Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 12

Sistemas Lineales de EDO's en el Plano y Aplicaciones

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante: Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Abril de 2015.

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM
correo: jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

INDICACIONES: Los ejercicios con asterísco son opcionales.

1. * Muestra que las curvas solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = k\,\frac{y}{x}$$

son: (a) curvas parecidas a parabólas verticales con “vértice” en el origen, si $k > 1$; (b) semi-rectas desde el origen, si $k = 1$; (c) curvas que parecen parábolas horizontales con “vértice” en el origen, si $0 < k < 1$; y (d) curvas que parecen hiperbolas cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas, si $k < 0$.

2. Describe el comportamiento geométrico de las curvas solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + \gamma\,.$$

Sugerencia: Observa que la isoclina $\dfrac{dx}{dy} = 0$ está dada por $x + \gamma\, y = 0$ ¿Dónde es cóncava y dónde convexa?

3. * Muestra la familia de cónicas con centro en el origen $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$, son curvas integrales de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ax - by}{bx + cy}$$

el cuál se obtiene, al eliminar la variable independiente “tiempo” t, del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= bx + cy \\ \dot{y} &= -ax - by \end{aligned}$$

¿Cuánto vale $\tau = tr[A]$?
Inversamente, si la traza de la matriz del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}\, x + a_{12}\, y \\ \dot{y} &= a_{21}\, x + a_{22}\, y \end{aligned}$$

es igual a cero (i.e., $a_{11} + a_{22} = 0$), muestra que sus trayectorias solución se mueven sobre una cónica.
Sugerencia: Muestra que las curvas integrales de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}\, x + a_{22}\, y}{a_{11}\, x + a_{12}\, y}$$

están dadas por $-a_{21}x^2 + 2a_{11}xy + a_{12}y^2 = c$.

4. Considera a la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx + ay}{ax - by} \tag{1}$$

que se obtiene de eliminar la variable independiente t en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by \\ \dot{y} &= bx + ay \end{aligned} \tag{2}$$

¿Cuánto vale su discriminante? ¿Admite la ecuación (1) curvas integrales de la forma $y = mx$, $x \neq 0$?

a) Muestra que las curvas integrales de la ecuación (1) están dadas por

$$\gamma \arctan(y/x) = \ln(k\sqrt{x^2 + y^2})\,, \qquad \gamma = \frac{a}{b} \tag{3}$$

donde k es una constante de integración.

b) Muestra que la ecuación (3) en coordenadas polares toma la forma

$$r = ce^{\gamma\theta}, \qquad c = k^{-1} \tag{4}$$

¿De qué tipo es la solución de equilibrio del sistema (2)? Considera todos los casos posibles.

Sugerencia: Observa que $Tr[A] = 2a$.

c) Otra forma de obtener que las curvas integrales de la ecuación (1) están dadas por (4), es la siguiente. Muestra que en coordenadas polares, la ecuación (1) toma la forma

$$\frac{dr}{d\theta} = \gamma\, r$$

cuya solución general está dada, precisamente, por la ecuación (4).

5. El sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

al eliminar la variable “tiempo” t, da lugar a la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{6}$$

la que a su vez, mediante el cambio de variable $x\,z(x) = y(x)$, se puede rescribir como

$$x\frac{dz}{dx} = h(z) - z, \qquad \text{donde} \qquad h(z) = \frac{a_{21} + a_{22}z}{a_{11} + a_{12}z} \tag{7}$$

a) Si $h(z) \equiv z$, explica porque la solución general de la ecuación (7) está dada por $z = k$, para $x \neq 0$. O equivalentemente, que la solución general de la ecuación (6) está dada por $y = kx$, para $x \neq 0$.

b) Muestra que $m \in \mathbb{R}$ es un punto fijo de $h(z)$ (i.e., $m \in \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación $h(z) - z = 0$) ssi m es raíz del *polinomio discriminante*

$$q_*(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21} \tag{8}$$

y que si Δ_q es el discriminante de la ecuación cuadrática $q_*(z) = 0$, entonces

$$\Delta_q = \Delta(A)\,(\equiv [Tr(A)]^2 - 4Dt(A)\,) \tag{9}$$

donde A es la matriz del sistema (5)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{10}$$

c) Claramente, si $\Delta > 0$, entonces el polinomio discrinante (8) tiene dos raíces reales $m_1 < m_2$. Muestra que las semi-rectas $y = m_1x$ y $y = m_2x,\ x \neq 0$, son curvas integrales de la ecuación (6).

Sugerencia: ¿A qué corresponden para la ecuación homogénea (6), las soluciones constante de la ecuación en variables separadas (7)?

d) Muestra que

$$h'(z) = \frac{Dt(A)}{(a_{11} + a_{12}z)^2} \tag{11}$$

donde $Dt(A)$ denota el determinante de la matriz A dada en (10).

e) Haciendo uso de la siguiente

Proposición Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $m \in \mathbb{R}$ *tq* $h(m) = m$

a) Si $h'(m) < 1$ entonces ninguna solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x}) \tag{12}$$

es tangente en $(0, 0)$ a la solución $y = mx$.

b) Si $h'(m) > 1$ entonces existe una infinidad de soluciones de (12) tangentes en el origen a la solución $y = mx$.

Demuestra las siguientes afirmaciones

Afm 1. Si $Dt(A) > 0$ y $Tr(A)(\equiv a_{11} + a_{22}) < 0$ entonces las curvas integrales de la ecuación homogénea (6) son tangentes en el origen a las semi-rectas integrales $y = m_2x,\ x \neq 0$.

Sugerencia: (i) Considera a (9);

(ii) Muestra que $\lambda_1 = a_{11} + a_{12}m_1$ y que $\lambda_2 = a_{11} + a_{12}m_2$, donde $\lambda_1 < \lambda_2$ son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(a)\lambda + Dt(A)$ asociado a la matriz (10).

Afm 2. Si $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) > 0$ entonces las curvas integrales de la ecuación (6) son tangentes en el origen a las semi-rectas integrales $y = m_1x,\ x \neq 0$.

Afm 3. Si $Dt(A) < 0$ entonces no hay curva integral de la ecuación (6) que sea tangente en el origen a las soluciones $y = m_1x, y = m_2x,\ x \neq 0$.

6. * Describe el comportamiento geométrico de las trayectorias solución alrededor de la solución de equilibrio para cada uno de los sistemas siguientes

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases} \qquad \text{(b)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases} \qquad \text{(d)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 \\ \dot{x}_2 = -x_2 \end{cases} \qquad \text{(f)} \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 \end{cases} {}^{(*)}$$

(*). Transcribe el sistema en coordenadas polares.

7. * Con el sólo cálculo de $\delta = Dt(A)$, $\tau = Tr(A)$ y $\Delta = \tau^2 - 4\delta$ (discriminante de A), determina el tipo de la solución de equilibrio (punto silla, nodo, foco ó centro) del sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, donde

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(d)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(e)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(f)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\text{(g)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{(h)} \ A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(i)} \ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Describe su estabilidad. ¿Cuáles de ellos son genéricos?

8. Describe, con cierto detalle, el compotamiento de las trayectorias solución alrededor de la solución de equilibrio, para cada uno de los sistemas del ejercicio anterior.

9. El modelo matemático del sistema mecánico consistente de un objeto de masa m atado a un resorte con constante de Hooke k y con resistencia del medio proporcional a su velocidad (con constante de proporcionalidad ν), el cuál se mueve sobre una línea recta horizontal está dado por la ecuación diferencial

$$mx'' + \nu x' + kx = 0$$

a) Lleva esta ecuación a un sistema de ecuaciones lineales de primer orden en el plano. ¿Cuál es su solución de equilibrio? ¿De qué tipo es?

b) En cualquier caso, muestra que la solución de equilibrio de este sistema es siempre estable. Interpreta físicamente.