Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 7

La ecuación $y'(x) = g(y)f(x)$

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Marzo de 2015

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

Ejercicios

INDICACIONES: Los ejercicios con asterisco son opcionales.

1. Resuelve las ecuaciones siguientes:

$$
\begin{array}{ll}
a) & \frac{dy}{dx} = y^2 senx \\
b) & x' = a(t)x \\
c) & xy\frac{dy}{dx} = (1-y^2)(1+x^2) \\
d) & \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{\sqrt{1+x^3}} \\
e) & 0 = x(1+y^2)^{1/2} + y(1+x^2)^{1/2}y' \\
f) & \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \\
g) & \frac{dy}{dx} = -a\frac{x}{y}\,, \qquad a>0
\end{array}
$$

2. Sean $f : I_f \to \mathbb{R}$ y $g : I_g \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre los intervalos I_f y I_g, respectivamente. Considerando la ecuación
$$y' = f(x)g(y)$$
¿A qué corresponden los ceros de $g(y)$?

3. * Sean $f : I_f \to \mathbb{R}$ y $g : I_g \to \mathbb{R}$ funciones continuas definidas sobre los intervalos I_f e I_g, respectivamente. Suponiendo que $g(y) \neq 0$ para toda $y \in I_g$, demuestra que el problema de Cauchy
$$
\begin{array}{l}
y' = f(x)g(y) \\
y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \in \overset{o}{I}_f, \qquad y_0 \in \overset{o}{I}_g
\end{array}
$$
tiene una única solución de la forma
$$y(x) = (\Gamma \circ F)(x),$$
donde Γ es la función inversa de la primitiva $G(y)$ de $\frac{1}{g(y)}$ con $\Gamma(0) = y_0$ y $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ con $F(x_0) = 0$.

4. Considérese a la ecuación
$$y' = a(t)y\,, \tag{1}$$
en donde $a(t)$ es una función continua y periódica de periodo $p > 0$. Se quiere estudiar bajo que condiciones (1) tiene soluciones periódicas de periodo p.

    a) Sea $\varphi(t)$ una solución no-idénticamente nula de (1). Si $\psi(t)$ es otra solución de (1), demuestra que
    $$\psi(t) = c\varphi(t)\,, \qquad p.a. \quad c \in \mathbb{R}.$$
    Esto es, basta con conocer la geometría de una de las soluciones no-identicamente nulas de (1) para conocer todas sus soluciones.
    Sugerencia: Considera $\frac{d}{dt}(\psi(t)\,/\varphi(t))$.

    b) Si $\varphi(t)$ es una solución no-idénticamente nula de (1), demuestra que entonces $\psi(t) =_{def} \varphi(t+p)$ es también una solución de (1).

    c) Si $\varphi(t)$ es una solución no-idénticamente nula de (1), demuestra que $\varphi(t+p) = c\varphi(t)$, $p.a.$ $c \in \mathbb{R}$.

    d) Sea $\varphi(t)$ una solución no-idénticamente nula de (1). Prueba que $\varphi(t)$ es periódica *ssi* $\varphi(0) = \varphi(p)$.

    e) Sea $\varphi(t)$ la solución del problema de Cauchy:
    $$y' = a(t)y \quad \text{con} \quad y(0) = y_0\,(\neq 0)$$
    Hallando la expresión analítica para $\varphi(t)$, demuestra que
    $$c = e^{p\overline{a}}$$

en donde
$$\overline{a} = \frac{1}{p}\int_0^p a(s)ds$$
es el valor promedio de $a(t)$.

f) Demuestra que:

i)	si	$\overline{a} < 0$	entonces	$\varphi(t) \to 0$	cuando $t \to \infty$.
ii)	si	$\overline{a} = 0$	entonces	$\varphi(t)$	es periódica .
iii)	si	$\overline{a} > 0$	entonces	$\varphi(t) \to \infty$	cuando $t \to \infty$,.

g) Describe geométricamente el comportamiento de las soluciones para cada una de las ecuaciones siguientes:

i) $y' = (sen\, t)y$

ii) $y' = \sqrt{(3 - 2sen\, t)}\, y$

iii) $y' = (\cos t - 1)y$.

5. * Observando que
$$e^{A(x)}\left(\frac{dy}{dx} + a(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(y\, e^{A(x)}\right)$$
en donde $A(x) = \int_{x_o}^{x} a(t)dt$, demuestra que la solución del problema de Cauchy:
$$\frac{dy}{dx} + a(x)y = b(x)\,, \quad y(x_o) = y_o$$
está dada por
$$y(x) = e^{-A(x)}\left(y_o + \int_{x_o}^{x} e^{A(s)}b(s)ds\right)$$

6. Encuentra la solución general de las ecuaciones siguientes:

a) $\frac{dy}{dx} + y = x$

b) $\frac{dy}{dx} + (\frac{1}{x} - 1)y = \frac{e^{2x}}{x}$ Solución: $xy = e^x(c + e^x)$

7. La ecuación
$$\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = b(x)y^n(x), \quad n \neq 1$$
se llama de **Bernoulli**. Muestra que esta ecuación toma la forma
$$\frac{dz}{dx} + (1-n)a(x)z = (1-n)b(x)$$
al hacer la sustitución $z(x) = [y(x)]^{1-n}$.
Resuelve las ecuaciones de Bernoulli siguientes:
$$i) \quad y' - \frac{3}{x}y + x^2y^2 = 0 \qquad ii) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2} \quad \text{con} \quad y(2) = 4$$

8. La ecuación
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \tag{2}$$
es conocida como ecuación de **Riccati**. Esta ecuación no es, en general, integrable por cuadraturas. Sin embargo, si se conoce una solución particular entonces su integración se reduce a resolver una ecuación diferencial lineal.

a) Muestra que si $\varphi(x)$ es una solución particular de (2) entonces, mediante la sustitución $y(x) = \varphi(x) + 1/z(x)$, la ecuación (2) se transforma en
$$\frac{dz}{dx} = (2q(x)\varphi(x) + p(x))\, z + q(x)$$

b) Hallando por inspección una solución particular, resuelve las ecuaciones siguientes:

$$b\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}, \qquad x^3\frac{dy}{dx} = x^2y + y^2 - x^2$$

c) Resuelve las ecuaciones de Riccati siguientes:

$$y\prime + y - 2y^2 = 0, \qquad y\prime - y^2 - 3y = 2$$

9. *Caperucita y el Lobo Feroz*: Caperucita se halla en el origen de coordenadas cuando se percata que el Lobo Feroz está sobre el eje de las abscisas a una distancia $a > 0$. Caperucita corre de inmediato sobre el eje de las ordenadas en sentido positivo a una velocidad constante v, si el Lobo Feroz corre en su persecución a una velocidad constante $V > v$ ¿A qué distancia del origen el Lobo alcanza a Capericita? ¿En qué tiempo la atrapa?

   Sugerencia: En el tiempo t, antes de ser atrapada, Caperucita se halla en el punto $C = (0, vt)$ y el Lobo en el punto $P = (x, y)$ sobre la curva de persecución $y(x)$ por hallar ¿Por qué $y(a) = y'(a) = 0$?.