Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 9

Tema: Modelo de Lotka-Volterra

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante: Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Abril de 2015.

[1] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM
correo: jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

1. Encuentre todas las soluciones (se recomienda que estás la resuelvan todos de manera individual) y gratifique tanto el campo direccional, como las distintas soluciones que tenga una cada una de ellas usando Matlab Maple o Mathematica.

$$a)\ xy\frac{dy}{dx} = (1-y^2)(1+x^2) \qquad\qquad b)\ y' = -\frac{1}{x}y + x$$

2. Considera al modelo de Lotka-Volterra

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y(\beta\, x - \mu) \\ \frac{dx}{dt} &= x(\alpha - \nu\, y) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

donde $x(t)$ denota el tamaño de la población de los peces chicos y $y(t)$ denota el de los peces grandes

A) Utilizando Maple, Mathematica o Matlab, dibuja el plano de fases para el modelo.

B) ¿Cuáles son sus soluciones constante ó de equilibrio?

C) Eliminamdo la variable independiente entre las ecuaciones del sistema (1), se obtiene la ecuación en variables separadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(\alpha - \nu\, y)}\,\frac{(\beta\, x - \mu)}{x} \tag{2}$$

Muestra que las isoclinas $\mathcal{C}_m : \ y' = m$ son hipérbolas equilateras con asíntotas paralelas a los ejes de coordenadas:

$$x = \frac{\mu}{\beta + m\nu}\,, \qquad y = \frac{\alpha m}{\beta + m\nu} \tag{3}$$

que pasan por los estados de equilibrio $E_0 = (0,0)$ y $E_e = (x_e, y_e)$.
Sugerencia: Muestra que la isoclina $y' \equiv m$ está dada por

$$\mathcal{C}_m : \ (\beta + m\nu)xy - \alpha m x - \mu y = 0$$

ó sea por

$$\mathcal{C}_m : \ (x - x_m)(y - y_m) = x_m y_m \tag{4}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} x_m &= \frac{\mu}{\beta + m\nu} \\ y_m &= \frac{\alpha m}{\beta + m\nu} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ecuación que con el cambio de coordenadas $\xi = x - x_m$ y $\eta = y - y_m$ se transforma en $\xi\eta = x_m y_m$.

D) Para el caso particular $\alpha = 2, \nu = 1, \beta = 1$ y $\mu = 3$, dibuja las isoclinas para $m = 0, \pm\infty, \pm 1/2, \pm 1$ y ± 2. A continuación traza algunas curvas integrales de la ecuación (2).

E) Muestra que las trayectorias solución $\gamma : \ (x(t), y(t))$ del sistema (1), se mueven a lo largo de curvas $V(x,y) = C$, con C constante donde $V(x,y)$ está dada por

$$V(x,y) = [\beta(x - x_e) - \mu \ln \frac{x}{x_e}] + [\nu(y - y_e) - \alpha \ln \frac{y}{y_e}] \tag{6}$$

donde $(x_e, y_e) = (\dfrac{\mu}{\beta}, \dfrac{\alpha}{\nu})$ es la solución de equilibrio no-trivial del sistema.

Sugerencia. Muestra que $\frac{d}{dt}V(t) \equiv 0$, para $V(t) =_{def} V(x(t), y(t))$.

F) Muestra que: $V(x,y) > 0$, para todo $(x,y) \in D$ con $(x,y) \neq (x_e, y_e)$, donde $D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0\}$. Y que si $V(x^*, y^*) = 0$, para algún $(x^*, y^*) \in D$, entonces $(x^*, y^*) = (x_e, y_e)$.

G) Muestra que las curvas de nivel de la función $z = V(x,y)$, en el primer cuadrante del plano y vs x, son curvas cerradas alrededor del punto de equilibrio $E_e = (x_e, y_e)$.
Sugerencia: Para ello es conveniente describir primero la gráfica de la función:

$$\psi(z) = \beta(z - z_e) - \mu \ln(\frac{z}{z_e})$$

H) Con la introducción de las variables $\xi(t) = x(t) - x_e$ y $\eta(t) = y(t) - y_e$, con $0 \leq \xi(t), \eta(t) \ll 1$, muestra que el sistema (1), después de despreciar los términos cuadráticos, se reduce a

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= b\,\xi, \qquad b = \beta\, x_e\,, \\ \frac{d\xi}{dt} &= -c\,\eta, \qquad c = \nu\, y_e\,, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

¿A qué corresponde la solución de equilibrio $(\xi, \eta) = (0, 0)$?

I) Demuestra que el periodo de oscilación T de una trayectoria solución $\gamma : (\xi(t), \eta(t))$, alrededor de una vecindad de la solución de equilibrio $E_e = (x_e, y_e)$ del sistema (1), está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{bc}}$$

ó sea por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\mu}} \tag{8}$$

Este resultado es debido a Lotka. Interpreta.

¿Cuál es el valor de T para el caso particular dado en (b)? Corrobora tu resultado con el dado por el program *Lpriodo.m*, el cuál calcula el valor de T según el tma. de Lotka y que aparece en la subcarpeta $< LotkaVolterra >$ de la carpeta $< software >$ en la página del curso.

Comenta.

J) Hasta ahora ha sido posible dar una aproximación del periodo de oscilación T para aquellas trayectorias del sistema de Lotka-Volterra (1), que se mueven en una vecindad de la solución de equilibrio $(x_e, y_e) = (\mu/\beta, \alpha/\nu)$. Y no se ve fácil cómo dar una expresión analítica para el periodo de oscilación de las trayectorias solución γ de este sistema, como se puede hacer con el oscilador armónico y el péndulo. Pues, aún cuando teóricamente es posible escribir (localmente) a y en función de x, o bien a x en función de y (¿Por qué?), no se ve cómo despejar explícitamente en (6) a y en función de x, y viceversa. Sin embargo, es posible el cálculo numérico del periodo T de oscilación de cualquier trayectoria solución con base en los programas escritos en MATLAB que aparecen en la página del curso en la carpeta LotkaVolterra ¿Cuál es el valor del periodo T para $(x_0, y_0) = (3, 2.05), = (3, 2.25), = (3, 3.5)$ y $(3, 4.5)$?

Comenta.

3. (Proyecto) Considera el sistema depredador-presa con recursos limitados para la presa, digamos que la población presa se rige por el modelo logístico, en ausencia de la población depredador. Esto es por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = \beta x(1 - \frac{x}{K}) \tag{9}$$

donde $K = \beta/\nu$, siendo β la tasa per capita de crecimiento, ν la tasa de muerte y K la población de saturación que soporta el medio.

a) ¿Cuáles son ahora las ecuaciones del modelo Lotka-Volterra, digamos Logístico (LV-Log) en estas nuevas condiciones?

b) Muestra que los estados de equilibrio del modelo (LV-Log), en ausencia de depredadores (i.e., $y(t) \equiv 0$) son $E_0 = (0, 0)$ y $E_K = (K, 0)$.

c) Muestra que si $y_e \neq 0$ en las ecuaciones $\dot{x} = 0 = \dot{y}$ entonces el estado de equilibrio no-trivial $E_e = (x_e, y_e)$, es admisible ssi $x_e \leq K$ ¿Qué es x_e y qué y_e?

d) Muestra que la isoclina $\dot{x} = 0$ (i.e., donde las trayectorias solución del modelo (LV-Log) cortan verticalmete a tal isoclina) está constituida por el semi-eje positivo de las ordenadas y una recta de la forma

$$y = p(1 - \frac{x}{K})$$

¿Qué es p?

e) Muesta que la isoclina $\dot{y} = 0$ (i.e., donde las trayectorias solución del modelo (LV-Log) cortan horizontalmente a tal isoclina) está formado por el semi-eje positivo de las abscisas y la recta vertical $x = x_e$.

f) Dibuja los diagramas del espacio de fases para los casos $x_e \geq K$ y $x_e < K$.

¿Cuáles son tus conjeturas?