Depto. de Matemáticas
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-1

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 13

Teoría básica de existencia y unicidad

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Mayo de 2015

[1] jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

INDICACIONES. Los ejercicios con asterisco son opcionales.

1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\partial_y f$ existe y es localmente acotada en D.

   a) Demuestra que f es localmente Lipschitz (l-Lips).

   b) Muestra que la función $f(x, y) = x^2\,|y|$ es de Lipschitz (respt. a y) en $D : |x|\,,\, |y| < 1$; y que $\partial_y f$ no existe en todo Ω.

2. Muestra que las hipótesis: (a) $f(x, y)$ continua, y (b) $f(x, y)$ de Lipschitz (con respecto a y), en el teorema de existencia y unicidad de Cauchy-Lipschitz son independientes. Para ello, considera a la función $f(x, y) = [x] + y$, sobre el rectángulo $|x| < a, |y| < b$. Da un ejemplo en donde $f(x, y)$ sea continua y no de Lipschitz.

3. a) Muestra con detalle que el problema de Cauchy:

   $$y' = 3y^{2/3}\,, \qquad\qquad y(0) = 0$$

   tiene una infinidad de soluciones. Dibuja 3 de ellas.

   b) Demuestra que esta ecuación no satisface la condición de Lipschitz en $\mathbb{R} \times I_\delta$, donde $I_\delta : |y| < \delta$, con $\delta > 0$ cualesquiera dada.

4. Halla el intervalo máximo de definición de la solución del problema

   $$\frac{dx}{dt} = (x^2 - 1)/(xt), \quad x(1) = \sqrt{2}/2\,.$$

5. ¿Cuál es el intervalo máximo de definición de la solución $\phi(x)$ del problema de Cauchy:

   $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2} \qquad \text{con} \qquad y(0) = 0\,,$$

   en donde ella es la única solución?

6. * Lo mismo del ejercicio anterior, pero para el problema

   $$\frac{dy}{dx} = \sqrt{|1 - y^2|} \qquad \text{con} \qquad y(0) = 0\,.$$

7. * Demuestra que la solución del problema

   $$\frac{dy}{dx} = 1 + x^4 + y^2\,, \qquad y(0) = y_0\,,$$

   no se puede extender a toda la recta real.

   Sugerencia: Analiza primero el problema

   $$\frac{dy}{dx} = y^2\,, \qquad y(0) = y_0\,.$$

8. Considera la ecuación
$$y' = g(y), \qquad a < y < b \tag{1}$$
Ya antes se ha visto que si $\varphi(x)$ es una solución de (1), entonces $\psi(x) = \varphi(x+c)$ es también una solución de (1) (Pruebalo!). Ahora, bajo el supuesto que $g(y)$ es de Lipschitz, prueba que si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son dos soluciones de (1) que tienen el mismo rango de valores, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(x) = \varphi(x+c)$.

9. Considera la ecuación
$$y' + a(t)y = b(t)\,, \tag{2}$$
en donde $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas y periódicas de periodo $p > 0$.

¿Por qué las soluciones de (2) existen sobre todo $\mathbb{R}$?

a) Sea $\varphi(t)$ una solución no-idénticamente nula de (2). Prueba que $\varphi(t)$ es periódica *ssi* $\varphi(0) = \varphi(p)$.

Sugerencia: Muestra primero que $\psi(t) =_{def} \varphi(t+c)$ es solución de (2). Luego para concluir, aplica el tma. de Existencia y Unicidad.

b) Usando la expresión de la solución general de (2), prueba que si
$$\overline{a} =_{def} \frac{1}{p}\int_0^p a(s)ds \neq 0$$
entonces (2) tiene una única solución periódica de periodo $p > 0$.

c) Demuestra que si $\overline{a} = 0$ entonces (2) tiene soluciones periodicas de periodo $p > 0$ *ssi*
$$\int_o^p e^{A(t)}b(t)dt = 0\,, \qquad \text{donde} \qquad A(t) = \int_a^t a(s)ds$$

d) Para cada una de las ecuaciones siguientes, halla -si las hay- sus soluciones de periodo 2π:
$$\begin{array}{lrcl} i) & \dfrac{dy}{dt} + 3y & = & \cos t \\ ii) & y' + (\cos^2 t)y & = & \cos t \\ iii) & \dfrac{dy}{dt} + (\cos t)\,y & = & sen2t\,. \end{array}$$

10. * Sea f continua y de Lipschitz en $D: -\infty < t < \infty\,, a \leq x \leq b$. Suponiendo que f es periodica en t con periodo $T > 0$, que $f(t,a) > 0$ y que $f(t,b) < 0$. Demuestra que la ecuación $\dot{x} = f(t,x)$ tiene una solución periodica de periodo T. Esto es, si $\varphi(t;0,x_0)$ es la solución del problema de Cauchy
$$\dot{x} = f(t,x), \qquad x(0) = x_0, \qquad (a \leq x_0 \leq b) \tag{3}$$
entonces existe una ${x_0}^* \in (a,b)$ tal que
$$\varphi(t;0,{x_0}^*) \equiv \varphi(t+T,0,{x_0}^*)\,, \qquad \text{para toda} \;\; t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Para ello, desarrolla los incisos siguientes:

a) Explica por qué el problema (3) tiene una única solución $x = \varphi(t; 0, x_0)$ definida en todo $\mathbb{R}$ (en particular en [0,T]), tomando valores entre a y b.

b) Ahora considera a la función $g : [a, b] \to [a, b]$ dada por

$$g(x_0) \equiv \varphi(T; 0, x_0) \tag{5}$$

La cuál claramente está bien definida (¿Por qué?). Explica por qué se tiene que $g(a) > a$ y $g(b) < b$.

c) ¿Qué teorema nos asegura que la función g dada por 5) es continua?

d) Prueba que existe $x_0{}^* \in (a, b)$ tal que $x_0{}^* = g(x_0{}^*)$; i.e., tal que

$$x_0{}^* = \varphi(T; 0, x_0{}^*) \tag{6}$$

Sugerencia: Para tal efecto, puede ser útil demostrar primero el siguiente

Lema. Si $g : [a, b] \to [a, b]$ es continua entonces existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$x_0 = g(x_0)$$

e) Demostrando que la función $\psi(t) \equiv \varphi(t + T; 0, x_0{}^*)$ es solución del problema (3), concluye (4).

11. * Para demostrar el siguiente

Tma. Si $\underset{\sim}{f} : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, locamente de Lipchitz respecto a $\underset{\sim}{y}$ y acotada (i.e., para toda $(t, \underset{\sim}{y}) \in [a, b] \times \mathbb{R}^n$, se tiene que $\| \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \| \leq M$, para alguna $M > 0$), entonces la solución del problema

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}} &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \\ \underset{\sim}{y}(t_0) &= \underset{\sim}{y}_0, \quad a < t_0 < b \end{aligned} \tag{7}$$

tiene una única solución $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ definida sobre todo $[a, b]$.

desarolla los incisos siguientes:

a) Demuestra que si $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ es solución de (7) definida en el intervalo $(c, d) \subset [a, b]$ entonces $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ es acotada en (c, d).

b) Sea $t_n \in (c, d)$, con $t_n \to d$, cuando $n \to \infty$, demuestra que existe $\underset{\sim}{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\underset{\sim}{\varphi}(t_n) \to \underset{\sim}{z}$ (i.e., el $\lim_{t \to d^-} \underset{\sim}{\varphi}(t)$ existe). Análogamente, $\lim_{t \to c^+} \underset{\sim}{\varphi}(t)$ también existe.

Sugerencia: Basta con mostrar que $\|\underset{\sim}{\varphi}(t_{n+k}) - \underset{\sim}{\varphi}(t_n)\| \leq M \mid t_{n+k} - t_n \mid$. (¿Por qué?)

c) Muestra aplicando el tma. de Picard-Lindelöf al problema de Cauchy auxiliar

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}} &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \\ \underset{\sim}{y}(d) &= \underset{\sim}{z} \quad a < t_0 < b \end{aligned}$$

es posible extender la solución $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ de manera única hacia la derecha de d en un tramo $\eta > 0$ (i.e., del intervalo (c, d) al intervalo $(c, d+\eta)$), a menos que $c = d$.

Concluye.

12. Con respecto al modelo clásico de Lotka-Volterra

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(\beta - b\,y) \\ \dot{y} &= y(c\,x - \mu) \end{aligned} \tag{8}$$

con solución de equilibrio no trivial $E_e = (x_e, y_e)$, donde $x_e = \mu/c$ y $y_e = \beta/b$. Si T_a es el periodo de oscilación de la solución $(\chi(t), \nu(t))$ del sistema de L-V (8) con condiciones iniciales $x(0) = a$, $y(0) = y_e$, con $0 < a$, demuestra que el periodo de oscilación $T_a \to \infty$, cuando $a \to 0^+$.

NOTA. Observa que la solucón $(y_e e^{-\mu t}, 0)$, parte del punto $(0, y_e)$ tiende a la solución de equilibrio trivial $E_0 = (0, 0)$, cuando $t \to \infty$.

Comentario: Recuerda que no exite una expresión analítica explícita para el periodo de oscilación T_a como la que hay para el péndulo. Y que éste ya lo hemos calculado numéricamente, observando su crecimiento como la amplitud de oscilación de las soluciones de este sistema (8) crecen.