Análisis Cualitativo

Profesor: Jesús López Estrada
Ayudante: Roberto Méndez Méndez
Curso: EDO 1 Tarea 2 Lab

Abstract

En ocasiones la solución analítica de nuestra ecuación diferencial ordinaria se torna muy compleja o es poco significativa. Es entonces cuando puede ser de gran utilidad un análisis cualitativo de la ecuación.

SECCIÓN 1

Ejercicios y Preguntas

1. ¿Qué relación hay entre un campo vectorial y un campo direccional[1]?

2. ¿Qué relación hay entre una línea de flujo y una curva integral o curva solución?

3. ¿ Dibuja el Campo vectorial sobre $\mathbb{R}^2$?

$$\textbf{a)}\ \mathbf{F} = (x^2, x) \qquad \textbf{b)}\ \mathbf{F} = (y^2, -x)$$

4. Verifica que la trayectoria dada es una línea de flujo de el campo vectorial indicado. Justifica el resultado geométricamente

$$\mathbf{x}(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t, e^{2t}) \qquad \mathbf{F} = (y, -x, 2z)$$

5. Aplicando un análisis *cualitativo*, diga como los las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\textbf{a)}\ x' = x - 5x^2 \quad \textbf{b)}\ x' = -tx \quad \textbf{c)}\ x' = (\operatorname{sen} t)(\operatorname{sen} x)$$
$$\textbf{d)}\ x' = 3\frac{1}{t}x + e^t \quad \textbf{e)}\ x' = x - cos(1/t) \quad \textbf{f)}\ y' = \frac{1}{4x^2 - 4 - x^4 + x^2}$$

Los puntos a considerar son: Campo direccional; Retrato fase; isoclinas, isoclinas solución; puntos críticos (de equilibrio o estacionarios), si los puntos criticos son atractores, repulsores (estabes, inestables), semi-estables; puntos con pendiente infinita); curvas integrales (solución).; funciones que son frontera inferior (lower fence), frontera superior (upper fence); donde hay embudos (funnel)y “anti-embudos” (anti-funnel); asintotas verticales.

6. Resuelve analíticamente las ecuaciones diferenciales a) , b), d) y c) del inciso (5).

Hint. Para la d), b) y f) utiliza la sección B y para a) y c) utiliza el método de separación de variables (no es nada difícil).

[1] Vea sección A

SECCIÓN A

Campo Vectorial

Definición A.1 Trayectoria (path)

Una *trayectoria* en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$\mathbf{c}(t) : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Definición A.2 Curva

Sea $\mathbf{c} : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una trayectoria. Una *curva* $\mathfrak{C}$ es la colección de puntos

$$\mathfrak{C} = \{ \ (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)) \subset \mathbb{R}^n \mid t \in [a, b] \ \} \tag{2}$$

donde $\mathbf{c}$ es una función inyectiva, salvo posiblemente en un conjunto finito de puntos en $[a, b]$.

Definición A.3 Campo vectorial (vector field)

Un campo vectorial sobre $\mathbb{R}^n$ es una función $\mathbf{F}$, tal que

$$\mathbf{F} : X \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \tag{3}$$

Definición A.4 Líneas de Flujo

Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial, una *línea de flujo* para $\mathbf{F}$ es una trayectoria (path) $\mathbf{c}(t)$ tal que

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \tag{4}$$

Geométricamente, una línea de flujo para un campo vectorial $\mathbf{F}$, es una curva que sigue un camino a través del dominio del campo vectorial, en tal forma que el vector tangente de la curva coincide con el campo vectorial.

Así una línea de flujo puede ser vista como una solución de un sistema de ecuaciones diferenciales, escribiendo

$$\mathbf{c}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \tag{5}$$

que para el caso $\mathbf{c}(t) : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ toma la forma

$$\begin{aligned} x(t)' &= P(x(t), y(t), z(t)) \\ y(t)' &= Q(x(t), y(t), z(t)) \\ z(t)' &= R(x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \tag{6}$$

SECCIÓN B

EDO lineales

Nota: Aún falta agregar condiciones que deben cumplir las funciones. De momento solo es para dar un "preview".

Definición B.1 EDO lineal homogénea y no homogénea

Una ecuación diferencial ordinaria, es **lineal y homogénea** si tiene la siguiente forma

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0 y = 0 \tag{7}$$

y es **lineal no homogénea** si es de la forma

$$a_n(t)\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \tag{8}$$

con $f(t)$ no idénticamente cero.

La formas más básicas de las EDO lineales son, la ***lineal de primer orden***, cuyas formas son

$$a(t)y' + b(t)y = 0 \qquad a(t)y' + b(t)y = f(t) \tag{9}$$

para el caso homogéneo y no homogéneo respectivamente y la **lineal de segundo orden**, de formas

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \quad \textit{homogenea} \tag{10}$$

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = f(t) \quad \text{no homogenea} \tag{11}$$

En muchos de libros la forma de la homogénea aparece como

$$y' + b(t)y = 0 \qquad y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{12}$$

que es lo mismo, pues se presupone a(t) distinta de 0 para toda t en el dominio de definición, así que se puede dividir entre $a(t)$ toda la ecuación .

Teorema B.1 Solucion EDO lineal de 1er Orden

Sea una ecuación diferencial ordinaria de primer de la forma

$$y' \pm a(t)y = b(t) \tag{13}$$

donde $\pm$ sólo indica que puede aparecer alguno de los dos signos.
Entonces la solución $y(t)$ de (13) es de la forma

Caso 1: Sin condiciones iniciales

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\int \mu(t)b(t)\,dt + C\right) \tag{14}$$

Caso 2: Con condiciones iniciales .

Sea la condición inicial $y(t_0) = y_0$, entonces la solución es

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(\mu(t_0) y_0 + \int_{t_0}^{t} \mu(t) b(t)\, dt \right) \tag{15}$$

donde $C \in \mathbb{R}$ y la función $\mu(t)$ es conocida como ***factor integrante*** y tiene al expresión

$$\mu(t) = exp \left(\pm \int a(t)\, dt \right) \tag{16}$$

References

[Hub] Hubbard, J., West, B., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, Vol.1, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 1995. Cap.1: Qualitative Methods.

[Zi] Zill, *A First Course in Differential Equations with Modeling Applications*, 10th, 2012

[Ma] Marsden, *Vector Calculus*, 5th, 2003

[Co] Colley, *Vector Calculus*, 4ed, 2011