{-2\alpha M}$.

d) $E(Y^A) \leqslant E(Y)$.

e) $\text{Var}(Y^A) \leqslant \text{Var}(Y)$.

Usando las fórmulas generales encuentre ahora la esperanza y varianza de $S^A = \sum_{j=1}^{N} \text{mín}\{Y_j, M\}$.

Capítulo 5

Teoría de la credibilidad

Considere un cierto riesgo proveniente de un conjunto de asegurados vigentes por un periodo determinado. Si este grupo de asegurados es homogéneo en el sentido de que todos sus miembros tienen la misma probabilidad de realizar una reclamación, entonces es razonable aplicar una misma prima a todos ellos. Sin embargo, cuando el grupo no es homogéneo, o bien surge con el paso del tiempo cierta heterogeneidad entre ellos, habrá subgrupos de bajo riesgo y otros de alto riesgo. Cobrar una misma prima a todos sería injusto, y no sería bueno para la aseguradora pues eventualmente los asegurados de bajo riesgo buscarían un mejor trato con otra aseguradora. La idea fundamental es aplicar primas menores a los asegurados de bajo riesgo y primas mayores a los de alto riesgo, con base en el historial de reclamaciones que cada uno de los asegurados o subgrupos hayan realizado durante los periodos anteriores. En la teoría de la credibilidad se estudian métodos para el cálculo de primas a través de la combinación de la experiencia individual (historial de reclamaciones) y la experiencia de grupo (comportamiento teórico).

5.1. Credibilidad clásica

Esta perspectiva de la teoría de la credibilidad constituye el primer intento de definir la credibilidad para un conjunto de observaciones de un riesgo. Las ideas que presentaremos en esta primera sección fueron propuestas inicialmente por A. H. Mowbray en 1914, y desarrolladas después por varios actuarios norteamericanos durante la primera mitad del siglo XX. Debido a ello es que a la credibilidad clásica se le conoce también como credibilidad americana.

Credibilidad completa

Suponga que S representa el riesgo para una aseguradora correspondiente a un asegurado o un conjunto de asegurados con ciertas características particulares, y válido por un periodo fijo, por ejemplo, un año. Sean $S_1, \ldots, S_m$ los montos de las reclamaciones efectuadas por este asegurado o grupo de asegurados durante m periodos consecutivos, y sea $\bar{S} = (S_1 + \cdots + S_m)/m$ el promedio de las reclamaciones. Nos interesa estudiar el comportamiento de $\bar{S}$ a lo largo del tiempo para un conjunto de asegurados en particular, pues deseamos determinar si la prima que se les cobra a cada uno de ellos es la adecuada. Si las variables $S_1, \ldots, S_m$ son independientes, idénticamente distribuidas y con esperanza finita, entonces la ley de los grandes números garantiza que la media muestral $\bar{S}$ converge a la constante desconocida $E(S)$, conforme el número de sumandos crece a infinito.

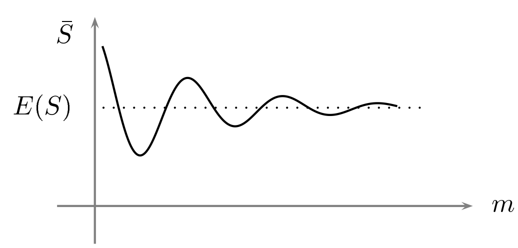


Figura 5.1

Es decir, el comportamiento de $\bar{S}$ como función de m es posiblemente oscilatorio alrededor de $E(S)$ pero eventualmente va a estabilizarse en ese valor. La pregunta es ¿qué tan grande debe ser m para que $\bar{S}$ esté razonablemente cercano a $E(S)$? La intención es usar $\bar{S}$ para calcular la prima pura de riesgo de un asegurado (o grupo de asegurados), siempre y cuando se tenga suficiente historial para dar credibilidad a tal estadística. El siguiente criterio es una posible respuesta a la pregunta planteada.

Definición 5.1 *Sean $k \in (0,1)$ y $p \in (0,1)$ dos números fijos. Se dice que $\bar{S}$ tiene credibilidad completa (k,p) si*

$$P(\ |\bar{S} - E(S)| \leqslant kE(S)\ ) \geqslant p. \tag{5.1}$$

La condición anterior establece que $\bar{S}$ tiene credibilidad completa si dista de $E(S)$, en menos de $kE(S)$ con probabilidad mayor o igual a p. Observe que la definición tiene sentido cuando $E(S)$ es distinta de cero. Naturalmente se toman valores de k cercanos a cero y valores de p cercanos a uno, típicamente $k = 0.05$ y $p = 0.9$. El problema es entonces encontrar el valor del número de periodos de observación m para que se cumpla el criterio (5.1).

Credibilidad completa bajo hipótesis de normalidad

Encontraremos una condición sobre el número de periodos de observación m para obtener credibilidad completa cuando $\bar{S}$ tiene una distribución aproximada normal. Observe que $E(\bar{S}) = E(S)$ y $\text{Var}(\bar{S}) = \text{Var}(S)/m$. Consideraremos que estos valores son desconocidos. Tenemos entonces que, por el teorema central del límite, la parte izquierda de (5.1) es

$$\begin{aligned}
P(\,|\bar{S} - E(S)| \leqslant kE(S)\,) &= P(\,\frac{|\bar{S} - E(S)|}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}} \leqslant \frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}}\,) \\
&\approx P(-\frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}} \leqslant Z \leqslant \frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}}) \\
&= \Phi(\frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}}) - \Phi(-\frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}}) \\
&= \Phi(\frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}}) - (1 - \Phi(\frac{kE(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)/m}})) \\
&= 2\Phi(\frac{k\sqrt{m}E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}) - 1.
\end{aligned}$$

Como esta probabilidad debe ser mayor o igual a p según el criterio (5.1), se obtiene la desigualdad

$$\Phi(\frac{k\sqrt{m}\,E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}) \geqslant \frac{1+p}{2}.$$

Deseamos encontrar el valor de m más pequeño que cumpla esta desigualdad. Para ello consideraremos que se tiene la igualdad en esta ecuación. Sea u_q el q-cuantil de la distribución normal, es decir $\Phi(u_q) = q$. Entonces

$$\frac{k\sqrt{m}\,E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} \geqslant u_{(1+p)/2}.$$

Despejando m se obtiene

$$\begin{aligned} m &\geqslant \frac{u^2_{(1+p)/2}\,\mathrm{Var}(S)}{k^2\,E^2(S)} \qquad (5.2) \\ &= 1082\,\frac{\mathrm{Var}(S)}{E^2(S)}, \end{aligned}$$

en donde la última expresión es aproximada y se han usado los valores k =0.05 y $p = 0.9$, y por lo tanto $u_{(1+p)/2} = u_{0.95} = 1.6449$. Los términos $E(S)$ y $\mathrm{Var}(S)$ pueden ahora ser estimados a través de la media y varianza muestral, respectivamente, usando la información que se tenga a disposición al momento de hacer el análisis. Substituyendo estos valores en la fórmula se puede conocer una aproximación del número de periodos m de historial para que $\bar{S}$ tenga credibilidad completa. Observe que cuando p crece, es decir, cuando se desea tener una mayor confianza en la estabilización de $\bar{S}$, entonces el número de periodos de observación m también crece. Por otro lado, si el parámetro k crece, es decir, si se pide que la distancia entre $\bar{S}$ y $E(S)$ tenga mayor amplitud, entonces m decrece. Finalmente observemos que la aproximación para la credibilidad completa (5.2) se puede expresar de la forma siguiente

$$\mathrm{Var}(\bar{S}) \leqslant \frac{k^2 E^2(S)}{u^2_{(1+p)/2}}.$$

Ejemplo 5.1 *Suponga que un riesgo para un grupo de asegurados sigue el modelo colectivo* $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$*, en donde* N *tiene distribución Poisson*(λ).

Suponga adicionalmente que cada reclamación individual Y tiene distribución $exp(\alpha)$. De acuerdo a la notación previa, el primer y segundo momento de Y son $\mu_1 = 1/\alpha$ y $\mu_2 = 2/\alpha^2$. Entonces $E(S) = \lambda\mu_1 = \lambda/\alpha$, y $Var(S) = \lambda\mu_2 = 2\lambda/\alpha^2$. Por lo tanto, tomando nuevamente $k = 0.05$ y $p = 0.9$, la aproximación (5.2) es

$$m \geqslant 1082\,\frac{2\lambda/\alpha^2}{\lambda^2/\alpha^2},$$

o bien,

$$\lambda m \geqslant 2164.$$

Es decir, después de 2164 reclamaciones, se obtiene credibilidad completa para $\bar{S}$. Observe que λm representa el total de reclamaciones promedio durante m periodos. Observe además para este ejemplo particular que puede no conocerse el valor del parámetro λ, pues aunque la esperanza y varianza de S se expresan en términos de este parámetro, el criterio de credibilidad completa se expresa en términos del número de reclamaciones promedio λm, y no del número de periodos m.

Credibilidad parcial

En lugar del estimador $\bar{S}$ para $E(S)$ se propone la combinación lineal convexa

$$z\bar{S} + (1 - z)E(S),$$

en donde $z \in [0, 1]$ es llamado factor de credibilidad. Mediante una expresión como la propuesta se le otorga credibilidad parcial a la media muestral $\bar{S}$, y la credibilidad complementaria se le otorga a la media teórica $E(S)$. El problema es determinar el valor de z. Nuevamente se pretende que tal estimador no diste demasiado de $E(S)$. La condición (5.1) se reduce a

$$P(\ |z(\bar{S} - E(S))| \leqslant kE(S)\ ) \geqslant p.$$

Observe que esta expresión hace referencia únicamente al primer sumando del estimador propuesto. Reescribimos la expresión anterior de la forma siguiente

$$P(\ |\bar{S} - E(S)| \leqslant \frac{k}{z}E(S)\ ) \geqslant p.$$

Esta es la misma condición para la credibilidad completa solo que en lugar del parámetro k tenemos ahora k/z, es decir, la credibilidad completa (k, p) para $z\bar{S} + (1-z)E(S)$ es equivalente a la credibilidad completa $(k/z, p)$ para $\bar{S}$.

Credibilidad parcial bajo hipótesis de normalidad

Nuevamente bajo la hipótesis de normalidad para $\bar{S}$ y para los valores de k y p mencionados anteriormente se tiene la aproximación

$$m \geqslant \frac{z^2\, u^2_{(1+p)/2}}{k^2} \frac{\mathrm{Var}(S)}{E^2(S)} = (1082)\, z^2\, \frac{\mathrm{Var}(S)}{E^2(S)}. \tag{5.3}$$

De donde se obtiene

$$z = \frac{k\, E(S)\sqrt{m}}{u_{(1+p)/2}\sqrt{\mathrm{Var}(S)}} = \frac{\sqrt{m}}{32.89} \frac{E(S)}{\sqrt{\mathrm{Var}(S)}}. \tag{5.4}$$

Este valor de z excede el valor de uno para valores suficientemente grandes de m, por lo tanto se define el factor de credibilidad como

$$z = \text{mín}\,\{\ \frac{k\, E(S)\sqrt{m}}{u_{(1+p)/2}\sqrt{\mathrm{Var}(S)}},\ 1\ \}. \tag{5.5}$$

Ejemplo 5.2 *Considere nuevamente un riesgo S con distribución Poisson compuesta, $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$, en donde N tiene distribución Poisson(λ), y Y tiene distribución exp(α). Para los valores de k y p mencionados antes, la condición de credibilidad parcial (5.3) para $z\bar{S} + (1-z)E(S)$ se reduce a*

$$\lambda m \geqslant 2164 z^2,$$

Considerando igualdad y despejando z se obtiene $z = \sqrt{\lambda m}/46.52$, en donde λm se substituye por el número de reclamaciones totales que se hayan presentado en m periodos, siempre y cuando $\sqrt{\lambda m} \leqslant 46.52$. De esta manera la prima pura de riesgo por credibilidad parcial es la combinación lineal

$$\textit{prima} = \frac{\sqrt{\lambda m}}{46.52}\,\bar{S} + (1 - \frac{\sqrt{\lambda m}}{46.52})\, E(S),$$

en donde $E(S) = \lambda/\alpha$ es el valor esperado teórico supuesto para el riesgo S, y $\bar{S}$ es la experiencia observada.

5.2. Credibilidad Bayesiana

La credibilidad Bayesiana es otra forma de incorporar el historial de reclamaciones de un grupo de asegurados en el cálculo de las primas.

Estimación Bayesiana

En la estadística tradicional se considera el problema de estimación de un parámetro θ de una distribución de probabilidad dada $f(x;\theta)$. Para ello se considera una muestra aleatoria de esta distribución y se estudian distintos métodos para estimar θ, considerando siempre que este parámetro tiene un valor desconocido y fijo. Existe, sin embargo, un punto de vista distinto llamado estimación Bayesiana. Desde esta perspectiva se considera que θ es una variable aleatoria para la cual se asume una distribución de probabilidad $h(\theta)$ llamada *a priori*. Esta distribución refleja cierta información subjetiva o cuantitativa que el observador pueda tener sobre el parámetro θ. La distribución conjunta de una muestra aleatoria y el parámetro θ es

$$f(x_1,\ldots,x_m,\theta) = f(x_1,\ldots,x_m \,|\, \theta)\, h(\theta) = \prod_{i=1}^{m} f(x_i \,|\, \theta)\, h(\theta).$$

La distribución marginal de la muestra es entonces

$$f(x_1,\ldots,x_m) = \int_\theta \prod_{i=1}^{m} f(x_i \,|\, \theta)\, h(\theta)\, d\theta.$$

Conociendo estas funciones puede ahora calcularse la distribución condicional de θ dada la muestra como sigue

$$\begin{aligned} g(\theta \,|\, x_1,\ldots,x_m) &= \frac{f(x_1,\ldots,x_m \,|\, \theta)\, h(\theta)}{f(x_1,\ldots,x_m)} \\ &= \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{m} f(x_i \,|\, \theta)\, h(\theta)}{\displaystyle\int_\theta \prod_{i=1}^{m} f(x_i \,|\, \theta)\, h(\theta)\, d\theta}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

De esta forma la distribución $h(\theta)$ representa cierta información que el observador conoce del parámetro θ antes de tomar la muestra, y la distribución *a posteriori* $g(\theta \,|\, x_1,\ldots,x_m)$ es la distribución modificada a la luz de la muestra aleatoria. Teniendo ahora esta distribución a posteriori para θ, uno puede proponer varias formas de estimar este parámetro, una de ellas es simplemente tomar la esperanza de esta distribución, es decir, un estimador Bayesiano para θ es

$$\hat{\theta} = E(\theta \,|\, x_1, \ldots, x_m) = \int \theta \, g(\theta \,|\, x_1, \ldots, x_m) \, d\theta.$$

En general, la expresión que pueda encontrarse para la distribución a posteriori para θ usando la fórmula (5.6) puede ser muy complicada y no ser una distribución con la cual estemos familiarizados. Ilustraremos estas ideas con un ejemplo particular en donde el resultado final, sin embargo, es una distribución conocida. Aplicaremos después la estimación Bayesiana al problema de calcular primas puras de riesgo tomando en cuenta el historial de reclamaciones.

Ejemplo 5.3 *Suponga que $X_1, \ldots, X_m$ es una muestra aleatoria de la distribución Ber(p), y suponga además que el parámetro p tiene una distribución beta(a, b), con a y b conocidos. Observe que el soporte de la distribución beta es el intervalo $[0, 1]$, de modo que en este sentido tal distribución es factible para el parámetro p. La densidad conjunta de la muestra y el parámetro es*

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_m, p) &= f(x_1, \ldots, x_m \,|\, p) \, h(p) \\ &= p^{m\bar{x}} (1-p)^{m-m\bar{x}} \, \frac{1}{B(a,b)} \, p^{a-1} \, (1-p)^{b-1} \\ &= \frac{1}{B(a,b)} \, p^{a+m\bar{x}-1} (1-p)^{m-m\bar{x}+b-1}. \end{aligned}$$

Integrando respecto a p se obtiene la densidad marginal de la muestra,

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_m) &= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 p^{a+m\bar{x}-1} \, (1-p)^{m-m\bar{x}+b-1} \, dp \\ &= \frac{B(a+m\bar{x}, m-m\bar{x}+b)}{B(a,b)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la densidad a posteriori para p es

$$g(p \,|\, x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{B(a+m\bar{x}, m-m\bar{x}+b)} \, p^{a+m\bar{x}-1} (1-p)^{m-m\bar{x}+b-1}.$$

Esta es la densidad beta($a + m\bar{x}, m - m\bar{x} + b$), y su esperanza puede usarse como un estimador Bayesiano para p, es decir,

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{a + m\bar{x}}{m + a + b} \\ &= \frac{m}{m + a + b}\,\bar{x} + \left(1 - \frac{m}{m + a + b}\right)\frac{a}{a + b}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Esta última expresión para el estimador Bayesiano es interesante pues tiene la misma forma que la que se había propuesto en la credibilidad parcial. Observe en (5.7) que conforme el tamaño de la muestra m crece, el estimador Bayesiano para la media toma esa información y le asocia un peso mayor a la media muestral $\bar{x}$ en detrimento de la media de la distribución a priori $a/(a + b)$.

Ahora aplicaremos estas ideas al problema del cálculo de primas tomando en cuenta la experiencia de un riesgo. Suponga que las variables $S_1, \ldots, S_m$ representan el historial de reclamaciones en m años o periodos que se han registrado de un riesgo dado. Suponga además que estas variables son independientes y todas ellas tienen una distribución común dependiente de un parámetro desconocido θ, y esta distribución es tal que $E(S) = \theta$. Bajo el enfoque Bayesiano se considera que el parámetro θ es una variable aleatoria para la cual se asume una distribución de probabilidad a priori. La esperanza a posteriori de θ, es decir, $E(\theta \,|\, S_1, \ldots, S_m)$, representa una estimación para $E(S) = \theta$ tomando en cuenta el historial $S_1, \ldots, S_m$. A esta esperanza a posteriori se le llama prima de credibilidad Bayesiana. En los casos que analizaremos esta prima tiene la forma de la credibilidad parcial mencionada antes. Los casos que consideraremos para la distribución de S son: la distribución Poisson con media λ, y la distribución normal con media θ.

■ **Modelo Poisson-gamma**

Este modelo adquiere su nombre a partir de las siguientes hipótesis: se postula que cada una de las variables aleatorias independientes $S_1, \ldots, S_m$ tiene distribución Poisson con parámetro λ, el cual se considera aleatorio con distribución a priori gamma(γ, α), con γ y α parámetros conocidos. Observe que en este modelo se considera que los montos de las reclamaciones toman valores enteros. La función de densidad a posteriori de λ es, para $x > 0$,

$$\begin{aligned}
g(\lambda \,|\, S_1, \ldots, S_m) &= \frac{f(S_1, \ldots, S_m \,|\, \lambda)\, h(\lambda)}{\int_0^\infty f(S_1, \ldots, S_m \,|\, \lambda)\, h(\lambda)\, d\lambda} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^m (\frac{\lambda^{S_j}}{S_j!} e^{-\lambda})\, \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \lambda^{\gamma-1} e^{-\alpha\lambda}}{\int_0^\infty \prod_{j=1}^m (\frac{\lambda^{S_j}}{S_j!} e^{-\lambda})\, \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \lambda^{\gamma-1} e^{-\alpha\lambda}\, d\lambda} \\
&= \frac{\lambda^{m\bar{S}+\gamma-1} e^{-(m+\alpha)\lambda}}{\int_0^\infty \lambda^{m\bar{S}+\gamma-1} e^{-(m+\alpha)\lambda}\, d\lambda} \\
&= \frac{(m+\alpha)^{m\bar{S}+\gamma}}{\Gamma(m\bar{S}+\gamma)}\, \lambda^{m\bar{S}+\gamma-1} e^{-(m+\alpha)\lambda}.
\end{aligned}$$

Es decir, la densidad a posteriori es gamma$(m\bar{S}+\gamma, m+\alpha)$. Por lo tanto la prima por credibilidad, esperanza de esta densidad, es

$$\begin{aligned}
\text{prima} &= E(\lambda \,|\, S_1, \ldots, S_m) \\
&= \frac{m\bar{S}+\gamma}{m+\alpha} \\
&= \frac{m}{m+\alpha}\, \bar{S} + \frac{\alpha}{m+\alpha}\, \frac{\gamma}{\alpha} \\
&= z\, \bar{S} + (1-z)\, \frac{\gamma}{\alpha},
\end{aligned}$$

en donde $z = m/(m+\alpha)$ es llamado factor de credibilidad. Esta cantidad crece monótonamente a uno cuando m crece a infinito, dando cada vez más credibilidad a la media muestral $\bar{S}$ y favoreciendo cada vez menos a la media teórica γ/α. Observe además que cuando m crece a infinito, la media de la distribución a posteriori converge a la media muestral límite dado por el historial de reclamaciones, y que la varianza de λ dada por $\mathrm{Var}(\lambda) = (m\bar{S}+\gamma)/(m+\alpha)^2$ converge a cero, lo cual indica que la distribución a posteriori se concentra cada vez mas alrededor de su media.

Modelo normal-normal

En este modelo se postula que cada una de las reclamaciones $S_1, \ldots, S_m$ tiene distribución $\mathrm{N}(\theta, \sigma^2)$, en donde el parámetro σ^2 es conocido y la media

θ es una variable aleatoria con distribución $\mathrm{N}(\mu, \eta^2)$, con μ y η^2 conocidos. La primera hipótesis puede ser justificada en el caso cuando los montos anuales se componen de un gran número de reclamaciones individuales, para ello no es necesario suponer que las reclamaciones individuales tienen la misma distribución. La segunda hipótesis podría ser razonable si es que los parámetros μ y η^2 son tales que la probabilidad asignada a la parte negativa del eje es muy pequeña. La función de densidad a posteriori de θ es

$$\begin{aligned}
g(\theta \,|\, S_1, \ldots, S_m) &= \frac{f(S_1, \ldots, S_m \,|\, \theta)\, h(\theta)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(S_1, \ldots, S_m \,|\, \theta)\, h(\theta)\, \theta\, d\theta} \\
&= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\sum_{j=1}^m (S_j-\theta)^2/2\sigma^2}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}}\, e^{-(\theta-\mu)^2/2\eta^2}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\sum_{j=1}^m (S_j-\theta)^2/2\sigma^2}\, \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}}\, e^{-(\theta-\mu)^2/2\eta^2}\, d\theta}.
\end{aligned}$$

Nos concentramos en analizar únicamente el exponente y tenemos que

$$\begin{aligned}
-\sum_{j=1}^m \frac{(S_j-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-\mu)^2}{2\eta^2} &= -\theta^2\left(\frac{m}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\eta^2}\right) + 2\theta\left(\frac{m\bar{S}}{2\sigma^2} + \frac{\mu}{2\eta^2}\right) \\
&\quad -\left(\sum_{j=1}^m \frac{S_j^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\mu^2}{2\eta^2}.
\end{aligned}$$

Completando el cuadrado en θ, este exponente se puede escribir como sigue

$$-\frac{[\theta - (\frac{m\bar{S}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\eta^2})/(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})]^2}{2(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})^{-1}} + \frac{(\frac{m\bar{S}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\eta^2})^2}{2(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})} - \left(\sum_{j=1}^m \frac{S_j^2}{2\sigma^2}\right) - \frac{\mu^2}{2\eta^2}.$$

Este exponente aparece tanto en el numerador como en el denominador, y como los últimos dos sumandos no dependen de θ éstos desaparecen completamente al hacer el cociente. Lo que resulta es nuevamente la distribución normal

$$g(\theta \,|\, S_1, \ldots, S_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})^{-1}}} \exp\left\{-\frac{[\theta - (\frac{m\bar{S}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\eta^2})/(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})]^2}{2(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})^{-1}}\right\}.$$

La media de esta distribución es entonces la prima por credibilidad, es decir,

$$\begin{aligned}
\text{prima} &= E(\theta \mid S_1, \ldots, S_m) \\
&= (\frac{m\bar{S}}{\sigma^2} + \frac{\mu}{\eta^2})/(\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2}) \\
&= \frac{m\eta^2}{m\eta^2 + \sigma^2}\,\bar{S} + \frac{\sigma^2}{m\eta^2 + \sigma^2}\,\mu \\
&= z\,\bar{S} + (1-z)\,\mu,
\end{aligned}$$

en donde $z = m\eta^2/(m\eta^2 + \sigma^2)$ es el factor de credibilidad, el cual tiene nuevamente comportamiento monótono creciente a uno conforme m crece a infinito. Observe además que $\text{Var}(\theta) = (\frac{m}{\sigma^2} + \frac{1}{\eta^2})^{-1}$ y que esta cantidad converge a cero cuando el tamaño de muestra m crece a infinito, indicando nuevamente que la distribución a posteriori se concentra cada vez mas alrededor de su media.

5.3. Ejercicios

Credibilidad completa

117. Sean $S_1, \ldots, S_m$ los resultados de m lanzamientos sucesivos de una moneda honesta con valores 0 y 1, dependiendo si se obtiene una cara de la moneda u otra. Usando la aproximación normal encuentre el valor de m para obtener la credibilidad completa (k, p) para $\bar{S} = (S_1 + \cdots + S_m)/m$. Suponga $k = 0.1$ y $p = 0.9$.

118. Encuentre el valor de m para obtener la credibilidad completa (k, p) para $\bar{S} = (S_1 + \cdots + S_m)/m$ de un riesgo S con distribución $\text{N}(5, 2)$. Suponga $k = 0.15$ y $p = 0.9$.

Credibilidad parcial

119. Use la aproximación normal para encontrar la prima por credibilidad parcial, a partir de una muestra $S_1, \ldots, S_m$, de un riesgo S con distribución $\text{Pareto}(4, 3)$. Suponga $k = 0.1$ y $p = 0.9$.

120. Use la aproximación normal para encontrar la prima por credibilidad parcial con $k = 0.1$ y $p = 0.9$ considerando el historial de reclamaciones $S_1, \ldots, S_m$ de un riesgo de la forma $S = \sum_{j=1}^{N} Y_j$, en donde

a) N se distribuye $\text{bin}(n, p)$ con $n = 100$ y $p = 1/2$, y Y_j se distribuye $\exp(\alpha)$ con $\alpha = 1/10$.

b) N se distribuye bin $\text{neg}(\alpha, p)$ con $\alpha = 10$ y $p = 1/3$, y Y_j se distribuye $\exp(\alpha)$ con $\alpha = 1/10$.

Estimación Bayesiana

121. Suponga que el número de reclamaciones X de un cierto riesgo sigue una distribución Poisson de parámetro λ. Se considera que el parámetro λ es desconocido y se le modela como una variable aleatoria con distribución $\exp(\mu)$. Demuestre que la distribución a posteriori o no condicional de X es la siguiente distribución geométrica.

$$P(X = x) = \mu \left(\frac{1}{1+\mu} \right)^{x+1}.$$

122. Suponga que N tiene una distribución Poisson(λ), y que condicionada al valor de N la variable X tiene distribución $\text{bin}(N, p)$. Demuestre que la distribución no condicional de X es Poisson(λp).

Capítulo 6

Procesos estocásticos

En este capítulo se presenta una introducción breve al tema de los procesos estocásticos. Se explican algunos conceptos y propiedades generales, y se dan algunos ejemplos de procesos estocásticos particulares. Este material será usado en la última parte del libro, y supondremos como elemento base un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Definición 6.1 *Un* proceso estocástico *es una colección de variables aleatorias* $\{X_t : t \in T\}$*, parametrizada por un conjunto* T*, llamado espacio parametral.*

El conjunto T usualmente se interpreta como un conjunto de tiempos. Se dice que el proceso es a tiempo discreto en caso de que el conjunto de parámetros sea un conjunto discreto, por ejemplo $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$. En este caso el proceso consiste de una sucesión infinita de variables aleatorias. Se dice en cambio que el proceso es a tiempo continuo cuando el conjunto de parámetros consiste de un subintervalo de $\mathbb{R}$, por ejemplo, $T = [0, \infty)$. En general consideraremos procesos estocásticos con este espacio parametral. Un proceso estocástico es entonces una función de dos variables $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$, tal que para cada $t \in T$, la función $\omega \mapsto X_t(\omega)$ es una variable aleatoria, mientras que para cada ω en Ω, la función $t \mapsto X_t(\omega)$ es una trayectoria del proceso. Con este modelo se pretende representar la evolución aleatoria de un sistema a lo largo del tiempo.

6.1. Filtraciones y tiempos de paro

Una familia de σ-álgebras $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ es una filtración si para $0 \leqslant s \leqslant t$, se cumple $\mathscr{F}_s \subseteq \mathscr{F}_t \subseteq \mathscr{F}$. Al espacio $(\Omega, \mathscr{F}, P, (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0})$ se le llama espacio de probabilidad filtrado. Se dice que un proceso es *adaptado* a una filtración $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ si para cada $t \geqslant 0$, X_t es $\mathscr{F}_t$-medible. Todo proceso estocástico $\{X_t\}$ determina una filtración natural dada por $\mathscr{F}_t = \sigma\{X_s : 0 \leqslant s \leqslant t\}$. Claramente todo proceso es adaptado a su filtración natural. En este caso a la σ-álgebra $\mathscr{F}_t$ se le interpreta como la "historia" del proceso al tiempo t, pues en ella se encuentran todos los posibles eventos o sucesos que el proceso haya tenido hasta ese momento. Un tiempo de paro es una función $\tau : \Omega \to [0, \infty]$ tal que $(\tau \leqslant t) \in \mathscr{F}_t$ para cada $t \geqslant 0$. Esto es, un tiempo de paro es una variable aleatoria no negativa, con posible valor infinito, tal que puede determinarse la ocurrencia o no ocurrencia del evento $(\tau \leqslant t)$ sólo con la información o historia del proceso hasta el tiempo t. Por ejemplo, y sin entrar en mayores detalles técnicos, el tiempo aleatorio que transcurre hasta la ocurrencia de un cierto evento es un tiempo de paro, este tiempo aleatorio puede ser, por ejemplo, el tiempo que transcurre hasta la llegada de la n-ésima reclamación a una compañía aseguradora.

6.2. Cadenas de Markov

Definición 6.2 *Una cadena de Markov es un proceso estocástico a tiempo discreto* $\{X_n : n = 0, 1, \ldots\}$ *con espacio de estados discreto y tal que satisface la propiedad de Markov, esto es, para cualquier* $n \geqslant 0$ *y cualesquiera estados* $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ *se satisface la identidad*

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) \\ = P(X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, X_n = x_n). \end{aligned}$$

A estas probabilidades se les llama probabilidades de transición del tiempo n al tiempo $n+1$, y se les denota por $p_{x_n, x_{n+1}}(n, n+1)$. Adicionalmente se dice que la cadena es estacionaria en el tiempo si estas probabilidades no dependen explícitamente de los tiempos n y $n+1$, sino únicamente de los estados involucrados. De esta forma, si de manera general se considera la probabilidad de transición del estado i al estado j de una unidad de tiempo a la siguiente, la probabilidad de transición del primer estado al segundo se escribe como p_{ij}, o $p_{ij}(1)$, o $p_{ij}^{(1)}$. Haciendo variar los valores de los índices i y j en el espacio de estados $\{0,1,\ldots\}$, por ejemplo, se forma la matriz de probabilidades de transición en un paso:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

Las entradas de esta matriz son números no negativos y la suma de ellos en cada renglón es uno. A tales matrices cuadradas se les llama *matrices estocásticas*. Recíprocamente, a partir de una matriz con estas características junto con una distribución inicial para X_0, se puede construir una cadena de Markov. Las cadenas de Markov son modelos ampliamente conocidos y la propiedad de Markov hace que estos procesos sean atractivos de estudiar pues dicha propiedad hace que ciertas probabilidades sean fáciles de calcular. Las cadenas de Markov con frecuencia aparecen dentro de otros modelos estocásticos de interés, teórico o aplicado. El proceso de riesgo a tiempo discreto que presentaremos en el siguiente capítulo, por ejemplo, resulta ser una cadena de Markov.

6.3. Proceso de Poisson

En esta sección recordaremos la definición y algunos aspectos elementales de uno de los procesos estocásticos de mayor importancia: el proceso de Poisson.

Definición 6.3 *Un proceso estocástico de tiempo continuo $\{N_t : t \geqslant 0\}$, y con espacio de estados el conjunto discreto $\{0,1,\ldots\}$, es un proceso de Poisson de parámetro o intensidad $\lambda > 0$ si cumple las siguientes propiedades:*

a) $N_0 = 0$.

b) Tiene incrementos independientes.

c) $N_{t+s} - N_s$ *tiene distribución Poisson*(λt), *para cualesquiera* $s \geqslant 0$, $t > 0$.

El proceso de Poisson se utiliza para modelar situaciones de conteo de ocurrencias de un evento particular en un intervalo de tiempo dado. Por ejemplo, N_t puede representar el número de llamadas telefónicas recibidas en un conmutador, o el número de accidentes ocurridos en un cierto lugar, o el número de clientes que buscan un servicio durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, etc. En particular $E(N_t) = \lambda t$, y $\text{Var}(N_t) = \lambda t$. En nuestro caso, usaremos este proceso para modelar el número de reclamaciones que llegan a una compañía aseguradora hasta el tiempo t. Una posible trayectoria de un proceso de Poisson se muestra en Figura 6.1.

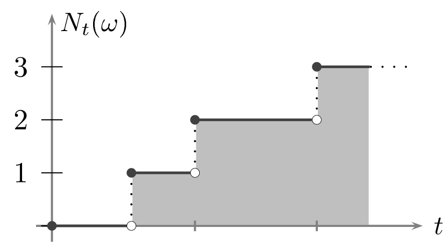


Figura 6.1

Uno de los objetos de estudio acerca de este proceso es la variable T_k definida como el tiempo que transcurre entre el evento $k-1$ y el evento k, llamado también tiempo de interarribo. Puede demostrarse que los tiempos $T_1, T_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes, y cada una de ellas tiene distribución $\exp(\lambda)$. Recíprocamente, a partir de esta colección de v.a.i.i.d. puede construirse el proceso de conteo Poisson $\{N_t : t \geqslant 0\}$.

6.4. Martingalas

Las martingalas son un tipo de proceso estocástico que aparece con frecuencia tanto en la teoría general de procesos como en las aplicaciones. Existe una extensa teoría matemática desarrollada de estos procesos.

Definición 6.4 *Un proceso $\{M_t : t \geqslant 0\}$ que es adaptado e integrable es una martingala si para $0 \leqslant s \leqslant t$ se cumple*

$$E(M_t \mid \mathscr{F}_s) = M_s \quad c.s. \tag{6.1}$$

Las martingalas son procesos que estan relacionados con los juegos justos. Por ejemplo, si M_t representa la fortuna de un jugador al tiempo t, y quien supondremos apuesta de manera continua, entonces la igualdad anterior se interpreta del siguiente modo: en promedio la fortuna del jugador al tiempo t dada toda la historia del juego hasta el tiempo s anterior a t es la fortuna del jugador al tiempo s, es decir, el juego es justo pues el jugador en promedio no pierde ni gana. Cuando en lugar de (6.1) se cumple $E(M_t \,|\, \mathscr{F}_s) \leqslant M_s$ se dice que el proceso es una supermartingala, se trata entonces de un juego desfavorable al jugador pues en promedio su fortuna disminuye. En caso de la desigualdad contraria el proceso es una submartingala, juego favorable al jugador. Cuando se toma esperanza en la ecuación (6.1) se obtiene $E(M_t) = E(M_s)$. Esto quiere decir que todas las variables aleatorias que conforman una martingala tienen la misma esperanza. En particular, si la variable inicial M_0 es cero o su esperanza es cero, entonces $E(M_t) = 0$ para cualquier $t \geqslant 0$. Algunos ejemplos sencillos de martingalas aparecen en la sección de ejercicios. Finalmente enunciaremos un resultado de la teoría general de martingalas que será usado en la última parte del curso. Recuerde la notación $x \wedge y = \text{mín}\{x, y\}$.

Teorema 6.1 *(Teorema de paro de martingalas). Sea* $\{M_t : t \geqslant 0\}$ *una martingala y sea* τ *un tiempo de paro. Entonces* $\{M_{t\wedge\tau} : t \geqslant 0\}$ *es también una martingala, es decir, para cualesquiera* $0 \leqslant s \leqslant t$,

$$E(M_{t\wedge\tau} \,|\, \mathscr{F}_s) = M_{s\wedge\tau} \quad c.s.$$

En el siguiente capítulo usaremos la teoría de martingalas para estimar la probabilidad de ruina en el modelo clásico de Cramér-Lundberg.

6.5. Ejercicios

Cadenas de Markov

123. Considere una cadena de Markov $\{X_n : n \geqslant 0\}$ con espacio de estados $\{0, 1, 2\}$ y con matriz de probabilidades de transición P como aparece abajo. Calcule

   a) $P(X_3 = 0)$ suponiendo que $X_0 = 0$.

b) $P(X_3 = 0)$ suponiendo que X_0 tiene distribución $(1/5, 1/2, 3/10)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

Proceso de Poisson

124. Suponga que las llegadas de reclamaciones a una compañía aseguradora siguen un proceso de Poisson de intensidad $\lambda = 5$, en donde la unidad de tiempo es un día, es decir, en promedio llegan 5 reclamaciones por día. Calcule la probabilidad de que

a) no se reciba ninguna reclamación en un día cualquiera.

b) se reciban más de 10 reclamaciones en un día cualquiera.

c) se reciba una sola reclamación en los siguientes tres dias.

125. Los clientes ingresan a un establecimiento de acuerdo a un proceso de Poisson a razón de 10 clientes por hora en promedio. Calcule la probabilidad de que

a) en una hora cualquiera no llegue ningún cliente.

b) no llegue ningún cliente en una jornada de 12 horas.

c) se presente exactamente un cliente en todas y cada una de las 12 horas en las que está abierto el establecimiento en un día.

126. *Superposición.* Demuestre que la suma de dos procesos de Poisson independientes es nuevamente un proceso de Poisson con parámetro la suma de los parámetros. Nota: La operación suma debe entenderse en el sentido de superponer los dos procesos puntuales.

127. *Thinning.* Sea $\{N_t\}$ un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Considere una sucesión de variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ independientes, con distribución común $\text{Ber}(p)$, e independientes del proceso de Poisson. Defina el proceso $\{X_t : t \geqslant 0\}$ como aparece abajo, definiendo además a X_t como cero cuando N_t es cero.

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

a) Demuestre que $\{X_t\}$ es un proceso de Poisson de parámetro λp.

b) Demuestre que las variables aleatorias X_t y $N_t - X_t$ son independientes. En general se cumple que los procesos estocásticos $\{X_t\}$ y $\{N_t - X_t\}$ son independientes.

128. Suponga que los accidentes automovilísticos en una cierta ciudad ocurren de acuerdo a un proceso de Poisson con un promedio de cinco accidentes por semana. Suponga además que la probabilidad de que en cada accidente haya personas lastimadas que requieran atención médica es 0.2. Calcule la probabilidad de que

a) en un día no se presente ningún accidente.

b) en una semana no se presente ningún accidente.

c) en un mes no se presente ningún accidente con personas lastimadas.

129. Sea $\{N_t\}$ un proceso de Poisson con parámetro λ, y sea $a > 0$ una constante. Demuestre que $\{N_{at}\}$ es un proceso de Poisson con parámetro λa.

130. Considere dos procesos de Poisson independientes de parámetros λ_1 y λ_2. Sea X el número de eventos que ocurren en el primer proceso entre dos eventos sucesivos del segundo proceso. Demuestre que X tiene la siguiente distribución geométrica.

$$P(X = n) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^n .$$

Martingalas

131. Sea $\{N_t\}$ un proceso de Poisson de parámetro o intensidad λ, junto con su filtración natural. Demuestre que el proceso centrado $\{N_t - \lambda t\}$ es una martingala.

132. Demuestre que el proceso $\{M_t\}$ es una submartingala si y sólo si $\{-M_t\}$ es una supermartingala.

133. Demuestre que un proceso es una martingala si y sólo si es al mismo tiempo una submartingala y una supermartingala.

Capítulo 7

Teoría de la ruina

Este capítulo contiene una introducción elemental a uno de los problemas centrales de la teoría del riesgo: el problema de la ruina. Definiremos primero un proceso de riesgo a tiempo discreto y encontraremos una fórmula general recursiva para la probabilidad de ruina en dicho modelo. Presentaremos después una versión a tiempo continuo del proceso de riesgo, conocida como el modelo clásico de Cramér-Lundberg, y encontraremos que la probabilidad de ruina para este modelo satisface una ecuación integral. Estudiaremos además algunos otros resultados generales sobre el cálculo y estimación de la probabilidad de ruina.

7.1. Un proceso de riesgo a tiempo discreto

Definiremos a continuación un proceso estocástico a tiempo discreto que modela de manera simplificada la evolución a lo largo del tiempo del capital de una compañía aseguradora respecto de una cartera de asegurados. Suponga que $u \in \{0, 1, 2 \ldots\}$ es el capital inicial de la aseguradora y que en cada unidad de tiempo la compañía aseguradora recibe una unidad monetaria por concepto de primas. Tal hipótesis podría parecer un tanto irreal pero considere el lector que si en realidad la cantidad recibida es constante e igual a c, entonces mediante un cambio en la escala del tiempo esa constante puede considerarse como una unidad monetaria. Si $Y_1, Y_2, \ldots$ representan los montos de las reclamaciones en los periodos sucesivos, entonces el capital de la compañía aseguradora al tiempo $n \geqslant 1$ es la variable C_n definida a continuación.

Definición 7.1 *El proceso de riesgo a tiempo discreto* $\{C_n : n \geqslant 0\}$ *está dado por*

$$C_n = u + n - \sum_{j=1}^{n} Y_j. \tag{7.1}$$

Supondremos que las variables aleatorias $Y_1, Y_2, \ldots$ son independientes e idénticamente distribuidas con valores en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$ y tales que $E(Y_1) < 1$, a esta condición la llamaremos la condición de ganancia neta. En la presente sección la variable Y representará a cualquiera de las variables Y_j que aparecen en la expresión (7.1), $F(y)$ será la función de distribución de Y y la correspondiente función de probabilidad se denotará por $f(y)$. En las fórmulas que encontraremos más adelante aparecerá con frecuencia la probabilidad $P(Y > y) = 1 - F(y)$ y para hacer las expresiones más simples, esta probabilidad será denotada por $\overline{F}(y)$, es decir,

Notación:

$$\overline{F}(y) = 1 - F(y).$$

Dado que la variable Y es discreta con valores en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$, su esperanza puede entonces escribirse de la siguiente forma:

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} \overline{F}(y).$$

Por otro lado, dadas las características que hemos solicitado para la definición del proceso $\{C_n : n \geqslant 0\}$, éste resulta ser una cadena de Markov con espacio de estados o valores dado por el conjunto discreto $\mathbb{Z}$. Y hemos considerado valores enteros negativos pues alguna reclamación puede ser demasiado grande y llevar al proceso a tales estados críticos para la aseguradora. Justamente, esta situación es nuestro objeto de interés y es el contenido de la siguiente definición.

Definición 7.2 *Se dice que la compañía aseguradora se encuentra en ruina al tiempo* $n \geqslant 1$ *si*

$$C_n \leqslant 0,$$

y se define el tiempo de ruina τ *como el primer momento en que la ruina se presenta, es decir,*

$$\tau = \text{mín}\{n \geqslant 1 : C_n \leqslant 0\}, \tag{7.2}$$

En la expresión (7.2) se debe entender que cuando el conjunto indicado es vacío se define $\tau = \infty$, y equivale a la situación cuando la ruina nunca se presenta. El problema de la ruina consiste en encontrar la probabilidad de que la ruina ocurra en algún conjunto de tiempos específico. Por ejemplo, la probabilidad de una ruina eventual (horizonte infinito) es $P(\tau < \infty)$ y se denota usualmente por $\psi(u)$. Con esta notación se hace énfasis en que tal probabilidad depende, entre otros parámetros del modelo, del capital inicial u. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P(\tau < \infty \mid C_0 = u) \\ &= P(\tau \in \{1, 2, \ldots\} \mid C_0 = u). \end{aligned}$$

Observe que técnicamente no hay ruina al tiempo cero, aun cuando se considere al capital inicial u igual a cero, pues de acuerdo a la Definición 7.2, la ruina sólo puede ocurrir en los tiempos $n \geqslant 1$. En la Figura 7.1 se muestra una posible trayectoria del proceso $\{C_n : n \geqslant 0\}$, en donde para fines de visualización se han unido los valores del proceso mediante líneas punteadas indicando además los incrementos unitarios por concepto de primas en cada intervalo. Se muestra además un posible momento τ en donde se presenta la ruina. La propiedad de Markov del proceso de riesgo nos permitirá encontrar una fórmula recursiva para la probabilidad de ruina en este modelo discreto. En las expresiones que escribiremos a continuación las sumas $\sum_a^b$ se definen como cero cuando los índices a y b son tales que $a > b$. Se define además a la probabilidad de ruina como cero cuando el capital inicial es infinito, es decir,

$$\psi(\infty) = \lim_{u \to \infty} \psi(u) := 0.$$

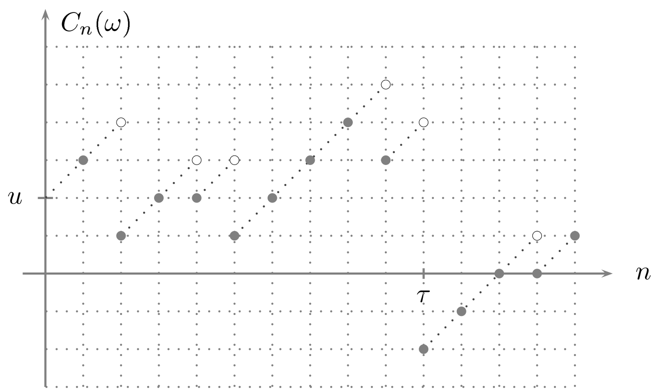


Figura 7.1

Probabilidad de ruina con horizonte infinito

Proposición 7.1 *Para el proceso de riesgo a tiempo discreto* $\{C_n : n \geqslant 0\}$ *con valor inicial* $u \geqslant 0$,

1. $\psi(u) = \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\,\overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y), \quad u \geqslant 1.$

2. $\psi(0) = E(Y).$

Demostración. Para cualquier capital inicial $w \geqslant 0$ y condicionando sobre el valor de Y_1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\psi(w) &= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau < \infty \,|\, Y_1 = y)\, P(Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{w} P(\tau < \infty \,|\, Y_1 = y)\, f(y) + \sum_{y=w+1}^{\infty} P(\tau < \infty \,|\, Y_1 = y)\, f(y) \\
&= \sum_{y=0}^{w} \psi(w+1-y)\, f(y) + \sum_{y=w+1}^{\infty} f(y) \\
&= \sum_{y=0}^{w} \psi(w+1-y)\, f(y) + \overline{F}(w) \\
&= \sum_{y=1}^{w+1} \psi(y)\, f(w+1-y) + \overline{F}(w). \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

Observe que en la segunda igualdad se han separado dos casos: la primera suma se refiere al caso cuando el monto reclamado Y_1 no produce ruina y la segunda suma cuando se presenta la ruina. En este último caso la probabilidad condicional indicada es uno. Despejando el último término de la suma (7.3) y escribiendo u en lugar de w se obtiene

$$\psi(u+1)f(0) = \psi(u) - \sum_{y=1}^{u} \psi(y)\, f(u+1-y) - \overline{F}(u). \qquad (7.4)$$

Sumando ahora las ecuaciones de (7.3) para valores de w de cero a cualquier

$u \geqslant 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{w=0}^{u} \psi(w) &= \sum_{w=0}^{u} \sum_{y=1}^{w+1} \psi(y)\, f(w+1-y) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w) \\
&= \sum_{y=1}^{u+1} \psi(y) \sum_{w=y-1}^{u} f(w+1-y) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w) \\
&= \sum_{y=1}^{u+1} \psi(y) F(u+1-y) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w) \\
&= \sum_{y=1}^{u} \psi(y) F(u+1-y) + \psi(u+1)\, f(0) + \sum_{w=0}^{u} \overline{F}(w)
\end{aligned}$$

Para obtener la última identidad se separa el último sumando de la primera suma y se observa que $F(0) = f(0)$. Despejando este término se obtiene

$$\psi(u+1)\, f(0) = \psi(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi(y)(1 - F(u+1-y)) - \sum_{y=0}^{u} \overline{F}(y). \tag{7.5}$$

Igualando el lado derecho de esta ecuación con el lado derecho de la ecuación (7.4) se obtiene

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \psi(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi(y)(1 - F(u+1-y) + f(u+1-y)) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y) \\
&= \psi(0) + \sum_{y=1}^{u} \psi(y)\, \overline{F}(u-y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y) \\
&= \psi(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\, \overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{u-1} \overline{F}(y). \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

Esto demuestra la primera parte de la proposición. Resta entonces demostrar que $\psi(0) = E(Y)$. Para ello tomaremos el límite cuando $u \to \infty$ en la ecuación (7.6). Tenemos entonces que

$$0 = \lim_{u\to\infty} \psi(u) = \psi(0) + \lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\, \overline{F}(y) - \sum_{y=0}^{\infty} \overline{F}(y).$$

Observamos que la segunda suma es $E(Y)$, de modo que es suficiente demostrar que el límite de la primera suma es cero. Como $E(Y) < \infty$, para cualquier $\epsilon > 0$ puede encontrarse un valor de n natural tal que

$$\sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y) < \epsilon.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\,\overline{F}(y) &\leqslant \sum_{y=0}^{\infty} \psi(u-y)\,\overline{F}(y)\\ &\leqslant \sum_{y=0}^{n} \psi(u-y) + \sum_{y=n+1}^{\infty} \overline{F}(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto al tomar el límite obtenemos que

$$\lim_{u\to\infty} \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\,\overline{F}(y) \leqslant \epsilon.$$

Siendo ϵ arbitrario, el límite es efectivamente cero. ■

En analogía con la notación $\overline{F}(y) = 1 - F(y)$, la expresión $\overline{\psi}(u)$ denotará la probabilidad complementaria $1-\psi(u)$, esto es la probabilidad de que nunca se presente la ruina, es decir,

Notación:

$$\overline{\psi}(u) = 1 - \psi(u).$$

Observe entonces que la ecuación recursiva para $\psi(u)$ también puede ser escrita como sigue

$$\overline{\psi}(u) = \overline{\psi}(0) + \sum_{y=0}^{u-1} \overline{\psi}(u-y)\,\overline{F}(y), \quad u \geqslant 1. \tag{7.7}$$

Por otro lado, recordando nuevamente que, siendo Y una variable aleatoria con valores enteros en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$ y con esperanza finita, se puede escribir

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} \overline{F}(y).$$

De modo que uniendo los dos resultados de la Proposición 7.1 y después de un cambio de variable se encuentra que la fórmula recursiva para $\psi(u)$ también puede ser escrita de la forma siguiente

$$\psi(u) = \sum_{y=u}^{\infty} \overline{F}(y) + \sum_{y=0}^{u-1} \psi(u-y)\overline{F}(y), \quad u \geqslant 1. \tag{7.8}$$

En la siguiente sección encontraremos una fórmula similar a (7.8) para la probabilidad de ruina considerando un modelo de riesgo a tiempo continuo.

Ejemplo 7.1 *Suponga que las reclamaciones Y tienen distribución dada por la tabla que aparece abajo. Usando la fórmula recursiva de la Proposición 7.1, encontraremos $\psi(u)$ para los primeros valores de u.*

y	*0*	*1*	*2*
$f(y)$	*0.5*	*0.2*	*0.3*

Primeramente tenemos que $\psi(0) = E(Y) = 0.8$. Para $u = 1$ la fórmula recursiva establece que $\psi(1) = \overline{F}(1) + \psi(1)\overline{F}(0)$. Substituyendo las probabilidades correspondientes se obtiene $\psi(1) = 0.6$. Para $u = 2$ se tiene que $\psi(2) = \psi(2)\overline{F}(0) + \psi(1)\overline{F}(1)$, de donde se obtiene $\psi(2) = 0.36$. Análogamente se obtienen las probabilidades de ruina que se muestran en las siguientes tablas.

u	$\psi(u)$
0	*0.8*
1	*0.6*
2	*0.36*
3	*0.216*

u	$\psi(u)$
4	*0.1296*
5	*0.07776*
6	*0.046656*
7	*0.0279936*

u	$\psi(u)$
8	*0.01679616*
9	*0.010077696*
10	*0.006046618*
11	*0.0036279708*

En la Figura 7.2 se muestra una gráfica de barras de los valores encontrados de $\psi(u)$. Se observa un comportamiento decreciente de $\psi(u)$ conforme el capital inicial u se incrementa.

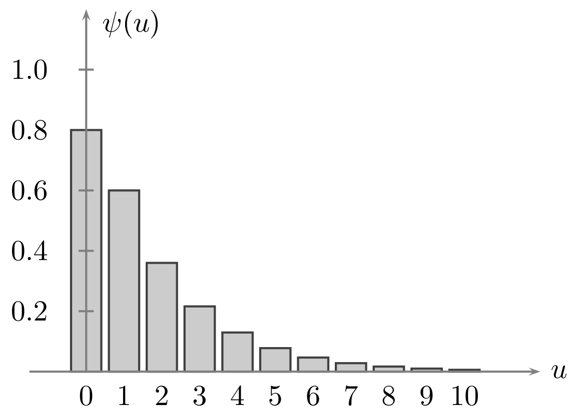


Figura 7.2

Probabilidad de ruina con horizonte finito

La probabilidad de ruina con horizonte finito $n \geqslant 1$ se define como

$$\begin{aligned} \psi(u,n) &= P(\tau \leqslant n \,|\, C_0 = u) \\ &= P(\tau \in \{1, 2, \ldots, n\} \,|\, C_0 = u), \end{aligned}$$

y corresponde a la probabilidad de que la ruina se presente en alguno de los tiempos: $1, 2, \ldots, n$. Puesto que siempre estaremos en el caso $C_0 = u$, se omitirá esta condición y la probabilidad de ruina con horizonte finito se puede escribir simplemente como $P(\tau \leqslant n)$. A partir de observar la contención de los eventos correspondientes, se puede verificar que

$$\psi(u,1) \leqslant \psi(u,2) \leqslant \cdots \leqslant \psi(u,n) \leqslant \psi(u).$$

Condicionando sobre el monto de la primera reclamación tal como se hizo en el caso de horizonte infinito, mostramos a continuación una forma recursiva de encontrar $\psi(u,n)$.

Proposición 7.2 *Para el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geqslant 0\}$ con valor inicial $u \geqslant 0$, la probabilidad de ruina con horizonte finito $\psi(u,n)$ puede calcularse de la siguiente forma*

1. $\psi(u,1) = \overline{F}(u)$.
2. $\psi(u,n) = \overline{F}(u) + \sum_{y=0}^{u} \psi(u+1-y, n-1)\, f(y), \quad n \geqslant 2.$

Demostración.
Para $n = 1$,

$$\psi(u,1) = P(\tau = 1) = P(u + 1 - Y_1 \leqslant 0) = P(Y_1 \geqslant u + 1) = \overline{F}(u).$$

Para $n \geqslant 2$, condicionando sobre el valor de la primera reclamación,

$$\begin{aligned}
\psi(u,n) &= P(\tau \leqslant n) \\
&= \sum_{y=0}^{\infty} P(\tau \leqslant n \,|\, Y_1 = y)\, P(Y_1 = y) \\
&= \sum_{y=0}^{u} \psi(u+1-y, n-1)\, f(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} f(y) \\
&= \sum_{y=0}^{u} \psi(u+1-y, n-1)\, f(y) + \overline{F}(u).
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 7.2 *Consideremos nuevamente el caso cuando los montos Y tienen distribución dada por la tabla que aparece abajo. Usando la fórmula recursiva de la Proposición 7.2 encontraremos $\psi(u,n)$, cuando $u = 0$ y $n = 1, 2, 3, 4, 5$.*

v	*0*	*1*	*2*
$f(v)$	*0.5*	*0.2*	*0.3*

Para $n = 1$ tenemos que $\psi(0,1) = \overline{F}(0) = 0.5$. Para $n = 2$, la fórmula recursiva lleva a la ecuación $\psi(0,2) = \psi(0,1) + \psi(1,1)f(0)$, usando el hecho de que $\psi(1,1) = 0.3$ se obtiene $\psi(0,2) = 0.65$. Para $n = 3$, se tiene que $\psi(0,3) = \psi(0,1) + \psi(1,2)f(0)$, en donde $\psi(1,2)$ se calcula usando la misma fórmula recursiva. Al hacer los cálculos se obtiene $\psi(0,3) = 0.68$. Análogamente y utilizando repetidamente la fórmula recursiva se obtienen las probabilidades de ruina restantes que se muestran en la siguiente tabla.

n	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$\psi(0,n)$	*0.5*	*0.65*	*0.68*	*0.7085*	*0.7232*

El comportamiento creciente de $n \mapsto \psi(0,n)$ se muestra en la Figura 7.3 y tales probabilidades son siempre menores o iguales a $\psi(0) = 0.8$, es decir,

$$\psi(0,1) \leqslant \psi(0,2) \leqslant \cdots \leqslant \psi(0,5) \leqslant \cdots \leqslant \psi(0) = 0.8\,.$$

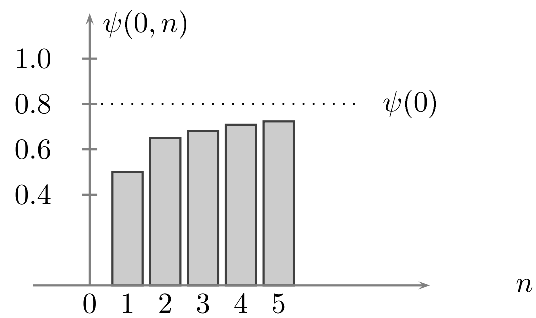
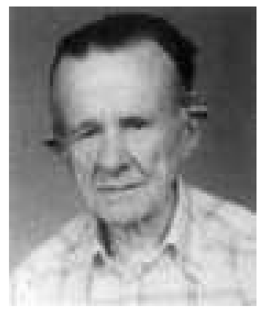


Figura 7.3

7.2. Modelo clásico de Cramér-Lundberg

El modelo de Cramér-Lundberg es la versión a tiempo continuo del modelo a tiempo discreto que estudiamos en la sección anterior y tiene sus orígenes en la tesis doctoral de Filip Lundberg defendida en el año de 1903. En este trabajo, Lundberg analiza el reaseguro de riesgos colectivos y presenta el proceso de Poisson compuesto. Lundberg utilizó términos un tanto distintos a los actuales pues en aquellos años aún no se había formalizado la teoría de los procesos estocásticos como la entendemos hoy en día. En 1930 Harald Cramér retoma las ideas originales de Lundberg, y las pone en el contexto de los procesos estocásticos, en ese entonces de reciente creación. El modelo ha sido estudiado en extenso, y varias formas de generalizarlo se han propuesto y analizado.

Ernest Filip Oskar Lundberg
(Suecia 1876–1965)



Carl Harald Cramér
(Suecia 1893–1985)

El modelo clásico que estudiaremos en este capítulo es el proceso estocástico a tiempo continuo $\{C_t : t \geqslant 0\}$ dado por

$$C_t = u + c\,t - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \tag{7.9}$$

en donde u es el capital inicial de la compañía aseguradora, ct es la entrada por primas hasta el tiempo t con c una constante positiva, Y_j es el monto de la j-ésima reclamación, y $\{N_t : t \geqslant 0\}$ es un proceso de Poisson de parámetro λ. Observe que para un proceso de reclamaciones con distribución Poisson compuesta como en (7.9), la esperanza es justamente de la forma ct, y el principio del valor esperado para el cálculo de primas lleva a que el proceso de primas sea lineal como el sugerido en el modelo. La variable C_t representa el balance más sencillo de ingresos menos egresos de una compañía aseguradora. Al proceso $\{C_t : t \geqslant 0\}$ se le llama nuevamente proceso de riesgo (*risk process*), o proceso de superávit (*surplus process*), y tiene trayectorias como se muestra en la Figura 7.4.

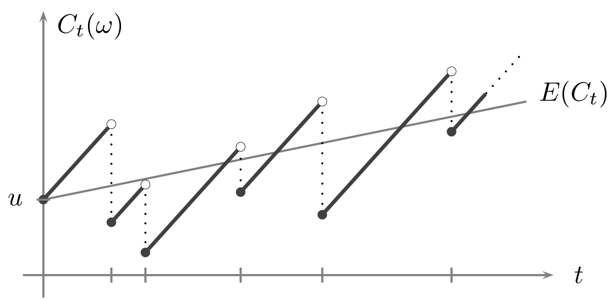


Figura 7.4

Estas trayectorias comienzan siempre en u, que es el capital inicial. Los intervalos en donde ellas son continuas y crecientes corresponden a periodos en donde no hay reclamaciones. El crecimiento es de la forma ct. Las discontinuidades son siempre saltos hacia abajo, y aparecen en el momento en que se efectúa una reclamación, la cual se supone que se paga de manera inmediata. El tamaño de un salto es el tamaño de la reclamación dada por la variable Y. Nuevamente supondremos que los montos $Y_1, Y_2, \ldots$ son variables aleatorias independientes, no negativas, e idénticamente distribuidas, con función generadora de momentos $M_Y(r)$. Los momentos son $\mu_n = E(Y^n)$, y en particular μ denota el primer momento μ_1. No es difícil comprobar que $E(C_t) = u + (c - \lambda\mu)t$, y que $\mathrm{Var}(C_t) = \lambda\mu_2 t$. La trayectoria promedio de este proceso de riesgo es la línea recta que inicia en $u > 0$ y tiene pendiente $c - \lambda\mu$, la cual es positiva por la condición o hipótesis de ganancia neta. La variable aleatoria C_t se puede interpretar como el capital de la compañía aseguradora al tiempo t y por razones naturales y legales es importante que C_t permanezca por arriba de cierto nivel mínimo. Supongamos que tal nivel mínimo es a, con $0 < a < u$. Ajustando el capital inicial u, esto es, suponiendo un nuevo capital inicial de magnitud $u - a$, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que este nivel mínimo es cero, y así lo haremos en nuestro análisis. De esta forma cuando $C_t \leqslant 0$ para algún $t > 0$ se dice que hay *ruina*. La ruina casi nunca sucede en la práctica, es solamente un término técnico que produce alguna toma de decisión. Por ejemplo, si el capital de una compañía aseguradora asignado a una cartera decrece en forma significativa, automáticamente la aseguradora puede tomar ciertas medidas para subsanar esta situación y no se trata de un evento insalvable. Por otro lado es natural suponer que la compañía aseguradora posea varios portafolios de modo que ruina en uno de ellos no significa necesariamente bancarrota que el término ruina podría sugerir.

La condición de ganancia neta

Sean $T_0, T_1, T_2, \ldots$ los tiempos aleatorios (tiempos de paro) en donde la aseguradora recibe las reclamaciones. Supondremos $T_0 = 0$. Para cada entero $k \geqslant 1$ defina la variable aleatoria $X_k = c\,(T_k - T_{k-1}) - Y_k$, que pueden ser interpretadas como el balance de la compañía aseguradora entre dos siniestros sucesivos. La esperanza de esta variable es

$$E(X_k) = c\,E(T_k - T_{k-1}) - E(Y_k) = c\,(1/\lambda) - \mu.$$

Se puede demostrar que la ruina ocurre casi seguramente si, y sólo si, $E(X_k) \leqslant 0$. Como deseamos que esta situación no ocurra supondremos que $E(X_k) > 0$, es decir, tenemos la hipótesis:

Condición de ganancia neta: $\quad c > \lambda\mu.$

Esta condición ya la habíamos mencionado antes, y ahora la interpretamos de la siguiente forma: en promedio, la entrada por primas por unidad de tiempo, c, es mayor que el total de reclamaciones por unidad de tiempo, $\lambda\mu$.

7.3. Probabilidad de ruina

Nos interesa calcular o estimar la probabilidad de una eventual ruina en el modelo de Cramér-Lundberg. Para ello consideraremos nuevamente el tiempo de ruina dado por

$$\tau = \text{ínf}\,\{t > 0 : C_t \leqslant 0\}, \tag{7.10}$$

en donde se define $\text{ínf}\,\varnothing = \infty$. Por lo tanto τ es una variable aleatoria con valores en el intervalo $(0, \infty]$. Dado un valor $t > 0$ fijo, la probabilidad de ruina en el intervalo $(0, t]$ o también llamada probabilidad de ruina con horizonte finito es

$$\psi(u,t) = P(\tau \leqslant t \,|\, C_0 = u).$$

Mientras que la probabilidad de ruina con horizonte infinito, o simplemente probabilidad de ruina, es

$$\psi(u) = \lim_{t\to\infty} \psi(u,t) = P(\tau < \infty).$$

Es intuitivamente claro que cuando $0 < t_1 \leqslant t_2$,

$$\psi(u,t_1) \leqslant \psi(u,t_2) \leqslant \psi(u).$$

Probabilidad de ruina con horizonte infinito

Presentaremos a continuación tres resultados generales sobre la probabilidad de ruina con horizonte infinito. A diferencia del primer capítulo, y para hacer la notación más apegada a la literatura existente en el tema, recordemos que estamos denotando por $F(y)$ a la función de distribución de una reclamación Y cualquiera. La función de densidad será $f(y)$, cuando esta exista.

Proposición 7.3 *Sea $\overline{\psi}(u) = 1-\psi(u)$. Suponga que la distribución de una reclamación en el modelo de Cramér-Lundberg es absolutamente continua con función de densidad $f(y)$. Entonces*

1. $\displaystyle \frac{d}{du}\,\overline{\psi}(u) = \frac{\lambda}{c}\,[\,\overline{\psi}(u) - \int_0^u \overline{\psi}(u-y)\,f(y)\,dy\,].$

2. $\displaystyle \psi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}.$

3. $\displaystyle \psi(u) = \frac{\lambda}{c}\,[\int_u^\infty \overline{F}(y)\,dy + \int_0^u \psi(u-y)\,\overline{F}(y)\,dy\,].$

Demostración. Usaremos análisis del primer paso condicionando sobre el monto de la primera reclamación Y_1 y el momento T_1 en el que esta reclamación ocurre. Usaremos además el hecho de que T_1 tiene distribución exp(λ).

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) &= P(\text{ “No ruina en } (0,\infty)\text{”} \,|\, C_0 = u) \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{ “No ruina en } (0,\infty)\text{”} \,|\, Y_1 = y, T_1 = t)\, f(y)\, f_{T_1}(t)\, dy\, dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^{u+ct} P(\text{ “No ruina en } (0,\infty)\text{”} \,|\, Y_1 = y, T_1 = t)\, f(y)\, f_{T_1}(t)\, dy\, dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} P(\text{ “No ruina en } (t,\infty)\text{”} \,|\, Y_1 = y, T_1 = t)\, f(y) dy\, dt \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{u+ct} \overline{\psi}(u + ct - y)\, f(y)\, dy\, dt.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $s(t) = u + ct$ se obtiene

$$\overline{\psi}(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\lambda u/c} \int_u^\infty e^{-\lambda s/c} \int_0^s \overline{\psi}(s - y) f(y) dy\, ds.$$

Derivando esta expresión se encuentra el resultado del primer inciso. Demostraremos a continuación el segundo resultado. Integrando la ecuación diferencial del primer inciso entre 0 y u se obtiene

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(u) - \overline{\psi}(0) &= \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^u \overline{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_0^x \overline{\psi}(x - y)\, dF(y)\, dx\Big] \\
&= \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^u \overline{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_y^u \overline{\psi}(x - y)\, dx\, dF(y)\Big] \\
&= \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^u \overline{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-y} \overline{\psi}(x)\, dx\, dF(y)\Big] \\
&= \frac{\lambda}{c}\Big[\int_0^u \overline{\psi}(x) dx - \int_0^u \int_0^{u-x} \overline{\psi}(x)\, dF(y)\, dx\Big] \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \overline{\psi}(x)\, \overline{F}(u - x)\, dx \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^u \overline{\psi}(u - x)\, \overline{F}(x)\, dx \qquad (7.11) \\
&= \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \overline{\psi}(u - x)\, \overline{F}(x)\, 1_{[0,u]}(x)\, dx.
\end{aligned}$$

El siguiente paso es hacer u tender a infinito. En tal caso, $\overline{\psi}(u)$ tiende a uno. Además el integrando que aparece en el lado derecho es una función monótona creciente en u, y cuyo límite es la función integrable $\overline{F}(x)$. Entonces por el teorema de convergencia monótona se obtiene

$$1 - \overline{\psi}(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \overline{F}(x)\,dx = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Por lo tanto

$$\psi(0) = 1 - \overline{\psi}(0) = \frac{\lambda\mu}{c}. \tag{7.12}$$

De esta forma se obtiene el segundo resultado. Finalmente de (7.11) y (7.12) se sigue que

$$\begin{aligned}\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\,[\,\mu - \int_0^u \overline{\psi}(u-x)\overline{F}(x)\,dx\,]\\ &= \frac{\lambda}{c}\,[\,\int_u^\infty \overline{F}(x)dx + \int_0^u \psi(u-x)\overline{F}(x)\,dx\,].\end{aligned}$$

■

Observe que la última expresión corresponde a una ecuación recursiva para encontrar la probabilidad de ruina. En general no es fácil resolver este tipo de ecuaciones, de modo que nos limitaremos sólo a encontrar algunas estimaciones de estas probabilidades. Sin embargo, cuando las reclamaciones tienen distribución exponencial el sistema es soluble como se muestra a continuación.

Ejemplo 7.3 *Encontraremos la probabilidad de ruina cuando las reclamaciones son exponenciales. Este es uno de los pocos modelos para los cuales tal probabilidad puede encontrarse de manera explícita. Considere entonces el modelo de Cramér-Lundberg en donde las reclamaciones tienen distribución exp(α). La esperanza es $\mu = 1/\alpha$. Por lo anteriormente encontrado, la probabilidad de no ruina $\overline{\psi}(y) = 1 - \psi(y)$ cumple la ecuación*

$$\overline{\psi}\,'(u) = \frac{\lambda}{c}\,[\,\overline{\psi}(u) - e^{-\alpha u}\int_0^u \overline{\psi}(y)\,\alpha e^{\alpha y}\,dy\,].$$

Derivando esta expresión se obtiene

$$\overline{\psi}\,''(u) = (\frac{\lambda}{c} - \alpha)\,\overline{\psi}\,'(u),$$

cuya solución es $\overline{\psi}(u) = a + be^{-(\alpha-\lambda/c)u}$*, en donde* a *y* b *son constantes. Usando las condiciones* $\psi(0) = \lambda/(\alpha c)$ *y* $\psi(\infty) = 0$ *se encuentra que* $a = 1$ *y* $b = -\lambda/(\alpha c)$*. Por lo tanto*

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c}\, e^{-(\alpha-\lambda/c)u}.$$

cuya gráfica se encuentra en la Figura 7.5. Observe que debido a la condición de ganancia neta, el exponente $-(\alpha - \lambda/c)$ *es negativo, y por lo tanto la probabilidad de ruina decae a cero exponencialmente cuando el capital inicial* u *crece a infinito.*

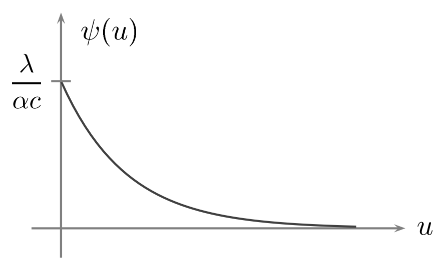


Figura 7.5

7.4. Severidad de la ruina

Consideremos nuevamente el proceso de riesgo $\{C_t : t \geqslant 0\}$ con capital inicial u. A la variable C_t se le escribe también como $C(t)$. Sunpongamos ahora que el tiempo de ruina τ es finito. En este caso podemos considerar las siguientes variables aleatorias

a) $X = C(\tau-)$.

b) $Y = -C(\tau)$.

Estas cantidades representan, respectivamente, el valor del proceso de riesgo un instante antes de la ruina, y justo en el momento de la ruina. Las variables X y Y se muestran gráficamente en la Figura 7.6.

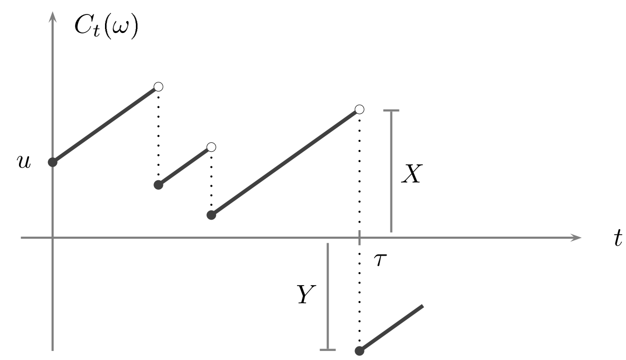


Figura 7.6

A la variable Y se le llama severidad de la ruina. El problema que se plantea es el de encontrar la probabilidad conjunta

$$\varphi(u, x, y) = P(\tau < \infty, X > x, Y > y),$$

para cualesquiera $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Es claro que esta probabilidad es una versión más elaborada que la probabilidad de ruina $\psi(u) = P(\tau < \infty)$. Como es de esperarse, no se cuenta con una fórmula explícita para $\varphi(u, x, y)$, pero encontraremos una ecuación integral para esta probabilidad. La demostración de la ecuación integral para $\varphi(u, x, y)$ sigue la misma técnica que la que se presentó para el caso de la probabilidad de ruina.

Proposición 7.4 *Para $x \geqslant 0$, y $y \geqslant 0$,*

1. $\varphi'(u,x,y) = \dfrac{\lambda}{c}\,[\,\varphi(u,x,y) - \displaystyle\int_0^u \varphi(u-v,x,y)\,dF(v) - 1_{(u>x)}\overline{F}(u+y)\,].$

2. $\varphi(0,x,y) = \dfrac{\lambda}{c}\displaystyle\int_{x+y}^{\infty} \overline{F}(v)\,dv.$

3. $$\begin{aligned}\varphi(u,x,y) = \frac{\lambda}{c}\,[\int_{u+y}^{\infty}\overline{F}(v)\,dv + \int_0^u \varphi(u-v,x,y)\overline{F}(v)\,dv \\ +1_{(u<x)}\int_{x+y}^{u+y}\overline{F}(v)\,dv\,].\end{aligned}$$

Demostración. Usaremos nuevamente análisis del primer paso condicionando sobre el momento y monto de la primera reclamación.

$$\begin{aligned}
\varphi(u,x,y) &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} P(\tau<\infty, X>x, Y>y \,|\, T_1=t, Y_1=y)dF(y)dF_{T_1}(t)\\
&= \int_0^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\int_0^{u+ct}\varphi(u+ct-v,x,y)dF(v)dt\\
&\quad +\int_0^{\infty}1_{(u+ct>x)}\overline{F}(u+ct+y)\lambda e^{-\lambda t}dt.
\end{aligned}$$

Efectuando el cambio de variable $s(t) = u + ct$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\varphi(u,x,y) &= \frac{1}{c}\int_u^{\infty}\lambda e^{-\lambda(s-u)/c}\int_0^{s}\varphi(s-v,x,y)dF(v)ds\\
&\quad +\frac{1}{c}\int_u^{\infty}\lambda e^{-\lambda(s-u)/c}\,1_{(s>x)}\overline{F}(s+y)ds.
\end{aligned}$$

Derivando esta expresión se encuentra el resultado del primer inciso. Integrando esta ecuación diferencial entre 0 y u se obtiene

$$\begin{aligned}
\varphi(u,x,y)-\varphi(0,x,y) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(w,x,y)dw \\
&\quad -\frac{\lambda}{c}\int_0^u\int_0^w \varphi(w-v,x,y)\,dF(v)\,dw \\
&\quad -\frac{\lambda}{c}\int_0^u 1_{(w>x)}\overline{F}(w+y)dw,
\end{aligned}$$

en donde la integral doble puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\int_0^u\int_0^w \varphi(w-v,x,y)\,dF(v)\,dw &= \int_0^u\int_v^u \varphi(w-v,x,y)\,dw\,dF(v) \\
&= \int_0^u\int_0^{u-v} \varphi(w,x,y)\,dw\,dF(v) \\
&= \int_0^u\int_0^{u-w} \varphi(w,x,y)\,dF(v)\,dw \\
&= \int_0^u \varphi(w,x,y)F(u-w)\,dw.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\varphi(u,x,y)-\varphi(0,x,y) &= \frac{\lambda}{c}[\int_0^u \varphi(w,x,y)(1-F(u-w))\,dw \\
&\qquad -1_{(u\geqslant x)}\int_x^u \overline{F}(w+y)dw] \\
&= \frac{\lambda}{c}[\int_0^u \varphi(w,x,y)\overline{F}(u-w)\,dw \\
&\qquad -1_{(u\geqslant x)}\int_{x+y}^{u+y} \overline{F}(w)dw] \\
&= \frac{\lambda}{c}[\int_0^u \varphi(u-v,x,y)\overline{F}(v)\,dv - 1_{(u\geqslant x)}\int_{x+y}^{u+y}\overline{F}(v)dv].
\end{aligned}$$

Haciendo u tender a infinito, puede comprobarse que $\varphi(\infty,x,y)=0$, y no es difícil demostrar que la primera integral se anula. Por lo tanto se obtiene la identidad

$$\varphi(0,x,y)=\frac{\lambda}{c}\int_{x+y}^{\infty}\overline{F}(v)\,dv. \tag{7.13}$$

Este el segundo inciso del enunciado. Substituyendo (7.13) en la ecuación previa y simplificando se obtiene el tercer inciso del enunciado. ■

Observe que tomando $x = 0$ y $y = 0$ en la ecuación integral para $\varphi(u, x, y)$ se obtiene la ecuación integral anteriormente encontrada para $\psi(u)$, es decir,

$$\psi(u) = \varphi(u, 0, 0) = \frac{\lambda}{c}\,[\int_u^\infty \overline{F}(v)\,dv + \int_0^u \varphi(u - v, 0, 0)\overline{F}(v)\,dv\,].$$

Además suponiendo cada caso por separado, $x = 0$ o $y = 0$, se obtienen fórmula integrales para las probabilidades marginales de X y de Y, considerando siempre tiempo de ruina finito. Es decir, para la variable Y tenemos que

$$\varphi(u, 0, y) = \frac{\lambda}{c}\,[\int_{u+y}^\infty \overline{F}(v)\,dv + \int_0^u \varphi(u - v, 0, y)\overline{F}(v)\,dv\,].$$

Para la variable X,

$$\varphi(u, x, 0) = \frac{\lambda}{c}\,[\int_u^\infty \overline{F}(v)\,dv + \int_0^u \varphi(u - v, x, 0)\overline{F}(v)\,dv + 1_{(u<x)} \int_x^u \overline{F}(v)\,dv\,].$$

7.5. El coeficiente de ajuste

Este es un número que aparece en el problema de calcular o estimar probabilidades de ruina. Hay varias maneras de definirlo, una de ellas, un tanto artificial pero que después justificaremos, es la siguiente. Se define primero la función

$$\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr,$$

en donde $M_Y(r)$ es la función generadora de Y. Naturalmente esta función está bien definida para valores de r en donde $M_Y(r)$ existe. Entonces, suponiendo diferenciabilidad, se tiene que $\theta'(r) = \lambda M'_Y(r) - c$, y $\theta''(r) = \lambda M''_Y(r) = \lambda E(Y^2 e^{rY}) > 0$. Por lo tanto, $\theta(r)$ es una función estrictamente convexa tal que $\theta(0) = 0$, y por la condición de ganancia neta, $\theta'(0) = \lambda\mu - c < 0$. Entonces es posible que exista un valor $R > 0$ tal que $\theta(R) = 0$. Una gráfica de la función $\theta(r)$, presentando esta situación, se muestra en la Figura 7.7.

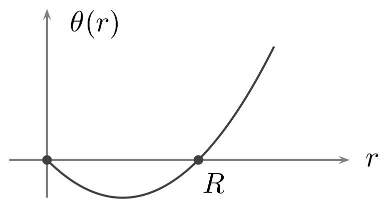


Figura 7.7

Definición 7.3 *A la posible solución $R > 0$ de la siguiente ecuación se le llama coeficiente de ajuste, o exponente de Lundberg.*

$$\theta(R) = \lambda(M_Y(R) - 1) - cR = 0.$$

Observe que la existencia del coeficiente de ajuste depende enteramente de la distribución de las reclamaciones. Aquellas distribuciones para las cuales el coeficiente de ajuste existe se les llama distribuciones con *colas ligeras*, y la razón de ello es que la función de densidad decae a cero exponencialmente rápido, asignando probabilidades pequeñas a reclamaciones grandes. Por ejemplo, demostraremos a continuación que en el caso de reclamaciones exponenciales, el coeficiente de ajuste existe y es fácil calcularlo.

Ejemplo 7.4 *(Reclamaciones con distribución exponencial) Suponga que las reclamaciones siguen una distribución exp(α), es decir, la función generadora de momentos es $M_Y(r) = \alpha/(\alpha - r)$, para $r < \alpha$. Entonces*

$$\begin{aligned}
\theta(r) &= \lambda\,(M_Y(r) - 1) - cr \\
&= \lambda\,(\frac{\alpha}{\alpha - r} - 1) - cr \\
&= \lambda(\frac{r}{\alpha - r}) - cr \\
&= (\frac{\lambda}{\alpha - r} - c)\,r.
\end{aligned}$$

De modo que $\theta(r)$ es cero cuando $r = 0$, o bien cuando $\lambda/(\alpha - r) - c = 0$.

Despejando r de la segunda condición y escribiendo ahora R como la variable se obtiene $R = \alpha - \lambda/c$. Más aún, por lo encontrado antes en el caso de reclamaciones exponenciales, la probabilidad de ruina puede ahora escribirse de la forma siguiente

$$\psi(u) = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-(\alpha-\lambda/c)u} = \frac{\lambda}{\alpha c} e^{-Ru} < e^{-Ru},$$

en donde la desigualdad es consecuencia de la condición de ganancia neta. Este tipo de cota superior para la probabilidad de ruina (llamada desigualdad de Lundberg) será demostrada más adelante para cualquier distribución de las reclamaciones para la cual el coeficiente de ajuste exista.

Ejemplo 7.5 *(Reclamaciones con distribución gamma) Suponga que las reclamaciones siguen una distribución gamma(γ, α) con $\gamma = 2$. La función generadora de momentos es $M_Y(r) = (\alpha/(\alpha - r))^\gamma$, para $r < \alpha$. Por lo tanto la función $\theta(r)$ correspondiente es*

$$\theta(r) = \lambda \left[\left(\frac{\alpha}{\alpha - r} \right)^\gamma - 1 \right] - cr.$$

La condición $\theta(r) = 0$ produce la ecuación cuadrática

$$cr^2 + r(\lambda - 2\alpha c) + (c\alpha^2 - 2\alpha\lambda) = 0,$$

cuyas raíces son

$$r = \frac{2\alpha c - \lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4\alpha c \lambda}}{2c}.$$

El caso con raíz cuadrada positiva es inválido pues resulta $r > \alpha$, en efecto, usando la condición de ganancia neta, $c > \lambda(2/\alpha)$, se obtiene

$$\begin{aligned}(2\alpha c - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4\alpha c\lambda})/2c &\geqslant (2\alpha c - \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 8\lambda^2})/2c \\ &= \alpha + \lambda/c \\ &> \alpha.\end{aligned}$$

Por lo tanto la raíz con el signo negativo es el coeficiente de ajuste.

Ejemplo 7.6 *(Método de Newton-Raphson) Recordaremos a continuación el método de Newton-Raphson y lo aplicaremos al problema de encontrar*

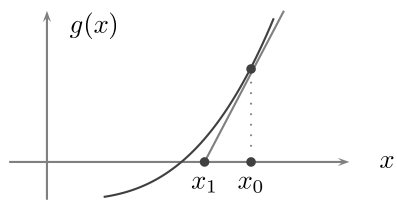


Figura 7.8

de manera aproximada el coeficiente de ajuste en un caso particular. Sea $g(x)$ *una función diferenciable que tiene una raíz cerca de* $x = x_0$. *Véase la Figura 7.8.*
La ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(x_0, g(x_0))$ *es*

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0).$$

Esta línea recta cruza el eje horizontal cuando el valor de x *es igual a*

$$x_1 = x_0 - g(x_0)/g(x_1),$$

a quien se toma como nueva raíz aproximada. Repitiendo este análisis se encuentra una sucesión de puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots$, *que bajo ciertas condiciones converge a la raíz de la función* $g(x)$. *Aplicaremos este procedimiento al problema de encontrar el coeficiente de ajuste cuando las reclamaciones siguen una distribución gamma*(γ, α) *con* $\gamma = 3$. *La condición* $\theta(r) = 0$ *produce la siguiente ecuación que puede reducirse a una ecuación cúbica en* r,

$$g(r) = \lambda(\alpha^3 - (\alpha - r)^3) - cr(\alpha - r)^3 = 0.$$

La raíz buscada r *es tal que por restricciones de la función generadora de momentos debe satisfacer* $0 < r < \alpha$. *Tomaremos* $\alpha = 3$, $\lambda = 1$, *y* $c = 2$. *Se han escogido estos valores de los parámetros por simplicidad pero al mismo tiempo cuidando que se verifique la condición de ganancia neta:* $c > \lambda(3/\alpha)$.
El esquema general de Newton-Raphson es entonces

$$r_{n+1} = r_n - g(r_n)/g'(r_n).$$

Más adelante demostraremos que si el coeficiente de ajuste existe, entonces éste se encuentra siempre dentro del intervalo $(0, 2(c - \lambda\mu)/(\lambda\mu_2))$. *Con base* *en este resultado, tomaremos como condición inicial* $r_0 = 2(c-\lambda\mu)/(\lambda\mu_2) = 3/2$. *Usando estos datos, la iteración de Newton-Raphson arroja la siguiente sucesión de valores:* $r_0 = 1.5$, $r_1 = 0.8\bar{3}$, $r_2 = 0.8405056$, $r_3 = 0.8404738$, $r_4 = 0.8404738$. *El coeficiente de ajuste es entonces* $R = 0.8404738$.

El siguiente resultado proporciona una forma equivalente de definir el coeficiente de ajuste, permite además comprobar su existencia a través de la determinación de la finitud de una integral, y posibilita dar una interpretación de aquellas distribuciones de probabilidad para las cuales el coeficiente de ajuste existe.

Proposición 7.5 *La ecuación* $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr = 0$ *tiene una posible solución* $r > 0$ *si, y sólo si, se cumple la identidad*

$$\int_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)\,dx = \frac{c}{\lambda},$$

en donde $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$, *siendo* $F(x)$ *la función de distribución de las reclamaciones.*

Demostración. Usando integración por partes se tiene que

$$\int_0^\infty e^{rx}\,d\overline{F}(x) = e^{rx}\overline{F}(x)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty re^{rx}\overline{F}(x)\,dx.$$

Por la hipótesis de existencia de la función generadora de momentos de la distribución $F(x)$, la evaluación del primer término del lado derecho en el valor infinito se anula, y la evaluación en cero es uno. Por lo tanto, usando el hecho de que $d\overline{F}(x) = -dF(x)$, se obtiene la expresión

$$\int_0^\infty e^{rx}\,dF(x) = 1 + r\int_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)\,dx.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \theta(r) \\ &= \lambda(M_Y(r) - 1) - cr \\ &= \lambda(\int_0^\infty e^{rx}\, dF(x) - 1) - cr \\ &= \lambda r \int_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)\, dx - cr. \end{aligned}$$

Despejando la integral se obtiene el resultado enunciado. ■

Definición 7.4 *A una distribución de probabilidad para la cual existe el coeficiente de ajuste se les llama "distribución con cola ligera". Cuando no existe tal coeficiente la distribución adquiere el nombre de "distribución con cola pesada".*

Ejemplo 7.7 *Usaremos el criterio de la proposición anterior para demostrar que para la distribución Burr no existe el coeficiente de ajuste. En este caso tenemos que*

$$\overline{F}(x) = (k/(k + x^c))^\alpha.$$

Entonces para cualquier valor de $r > 0$,

$$\int_0^\infty e^{rx}\overline{F}(x)\, dx = \int_0^\infty e^{rx}(k/(k + x^c))^\alpha\, dx \approx \int_0^\infty e^{rx}x^{-c\alpha}\, dx = \infty.$$

Por lo tanto la distribución Burr es una distribución con cola pesada.

Según el criterio recién demostrado, para que exista el coeficiente de ajuste, la cola de la distribución, $\overline{F}(x)$, debe decaer a cero lo suficientemente rápido para anular el comportamiento creciente del término e^{rx} dentro de la integral. En el ejemplo anterior, la cola de distribución Burr decae a cero en la forma $x^{-c\alpha}$ que es insuficiente para hacer que la integral sea finita. Una distribución con cola ligera asigna probabilidades muy pequeñas a los valores grandes de la variable aleatoria. Esto puede no ser muy conveniente para modelar algunos riesgos pues de esa manera se está subestimando la posibilidad de registrar grandes montos en las reclamaciones. A continuación mencionamos sin demostración algunos ejemplos de distribuciones de un tipo y de otro.

Ejemplo 7.8 *Distribuciones con cola ligera:*

1. *exp*(α), $\bar{F}(x) = e^{-\alpha x}$.
2. *gamma*(γ, α).
3. *Weibull*(r, α), $\bar{F}(x) = e^{-(\alpha x)^r}$, *para* $r \geqslant 1$.
4. *Normal truncada,* $f(x) = \sqrt{2/\pi}\, e^{-x^2/2}$.

Ejemplo 7.9 *Distribuciones con cola pesada:*

1. *lognormal*(μ, σ^2).
2. *Pareto*(a, b).
3. *Burr,* $\bar{F}(x) = (k/(k + x^c))^\alpha$.
4. *Weibull*(r, α), $\bar{F}(x) = e^{-(\alpha x)^r}$, *para* $0 < r < 1$.
5. *loggamma*(γ, α).

Desigualdad de Lundberg

Vamos a demostrar ahora que para aquellas distribuiones para las cuales el coeficiente de ajuste R existe se cumple la desigualdad $\Psi(u) < e^{-Ru}$. Para demostrar este resultado haremos uso de la teoría de martingalas.

Proposición 7.6 *Sea* $\{C_t\}$ *el proceso de riesgo, y sea* $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$. *Entonces el proceso* $\{e^{-rC_t - \theta(r)t} : t \geqslant 0\}$ *es una martingala.*

Demostración. La adaptabilidad del proceso es evidente pues implícitamente estamos usando la filtración natural. Acerca de la integrabilidad tenemos los siguientes cálculos

$$\begin{aligned}
E(e^{-rC_t-\theta(r)t}) &= e^{-\theta(r)t}E(e^{-r(u+ct-\sum_{j=1}^{N_t}Y_j)}) \\
&= e^{-\theta(r)t-r(u+ct)}E(e^{r\sum_{j=1}^{N_t}Y_j}) \\
&= e^{-\theta(r)t-r(u+ct)}M_{S_t}(r) \\
&= e^{-\theta(r)t-r(u+ct)}e^{\lambda t(M_Y(r)-1)} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Finalmente tenemos la propiedad de martingala. Para $0 \leqslant s < t$,

$$\begin{aligned}
E(e^{-rC_t-\theta(r)t} \mid \mathscr{F}_s) &= e^{-\theta(r)t}E(e^{-rC_t} \mid \mathscr{F}_s) \\
&= e^{-\theta(r)t}E(e^{-r(C_t-C_s)-rC_s} \mid \mathscr{F}_s) \\
&= e^{-\theta(r)t-rC_s}E(e^{-r(C_t-C_s)}) \\
&= e^{-\theta(r)t-rC_s}E(e^{-r(c(t-s)-\sum_{j=N_s+1}^{N_t}Y_j)}) \\
&= e^{-\theta(r)t-rC_s-rc(t-s)}E(e^{r\sum_{j=1}^{N_{t-s}}Y_j}) \\
&= e^{-\theta(r)t-rC_s-rc(t-s)}e^{\lambda(t-s)(M_Y(r)-1)} \\
&= e^{-rC_s-\theta(r)s}.
\end{aligned}$$

■

En particular, si el coeficiente de ajuste existe, es decir, si $\theta(R) = 0$, entonces el proceso $\{e^{-RC_t}\}$ es una martingala. Este es el resultado clave para demostrar la siguiente cota superior para la probabilidad de ruina.

Teorema 7.1 *(Desigualdad de Lundberg) Suponga que el coeficiente de ajuste R existe. Entonces*

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

Demostración. Sea τ el tiempo de paro correspondiente al tiempo de ruina. Como el proceso $\{e^{-RC_t}\}$ es una martingala, se tiene que el proceso

$\{e^{-RC_{t\wedge\tau}}\}$ también es una martingala que inicia en e^{-Ru}. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &= e^{-RC_0} \\
&= E(e^{-RC_{t\wedge\tau}}) \\
&= E(e^{-RC_{t\wedge\tau}} \,|\, \tau \leqslant t)\, P(\tau \leqslant t) \\
&\quad + E(e^{-RC_{t\wedge\tau}} \,|\, \tau > t)\, P(\tau > t) \\
&\geqslant E(e^{-RC_{t\wedge\tau}} \,|\, \tau \leqslant t)\, P(\tau \leqslant t) \\
&= E(e^{-RC_{\tau}} \,|\, \tau \leqslant t)\, P(\tau \leqslant t) \\
&= \left(\int e^{-RC_\tau} 1_{(\tau \leqslant t)}\, dP \right) P(\tau \leqslant t).
\end{aligned}$$

Haciendo $t \to \infty$ monótonamente, el evento $(\tau \leqslant t)$ converge crecientemente al evento $(\tau < \infty)$. Por el teorema de convergencia monótona se obtiene entonces que

$$\begin{aligned}
e^{-Ru} &\geqslant E(e^{-RC_\tau} \,|\, \tau < \infty)\, P(\tau < \infty) \\
&> E(\,1 \,|\, \tau < \infty)\, P(\tau < \infty) \\
&= P(\tau < \infty) \\
&= \psi(u).
\end{aligned}$$

■

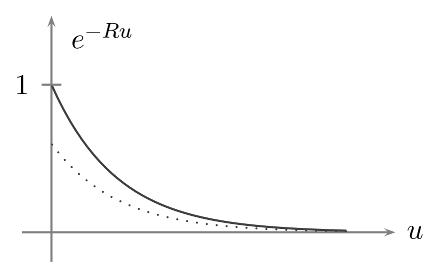


Figura 7.9: Cota superior para la probabilidad de ruina.

Como hemos visto, el coeficiente de ajuste no siempre existe, y aún cuando conozcamos su existencia no siempre es fácil calcularlo. El siguiente resultado proporciona algunas cotas para el valor de este coeficiente, suponiendo su existencia.

Proposición 7.7 *Si el coeficiente de ajuste R existe, entonces*

$$\frac{1}{M}\ln(\frac{c}{\lambda\mu}) < R < \frac{2(c-\lambda\mu)}{\lambda\mu_2},$$

en donde la primera desigualdad es válida bajo la hipótesis adicional de que $Y \leqslant M$ c.s., para alguna constante $M > 0$.

Demostración. Demostraremos primero la cota superior. Considere nuevamente la función $\theta(r) = \lambda(M_Y(r) - 1) - cr$, para $r \geqslant 0$. Sabemos que $\theta(0) = 0$. Derivando esta función dos veces se obtiene

$$\begin{aligned} \theta'(r) &= \lambda M_Y'(r) - c, \\ \theta''(r) &= \lambda E(Y^2 e^{rY}) > \lambda E(Y^2) = \lambda\mu_2. \end{aligned}$$

En donde $\theta'(0) = \lambda\mu - c$. Por el teorema fundamental del cálculo,

$$\theta'(r) = \theta'(0) + \int_0^r \theta''(s)ds > (\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2 r.$$

Por lo tanto,

$$\theta(r) = \theta(0) + \int_0^t \theta'(s)ds > (\lambda\mu - c)r + \lambda\mu_2\frac{1}{2}r^2.$$

Evaluando la última desigualdad en R se obtiene

$$0 > (\lambda\mu - c)R + \lambda\mu_2\frac{1}{2}R^2 = [\,(\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2\frac{1}{2}R\,]\,R.$$

Como $R > 0$, se tiene que $(\lambda\mu - c) + \lambda\mu_2\frac{1}{2}R < 0$. Despejando R se obtiene la cota superior anunciada.
Demostraremos ahora la cota inferior. Suponga que $Y \leqslant M$ c.s. y defina la función

$$h(x) = \frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1).$$

Entonces $h''(x) = -R^2 e^{Rx} < 0$. Por lo tanto h es cóncava con $h(0) = h(M) = 0$. Esto quiere decir que $h(x) > 0$ para $0 < x < M$, es decir,

$$\frac{x}{M}(e^{RM} - 1) - (e^{Rx} - 1) > 0,$$

o bien

$$(e^{Rx}-1) \leqslant \frac{x}{M}(e^{RM}-1). \tag{7.14}$$

Sea $g(x) = xe^x - e^x + 1$. Entonces $g'(x) = xe^x > 0$. Por lo tanto $g(x)$ es creciente para $x > 0$, es decir, $g(x) > g(0) = 0$, para $x > 0$. Es decir, $xe^x - e^x + 1 > 0$, para $x > 0$. En particular, evaluando en $x = RM$ se obtiene $RMe^{RM} - e^{RM} + 1 > 0$. Por lo tanto

$$\frac{e^{RM}-1}{RM} < e^{RM}. \tag{7.15}$$

Por otro lado, usando (7.14),

$$\begin{aligned}
M_Y(R) - 1 &= \int_0^M (e^{Rx}-1)\, dF(x) \\
&\leqslant \int_0^M \frac{x}{M}\,(e^{RM}-1)\, dF(x) \\
&= \frac{1}{M}(e^{RM}-1)\int_0^M x\, dF(x) \\
&= \frac{\mu}{M}(e^{RM}-1).
\end{aligned} \tag{7.16}$$

Por lo tanto, usando (7.16) y luego (7.15),

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda(M_Y(R)-1) - cR \\
&\leqslant \frac{\lambda\mu}{M}(e^{RM}-1) - cR \\
&< \lambda\mu R e^{RM} - cR \\
&= (\lambda\mu e^{RM} - c)R.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda\mu e^{RM} - c > 0$. Despejando R se obtiene la cota inferior buscada. ■

Es interesante notar que la cota superior encontrada no involucra hipótesis adicionales, de modo que cuando el coeficiente de ajuste R existe, éste se encuentra siempre dentro del intervalo $(0, 2(c-\lambda\mu)/\lambda\mu_2)$. Observe además que cuando las reclamaciones están acotadas superiormente por una constante positiva M, puede encontrarse una cota superior para la probabilidad de ruina sin conocer necesariamente el coeficiente de ajuste pues

$$\psi(u) < e^{-Ru} < e^{-\frac{u}{M}\ln(c/\lambda\mu)} = e^{\ln(\lambda\mu/c)^{u/M}} = (\lambda\mu/c)^{u/M}.$$

7.6. Aproximación de De Vylder

Considere nuevamente el modelo de riesgo de Cramer-Lundberg

$$C_t = u + c\,t - \sum_{j=1}^{N_t} Y_j, \tag{7.17}$$

en donde las reclamaciones Y_j tienen distribución desconocida. La aproximación propuesta por De Vylder consiste en aprovechar el hecho de que para este modelo el problema de encontrar la probabilidad de ruina es completamente soluble cuando las reclamaciones son exponenciales. De Vylder propone el siguiente modelo asociado

$$\tilde{C}_t = u + \tilde{c}\,t - \sum_{j=1}^{\tilde{N}_t} \tilde{Y}_j, \tag{7.18}$$

en donde $\tilde{c}$ es una nueva tasa de ingreso por primas, $\{\tilde{N}_t : t \geqslant 0\}$ es un proceso de Poisson de parámetro $\tilde{\lambda}$, y $\tilde{Y}_j$ son variables aleatorias con distribución $\exp(\tilde{\alpha})$. La idea es aproximar la probabilidad de ruina del riesgo (7.17) por la del riesgo (7.18). Para ello se deben encontrar los valores de los parámetros $\tilde{c}$, $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\alpha}$ en términos de los parámetros del riesgo original, y ello es lo que se explica a continuación.

Proposición 7.8 (Aproximación de De Vylder) *La probabilidad de ruina del riesgo (7.17) tiene como aproximación la fórmula*

$$\psi(u) \approx \frac{\tilde{\lambda}}{\tilde{c}\,\tilde{\alpha}}\, e^{-(\tilde{\alpha}-\tilde{\lambda}/\tilde{c})u},$$

en donde

$$\tilde{\alpha} = 3\mu_2/\mu_3, \qquad \tilde{\lambda} = \frac{9}{2}\lambda\mu_2^3/\mu_3^2, \qquad y \quad \tilde{c} = c - \lambda\mu + \frac{3}{2}\lambda\mu_2^2/\mu_3.$$

Demostración. El método consiste en igualar los tres primeros momentos de los procesos C_t y $\tilde{C}_t$, suponiendo la existencia de tales características.

Primeramente veamos la igualación de las esperanzas. La condición $E(C_t) = E(\tilde{C}_t)$ produce la ecuación

$$u + ct - \lambda\mu t = u + \tilde{c}t - \tilde{\lambda}(1/\tilde{\alpha})t.$$

De donde se obtiene

$$\tilde{c} = c - \lambda\mu + \tilde{\lambda}(1/\tilde{\alpha}). \tag{7.19}$$

El siguiente paso es igualar las varianzas. De los resultados generales del primer capítulo, recordemos que la varianza de un riesgo S que sigue un modelo colectivo Poisson(λ) está dada por $\mathrm{Var}(S) = \lambda\mu_2$. Por lo tanto, de la condición $\mathrm{Var}(C_t) = \mathrm{Var}(\tilde{C}_t)$ se obtiene

$$\lambda\mu_2 = \tilde{\lambda}[2/\tilde{\alpha}^2]. \tag{7.20}$$

Ahora hemos usado el hecho de que si X tiene distribución $\exp(\alpha)$, entonces $E(X^2) = 2/\alpha^2$. Finalmente, recordemos que el tercer momento central de un riesgo S que sigue un modelo colectivo Poisson(λ) está dado por $E(S - E(S))^3 = \lambda\mu_3$. Por lo tanto, la tercera condición $E(C_t - E(C_t))^3 = E(\tilde{C}_t - E(\tilde{C}_t))^3$ produce la ecuación

$$\lambda\mu_3 = \tilde{\lambda}[6/\tilde{\alpha}^3]. \tag{7.21}$$

Hemos usado el hecho de que si X tiene distribución $\exp(\alpha)$, entonces $E(X^3) = 6/\alpha^3$. Despejando $\tilde{\lambda}$ de (7.20) y (7.21) e igualando,

$$\frac{1}{2}\lambda\mu_2\tilde{\alpha}^2 = \frac{1}{6}\lambda\mu_3\tilde{\alpha}^3.$$

Por lo tanto,

$$\tilde{\alpha} = 3\mu_2/\mu_3. \tag{7.22}$$

Substituyendo en (7.20),

$$\tilde{\lambda} = \frac{9}{2}\lambda\mu_2^3/\mu_3^2. \tag{7.23}$$

Substituyendo (7.22) y (7.23) en (7.19),

$$\tilde{c} = c - \lambda\mu + \frac{3}{2}\lambda\mu_2^2/\mu_3. \tag{7.24}$$

De esta forma hemos encontrado los parámetros $\tilde{c}$, $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{\alpha}$ en términos de los parámetros del riesgo original c, λ y los momentos de Y. ■

7.7. Fórmula de Pollaczek-Khinchin

La fórmula de Pollaczek-Khinchin es una expresión general que permite escribir a la probabilidad de ruina en términos de una serie infinita de convoluciones. La demostración que presentaremos hace uso de la transformada de Laplace de la cual se recuerda su definición y algunas propiedades en el apéndice. Para obtener la fórmula de Pollaczek-Khinchin se necesita conocer primero la transformada de Laplace de una distribución geométrica compuesta. Sea entonces X una variable aleatoria con distribución geométrica compuesta, es decir, una variable aleatoria de la forma

$$X = \sum_{j=1}^{N} U_j,$$

en donde N tiene distribución geo$(1-p)$, y las variables $U_1, U_2, \ldots$ son independientes, no negativas, idénticamente distribuidas, y con función de distribución definida por

$$H(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F}(y)\, dy,$$

en donde $F(y)$ es una función de distribución de una variablea aleatoria no negativa con media finita μ, y corresponderá, siguiendo la misma notación que en el modelo de Cramér-Lundberg, a la función de distribución del monto de una reclamación. Sea $G(x)$ la función de distribución de X.

Proposición 7.9 *La transformada de Laplace de $\overline{G}(x)$ es*

$$\int_0^\infty e^{-sx}\, \overline{G}(x)\, dx = \frac{p}{s} - (1-p)\, \frac{p\, L_{\overline{F}}(s)}{\mu s - p\, L_{\overline{F}}(s)}.$$

Demostración. Primeramente tenemos que

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H^{*n}(x)(1-p)p^n.$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\overline{G}(x) &= 1-(1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p^n\, H^{*n}(x) \\
&= p-(1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n\, H^{*n}(x).
\end{aligned}
$$

La transformada de Laplace de esta función es

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-sx}\,\overline{G}(x)\,dx &= \frac{p}{s}-(1-p)\int_0^\infty e^{-sx}\,(\sum_{n=1}^{\infty} p^n\, H^{*n}(x)\,)\,dx \\
&= \frac{p}{s}-(1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n\int_0^\infty e^{-sx}\,H^{*n}(x)\,dx \\
&= \frac{p}{s}-(1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n\, s^{n-1}\, L_H^n(s) \\
&= \frac{p}{s}-\frac{(1-p)}{s}\sum_{n=1}^{\infty}(psL_H(s))^n \\
&= \frac{p}{s}-(1-p)\,\frac{p\,L_H(s)}{1-ps\,L_H(s)}.
\end{aligned}
$$

A partir de la definición de $H(x)$, puede demostrarse que $\mu s L_H(s) = L_{\overline{F}}(s)$. Por lo tanto,

$$
\int_0^\infty e^{-sx}\,\overline{G}(x)\,dx = \frac{p}{s}-\frac{(1-p)}{s}\,\frac{p\,L_{\overline{F}}(s)}{\mu-p\,L_{\overline{F}}(s)}.
$$

■

Con la notación y las hipótesis utilizadas en el modelo de Cramer-Lundberg, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.2 (Fórmula de Pollaczek-Khinchin) *La probabilidad de ruina en el modelo de Cramer-Lundberg está dada por*

$$\psi(u) = (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} p^n \, \overline{H^{*n}}(u),$$

en donde $p = \dfrac{\lambda\mu}{c}$ *y* $H(x) = \dfrac{1}{\mu} \displaystyle\int_0^x \overline{F}(y)\, dy.$

Demostración. Sabemos que la probabilidad de ruina satisface la ecuación integral

$$\begin{aligned}
\psi(u) &= \frac{\lambda}{c}\,[\int_u^\infty \overline{F}(y)\,dy + \int_0^u \psi(u-y)\overline{F}(y)\,dy\,] \\
&= \frac{\lambda}{c}\,[\,\mu - \int_0^u \overline{F}(x)\,dx + (\psi * \overline{F})(u)].
\end{aligned}$$

Tomando la transformada de Laplace de esta función tenemos que

$$L_\psi(s) = \frac{\lambda}{c}\,[\,\frac{\mu}{s} - \frac{1}{s}\,L_{\overline{F}}(s) + L_\psi(s)L_{\overline{F}}(s)\,],$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned}
L_\psi(s) &= \frac{\frac{\lambda}{cs}(\mu - L_{\overline{F}}(s))}{1 - \frac{\lambda}{c}\,L_{\overline{F}}(s)} \\
&= \frac{\frac{\lambda}{cs}(\mu - (p + (1-p))L_{\overline{F}}(s))}{1 - \frac{\lambda}{c}\,L_{\overline{F}}(s)}
\end{aligned}$$

Definiendo $p = \lambda\mu/c$, se puede escribir

$$\begin{aligned}
L_\psi(s) &= \frac{\frac{p}{s}[\mu - (p + (1-p))L_{\overline{F}}(s)]}{\mu - p\,L_{\overline{F}}(s)} \\
&= \frac{p}{s} - \frac{(1-p)}{s}\,\frac{pL_{\overline{F}}(s)}{\mu - p\,L_{\overline{F}}(s)}.
\end{aligned}$$

De esta forma hemos encontrado que la transformada de Laplace de la probabilidad de ruina coincide con la transformada de Laplace de la función $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$, en donde $G(x)$ es la función de distribución geométrica compuesta con las características descritas en la proposición anterior. Por la unicidad de la transformada de Laplace tenemos que ambas funciones deben ser iguales, es decir,

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \overline{G}(u) \\ &= 1 - (1-p)\sum_{n=0}^{\infty} p^n\, H^{*n}(u) \\ &= p - (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n\, H^{*n}(u) \\ &= p - (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n\, (1 - \overline{H^{*n}}(u)) \\ &= (1-p)\sum_{n=1}^{\infty} p^n\, \overline{H^{*n}}(u). \end{aligned}$$

■

7.8. Ejercicios

Proceso de riesgo a tiempo discreto

134. El total de montos por reclamaciones durante cada periodo unitario en el proceso de riesgo a tiempo discreto se ha modelado mediante una variable aleatoria discreta Y con valores en el conjunto $\{0, 1, \ldots\}$ y se ha supuesto que la esperanza de esta variable es finita. Demuestre que

$$E(Y) = \sum_{y=0}^{\infty} \overline{F}(y).$$

135. A partir de la fórmula recursiva para la probabilidad de ruina $\psi(u)$ en el proceso de riesgo a tiempo discreto que aparece en el enunciado de la Proposición 7.1, demuestre que

a) $\psi(u+1) \leqslant \psi(u)$.

b) $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.

136. Encuentre la matriz de probabilidades de transición en un paso de la cadena de Markov dada por el proceso de riesgo a tiempo discreto $\{C_n : n \geqslant 0\}$.

Modelo de Cramér-Lundberg

137. Considere el proceso de Cramér-Lundberg $\{C_t : t \geqslant 0\}$ con la notación e hipótesis usuales. Demuestre que

a) $E(C_t) = u + (c - \lambda\mu)t$.

b) $\mathrm{Var}(C_t) = \lambda t \mu_2$.

c) $M_{C_t}(r) = \exp\left[\, r(u+ct) + \lambda t(M_Y(-r) - 1)\,\right]$.

Probabilidades de ruina

138. Suponga que las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg siguen una distribución exponencial de parámetro $\alpha = 1$. Suponga además que $\lambda = 1/2$ y $c = 2$. Observe que se cumple la condición de ganancia neta $c > \lambda\mu$. ¿Cuál debe ser el capital inicial u para que la probabilidad de ruina sea menor o igual a 0.01?

Coeficiente de ajuste

139. Demuestre que si las reclamaciones son variables aleatorias acotadas, entonces el coeficiente de ajuste existe.

140. Se ha demostrado que cuando las reclamaciones tienen distribución $\exp(\alpha)$ el coeficiente de ajuste es $R = \alpha - \lambda/c$. Usando la condición de ganancia neta compruebe que este valor de R efectivamente cumple la desigualdad

$$0 < R < \frac{2(c - \lambda\mu)}{\lambda\mu_2}.$$

Desigualdad de Lundberg

141. Demuestre que efectivamente el evento $(\tau \leqslant t)$ converge monótonamente al evento $(\tau < \infty)$ cuando t tiende a infinito monótonamente. Este resultado fue usado en la demostración de la desigualdad de Lundberg.

Aproximación de De Vylder

142. Demuestre que la aproximación de De Vylder coincide con la probabilidad de ruina en el caso cuando las reclamaciones tienen distribución $\exp(\alpha)$.

Fórmula de Pollaczek-Khinchin

143. Suponga que las reclamaciones en el modelo de Cramér-Lundberg tienen distribución $\exp(\alpha)$, es decir, $F(x) = 1 - e^{\alpha x}$ para $x > 0$.

   a) Demuestre que $F^s(x) = 1 - e^{\alpha x}$ para $x > 0$, es decir, se trata nuevamente de la distribución $\exp(\alpha)$.

   b) Como consecuencia del inciso anterior, se tiene que $(F^s)^{*n}(x)$ es la función de distribución gamma(n, α). Demuestre que para $n \geqslant 1$,
$$(F^s)^{*n}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\alpha x} \frac{(\alpha x)^k}{k!}.$$

   c) Use los incisos anteriores y la fórmula de Pollaczek-Khinchin para obtener nuevamente la solución
$$\psi(u) = \frac{\lambda}{c\alpha} e^{-(\alpha - \lambda/c)u}.$$

Apéndice A

Formulario y resultados varios

Fórmula de De Pril en R

```
####################################
#  F\'ormula de De Pril en R v1.1  #
####################################
I <- 5 # Montos de reclamaciones
J <- 3 # \'Indice m\'aximo para tasas de mortalidad
R <- 20 # Valor m\'aximo para r en g(r)
#
n <- array(1:15, dim=c(5,3))
n[1,1]<-1
n[2,1]<-3
n[3,1]<-5
n[4,1]<-2
n[5,1]<-2
n[1,2]<-3
n[2,2]<-5
n[3,2]<-3
n[4,2]<-2
n[5,2]<-3
n[1,3]<-1
n[2,3]<-4
n[3,3]<-4
```

```
n[4,3]<-6
n[5,3]<-4
#
q <- array(1:3, dim=c(3))
q[1]<-0.03
q[2]<-0.04
q[3]<-0.05
#..............................
# Funci\'on h(i,k)
#..............................
h <- function(i,k) {
aux <- 0
for (j in 1:J) {
aux <- aux+n[i,j]*(q[j]/(1-q[j]))^k
}
aux <- i*((-1)^(k-1))*aux
return(aux)
}
#..............................
# C\'alculo de la densidad de S
#..............................
gc <- array(1:R, dim=c(R))
gc0 <- g(0)
#
g <- function(r) {
if (r==0) {
aux <- 1
for (i in 1:I) {
    for (j in 1:J) {
    aux <- aux*((1-q[j])^n[i,j])
    }
}
return(aux)
}
else
{
aux <- 0
for (i in 1:min(r,I)) {
    for (k in 1:floor(r/i)) {
        if (r-i*k==0) { aux <- aux + gc0*h(i,k) }
        else {aux <- aux + gc[r-i*k]*h(i,k)}
```

```
        }
}
aux <- aux/r
gc[r] <- aux
return(aux)
}
}
#..............................
# Asignaci\'on en el arreglo "gc" y graficaci\'on.
#..............................
for (i in 1:R) {
gc[i] <- g(i)
}
# Nota: Se omite en la gr\'afica el valor de la densidad en cero "gc0".
barplot(gc,main="Funci?n de densidad de S",xlab="r", ylab="g(r)")
#################################################################
# Fin de c\'odigo
#################################################################
```

Fórmula de Panjer en R (Caso Poisson)

```
####################################
#  F\'ormula de Panjer en R v1.0   #
#  [Caso Poisson]                  #
####################################
#
R <- 20 # Valor m\'aximo para r en g(r)
#
#..............................
# c\'alculo de p_k=P(N=k) (Caso Poisson)
#..............................
a <- 0
b <- 3.5  #lambda
p0 <- 2.7172^{-b}
p <- array(1:R, dim=c(R))
p[1] <- (a+b)*p0
for (k in 2:R) {
p[k] <- (a+b/k)*p[k-1]
}
```

```
#..............................
# c\'alculo de f_r=P(Y=r), r>=1
#..............................
#
f <- array(1:R, dim=c(R))
f[1] <- 0.1
f[2] <- 0.1
f[3] <- 0.2
f[4] <- 0.3
f[5] <- 0.3
for (i in 5:R) { f[i] <- 0 }
#...............................
# C\'alculo de la densidad de S
#...............................
g0 <- p0
g <- array(1:R, dim=c(R))
g[1] <- (a+b)*f[1]*g0
for (r in 2: R) {
aux <- 0
for (i in 1:{r-1}) {
    aux <- aux + (a+b*i/r)*f[i]*g[r-i]
               }
aux <- aux + (a+b)*f[r]*g0
g[r] <- aux
}
#..............................
# Graficaci\'on
#..............................
# Nota: Se omite en la gr\'afica el valor de la densidad en cero "g0".
barplot(g,main="Funcin de densidad de S",xlab="r", ylab="g(r)")
#
#################################################################
# Fin de c\'odigo
#################################################################
```

Alfabeto griego

A α	alpha	I ι	iota	P ρ, ϱ	rho
B β	beta	K κ	kappa	Σ σ, ς	sigma
Γ γ	gamma	Λ λ	lambda	T τ	tau
Δ δ	delta	M μ	mu	Υ υ	upsilon
E ϵ, ε	epsilon	N ν	nu	Φ ϕ, φ	phi
Z ζ	zeta	Ξ ξ	xi	X χ	chi
H η	eta	O o	omikron	Ψ ψ	psi
Θ θ, ϑ	theta	Π π	pi	Ω ω	omega

Función indicadora

La función indicadora de un conjunto $A \subseteq \Omega$ es la función $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ definida por

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \omega \in A, \\ 0 & \text{si} \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

De este modo la función 1_A toma el valor uno dentro del conjunto A y cero fuera de él, y cumple las siguientes propiedades.

a) $1_{A \cup B} = \max\{1_A, 1_B\} = 1_A + 1_B - 1_A\,1_B$.

b) $1_{A \cap B} = \min\{1_A, 1_B\} = 1_A\,1_B$.

c) $1_{A^c} = 1 - 1_A$.

d) $1_{A-B} = 1_A - 1_A\,1_B$.

e) $1_{A \triangle B} = |1_A - 1_B| = 1_A + 1_B - 2\,1_A\,1_B = (1_A - 1_B)^2$.

f) $A \subseteq B \Rightarrow 1_A \leqslant 1_B$.

Función gamma

Para valores de α donde la integral es convergente se define

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,$$

y se cumplen las siguientes propiedades

a) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\,\Gamma(\alpha)$.

b) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha!$ cuando α es entero positivo.

c) $\Gamma(2) = \Gamma(1) = 1$.

d) $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Funciones de utilidad
Una función de utilidad es una función $v(x)$ que representa el valor o utilidad que un individuo o institución asocia a cada cantidad de un bien. Matemáticamente a una función de utilidad se le define a través de las siguientes dos propiedades:

a) Es estrictamente creciente.

b) Es cóncava.

Suponiendo diferenciabilidad, estas propiedades se escriben como $v'(x) > 0$ y $v''(x) \leqslant 0$, respectivamente. La primera propiedad representa el hecho evidente de que una cantidad mayor de dinero siempre tiene un valor o utilidad mayor. Para interpretar la segunda propiedad consideremos la situación en la que tanto una persona pobre como una persona rica incrementan ambos su capital por una misma cantidad. Entonces este incremento representa para una persona con poco dinero un gran incremento en su utilidad, mientras que el mismo incremento representa un menor incremento en la utilidad para una persona con mayor cantidad de dinero. En otras palabras, cuando hay un incremento de capital fijo, el valor o utilidad crece más rápido cuando uno tiene poco dinero y más lento cuando uno tiene mucho dinero. Dos funciones de utilidad $u(x)$ y $v(x)$ son *equivalentes* si existen constantes a y b, con $a > 0$, tales que $v(x) = au(x) + b$. La razón que subyace en esta definición de equivalencia radica en el hecho de que si un persona con capital x, función de utilidad $u(x)$, y usando el principio de la utilidad esperada, prefiere la inversión I_1 sobre la inversión I_2 si

$$E[u(x + I_1)] > E[u(x + I_2)],$$

y tal decisión no cambia si en lugar de usar la función de utilidad $u(x)$ utiliza ahora $v(x) = au(x) + b$, pues la desigualdad anterior es equivalente a

$$E[au(x + I_1) + b] > E[au(x + I_2) + b].$$

Del conjunto de funciones de utilidad equivalentes a una función de utilidad dada $u(x)$, uno puede escoger aquella función de utilidad $v(x)$ tal que $v(0) = 0$ y $v(1) = 1$. Tal función de utilidad $v(x)$ está dada por

$$v(x) = \frac{u(x) - u(0)}{u(1) - u(0)},$$

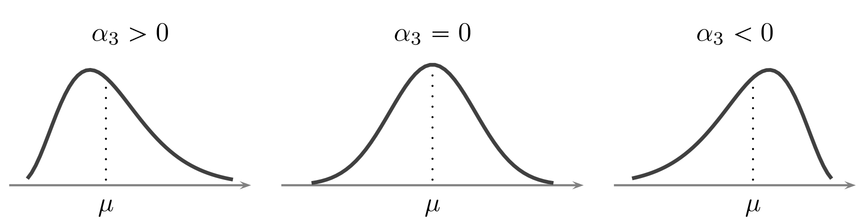
suponiendo que los valores $x = 0$ y $x = 1$ pertenecen al dominio de definición de la función $u(x)$. Es por ello que a una función de utilidad $u(x)$ se le puede pedir la condición $u(0) = 0$, sin perder generalidad ni provocar cambios en la toma de decisiones bajo el criterio de utilidad esperada.

Coeficiente de asimetría de Fisher

Para una variable aleatoria X con tercer momento finito se define el coeficiente de asimetría de Fisher α_3 como el número

$$\alpha_3 = \frac{E[(X - E(X))^3]}{[\mathrm{Var}(X)]^{3/2}}.$$

Esta cantidad es una medida de la asimetría de la distribución alrededor de su media. Cuando $\alpha_3 = 0$ la distribución es completamente simétrica alrededor de su media, como es el caso, por ejemplo, de la distribución normal. Cuando $\alpha_3 > 0$ se dice que la distribución es asimétrica positiva o que tiene mayor sesgo hacia la derecha (es decir, la cola a la derecha de la media es más larga que la de la izquierda, o bien que hay valores más separados de la media a la derecha). Cuando $\alpha_3 < 0$, se dice que la distribución es asimétrica negativa o que tiene mayor sesgo a la izquierda (es decir, la cola a la izquierda de la media es más larga que la de la derecha, o bien que hay valores más separados de la media a la izquierda).



Desigualdad de Jensen
Sea u una función convexa y sea X una variable aleatoria tal que tanto X como $u(X)$ tienen esperanza finita. Entonces

$$u(E(X)) \leqslant E(u(X)).$$

En el caso cuando u es cóncava, el resultado es

$$u(E(X)) \geqslant E(u(X)).$$

Esperanza condicional
Sean $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria con esperanza finita y $\mathscr{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$. La esperanza condicional de X dado $\mathscr{G}$ es una variable aleatoria denotada por $E(X \,|\, \mathscr{G})$ que cumple las siguientes tres propiedades:

1. Es $\mathscr{G}$-medible.
2. Tiene esperanza finita.
3. Para cualquier evento G en $\mathscr{G}$, $\quad E[\, E(\, X \,|\, \mathscr{G}\,)\, 1_G\,] = E[\, X\, 1_G\,]$.

Puede demostrarse que esta variable aleatoria existe y es única casi seguramente, esto significa que si existe otra variable aleatoria con las tres propiedades anteriores, entonces con probabilidad uno coincide con $E(X \,|\, \mathscr{G})$. Cuando $\mathscr{G} = \sigma(Y)$ para alguna variable aleatoria Y, se escribe $E(X \,|\, Y)$ en lugar de $E(X \,|\, \sigma(Y))$. En particular, el término $P(A \,|\, Y)$ significa $E(1_A \,|\, Y)$. Se enuncian a continuación algunas propiedades de esta esperanza.

a) $E(X \,|\, \{\emptyset, \Omega\}\,) = E(X)$.

b) $E(1_A \,|\, \{\emptyset, \Omega\}\,) = P(A)$.

c) $E(1_A \,|\, \{\emptyset, B, B^c, \Omega\}\ ) = P(A|B)1_B + P(A|B^c)1_{B^c}$.

d) $E(E(X \,|\, \mathscr{G})) = E(X)$. En particular, $E(P(A \,|\, Y)) = E(1_A) = P(A)$.

e) Si X es $\mathscr{G}$-medible, entonces $E(X \,|\, \mathscr{G}) = X$. En particular, si c es una constante, entonces $E(c \,|\, \mathscr{G}) = c$.

f) $E(aX + Y \,|\, \mathscr{G}) = aE(X \,|\, \mathscr{G}) + E(Y \,|\, \mathscr{G})$.

g) Si $X \geqslant 0$, entonces $E(X \,|\, \mathscr{G}) \geqslant 0$.

h) *Teorema de convergencia monótona.*
Si $0 \leqslant X_n \nearrow X$, entonces $E(X_n \,|\, \mathscr{G}) \nearrow E(X \,|\, \mathscr{G})$ c.s.

i) *Teorema de convergencia dominada.*
Si $|X_n| \leqslant Y$, $E|Y| < \infty$ y $X_n \to X$ c.s., entonces $E(X_n \,|\, \mathscr{G}) \to E(X \,|\, \mathscr{G})$ c.s.

j) *Desigualdad de Jensen.*
Si φ es convexa, entonces $\varphi(E(X \,|\, \mathscr{G})) \leqslant E(\varphi(X) \,|\, \mathscr{G})$.

k) Si $\mathscr{H}$ es una sub σ-álgebra de $\mathscr{G}$, entonces $E(E(X \,|\, \mathscr{G}) \,|\, \mathscr{H}) = E(X \,|\, \mathscr{H})$.

l) Si Z es $\mathscr{G}$-medible y acotada, entonces $E(Z\,X \,|\, \mathscr{G}) = Z\,E(X \,|\, \mathscr{G})$.

m) Si X es independiente de $\mathscr{G}$, entonces $E(X \,|\, \mathscr{G}) = E(X)$.

Un estudio más detallado de la esperanza condicional puede ser encontrado en libros dedicados a probabilidad como [13] o [21].

Integral de Riemann-Stieltjes

Esta es una integral que generaliza la integral usual de Riemann y se trata de la integral de una función $h(x)$ respecto de otra función $F(x)$. Su definición es análoga al caso de la integral de Riemann: si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces definimos de manera informal

$$\int_a^b h(x)\, dF(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} h(x_i)(F(x_i) - F(x_{i-1})),$$

en donde Δx es el máximo de las distancias $x_i - x_{i-1}$, y las funciones $h(x)$ y $F(x)$ deben cumplir ciertas condiciones para que la integral tenga sentido y esté bien definida. En particular, a la función integradora $F(x)$ se le pide que sea continua por la derecha, monótona no decreciente y tal que $F(\infty) - F(-\infty) < M$, para algún número $M > 0$. Observe que $F(x)$ debe cumplir propiedades semejantes a las de una función de distribución, justamente usaremos a las funciones de distribución como funciones integradoras. En particular, cuando $F(x) = x$ sobre el intervalo $[a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b h(x)\, dF(x) = \int_a^b h(x)\, dx,$$

suponiendo la existencia de tal integral. Igualmente, bajo la hipótesis de existencia de todas las integrales que aparecen a continuación, la integral de Riemann-Stieltjes cumple las siguientes propiedades:

a) Es lineal en el integrando, es decir,

$$\int_a^b (\alpha h_1(x) + h_2(x))\, dF(x) = \alpha \int_a^b h_1(x)\, dF(x) + \int_a^b h_2(x)\, dF(x).$$

b) Es también lineal en el integrador, es decir,

$$\int_a^b h(x)\, d(\alpha F_1(x) + F_2(x)) = \alpha \int_a^b h(x)\, dF_1(x) + \int_a^b h(x)\, dF_2(x).$$

c) Cuando $h(x)$ tiene primera derivada continua se cumple la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b h(x)\, dF(x) = h(b)F(b) - h(a)F(a) - \int_a^b F(x)h'(x)\, dx.$$

d) De especial interés en la teoría de la probabilidad es el caso cuando $F(x)$ es diferenciable. Bajo tal hipótesis se tiene la igualdad

$$\int_a^b h(x)\, dF(x) = \int_a^b h(x)F'(x)\, dx.$$

En particular, tomando $h(x) = x$ y si X es una v.a. absolutamente continua con esperanza finita, con función de distribución $F(x)$ y función de densidad $f(x)$, entonces

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx.$$

e) Otro caso interesante para la teoría de la probabilidad ocurre cuando $h(x)$ es continua y $F(x)$ es constante excepto en los puntos $x_0, x_1, \ldots$, en donde la función tiene saltos positivos de tamaño $p(x_0), p(x_1), \ldots$ respectivamente. En este caso y suponiendo convergencia,

$$\int_a^b h(x)\, dF(x) = \sum_{i=0}^{\infty} h(x_i)\, p(x_i).$$

Esto significa que integrar respecto de la función de distribución de una variable aleatoria discreta se reduce a efectuar una suma. Nuevamente tomando $h(x) = x$ y si X es una v.a. discreta con esperanza finita y con función de distribución como se mencionó antes, entonces

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(x_i).$$

En el caso cuando X es una v.a. mixta con esperanza finita, en el cálculo de la esperanza se separa la parte continua de la parte discreta de la siguiente forma

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx + \sum_{i=0}^{\infty} x_i\, p(x_i).$$

Un tratamiento más riguroso y completo de la integral de Riemann-Stieltjes puede encontrarse en el texto de probabilidad de Harris [12], o en tratados de análisis matemático como el de Apostol [1].

Variables aleatorias mixtas

Una variable aleatoria mixta X es aquella que no es ni continua ni es discreta. Su función de distribución puede escribirse de la siguiente forma

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\, du + \sum_{x_i \leqslant x} p(x_i),$$

en donde $f(u)$ es una función no negativa y $p(x_i) = P(X = x_i) > 0$ para ciertos valores $x_0, x_1, \ldots$ Si g es una función tal que $g(X)$ es una variable aleatoria integrable, entonces su esperanza se calcula de la siguiente forma

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\, dx + \sum_{i=0}^{\infty} g(x_i) p(x_i).$$

Varianza condicional

Sea X una variable aleatoria con segundo momento finito, y sea $\mathscr{G}$ una sub-σ-álgebra de $\mathscr{F}$. La varianza condicional de X dado $\mathscr{G}$ se define como la variable aleatoria dada por

$$\mathrm{Var}(X|\mathscr{G}) = E[\ (X - E(X|\mathscr{G}))^2\ |\mathscr{G}\,].$$

Nuevamente, cuando la sub-σ-álgebra $\mathscr{G}$ es $\sigma(Y)$ para alguna variable aleatoria Y, entonces $\text{Var}(X|\mathscr{G})$ se escribe $\text{Var}(X|Y)$, y puede tomarse como definición la igualdad

$$\text{Var}(X|Y) = E[\ (X - E(X|Y))^2 \mid Y\ ].$$

Se enuncian a continuación algunas propiedades de esta variable aleatoria.

a) $\text{Var}(X \mid \{\emptyset, \Omega\}) = \text{Var}(X)$.

b) $\text{Var}(1_A \mid \{\emptyset, \Omega\}) = P(A)(1 - P(A))$.

c) $\text{Var}(X \mid \mathscr{G}) = E(X^2 \mid \mathscr{G}) - E^2(X \mid \mathscr{G})$.

d) $\text{Var}(X) = E[\text{Var}(X \mid \mathscr{G})] + \text{Var}[E(X \mid \mathscr{G})]$.

Ley de los grandes números
Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ. Entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mu.$$

Cuando la convergencia es en probabilidad este resultado se conoce como la *ley débil*. Y cuando la convergencia es casi segura se llama *ley fuerte*.

Teorema central del límite
Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2. Entonces

$$\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \xrightarrow{d} \text{N}(0,1).$$

Teorema de convergencia dominada
Sea $X_1 \leqslant X_2 \leqslant \cdots$ una sucesión de variables aleatorias para la cual existe otra variable aleatoria Y con esperanza finita y tal que $|X_n| \leqslant Y$, para $n \geqslant 1$. Si X_n converge casi seguramente a una variable X, entonces tanto X como X_n tienen esperanza finita y $E(X_n) \to E(X)$.

Teorema de convergencia monótona
Sea $0 \leqslant X_1 \leqslant X_2 \leqslant \cdots$ una sucesión monótona de variables aleatorias convergente casi seguramente a una variable X. Entonces $E(X_n) \to E(X)$.

Fórmulas recursivas para calcular convoluciones
Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Nos interesa encontrar la distribución de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Cuando las variables $\{X_i\}$ tienen función de distribución F, a la función de distribución de S_n se le llama la n-ésima convolución de F, y se le denota por F^{*n}, es decir, $F^{*n}(x) = P(S_n \leqslant x)$. Cuando las variables $\{X_i\}$ tienen función de probabilidad o de densidad f, a la función de probabilidad o de densidad de S_n se le llama la n-ésima convolución de f, y se le denota por f^{*n}, es decir, en el caso discreto, $f^{*n}(x) = P(S_n = x)$.

1. Cuando las variables $\{X_i\}$ son discretas con valores en el conjunto $\{0, 1, 2, \ldots\}$, se cumplen las siguientes fórmulas recursivas.

   a) $P(S_n = x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} = x - j)\, P(X_n = j)$.

   b) $P(S_n \leqslant x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} \leqslant x - j)\, P(X_n = j)$.

2. Cuando las variables $\{X_i\}$ son continuas con soporte en el intervalo $(0, \infty)$, con función de distribución F, y con función de densidad f, se cumplen las siguientes fórmulas recursivas.

   a) $f^{*n}(x) = \int_0^x f^{*(n-1)}(x - y)\, f(y)\, dy$.

   b) $F^{*n}(x) = \int_0^x F^{*(n-1)}(x - y)\, f(y)\, dy$.

Transformada de Laplace
Para una función $\psi(u) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, la transformada de Laplace es

$$L_\psi(s) = \int_0^\infty e^{su} \psi(u) du,$$

suponiendo que tal integral existe. Esta transformación cumple las siguientes propiedades.

1. $L_{\alpha_1\psi_1+\alpha_2\psi_2}(s) = \alpha_1\, L_{\psi_1}(s) + \alpha_2\, L_{\psi_2}(s)$.

2. $L_H(s) = \dfrac{1}{s}\, L_\psi(s)$ cuando $H(u) = \displaystyle\int_0^u \psi(x)dx$.

3. $L_{\psi'}(s) = s\, L_\psi - \psi(0)$.

4. $L_{\psi_1*\psi_2}(s) = L_{\psi_1}(s)\, L_{\psi_2}(s)$ cuando $(\psi_1*\psi_2)(u) = \displaystyle\int_0^u \psi_1(u-x)\psi_2(x)dx$.
   Sin embargo, cuando $G(x)$ es la convolución de dos funciones de distribución $F_1(x)$ y $F_2(x)$ de variables aleatorias no negativas, es decir,
   $$G(x) = \int_0^x F_1(x-y)dF_2(y) = \int_0^x F_1(x-y)f_2(y)dy = (F_1 * f_2)(x),$$
   entonces
   $$L_G(s) = L_{F_1}(s)L_{f_2}(s) = sL_{F_1}(s)L_{F_2}(s).$$

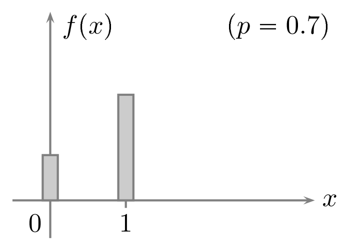
5. Unicidad: la transformada de Laplace determina de manera única a la función objeto.

Distribuciones de probabilidad

En esta sección se presentan en orden alfabético algunas distribuciones de probabilidad utilizadas en el texto. La función generadora de probabilidad se denota por $P(t)$, y la función generadora de la momentos por $M(t)$.

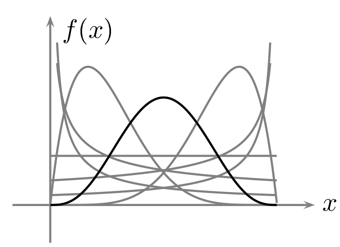
Distribución Bernoulli

$X \sim \mathrm{Ber}(p)$ con $p \in (0,1)$.
$f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ para $x = 0, 1$.
$E(X) = p$.
$\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.
$P(t) = 1 - p + pt$.
$M(t) = (1-p) + pe^t$.

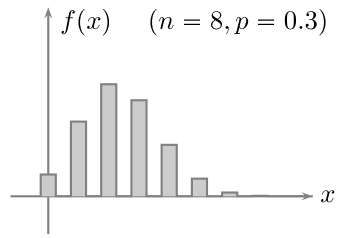


Distribución beta

$X \sim \mathrm{beta}(a,b)$ con $a > 0, b > 0$.
$f(x) = x^{a-1}(1-x)^{b-1}/B(a,b)$ para $x \in (0,1)$.
en donde $B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$,
con $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$.
$E(X) = a/(a+b)$.
$\mathrm{Var}(X) = ab/[(a+b+1)(a+b)^2]$.
Cuando $a = b = 1$ se obtiene la dist. unif$(0,1)$.

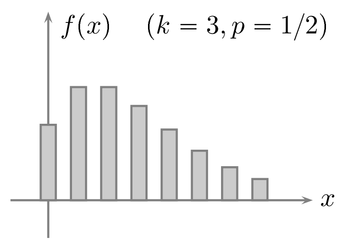


Distribución binomial



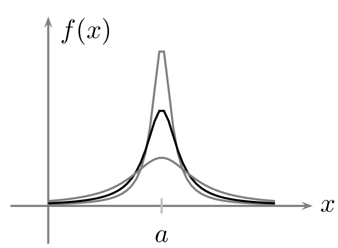
$X \sim \text{bin}(n, p)$ con $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y $p \in (0, 1)$.
$f(x) = \binom{n}{k} p^x (1-p)^{n-x}$ para $x = 0, 1, \ldots, n$.
$E(X) = np$.
$\text{Var}(X) = np(1 - p)$.
$P(t) = (1 - p + pt)^n$.
$M(t) = [(1 - p) + pe^t]^n$.

Distribución binomial negativa



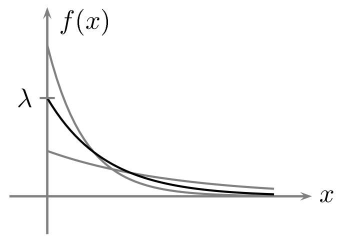
$X \sim \text{bin neg}(k, p)$ con $p \in (0, 1)$ y $k \in \{1, 2, \ldots\}$.
$f(x) = \binom{k + x - 1}{x} p^k (1 - p)^x$ para $x = 0, 1, \ldots$
$E(X) = k(1 - p)/p$.
$\text{Var}(X) = k(1 - p)/p^2$.
$P(t) = [p/(1 - (1 - p)t)]^k$.
$M(t) = [p/(1-(1-p)e^t)]^k$ para $t < -\ln(1-p)$.
Cuando $r = 1$ se obtiene la distribución geo(p).

Distribución Cauchy



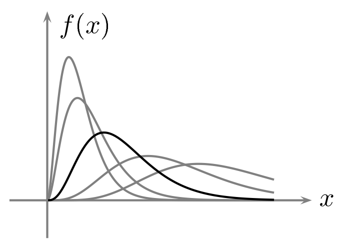
$X \sim \text{Cauchy}(a, b)$ con $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$.
$f(x) = \dfrac{1}{b\pi[1 + ((x - a)/b)^2]}$, para $x \in \mathbb{R}$.
$F(x) = 1/2 + (1/\pi) \arctan((x - a)/b)$.
La esperanza y varianza no existen.
La función generadora de momentos no existe.
Cuando $a = 0$ y $b = 1$ se obtiene la distribución Cauchy estándar, Cauchy$(0, 1)$.

Distribución exponencial



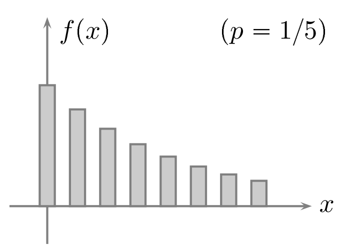
$X \sim \exp(\lambda)$ con $\lambda > 0$.
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$.
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x > 0$.
$E(X) = 1/\lambda$.
$\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.
$M(t) = \lambda/(\lambda - t)$ para $t < \lambda$.

Distribución gamma



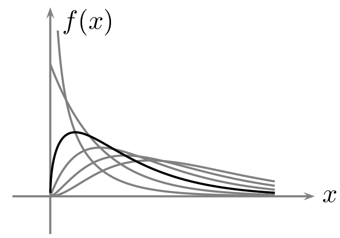
$X \sim \text{gamma}(\alpha, \lambda)$ con $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$.
$f(x) = \dfrac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda e^{-\lambda x}$ para $x > 0$.
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{\alpha-1} (\lambda x)^j / j!$ para $x > 0$ y α entero.
$E(X) = \alpha/\lambda$.
$\mathrm{Var}(X) = \alpha/\lambda^2$.
$E(X^n) = \Gamma(\alpha + n)/(\Gamma(\alpha)\lambda^n)$.
$M(t) = [\lambda/(\lambda - t)]^\alpha$ para $t < \lambda$.
Cuando $\alpha = 1$ se obtiene la distribución $\exp(\lambda)$. Cuando α es entero se conoce también con el nombre de distribución Erlang.

Distribución geométrica



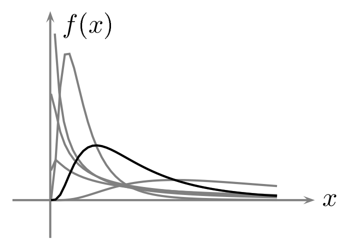
$X \sim \text{geo}(p)$ con $p \in (0, 1)$.
$f(x) = p(1-p)^x$ para $x = 0, 1, \ldots$
$E(X) = (1-p)/p$.
$\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$.
$P(t) = p/(1 - (1-p)t)$.
$M(t) = p/(1-(1-p)e^t)$ para $t < -\ln(1-p)$.

Distribución ji-cuadrada



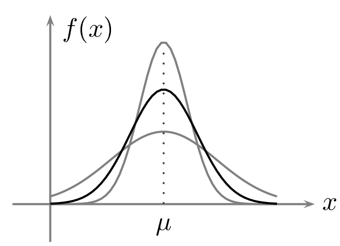
$X \sim \chi^2(n)$ con $n > 0$.
$f(x) = \dfrac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}$ para $x > 0$.
$E(X) = n$.
$\mathrm{Var}(X) = 2n$.
$M(t) = (1-2t)^{-n/2}$ para $t < 1/2$.

Distribución log normal



$X \sim \mathrm{lognormal}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.
$f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp[-(\ln x - \mu)^2/2\sigma^2]$, $x > 0$.
$F(x) = \Phi((\ln x - \mu)/\sigma)$.
$E(X) = \exp(\mu + \sigma^2/2)$.
$E(X^n) = \exp(n\mu + n^2\sigma^2/2)$.
$\mathrm{Var}(X) = \exp(2\mu + 2\sigma^2) - \exp(2\mu + \sigma^2)$.
Si $X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, entonces $e^X \sim \mathrm{lognormal}(\mu, \sigma^2)$.

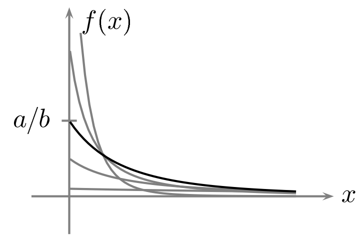
Distribución normal



$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$.
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$.
$E(X) = \mu$.
$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
$M(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2/2)$.
$\phi(t) = \exp(i\mu t - \sigma^2 t^2/2)$.
Cuando $\mu = 0$ y $\sigma^2 = 1$ se obtiene la distribución normal estándar, $\mathrm{N}(0,1)$.

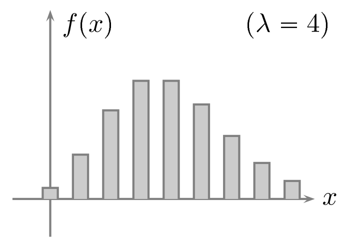
Distribución Pareto

$X \sim \text{Pareto}(a,b)$ con $a,b>0$.
$f(x) = \dfrac{ab^a}{(b+x)^{a+1}}$ para $x>0$.
$F(x) = 1-[b/(b+x)]^a$ para $x>0$.
$E(X) = b/(a-1)$ para $a>1$.
$\text{Var}(X) = ab^2/[(a-1)^2(a-2)]$, $a>2$.



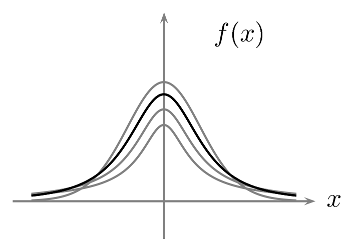
Distribución Poisson

$X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda>0$.
$f(x) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^x}{x!}$ para $x = 0,1,\ldots$
$E(X) = \lambda$.
$\text{Var}(X) = \lambda$.
$P(t) = e^{-\lambda(1-t)}$.
$M(t) = \exp[\lambda(e^t-1)]$.



Distribución t

$X \sim \text{t}(n)$ con $n>0$.
$f(x) = \dfrac{\Gamma(n+1/2)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma(n/2)}\,(1+\dfrac{x^2}{n})^{-n-1/2}$.
$E(X) = 0$.
$\text{Var}(X) = n/(n-2)$ para $n>2$.
$M(t)$ no existe para $t \neq 0$.
$\phi(t) = \exp(|t|)$.



Distribución Weibull

$X \sim \text{Weibull}(r, \alpha)$ con $r, \alpha > 0$.
$f(x) = e^{-(\alpha x)^r} r\alpha^r x^{r-1}$ para $x > 0$.
$F(x) = 1 - e^{-(\alpha x)^r}$ para $x > 0$.
$E(X) = \Gamma(1 + 1/r)/\alpha$.
$\text{Var}(X) = [\Gamma(1 + 2/r) - \Gamma^2(1 + 1/r)]/\alpha^2$.

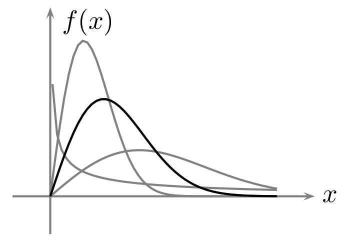
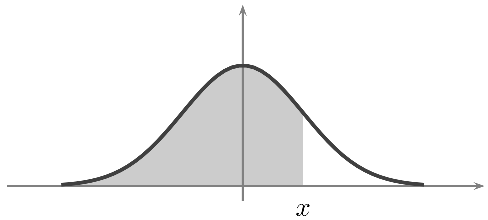


Tabla de la distribución normal estándar



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8399
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

Bibliografía

[1] Apostol T. M. (1974) *Mathematical analysis.* Addison–Wesley.

[2] Asmussen S. (2000) *Ruin probabilities.* World Scientific.

[3] Beard R. E., Pentikäinen T., Pesonen E. (1984) *Risk theory.* Tercera edición. Chapman and Hall. London.

[4] Boland P. (2007) *Statistical and probabilistic methods in actuarial science.* Chapman & Hall / CRC.

[5] Bühlmann H. (1970) *Mathematical methods in risk theory.* Springer–Verlag. New York.

[6] Bühlmann H., Gisler A. (2005) *A course in credibility theory and its applications.* Springer.

[7] Daykin C. D., Pentikäinen T., Pesonen M. (1994) *Practical risk theory for actuaries.* Chapman and Hall. London.

[8] De Pril N. (1986) *On the exact computation of the aggregate claims distribution in the individual life model.* ASTIN Bulletin **16**(2) 109–112.

[9] Dickson D. C. M. (2005) *Insurance risk and ruin.* Cambridge University Press.

[10] Embrechts P., Kluppelberg C., Mikosch T. (1999) *Modelling extremal events for insurance and finance.* Springer.

[11] Gerber H. U. (1979) *An introduction to mathematical risk theory.* Monograph No. 8. S. S. Huebner Foundation for Insurance Education. Wharton School. University of Pennsylvania.

[12] Harris B. (1966) *Theory of probability.* Addison–Wesley.

[13] Karr A. F. (1993) *Probability.* Springer–Verlag.

[14] Kass R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2001) *Modern actuarial risk theory.* Kluwer Academic Publishers.

[15] Klugman S. A., Panjer H. H., Willmot G. E. (2008) *Loss models: from data to decisions.* Third edition. Wiley.

[16] Melnikov A. (2003) *Risk analysis in finance and insurance.* Chapman & Hall/CRC.

[17] Panjer H. H. (1981) Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin* **12**(1) 22–26.

[18] Panjer H. H. (Editor) (1986) *Actuarial mathematics.* Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. **35**, AMS.

[19] Rolski T., Schmidli H., Teugels J. (1999) *Stochastic processes for insurance and finance.* John Wiley & Sons.

[20] Schmidli H. *Lecture notes on risk theory.* Manuscrito no publicado.

[21] Williams D. (1991) *Probability with martingales.* Cambridge University Press.

Índice analítico

Agregado de reclamaciones
en el modelo colectivo, 17
en el modelo individual, 4
Aproximación
de Edgeworth, 52
gamma trasladada, 50
normal, 7, 49
Aproximación de De Vylder, 148
Asimetría
coeficiente de Fisher, 163
Aversión al riesgo, 79
coeficiente, 80

Cadenas de Markov, 112
Clase $(a, b, 0)$, 42
Coeficiente
de ajuste, 138, 141
de ajuste (cotas), 146
de asimetría de Fisher, 163
de aversión al riesgo, 80
Condición de ganancia neta, 64, 120, 132
Convolución, 169
Cramér-Lundberg, 127
Credibilidad
Bayesiana, 103
completa, 98, 99
factor de, 101, 106, 108
parcial, 101
Credibilidad Bayesiana
modelo normal-normal, 106
modelo Poisson-gamma, 105

De Pril
fórmula de, 8
De Vylder
aproximación de, 148
Desigualdad
de Jensen, 75, 164
de Jensen condicional, 165
de Lundberg, 139, 143, 144
Distribución
Bernoulli, 171
beta, 171
binomial, 172
binomial compuesta, 21
binomial negativa, 172
binomial negativa compuesta, 22
Cauchy, 172
con cola ligera, 138, 142
con cola pesada, 142
de clase $(a, b, 0)$, 42
Erlang, 173
exponencial, 173
gamma, 173

geométrica, 172, 173
geométrica compuesta, 22
ji-cuadrada, 174
log normal, 174
normal, 174
Pareto, 175
Poisson, 175
Poisson compuesta, 22
Poisson compuesta mixta, 30
t de Student, 175
Weibull, 176

Espacio
de prob. filtrado, 112
Esperanza condicional, 164
Esscher
principio de, 70
transformada de, 70
Excess of loss, 87
Exponente de Lundberg, 138, 141

Fórmula
de De Pril, 8
de Panjer, 41
de Pollaczek-Khinchin, 150
Factor
de credibilidad, 101, 106, 108
de recargo, 65
Filtración, 112
natural, 112
Función
convexa, 75
de utilidad, 65, 162
de valor, 67
gamma, 161
indicadora, 161

Integral
de Riemann-Stieltjes, 165

Jensen
desigualdad de, 164
desigualdad de J. condicional, 165

Laplace
transformada de, 169
Ley de los grandes números, 168
Lundberg
desigualdad de, 139, 143, 144
exponente de, 138, 141

Método de
Newton-Raphson, 139
Modelo
binomial compuesto, 21
binomial negativo compuesto, 22
colectivo, 17
colectivo Poisson, 23
de Cramér-Lundberg, 127
individual, 3
normal-normal, 106
Poisson compuesto, 22
asociado, 23
como límite, 25
como suma, 27
con reclamaciones clasificadas, 28
mixto, 29
Poisson-gamma, 105

Net profit condition, 64, 132
Newton-Raphson, 139
Nivel de retención, 84

Panjer
fórmula de, 41
Pollaczek-Khinchin, 150
Prima, 63
de credibilidad Bayesiana, 105
pura de riesgo, 63
Principio
de Esscher, 70
de la desviación estándar, 65
de la varianza, 65
de pérdida máxima, 69
de utilidad cero, 65
del porcentaje, 69
del riesgo ajustado, 71
del valor esperado, 65
del valor medio, 67
exponencial, 69
Prob. de ruina, 130
horizonte finito, 125, 130
horizonte infinito, 130
Problema
de la ruina, 121
Proceso
a tiempo continuo, 111
a tiempo discreto, 111
adaptado, 112
de Poisson, 113
de Poisson (superposición), 116
de Poisson (thinning), 116
de riesgo, 128
tiempo discreto, 119
de superávit, 128
estocástico, 111
submartingala, 115
supermartingala, 115
trayectoria de un, 111
Reaseguro, 81
de pérdida máxima, 85
excess of loss, 87
no proporcional, 84
por exceso de pérdida, 87
proporcional, 83
stop loss, 85
Riemann-Stieltjes, 165
Riesgo, 2
aversión, 79
modelo colectivo, 17
modelo individual, 5
proceso a tiempo discreto, 119
Ruina, 129

Safety loading, 65
Severidad de la ruina, 134
Stop loss, 85
Submartingala, 115
Supermartingala, 115

Teorema
central del límite, 168
de convergencia dominada, 165, 168
de convergencia monótona, 165, 169
Tiempo
de interarribo, 114
de paro, 112
Transformada
de Esscher, 70
de Laplace, 169
de Laplace-Stieltjes, 36

Variable aleatoria
mixta, 167
Varianza condicional, 167