Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 8
Movimiento Armónico y Péndulo

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante: Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Abril de 2015

[1] Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM
jele@matematicas.unam.mx

Ejercicios

INDICACIONES. Los ejercicios e incisos con asterisco son opcionales.

Movimiento armónico simple

1. Recordando que aplicando la segunda ley de Newton, bajo el supuesto que no hay resistencia del medio, se obtiene la ecuación diferencial

$$m\ \ddot{x} + k\,x = 0 \tag{1}$$

que gobierna el movimiento (a lo largo de una línea recta sobre una superficie plana) de un cuerpo de masa m sujeto a un resorte con constante de Hooke k fijado a una pared.

a) * Muestra que mediante la introdución de la varible $v = \dot{x}$, la ecuación (1) se transforma en el sistema de ecuaciones

$$\dot{x} = v\,, \quad m\,\dot{v} = -k\,x \tag{2}$$

b) Recordando que el periodo de oscilación de las trayectorias solución del sistema (2) está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Para el caso $m = \frac{1}{4}k$, se tiene que $T = \pi$.
El periodo de oscilación de la trayectoria solución del sistema (2), para $m = \frac{1}{4}k$, y con condiciones iniciales $x(0) = 0, v(0) = 3$, se puede calcular numéricamente con el programa en Matlab siguiente

```
opts = odeset(évents’,@g);
v = 3
y0=[0; v];
[t,y,tfinal]=ode45(@fmas,[0 Inf], y0, opts);
periodo=4*tfinal
plot(t,y(:,2),’-’,[0 tfinal],[0 v],ó’)
axis([-.1 tfinal+.1 -.1 3.1])
xlabel(’t’)
ylabel(’y’)
title(’Mov arm simple’)
text(1.2, 0, [’tfinal= ñum2str(tfinal)])
```

el cuál hecha mano de las funciones siguientes

```
function [gstop, isterminal, directional]=g(t,y)
gstop=y(2);
isterminal=1;
directional=[];
```

—— Función de tiempo de salida
function ydot=fmas(t,y)

—— Ecuaciones del movimiento armónico simple con m=k/4
ydot=[y(2); -4*y(1)];

Corre el programa para varios valores de la variable "v", segunda línea del primer programa.

2. Se tiene un tubo de sección constante A y en forma de U, abierto a la atmósfera. El tubo está lleno hasta un cierto nivel con un líquido incompresible que fluye a través del tubo con un rozamiento despreciable. La longitud total de la columna de líquido es L. Demuestre que si se hace descender la superficie del líquido en uno de los brazos de la U y luego se deja libre, el nivel del fluido oscilará armónicamente alrededor de su posición de equilibrio con un periodo dado por $T = 2\pi L/2g$.

3. Un reloj *de antes* se basa en un péndulo de longitud de $1m$. Si el reloj se atrasa 1 segundo por día, en cuánto propones que se debe corregir la longitud del péndulo.

4. * Un péndulo simple de 50 cm de largo cuelga del techo de un vagón que se acelera a $7m/s^2$ en dirección horizontal. Encuentre el periodo del péndulo para pequeñas oscilaciones en torno a su posición de equilibrio. Recuerda justificar tu respuesta.

Péndulo

5. Aplicando la segunda ley de Newton y la Ley de Gravitación Universal, bajo el supuesto que no hay resistencia del medio, se obtiene la ecuación diferencial que gobierna el movimiento del péndulo de longitud $l > 0$:

$$l\,\ddot{\theta} + g\ sen\,\theta = 0 \tag{3}$$

donde g es la aceleración de la gravedad y $\theta = \theta(t)$ es el ángulo que forma el péndulo con la vertical en el tiempo t.

a)* Explica por qué, si $|\theta(t)| \leq A << 1$, entonces la ecuación (3) se puede reescribir como:

$$l\,\ddot{\theta} + g\,\theta = 0, \tag{4}$$

Y muestra, mediante la introducción de la variable $\omega = \dot{\theta}$, que la ecuación (4) es equivalente al sistema de ecuaciones

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \quad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{l}{g}\,\theta \tag{5}$$

¿Cuáles son las soluciones de equilibrio del sistema (5)?

b)* Muestra qué la energía total $E(t) = \frac{g}{2}[\theta(t)]^2 + \frac{l}{2}[\omega(t)]^2$ (energía potencial más energía cinética) del sistema (5) es constante a lo largo de sus trayectorias solución $\gamma : (\theta(t), \omega(t))$.

Sugerencia. Si $E(t) \equiv E(\theta(t), \omega(t))$ denota a la energía total del sistema (5) a lo largo de una de sus trayectorias solución $\gamma : (\theta(t), \omega(t))$, demuestra que $\frac{dE(t)}{dt} = 0$.

c)* Demuestra que si $\gamma : (\theta(t), \omega(t))$ es una solución del sistema (5) con $\theta(t_0) = \theta_0$ y $\omega(t_0) = \omega_0$ entonces se mueve a lo largo de la elipse

$$g\,\theta^2 + l\,\omega^2 = 2E, \qquad \text{con} \qquad 2E = g\,\theta_0^2 + l\,\omega_0^2 \tag{6}$$

¿cuáles son los semi-ejes de esta elipse?

d)* Muestra que $|\theta(t)| \leq \sqrt{\frac{2E}{g}}$, y que $|\omega(t)| \leq \sqrt{\frac{2E}{l}}$.

e) ¿Cuánto vale $\omega(t)$, cuando $|\theta(t)| = \sqrt{\frac{2E}{g}}$?, y ¿Cuánto vale $\theta(t)$ cuando $|\omega(t)| = \sqrt{\frac{2E}{l}}$? Explica.

f)* Muestra que el periodo T de oscilación del péndulo de oscilaciones pequeñas está dado por

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{7}$$

Sugerencia. Despeja ω de (6) y sustituye el resultado en la primera ecuación de (5).

g)* Introduciendo la variable $\omega = \dot{\theta}$, muestra que la ecuación (3) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\tfrac{g}{l}\, sen\theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \tag{8}$$

¿Cuáles son las soluciones de equilibrio de este sistema?
A continuación muestra que eliminando el tiempo e integrando desde el punto de equilibrio trivial $E_0 = (0, 0)$ a un punto (θ, ω) se obtiene la *primera integral de movimiento*:

$$g(1 - \cos\theta) + \frac{l}{2}\omega^2 = E, \quad \text{con} \quad E \geq 0\,. \tag{9}$$

¿A qué evolución del sistema corresponde el caso $E = 0$?

h) Bosqueja la gráfica (en $\mathbb{R}^3$) de la función $z = E(\theta, \omega)$ donde

$$E(\theta, \omega) \equiv g(1 - \cos\theta) + \frac{l}{2}\omega^2 \tag{10}$$

Para ello, muestra: (i) que $E(\theta, \omega) > 0$, para todo punto $(\theta, \omega) \neq E_0$; y que si $E(\theta, \omega) = 0$ entonces $(\theta, \omega) = (0, 0)$; (ii) que sus curvas de nivel (9) definen curvas simétricas respecto a los ejes de coordenadas θ y ω; (iii) que los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$ son puntos sillas de $z = E(\theta, \omega)$; Y, (iv) que las curvas de nivel (9) son curvas cerradas, si $0 \leq E < 2g$.

Sugerencia. Para (iv), usa 9), para mostrar que existe una única $0 < A < \pi$, tal que $|\,\theta(t)| \leq A$. Más aún, que $|\,\theta(t)| = A$ ssi $\omega(t) = 0$. A continuación, observando que

$E = g(1 - cos\, A)$ es el valor de la energía de la integral de movimiento que pasa por el punto $(A, 0)$, muestra que (9) se puede reescribir como

$$-\,2\,g(\cos\theta - \cos A) + l\,\omega^2 = 0 \tag{11}$$

Finalmente, verifica que $|\omega(t)| \leq [\frac{2g}{l}(1 - \cos A)]^{1/2}$.

i)* Si $\gamma\,:\,(\theta(t), \omega(t))$ es una trayectoria solución del sistema (8) entonces la función

$$E(t) \equiv E(\theta(t), \omega(t))$$

es constante respecto a t. Lo que dice que las trayectorias solución del sistema (8) se mueven sobre las curvas de nivel de la función $z = E(\theta, \omega)$.

j) Si $E(\theta, \omega) = \alpha g$, $\alpha > 0$, es la curva de nivel de $z = E(\theta, \omega)$ sobre la cual se mueve la trayectoria solución $\gamma\,:\,(\theta(t), \omega(t))$ del sistema (8), muestra que

$$\left[\dot{\theta}\right]^2 + [\dot{\omega}]^2 \geq 2\frac{\alpha g}{l} > 0$$

Sugerencia: Claramente:

$$\left[\dot{\theta}\right]^2 + [\dot{\omega}]^2 = \omega^2 + \frac{g^2}{l^2} sen\,\theta$$

Así, despejando ω en $E(\theta, \omega) = \alpha g$, y sustituyendo en la anterior expresión, verifica que

$$\left[\dot{\theta}\right]^2 + [\dot{\omega}]^2 = 2\frac{\alpha g}{l} + \frac{g}{l}\left[2(cos\,\theta - 1) + \frac{g}{l} sen^2\theta\right]$$

para concluir que las trayectorias solución $\gamma\,:\,(\theta(t), \omega(t))$ del sistema (8) son funciones periodicas.

k)* Usando (11), deduce que el periodo de oscilación del péndulo está dado por

$$T_A = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^A \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos A)}} \tag{12}$$

Sugerencia: Despejando ω de la ecuación (11) y sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (8), se obtiene que

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos A)}}$$

l) Prueba que T_A dado por (12) se puede reescribir como

$$T_k = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\phi}}\,, \qquad k = sen(\frac{A}{2}) \tag{13}$$

¿A qué se reduce esta expresión para $0 < A << 1$?

Sugerencia. Toma el cambio de variables de θ a ϕ, dada por la relación $sen(\frac{\theta}{2}) = k\, sen\phi\,.$

m) La integral que aparece en (13) es *imposible* (i.e., no tiene primitiva en términos de funciones elementales del Cálculo). Esta integral es una *integral elíptica de segundo genero*. Sin embargo, muestra que es posible calcular el valor de T_k, mediante el desarrollo en serie

$$T_k = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \frac{25}{256}k^6 + ...) \tag{14}$$

Sugerencia: Usando el teorema del binomio de Newton, muestra que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\phi}} = 1 + \frac{1}{2}k^2 sen^2\phi + \frac{3}{8}k^4 sen^4\phi + \frac{5}{16}k^6 sen^6\phi + ...$$

Para el caso $A = \frac{2}{3}\pi$ (i.e., para $k^2 = \frac{3}{4}$) y $l = 4g$, estima el valor del periodo de oscilación T_k usando tres y cuatro términos del desarrollo asintótico (14).

n) El periodo de oscilación T_k de la trayectoria solución del sistema (8), para $k^2 = \frac{3}{4}$, $l = 4g$ y con condiciones iniciales $\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, se puede calcular numéricamente modificando los programas en Matlab descritos en el inciso (c) del problema anterior. En particular, cambiando la primera línea del primer programa por

opts = odeset(’events’,@g,’RelTol’,1e-5,’AbsTol’,1e-10);

Solución: T_k =17.2521

o)* Prueba que $T_k \to \infty$, cuando $k \to 1^-$ (i.e., cuando $A \to \pi^-$). Interpreta.

p) *Separatrices*: Pasemos a estudiar el caso $E = 2g$, en la franja $[-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ del plano $\theta - \omega$, que corresponde a las curvas que se conocen como *separatrices*. En este caso la primera integral de movimiento (9), se puede expresar como

$$0 \leq \frac{l}{2}\omega^2 = g(1 + cos\,\theta) \tag{15}$$

La que consta, claramente, de un parte en el semi-plano $\omega > 0$ y otra en el semi-plano $\omega < 0$. Y que ambas partes pasan por los puntos $(-\pi, 0)$ y $(\pi, 0)$. Muestra que la curva (15) corta transversalmente al eje θ, específicamente, que

$$\frac{d\omega}{d\theta}|_{\theta=\pm\pi} = \mp(g/l)^{1/2}$$

y que la trayectoria solución del sistema (8) que parte ($t = 0$) del punto $(0, \omega_+)$ donde $\omega_+ = 2(g/l)^{1/2}$, nunca llega al punto de equilibrio $E_1 = (\pi, 0)$.

Sugerencia: Despejando ω de (15) y sustituyendo en la segunda ecuación del sistema (8) se obtiene, separando variables e integrando, que

$$T = \int_0^T dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\pi^-} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + cos\,\theta}}$$

Ahora, usando la identidad trigonométrica $2cos^2\,\theta/2 = 1 + cos\,\theta$, se obtiene que

$$T = \sqrt{\frac{l}{2g}}\int_0^{\pi^-/2} \frac{d\phi}{cos\,\phi}, \qquad \phi = \theta/2$$

Concluye.

q) *Oscilaciones "abiertas"*. Para el caso $E = \alpha g$ con $\alpha > 2$, se obtienen las oscilaciones periodicas "abiertas" que corresponden a vueltas completas del péndulo como ocurre en la feria con el *martillo*. En este caso la primera integral de movimiento (9), se puede expresar como

$$0 \leq \frac{l}{2}\omega^2 = g((\alpha - 1) + cos\,\theta) \qquad (16)$$

De donde se sigue que

$$|\omega| \geq \left[\frac{2g}{l}(\alpha - 2)\right]^{1/2} \qquad (17)$$

Luego, si $\gamma : (\theta(t), \omega(t))$ es una trayectoria solución del sistema (8) que gobierna el movimiento del péndulo, que se mueve sobre la curva (16) entonces $|\omega(t)|$ alcanza su valor mínimo positivo (veáse (17)), cuando $\theta(t) = \pm\pi$. Luego el péndulo da vuelta completas como el martillo en las ferias.
¿Cuál es su periodo de oscilación?
Respuesta:

$$T_\alpha = 2\left(\frac{2l}{\alpha\, g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \rho^2 sen^2\,\phi}}, \qquad \phi = \theta/2 \qquad (18)$$

En efecto, despejando ω de (16), se tiene que

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{2g}{l}(\alpha - 1 + cos\,\theta)} \\ &= \sqrt{\frac{2g}{l}(\alpha - 2 + 1 + cos\,\theta)} \\ &= 2\sqrt{\frac{g}{l}(\alpha/2 - sen^2\,\theta/2)} \end{aligned}$$

ó sea, tomando $1/\rho = \alpha/2$:

$$\omega = 2\left(\frac{\alpha\, g}{2l}\right)^{1/2} \sqrt{1 - \rho^2 sen^2\,\phi}, \qquad \phi = \theta/2 \qquad (19)$$

Sustituyendo (19) en la segunda ecuación en (8) y separando variables, se sigue que

$$dt = \sqrt{\frac{2l}{\alpha\, g}} \frac{d(\theta/2)}{\sqrt{1 - \rho^2\, sen^2\frac{\theta}{2}}}$$

e integrando que

$$T_\alpha = 2\left(\frac{2l}{\alpha\, g}\right)^{1/2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \rho^2\, sen^2\phi}}$$

Nótese que $T_\alpha \to +\infty$, cuando $E \to 2^+$ (i.e., $\alpha \to 2^+$).

6. * Una simplificación menos burda de la ecuación del péndulo matemático (3) está dada por

$$l\,\ddot{\theta} + g\,(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0 \qquad (20)$$

a) Introduciendo la variable $\omega = \dot{\theta}$, muestra que la ecuación (20) es equivalente al sistema:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= -\frac{g}{l}\,(\theta - \frac{\theta^3}{6}) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned} \tag{21}$$

b) Halla las soluciones de equilibrio de este sistema.

c) Eliminando la variable independiente "tiempo" y separando variables, muestra que

$$g(\theta^2 - \frac{\theta^4}{12}) + l\,\omega^2 = 2E \tag{22}$$

es una primera integral de movimiento del "péndulo" gobernado por la ecuación (20) ¿Qué representa (22) para $E = 0$? Comenta.

d) Considera ahora a la función $V(\theta) = \theta^2 - \frac{\theta^4}{12}$. Muestra que $V(\theta) \geq 0$, si $|\theta| \leq 2\sqrt{3}$; que $V(\theta) < 0$, si $|\theta| > 2\sqrt{3}$. Más aún, que $V(\theta)$ tiene un mínimo local en $\theta = 0$ y máximos locales en $\theta = \pm\sqrt{3}$. Finalmente dibuja la gráfica de esta función.

e) ¿Qué "movimientos" de la ecuación (20) describe la integral de movimiento

$$g(\theta^2 - \frac{\theta^4}{12}) + l\,\omega^2 = \frac{9}{4}g\,?$$

¿Cómo son los "movimientos" descritos por la integral de movimiento $g(\theta^2 - \frac{\theta^4}{12}) + l\,\omega^2 = E$, con $E > \frac{9}{8}\,g$?

f) Muestra que, para $E < \frac{9}{8}\,g$, la integral de movimiento (22) describe soluciones periodicas del sistema (21).

g) Finalmente, describe la gráfica de la función

$$E(\theta, \omega) = \frac{g}{2}(\theta^2 - \frac{\theta^4}{12}) + \frac{l}{2}\,\omega^2$$

mediante la descripción de sus curvas de nivel.

h) Halla el periodo de oscilación de tales soluciones.