Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 3

Aplicaciones I

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Febrero de 2015

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

Ejercicios

1. Una persona desea pedir prestado 250.000 dólares a una tasa de interés del 6 % para financiar la compra de una casa. Supongamos que el interés se capitaliza continuamente y que también se hacen los pagos continuamente.

   a) Determinar el pago mensual que se requiere para pagar el préstamo en 20 años; en 30 años.

   b) Determinar el total de intereses pagados durante la vigencia del préstamo en cada uno de los casos en la parte (a).

2. Supongamos que una célula se introduce en una solución que contiene un soluto de concentración constante C_s. Supongamos, además, que la célula tiene un volumen V constante y que el área de su membrana permeable es la constante A. Por ley de Fick la tasa de cambio de su masa m , es directamente proporcional a la área A y a la diferencia $C_s - C(t)$, donde $C(t)$ es la concentración del soluto dentro de la célula al tiempo t. Encuentra $C(t)$ si $m = V * C(t)$ y $C(0) = C_0$. Ver Figura

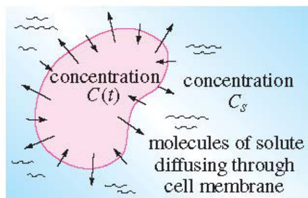

Figura 1: Célula

3. Cuando un rayo de luz vertical pasa por una sustancia transparente, la tasa de cambio de su intensidad a la profundidad x es proporcional a su intensidad $I(x)$. En agua de mar clara, la intensidad a 1 m. de profundidad es 25 % de la intensidad inicial I_0 del rayo incidente ¿Cuál es la intensidad del rayo a 5 m. bajo la superficie?

4. *Decaimiento Radioactivo.* Considera el modelo de desintegración radioactiva

$$\frac{dx}{dt} = -kx \qquad x(0) = x_0 \tag{1}$$

   El periodo de vida media $t_{1/2}$ se define por la ecuación: $x\left(t_{1/2}\right) = x_0/2$, donde $x(t)$ es la solución de (1). Muestra que $t_{1/2} = (\ln 2)/k$, y que la solución del problema (1) esta dada por $x(t) = x_0 2^{-\left(t/t_{1/2}\right)}$.

5. *Agotamiento de recursos naturales.* En la actualidad, en promedio, es necesaria 0.1 ha. de tierra cultivada por persona (para una alimentación normal). Se calcula que hay una superficie del orden de 4,000 millones de ha's de tierra susceptible de cultivarse. Por lo tanto, si no aparecen nuevas fuentes de alimentación la población máxima a poder ser alimentada será de 40,000 millones de personas. ¿Cuándo se alcanzará este límite si se considera que la humanidad crece uniformemente con velocidad 1.4 % anual?

   Observación: En 1970 ($t = 0$) la población mundial fue de 3.6×10^9 individuos.

6. *Sobre la ecuación logística.* Una población crece de acuerdo a la ley logística:

$$\frac{dP}{dt} = P(c - mP)$$

   con c, m constantes positivas, que se suele rescribir como

$$\frac{dP}{dt} = cP(1 - \frac{P}{K}) \tag{2}$$

   donde $K = c/m$ es el nivel de carga del medio que soporta a la población $P(t)$.

   ¿Cuál es el comportamiento de las soluciones con respecto a sus soluciones de equilibrio? Para ayudarte resuelve los siguientes incisos:

   a) Halla las soluciones de equilibrio de (2).

   b) Muestra que si $P(0) = P_0 < K$ entonces la población siempre crece; y que si $P_0 > K$ entonces siempre decrece.

c) Muestra que la integral impropia

$$\int_{P_0}^{K} \frac{dP}{P(1-P/K)}, \qquad P_0 \neq K\,,$$

es divergente.

d) Si $P(t)$ es una solución de (2) con $P(0) = P_0 \neq K$. Demuestra que no existe t^*, $0 < t^* < \infty$, *tq* $P(t^*) = K$. *Sugerencia*: Usa (c).

e) Demuestra que la gráfica de una solución $P(t)$ de (2) tiene un punto de inflexión en $t = \tau$ *ssi* $P(\tau) = K/2$.

f) Dibuja, cualitativamente la gráfica de una evolución $P(t)$ gobernada por la ecuación (2) para

$$i) \quad 0 < P_0 < K/2 \qquad ii) \quad K/2 < P_0 < K \qquad iii) \quad K < P_0.$$

7. *Dinámica de Poblaciones.* Considera que el modelo siguiente

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = (P-\varepsilon)\,(\eta - P), \qquad 0 < \varepsilon << \eta,$$

gobierna el crecimiento de una cierta población.

a) Halla sus soluciones de equilibrio.

b) Describe cualitativamente el comportamiento geométrico de las gráficas de sus soluciones.

c) Interpreta tus resultados, y compáralos con la ecuación logística ¿Qué modelo te parece más realista? ¿Por qué?

8. *Oferta y Demanda.* La oferta y la demanda de un bien están dadas en miles de unidades, respectivamente por $D = 24(2-e^{-2t}) + l6p(t) + l0p'(t)$, $S = 240 - 8p(t) - 2p'(t)$. En $t = 0$ el precio del bien es 12 unidades.

   (a) Encuentre el precio en cualquier tiempo posterior y obtenga su gráfico.

   (b) Determine si hay estabilidad de precio y el precio de equilibrio si existe.

9. En una primera aproximación, la evolución del crecimiento en un cierto aserradero es gobernado por la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = cP\,(1 - P/K) \qquad K = c/m. \tag{3}$$

donde c es la tasa per cápita de crecimiento, m la tasa de muerte y K es la capacidad de carga poblacional soportada por el medio. Tomando en cuenta que el aserradero se explota a tasa constante ε, la ecuación logística (3) se transforma en

$$\frac{dP}{dt} = cP\,(1 - P/K)\,P - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

¿Para qué índices ε de explotación no se acaba con el aserradero? ¿Cuánto vale $\lim_{t\to\infty} P\,(t)$?.

10. *Aversión al Riesgo* Una de las medidas más comúnmente utilizadas cuando se ***aversión al riesgo*** es la de de Arrow-Pratt que está dada por

$$\rho(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} \qquad u'(c) = \frac{du(c)}{dc} \tag{4}$$

donde $u(w)$ es la función de utilidad y w es el valor que se espera recibir ya sea monetario o en bienes. Si suponemos que $\rho(w)$ es continua, cuál es la expresión para u(x) que resuelve la ecuación diferencial.

11. *Curva de Gompertz.* A la gráfica de la solución $P\,(t)$ de la ecuación logística modificada

$$\frac{dP}{dt} = cP(1 - \frac{1}{K}\ln P)$$

donde $c > 0$ es la tasa per cápita de crecimiento, $K = c/m$, y m una cierta tasa de muerte, con condición inicial $P\,(0) = P_0 > 0$, se le llama curva de Gompertz. Estas curvas aparecen para describir el crecimiento de ciertas poblaciones, por ejemplo, en el crecimiento de algunos tumores, en predicciones actuariales y en el incremento de utilidades por la venta de un producto, entre otros. Muestra

a) que si $m > 0$ entonces $P(t) \to e^K$, cuando $t \to \infty$,

b) que si $m < 0$ y $P_0 < P^* \equiv e^K$ entonces $P(t) \to 0$, cuando $t \to \infty$;

c) que si $0 < P_0 < e^K$ entonces la curva de Geompertz $P(t)$ tiene un punto de inflexión (¿Para qué valor de P?); y

d) que $P(t) = e^K e^{-\ln\left(\frac{e^K}{P_0}\right)\cdot e^{-mt}}$.

12. *Caida libre.* Halla la ecuación diferencial que describe la velocidad de un objeto de masa m en caída bajo la acción de la gravedad si se supone que la resistencia del aire es proporcional a su velocidad (instantánea): ¿Cuál es la velocidad límite del objeto?; Si la altura y velocidad iniciales del objeto son $h(0) = h_0$ y $v(0) = 0$, hallar $h(t)$.

13. *Caida de un objeto en agua.* Plantea la ecuación diferencial que describe la velocidad $v\,(t)$ de un objeto de masa m que se deja sumergir en un estanque profundo de agua, bajo el supuesto que la resistencia del medio es proporcional al cuadrado de su velocidad instantánea y que la fuerza de flotación obedece la ley de Arquímides. ¿Cuál es la velocidad límite con que se hunde el objeto?

14. *Inventarios* Para proteger sus ganancias, un productor decide que la tasa a la cual incrementará los precios debería ser numéricamente igual a tres veces la tasa a la cual decrece su inventario. Asumiendo que la oferta y la demanda están dadas en términos del precio p por $S = 80 + 3p$, $D = 150 - 2p$ y que p = 20 en t = 0, encuentre el precio en cualquier tiempo.

15. *Enfriamiento de la "Chilindrina".* La temperatura de una chilindrina, en cuanto es sacada del horno, baja de 100^oC a 60^oC en 20 min. ¿En cuanto tiempo llega a 30^oC, si la temperatura ambiente es de 25^oC ?

16. Un agente forense, en una fresca mañana (15^oC) llega a la escena de un accidente automovilístico y ve que la temperatura de un cadáver es de 25^oC. Proponiendo datos adicionales necesarios, pero verosímiles, establezca la hora aproximada de la muerte de la victima. *Sugerencia.* Hecha mano de la ley de Newton.

17. *Tomando café.* El Sr. Gómez coloca dos tazas de café sobre una mesa. De inmediato vierte crema en su café de una jarra que ya tenía rato sobre la mesa. Lee su periódico durante 5 minutos y toma su primer sorbo de café. En ese instante llaga la Sra. Gómez, vierte crema en su café en igual cantidad que su esposo y toma su primer sorbo ¿ Quién y porqué toma su café más caliente ? Basa tus aseveraciones en ecuaciones matemáticas.

18. *Problema de los billetes.* Un país tiene en circulación papel moneda por un valor de mil millones de pesos, los saldos de los bancos suman un total de 5 millones de pesos por día. El gobierno decide introducir un nuevo billete. Así, se cambian los billetes viejos que llegan al banco por nuevos ¿ En qué tiempo habrá circulado el 90 % del dinero en billete nuevo ?

    Sugerencia. Piensa el problema como uno de mezclas.

19. *Problema de medición indirecta (Newton)* Explica como determinar la profundidad de un pozo profundo, con la ayuda de un cronómetro y una piedra.

Ejercicios sobre curvas sobresalientes

Es muy instructivo que intenta resolver por tu cuenta los problemas siguientes. Después de un tiempo, si no los has resuelto, puedes consultar a ([1]).

20. (Isócrona de Liebnitz) Hallar la curva $y(x)$ sobre la que resbala un cuerpo con velocidad vertical constante.

21. (Tractriz) Estando Lienitz en Paris realizando estudios bajo la guía de Huygens, Claude Perrault planteó, en esencia, el siguiente problema: En una esquina de un estanque de agua rectángular se halla un niño cogiendo con una cuerda de longitud a un barquito inicialmente colocado sobre el lado sur del estanque, después el niño camina sobre el lado poniente del estanque en dirección norte manteniendo estirada la cuerda con que sujeta su juguete ¿Cuál es la curva que describe el barquito?.

22. (La Catenaria) Galileo (1638) afirmó que la curva que describe una cadena colgada entre dos postes es una parábola. Unos 20 años después, un joven de 16 años de edad (Christian Huygens), lo refutó, diciendo que Don Galileo se equivocó. La solución del problema resultó ser un grandioso éxito del nuevo Calculus, las EDO's (Joh. Bernoulli (1691), Opera vol. III, p. 491-493). La curva es una catenaria. Muéstralo.

23. (La Braquistrócona) En 1638, Galileo creyó haber demostrado que la curva sobre la que se desliza un cuerpo desde un punto A a otro B en el plano que toma el menor tiempo es un **arco de circunferencia**. Nuevamente, Galileo se equivocó. Este problema fue resuelto por varios personajes de la época. Aunque la considerada más brillante fue la dada por Johann Bernoulli.

    Muestra que la curva es una Braquistrócona.

.1. Oferta y Demanda

Suponga que tenemos un bien tal como trigo o petróleo. Sea p el precio de este bien por alguna unidad especificada (por ejemplo bushel de trigo o barril de petróleo) en cualquier tiempo t. Entonces podemos pensar que p es una función de t así que *p(t)* es el precio en tiempo t . El número de unidades del bien que desean los consumidores por unidad de tiempo en cualquier tiempo t se llama la ***demanda*** y se denota por *D(t)*, o brevemente D. Esta demanda puede depender no sólo del precio p en cualquier tiempo t, esto es, *p(t)*, sino también de la dirección en la cual los consumidores creen que tomarán los precios, esto es, la ***tasa de cambio del precio*** o derivada $p'(t)$. Por ejemplo, si los precios están altos en tiempo t pero los consumidores creen que pueden subir, la demanda tiende a incrementar. En símbolos esta dependencia de D en $p(t)$ y $p'(t)$ puede escribirse

$$D(t) = f(p(t), p'(t)) \tag{5}$$

Llamamos a f la ***función de demanda***.
Similarmente, el número de unidades del bien que los productores tienen disponible por unidad de tiempo en cualquier tiempo t se llama la oferta y se denota por *S(t)* (por supply) , o brevemente S. Como en el caso de la demanda, S también depende de *p(t)* y *p'(t)*. Por ejemplo, si los precios están altos en tiempo t pero los productores creen que éstos pueden subir más, la oferta disponible tiende a incrementar anticipándose a los precios mas altos. En símbolos esta dependencia de S en$p(t)$ y $p'(t)$ puede escribirse

$$S(t) = g(p(t), p'(t)) \tag{6}$$

Llamamos a g la ***función oferta***.
Al hacer las observaciones anteriores implícitamente se ha asumido lo siguiente

i) Una economía competitiva o libre.

ii) Los precios, demanda, y oferta son continuos.

iii) No se considera los precios de otros bienes o el ingreso.

iv) No hay demora en el suministro. La ecuación (7) asume que los productores usan la tasa de cambio de precio en tiempo t, esto es, $p'(t)$, para decidir sobre la oferta que esté disponible. Esto es una aproximación a la realidad, puesto que en la práctica hay una demora τ entre el tiempo de producción real y el mercadeo al consumidor. En tal caso, (7) se remplazaría por

$$S(t) = g(p(t-\tau), p'(t-\tau)) \tag{7}$$

Teorema .1 Principio Económico de la oferta y la demanda

El precio de un bien en cualquier tiempo t, esto es, *p(t)*, está determinado por la condición de que la demanda en t sea igual a la oferta en t, es decir

$$f(p(t), p'(t)) = g(p(t), p'(t)) \tag{8}$$

.2. Risk Aversion

.3. Inventario

En la realidad la oferta y la demanda no son iguales y por lo regular se espera que la oferta cambie con el tiempo para satisfacer la demanda. Si, por ejemplo, la oferta es mayor que la demanda, entonces los productores tienen una cierta cantidad de bien en su posesión, la cual se llama su ***inventario*** del bien, el cual esperan vender. Por otro lado, si la demanda es mayor que la oferta, entonces los productores deben adquirir inventario. Nuestro problema es formular matemáticamente cómo el inventario cambia con el tiempo como un resultado de la oferta y la demanda.

Formulación:

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha(S(p) - D(p)) \tag{9}$$

Donde $\alpha > 0$ es la constante de proporcionalidad, S es la oferta y D la demanda.

Referencias

[1] Hairer, E., Wanner, G, *Analysis by Its History*, Springer, 2008.

[2] A First Course in Differential Equations with Modeling Applications 10e 2012 Zill

[3] Elementary Differential Equations 10e 2012 Boyce DiPrima

[4] Ecuaciones Diferenciales Aplicadas 1983 Spiegel