Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 11

Tema: Ecuaciones Exactas

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudantes: Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Abril de 2015.

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM
correo: jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

INDICACIONES. Los ejercicios con asterisco son opcionales.

1. ¿Son exactas las ecuaciones siguientes? integrarlas:

   a) $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0\,,$

   b) $\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0\,,$

   c) $\dfrac{2xdx}{y^3} + \dfrac{(y^2 - 3x^2)\,dy}{y^4} = 0\,,$ con $\quad y(1) = 1$

   d) $(\operatorname{sen} xy + xy \cos xy)\,dx + x^2 \cos xy\,dy = 0$

   Solución: $x \operatorname{sen} xy = c\,.$

2. Integra las ecuaciones siguientes hallando un factor integrante del tipo:

$$\mu(t),\ \mu(x+t),\ \mu(x^2+t^2),\ \mu(x^2-t^2).$$

   a) $(x + t^2)dx + (t - tx)dt = 0$

   b) $(2tx^2 - x)dt + (x^2 + t + x)dx = 0$

   c) $\dfrac{1}{t}dx - \dfrac{x}{t^2}dt = 0$

   d) $(t - x)dt + (2x - t)dx = 0\,, \qquad x(0) = 0.$

   e) $(x^2 + y)dx - xdy = 0$

3. Demuestra que toda ecuación de variables separadas es una ecuación exacta.

4. Muestra que si M y N en la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ son funciones homogéneas del mismo orden entonces la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ admite a $\mu(x,y) = 1/(xM + yN)$ como factor de integrante. E inversamente, si $\mu(x,y) = 1/(xM + yN)$ es un factor integrante de la ecuación $Mdx + Ndy = 0$, entonces la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

   es homogénea.

   Resuelve la ecuación $(x^2 + y^2 - xy)dx + x^2dy = 0.$

5. * Demuestra que la ecuación $y' = f(x,y)$ escrita en la forma $f(x,y)dx - dy = 0$ tiene un factor integrante $\mu(x,y) \equiv \phi(x)$, sí y sólo si $f(x,y)$ es lineal en y. O sea que, $f(x,y) = a(x)y + b(x)$.

6. Para la construcción de una tabla de factores integrantes, desarrolla los incisos siguientes:

   a) Muestra que si $a = (\partial_y M - \partial_x N)/N$ es una función que depende sólo de x entonces $\mu(x) = \exp(\int^x a(s)ds)$ es un factor de integrante de la ecuación $Mdx + Ndy = 0$.

b) Muestra que si $a = (\partial_x N - \partial_y M)/M$ es una función que depende sólo de y entonces $\mu(y) = \exp(\int^y a(s)ds)$ es un factor integrante de la ecuación $Mdx + Ndy = 0$.

c) Halla el factor integrante de la ecuación $Mdx + Ndy = 0$, si se tiene que $a = (\partial_x N - \partial_y M)/(xM - yN)$ depende solamente de $z = xy$.

d) ¿Bajo qué condiciones admite la ecuación $Mdx + Ndy = 0$ un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \phi(z)$ con $z = x^2 + y^2$?

e) Lo mismo que en (d), para $z = x^2 - y^2$.

7. Si $Mdx+Ndy = 0$ es una ecuación diferencial exacta, muestra que sus curvas integrales están dadas por $u(x, y) = c$, c constante, donde

$$u(x, y) = \int_0^1 [xM(tx, ty) + yN(tx, ty)]\, dt\,.$$

¿Cuál es la curva más corta entre el origen de coordenadas y un punto cualquiera $P = (x, y)$ del plano dado?

Resuelve la ecuación $(x + y^2)dx + 2xy\, dy = 0$.

8. Si $u(x, y) = c$ es una curva integral general de $Mdx + Ndy = 0$ y φ es una función diferenciable, prueba que $(\varphi \circ u)(x, y) = c$, es también una curva integral de esta ecuación.

9. * Si $u(x, y) = c$ y $v(x, y) = k$ son dos curvas integrales de la ecuación $Mdx+Ndy = 0$, demuestra que u y v son funciones dependientes (i.e., existe φ diferenciable tal que $v = \varphi \circ u$.

Sugerencia. Para ello, prueba primero que si $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 0$, para todo (x, y) en un cierto dominio D, entonces u y v son funciones dependientes sobre D (Véase el tma. de la función inversa en el libro clásico de Cálculo -v. 2- de R. Courant).

10. * Si $\mu(x, y)$ y $\nu(x, y)$ son dos factores integrantes para la ecuación diferencial $Mdx + Ndy = 0$, cuyo cociente no se reduce a una constante, prueba que $u = c$, donde $u = \mu/\nu$, es una curva integral general de dicha ecuación diferencial.