Depto. de Matemáticas
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 16

Sistemas lineames de EDOs

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Mayo de 2015

[1]jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

INDICACIONES. Los ejercicios con asterisco son opcionales.

1. Halla la matriz fundamental $\Phi(t)$ con $\Phi(0) = I$ para los sistemas de ecuaciones siguientes:

$$a)\ \left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2\\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2\end{array}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{array}{l}\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 - 3x_2 = 0\\ \ddot{x}_2 - 8\dot{x}_2 - 3x_2 + 10x_1 = 0\end{array}\right.$$

$$c)\ \left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 2x_3\\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3\end{array}\right. \qquad d)\ \left\{\begin{array}{l}\dot{x}_1 = 6x_1 - 3x_2\\ \dot{x}_2 = 2x_1 + x_2\end{array}\right.$$

2. Resuelve los porblemas de Cauchy siguientes:

$$a)\left\{\begin{array}{ll}\dot{x}_1 = x_1 + x_2, & x_1(0) = 2\\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2, & x_2(0) = 3\end{array}\right.$$

$$b)\left\{\begin{array}{ll}\dot{x}_1 = 3x_1 + x_2 - x_3, & x_1(0) = 1\\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 - x_3, & x_2(0) = -2\\ \dot{x}_3 = 3x_1 + 3x_2 - x_3, & x_3(0) = -1\end{array}\right.$$

3. Aplicando el método de variación de parámetros resuelve el problema de Cauchy

$$\begin{array}{ll}\dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + t, & x_1(0) = 2\\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 2x_2 + 3e^t, & x_2(0) = 1\end{array}$$

4. Halla una matriz fundamental del sistema $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\,\underset{\sim}{x}$, en donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 3 & \vdots & \vdots\\ \vdots & 0 & 2 & 1 & 0 & \\ & & \ddots & 2 & 0 & 0\\ & & & 0 & 3 & 1\\ 0 & & \dots & & 0 & 3\end{bmatrix}$$

5. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\,\underset{\sim}{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\Phi(0) = I$, demuestra que $\Psi(t) = \Phi(t-t_0)$ es una matrix fundamental de este sistema con $\Psi(t_0) = I$.

6. Si $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\,\underset{\sim}{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, con $\Phi(0) = I$, demuestra que $\Phi(t)\cdot\Phi(s) \equiv \Phi(t+s)$. Esto suguiere que

$$\Phi(t) \equiv e^{At}$$

Y con ello que la solución del problema de Cauchy

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A\,\underset{\sim}{x}, \quad \underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0$$

viene dada por

$$\underset{\sim}{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\underset{\sim}{x_0}$$

Nota como se parece esto al caso escalar.

Sugerencia: Muestra que $\Phi(t)\cdot\Phi(s)$ como $\Phi(t+s)$ resuelven el sistema matricial $\dot{X} = A\cdot X$, con valor matricial inicial $X(s) = \Phi(s)$.

7. * Si $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es continua y satisface $\phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$, y además $\Phi(0) = I$, demuestra que $\Phi(t)$ es solución del problema de Cauchy matricial:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{X}} &= A\,\mathbb{X}, \\ \mathbb{X}(0) &= I \end{aligned}$$

8. * Si los autovalores λ_j de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfacen que $Re(\lambda_j) < 0$, demuestra que existen M y α positivas tales que $\|e^{At}\| \leq M\,e^{-\alpha\,t}$.

9. * Si $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es continua y

$$B(t) = \int_a^t A(\xi)\,d\xi$$

satisface que $A(t)B(t) = B(t)A(t)$, demuestra que $e^{B(t)}$ es una matriz fundamental de sistema $\dot{\underset{\sim}{x}} = A\,\underset{\sim}{x}$.

10. Cierta sustancia A se descompone en dos sustancias P y Q. La velocidad de reacción de formación de cada una de estas sustancias es proporcional a la cantidad de sustancia no descompuesta. Sean $x(t)$ e $y(t)$ las cantidades de sustancia P y Q, respectivamente, al tiempo t. Establece la ley que gobierna el cambio sabiendo que inicialmente $x(0) = 0$, $y(0) = 0$; y que después de una hora $x = \frac{3}{8}c$ y $y = \frac{1}{8}c$. Aquí, c es la cantidad original de sustancia A.

11. Un gramo de cierta sustancia A se transforma poco a poco en una sustancia intermedia I, la que a su vez se transforma en otra que designaremos por B. Sabiendo que la velocidad con la que se transforma la sustancia A, en todo instante t, es proporcional a la cantidad de sustancia I que queda en ese instante, y sabiendo también que la velocidad de formación de I es igual a la diferencia de las velocidades de transformación de B.

    Halla la cantidad de sustancia B al transcurrir el tiempo.

Algo de algebra matricial

12. * Contesta las preguntas siguientes:
    (a) ¿Qué es un autovalor de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$?
    (b) ¿Qué es la multiplicidad algebraica de un autovalor?
    (c) ¿Qué es la multiplicidad geomética de un autovalor?

13. * Si λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, prueba que $N(A - \lambda I) \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio invariante bajo A

14. * Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, demuestra que

$$N(A) \subset N(A^2) \subset \cdots \subset N(A^k) \subset N(A^{k+1}) \subset \mathbb{R}^n$$

15. Demuestra que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable. En general, la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable.