Depto. de Matemáticas
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 15

Ecuaciones de 2do. Orden

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Mayo de 2015

[1] jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

INDICACIONES. Los ejercicios con asterisco son opcionales.

1. * Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $y'' + x(y')^2 = 0$

   b) $2x^2y'' + (y')^3 = 2xy'$

   c) $xy'' + y' = 1, \quad x > 0$

   d) $y'' + y = 0$

   e) $2y^2y'' + 2y(y')^2 = 1$

   f) $y'' + y(y')^3 = 0$

   Nota: Recuerda que si se toma $v = y'$ entonces la ecuación $y'' = f(x, y')$ se reduce a la ecuación de primer orden $v' = f(x, v)$. Y que la ecuación de la forma $y'' = f(y, y')$, se transforma -tomando $v = \frac{dy}{dx}$- en la ecuación, también de primer orden $v\frac{dv}{dy} = f(y, v)$, pues se tiene que

   $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx} = v\frac{dv}{dy}$$

2. Resolve los problemas siguientes:

   a) $y'y'' = 2, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 2.$

   b) $y'' - 3y^2 = 0, \qquad y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$

   c) $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 3x^{-2} = 0, \qquad x > 0.$

   d) $y'y'' - x = 0, \qquad y(1) = 2,\ y'(1) = 1.$

3. Resuelva encontrando la ecuación (polinomio) característico

   a) $u'' + u' + 4u = 0$ b) $u'' - 5u' + 6u = 0$ c) $u'' + 9u = 0$

   d) $u'' - 2u' = 0$ e) $u'' - 12u = 0$

4. Resuleva por reducción de orden

   a) $u'' - \frac{2(t+1)}{t^2+2t-1}u' + \frac{2}{t^2+2t-1}u = 0 \quad y_1(t) = t + 1$

   b) $(2t + 1)u'' - 4(t + 1)u' + 4u = 0 \quad y_1(t) = t + 1$

5. Resuelva por variación de parámetros

   a) $3u'' + 4u' + u = (sen\, t)e^{-t} \quad y(0) = 1\ y'(0) = 0$

   b) $u'' - 3u' + 2u = \sqrt{t + 1} \quad y(0) = y'(0) = 0$

   c) $u'' + u = tan\ t$

6. Resuelva por coeficientes indeterminados

   a) $u'' - 3u' - 4u = 2t^2$ b) $u'' + u = 9e^{-t}$ c) $u' + u = 4e^{-t}$

   d) $u'' - 4u = cos2t$ e) $u'' + u' + 2u = tsin2t$ f) $u'' - u' = 6 + e^{2t}$

7. Demuestre que si $u = g(t) + ih(t)$ es una solución compleja para la ecuación diferencial $u'' + pu' + qu = 0$, entonces su parte real y parte imaginaria g(t) and h(t), son soluciones reales.

8. Mostrar que si y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación $L[y] = y'' + y^2 = 0$, no necesariamente se sigue que la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución.

9. * La solución de una ecuación de segundo orden de la forma $y'' = f(x, y, y')$ involucrará generalmente dos constantes arbitrarias. Inversamente, dada una familia de funciones que contienen dos constantes arbitrarias puede demostrarse que es la solución de alguna ecuación diferencial de segundo orden. Por eliminación de las constantes c_1 y c_2 entre y, y' y y'', encontra la ecuación diferencial que es satisfecha por cada una de las siguientes familias de funciones.

a) $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$

b) $y = c_1 \cos x + c_2 senx$

c) $y = c_1 + c_2 x$

d) $y = (c_1 + c_2 x)e^x$

10. No es dificil ver que la forma de la ecuación

$$x^2 y'' + bxy' + cy = 0\,, \qquad b,\, c \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

sugiere buscarle soluciones del tipo $\varphi(x) = x^r$, $r \in \mathbb{R}$ (¿Por qué?)

a) Demuestra que si r_1 y r_2 son raices reales y distintas de la ecuación:

$$r(r-1) + br + c = 0\,, \tag{2}$$

entonces

$$\varphi(x) = c_1\,|x|^{r_1} + c_2\,|x|^{r_2}$$

es la solución general de (1).

b) Si $r_1 = \alpha + i\beta$ es una raíz de (2) entonces $r_2 = \overline{r}_1$ (¿Por qué?). Demuestra que en este caso

$$\varphi(x) = |x|^{\alpha}\{c_1 \cos(\ln|x|^{\beta}) + c_2\, sen(\ln|x|^{\beta})\}$$

es la solución general de (1)

c) Halla, aplicando el método de reducción de orden, la solución general de (1), para el caso $r_1 = r_2$.

11. Considera la ecuación

$$y'' + y = 0$$

a) Explica por qué esta ecuación tiene dos únicas soluciones $c(x)$ y $s(x)$ definidas sobre todo $\mathbb{R}$ tq $c(0) = 1$, $c'(0) = 0$, y $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$, respectivamente.

b) Muestra que cualquier otra solución de esta ecuación es de la forma

$$\phi(x) = \alpha c(x) + \beta s(x)\,,$$

en donde $\alpha = \phi(0)$ y $\beta = \phi'(0)$.

c) Prueba, usando la ecuación diferencial que las funciones $c(x)$ y $s(x)$ son infinitamente diferenciables.

d) Halla los desarrollos en serie de Taylor de las funciones $c(x)$ y $s(x)$.

e) Muestra que las funciones $c'(x)$ y $s'(x)$ son también soluciones de la ecuación. Demuestra que $c'(x) = -\,s(x)$ y $s'(x) = c(x)$.

Sugerencia: Aplicar el tma. de Existencia y Unicidad.

f) Muestra que $[c(x)]^2 + [s(x)]^2 = 1$, pt $x \in \mathbb{R}$.

g) Muestra que también las funciones $c(a+x)$ y $s(a+x)$ son soluciones de la ecuación. Prueba que

$$\begin{aligned} c(a+x) &= c(a)c(x) - s(a)s(x) \\ s(a+x) &= s(a)c(x) + c(a)s(x). \end{aligned}$$

h) Imitando e), demuestra que

$$c(-x) = c(x) \quad \text{ y } \quad s(-x) = -s(x)\,.$$

12. Para la ecuación

$$y'' + ay' + by = f(t) \qquad a, b > 0,$$

se tiene que $|f(t)| \leq M$, con $M > 0$, y para todo $t > 0$. ¿Bajo que condiciones tiene a todas sus soluciones acotadas en $(0, \infty)$? Demuestra tus conjeturas.

13. * Para la ecuación

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad 0 < x < \infty, \quad a,\, b > 0$$

se tiene que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \eta$ ($\eta \in \Re$). ¿Cuál es el limite de sus soluciones cuando $x \to \infty$?

14. Considera la ecuación diferencial

$$y'' + by' + cy = 0 \tag{3}$$

con b, $c > 0$. ¿Por qué están definidas sus soluciones en todo $\Re$? Se quiere demostrar que para cualquier solución no-trivial $\varphi(x)$, $x_0 \le x < \infty$, de (3) se tiene que $\varphi(x)$, $\varphi'(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Para ello, considera a la función $V : [x_0, \infty) \to \Re$ dada por

$$V(x) =_{def} \frac{c}{2}\left[\varphi(x)\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varphi'(x)\right]^2$$

a) Muestra: (i) que $V(x) \ge 0$ para todo $x \in [x_0, \infty)$; (ii) que $V(\widetilde{x}_0) = 0$, para $\widetilde{x}_0 \ge x_0$ si y solo si $\varphi(\widetilde{x}_0) = \varphi'(\widetilde{x}_0) = 0$, en cuyo caso $\varphi(x) \equiv 0$ en $[x_0, \infty)$ (¿por qué ?), es decir, $\varphi(x)$ es la solución trivial de (3) (dicho de otro modo, si $\varphi(x)$, $x_0 \le x < \infty$, es una solución no-trivial de (3) entonces no existe $\widetilde{x}_0 \in [x_0, \infty)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_0)$ y $\varphi'(\widetilde{x}_0)$ se anulen simultáneamente).

b) Muestra que $V(x)$, $x_0 \le x < \infty$, es monótona decreciente.

Sugerencia: Establece que $V'(x) = -b\left[\varphi'(x)\right]^2$.

c) Luego, existe $k \ge 0$ tal que $V(x) \to k$ cuando $x \to \infty$. Prueba que $k = 0$.

Sugerencia: Muestra que $V'(x) \le -2bV(x)$, para establecer que

$$0 \le V(x) \le V(x_0)\, e^{-2b\,(x-x_0)}, \qquad x \ge x_0$$

d) Usa c), para concluir que $\varphi(x)$ y $\varphi'(x) \to 0$, cuando $x \to \infty$.

e) En términos físicos este resultado (teorema) es obvio ¿qué modela la ecuación (3)? ¿qué es $V(x)$?

15. * Halla los valores de λ para los cuales el problema

$$\begin{cases} -y'' &= \lambda^2 y \\ y(0) &= y(l), \quad (l > 0) \end{cases}$$

tiene una solución no trivial. Calcula sus soluciones correspondientes.

Demuestra, sin calcular la integral, que

$$\int_0^l sen\frac{n\pi}{l}x \cos\frac{m\pi}{l}x dx = 0, \qquad n \ne m$$

Sugerencia: Si denotamos por $\phi_n(x)$ y $\phi_m(x)$ a las soluciones del problema en cuestión para $\lambda = \dfrac{n\pi}{l}$ y $\lambda = \dfrac{m\pi}{l}$ respectivamente, entonces de

$$-\phi_n''(x) = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\phi_n(x) \quad \text{y} \quad -\phi_m''(x) = \frac{m^2\pi^2}{l^2}\phi_m(x)$$

se sigue que

$$\left(\frac{n^2\pi^2}{l^2} - \frac{m^2\pi^2}{l^2}\right)\phi_n(x)\,\phi_m(x) = \frac{d}{dx}\left\{\phi_n(x)\,\phi_m'(x) - \phi_m(x)\,\phi_n'(x)\right\}$$

En consecuencia,

$$\int_0^l \phi_n(x)\,\phi_m(x)\,dx = 0, \quad \text{si } n \ne m\,.$$

16. Usa la transformación $u = exp\left(\int y(t)dt\right)$ para convertir la ecuación de segundo orden $u'' + p(t)u' + q(t)u = 0$ a la ecuación de *Riccati* $y' + y^2 + p(t)y = q(t)$. Inversamente, muestra que la ecuación de *Riccati* puede ser reducida a la ecuación de segundo orden en u usando la transformación $y = u'/u$. Resuelve la ecuación no autónoma de primer orden de ambas formas

$$y' = -y^2 + \frac{3}{t}y \tag{4}$$