Depto. de Matemáticas
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 10
La ecuación $y' = f(y/x)$

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Abril de 2015

[1]jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

Los ejercicios con asterisco son opcionales.

1. Contesta las preguntas siguiente:

   (i) ¿Qué son las isoclinas de la ecuación homogénea $y' = h(y/x)$?

   (ii) ¿Cuándo una isoclina es una curva integral de la ecuación $y' = h(y/x)$?

   (iii) ¿Que procedimientos conoces para lleva la ecuación homogénea a una de variables separadas?

   (iv) ¿Cómo se puede llevar una ecuación homogénea a una lineal homogénea?

2. ¿Cómo son las siguientes ecuaciones, homogéneas o no-homogéneas? resolverlas:

a) $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$	*b*) $4xy^2dx + (3x^2y - 1)dy = 0$
c) $y' = \frac{2xy}{3x^2-y^2}$	*d*) $(2x - 4y)dx + (x + y - 3)dy = 0$
e) $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$	*f*) $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$
g) $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$	*h*) $y\, cos\, x\, dx + (2y - senx)dy = 0$
i) $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$	*j*) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$

3. * [Gou] Considera a la ecuación diferencial homogénea

$$\frac{dy}{dx} = h(y/x) \tag{1}$$

a) Muestra que si c es un punto fijo de $h(z)$ (i.e., $c = h(c)$) entonces $y = c\,x$ es una curva integral de la ecuación $dy/dx = h(y/x)$, que es invariante bajo homotécias (i.e., bajo las transformaciones $T_k(x, y) = (kx, ky)\,, k \neq 0$).

b) Demuestra que su curva integral general $\varphi(x, y; c) = 0$ define una familia de curvas homotéticas con respecto al origen (i.e., $\varphi(kx, ky; c) \equiv \varphi(x, y; d)\,, k \neq 0$, para alguna $d \in \mathbb{R}$; dicho de otro modo, dadas una trasformación homotética $T_k(x, y) = (kx, ky)$ y la expresión $\varphi(x, y; c)$, se tiene que $\varphi_c \circ T_k = \varphi_d$, para alguna $d \in \mathbb{R}$).
Sugerencia: Usando el cambio de variable de Liebnitz $z = y/x$, la ecuación (1) se tranforma en la ecuación de variables separadas:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{h(z) - z}$$

Luego, integrando, muestra que la integral general de la ecuación homogénea (1) es de la forma

$$x = c\psi(y/x) \tag{2}$$

donde $\psi(z)$ es continuamente diferenciable y $c \in \mathbb{R}$ una constante de integración.

c) Inversamente, dada una familia de curvas homotéticas con respecto al origen, de la forma $x = c\psi(y/x)$, con $\psi(z)$ continuamente diferenciable, demuestra que su correspondiente ecuación diferencial es una ecuación homogénea.

Nota. Esto es, a priori, evidente. Pues, dadas dos curvas integrales cualesquiera, homotéticas con respecto al origen, ellas son necesariamente paralelas a lo largo de semi-rectas que salen del origen (que son precisamente las isoclinas de una ecuación homogénea). Por tanto, sus pendientes (direcciones) dependen sólo de y/x (i.e., $y' = h(y/x)$).

4. No es trivial resolver por cuadraturas las ecuaciones siguientes:

$$i)\quad x\frac{dy}{dx} = \left(4x^2 - y^2\right)^{1/2} \quad x > 0 \quad ii)\quad \frac{dy}{dx} = e^{y/x} \quad y > 0$$

Sin embargo, no es dificil describir el comportamiento cualitativo de sus soluciones. *Sugerencia*: Haga $z(x) = y(x)/x$

5. Muestra que, mediante la sustitución $z(x) = x + y(x)$, la ecuación diferencial $y' = h(x + y)$ se reduce a una ecuación de variables separables. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{llll} a) & y' = (x+y)^2 & b) & y' = (4x-y)^2 \\ c) & y' = sen(x-y) & d) & y' = 2\sqrt{2x+y+1} \end{array}$$

6. Considere la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{3}$$

con

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Si h, k son tales que

$$\begin{aligned} a_1h + b_1k + c_1 &= 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

demuestra que la ecuación (3) se transforma en la ecuación homogénea

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a_1\xi + b_1\eta}{a_1\xi + b_2\eta}\right)$$

bajo el cambio de variables $x = \xi + h$, $y = \eta + k$.
Resuelve la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y - 2}{-x + y - 4}$$

Nota: La solución es $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = c$

7. * En la busqueda de condiciones necesarias y suficientes para que las curvas integrales de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x}) \tag{4}$$

representen curvas cerradas alrededor del origen, desarrolla los incisos siguientes:

a) Muestra que la ecuación (4), en coordenadas polares, se transforma en la ecuación (en variables separadas) lineal

$$\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)\, r \tag{5}$$

en donde

$$a(\theta) = \frac{\cos\theta \, + sen\,\theta\, f(\tan\,\theta)}{\cos\,\theta\, f(\tan\,\theta) - sen\,\theta} \tag{6}$$

Sugerencia: Deriva, con respecto a θ, a la identidad $r^2 = x^2 + y^2$.

b) Rescribiendo (6) como

$$a(\theta) = \frac{1 + \tan\,\theta\, f(\tan\,\theta)}{f(\tan\,\theta) - \tan\,\theta}$$

Demuestra que si $f(\tan\,\theta_0) = \tan\,\theta_0$, para algúna θ_0, entonces $y = kx$ con $k = \tan\theta_0$, es una solución de la ecuación original (4). Esto es, si el denominador de $a(\theta)$ se anula para algun valor de θ entonces la ecuación (4) no puede tener curvas integrales cerradas alrededor del origen.

c) Demuestra que si $a(\theta) \equiv 0$ entonces $r = cte$ es la solución general de la ecuación (5); y con ello, de (4). Más aún, que la ecuación (4) se reduce a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

d) Del inciso (a) se sigue que la ecuación (4) tiene curvas integrales cerradas *ssi* la ecuación (5) tiene soluciones periódicas. **Concluye**.
Sugerencia: Recurre al ejercicio 5 de la tarea 5.

e) Más aún, bajo el supuesto que $f(z) \neq z, \;\; pt \;\; z$, sea

$$\overline{a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\theta)\, d\theta$$

Prueba que si $\overline{a} < 0$ entonces las soluciones de (4) tienden a 0 cuando $\theta \to \infty$, y que si $\overline{a} > 0$ entonces tales soluciones tienden a ∞ cuando $\theta \to \infty$.

8. * [Sot] Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $m \in \mathbb{R}$ punto fijo de $h(z)$ (i.e., $f(m) = m$). Demuestra que

   a) Si $h'(m) < 1$ entonces ninguna solución de la ecuación

   $$\frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x}) \tag{7}$$

   es tangente en $(0, 0)$ a la solución $y = mx$.

   b) Si $h'(m) > 1$ entonces existe una infinidad de soluciones de (7) tangentes en el origen a la solución $y = mx$.
   NOTA. Dos funciones φ y ψ definidas para $x > 0$, se dice que son tangentes en el origen si

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{x} = 0$$

9. ¿Cuál es la forma de un espejo cuyos rayos de luz incidentes paralelos al eje de las abscisas en el plano cartesiano se reflejan pasando por un mismo punto (digamos, el origen de coordenadas)?

Referencias

[Gou] Goursat, É., *Cours DÁnalyse Matehemátique*, Tome II, Gauthier-Villars 1925, Jacques Gabay 1992.

[Sot] Sotomayor, J., *Liçoes Equaçoes Diferenciais Ordinárias*, IMPA, 19??.