

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 4

La ecuación $y'(x) = f(y)$

Prof. Jesús López Estrada¹
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Febrero de 2015

¹Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

1. Halla la “solución” general para cada una de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} a) & y' = \sqrt{1-y^2} \\ c) & \frac{dx}{dt} = x^2(1-x^2) \\ e) & y' = k y^m, k \in \mathbb{R} \\ g) & y' = y \ln y \end{array} \quad \begin{array}{ll} b) & \dot{x} = e^x \\ d) & \frac{dy}{dx} = \cos^2 y \\ f) & \dot{x} = 1 - 1/x^2 \\ h) & y' = 2\sqrt{|y|} \end{array}$$

2. Halla las soluciones constantes o de equilibrio, para cada una de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} a) & y' = y^2 - 1 \\ c) & \dot{x} = \operatorname{sen} x \\ e) & y' = ay - by^2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} b) & \dot{x} = x^2 - 5x + 6 \\ d) & \dot{x} = x \ln x \\ f) & y' = y^2 + 1 \end{array}$$

3. Halla la solución y su dominio de definición para cada uno de los problemas siguientes:

$$\begin{array}{ll} a) & \dot{x} = x^2 \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \\ b) & \dot{x} = 2\sqrt{|x|} \quad \text{con} \quad x(-1) = 1 \\ c) & \dot{x} = 1/x \quad \text{con} \quad x(1) = 0 \end{array}$$

4. ¿Cuál es el intervalo máximo de definición de la solución $\varphi(x)$ del problema de Cauchy:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2} \quad \text{con} \quad y(0) = 0,$$

en donde ella es única? ¿Cuántas soluciones tiene este problema si $\varphi(x)$ es una solución definida sobre todo $\mathbb{R}$?

5. Muestra que toda solución de la ecuación

$$x' = \frac{x^2 - 1}{2},$$

si no es constante, está dada por

$$\varphi(t) = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t} \quad \text{para alguna } c \neq 0.$$

¿Cuál es el intervalo máximo de definición de estas soluciones? ¿Para qué valor de c se obtiene la solución constante $x(t) \equiv 1$ y para cuál la solución $x(t) \equiv -1$? Haz un esbozo geométrico de las soluciones.

6. Discute, en términos cualitativos, las curvas integrales de cada una de las ecuaciones siguientes:

$$a) \ y' = |1 - y^2|^{1/2} \quad b) \ y' = |1 - y| \quad c) \ y' = |1 - y^2|^2$$

7. Discute, cualitativamente, las “gráficas” de las soluciones para cada una de las ecuaciones que siguen:

$$a) \ \frac{dr}{d\theta} = a \quad (a > 0) \quad b) \ \frac{dr}{d\theta} = r - 1 \quad c) \ \frac{dr}{d\theta} = r(1 - r)$$

Sugerencia. Antes de trazar las gráficas en coordenadas polares, estudia primero las gráficas en el plano cartesiano r vs θ .

8. Sea $g(y)$ una función continua. Demuestra que las soluciones de la ecuación $y' = g(y)$ son monótonas.

9. Considera la ecuación

$$y' = g(y), \quad a < y < b \tag{1}$$

donde $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

a) Si $\varphi(x)$ es una solución de (1), demuestra que $\psi(x) = \varphi(x + h)$ es también una solución de la ecuación (1).

b) E inversamente, suponiendo que $g(y) \neq 0$, $\forall y \in (a, b)$, demuestra que si $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ son dos soluciones de (1), entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tq

$$\psi(x) = \varphi(x + c)$$

Sugerencia: Para algo sirve la unicidad.

10. Sea $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, $tg \ g(c) = 0$, $c \in (a, b)$ y $g(y) \neq 0$, $pt \ y \neq c$. Si la integral impropia

$$\int_{\alpha}^{\pm c} \frac{dy}{g(y)}, \quad \alpha \in (a, b), \ \alpha \neq c$$

es divergente, demuestra que el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= g(y), & y(x_0) &= y_0, \\ pt \ x_0 &\in \mathbb{R} & y \ pt \ y_0 &\in (a, b) \end{aligned}$$

tiene una única solución dada por

$$y(x) = y_0, \quad \text{si } y_0 = c$$

ó por

$$y(x) = \Gamma(x - x_0),$$

si $y_0 \neq c$, donde Γ es la función inversa de la primitiva $G(y)$ de $1/g(y)$ con $G(y_0) = 0$.

11. Sea $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua $tg \ g(c) = 0$ y $g(y) \neq 0$, si $y \neq c$. Si $g(y)$ es diferenciable en $y = c$, demuestra que el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= g(y), & y(x_0) &= y_0, \\ pt \ x_0 &\in \mathbb{R} & y \ pt \ y_0 &\in (a, b) \end{aligned}$$

tiene una única solución dada por

12. Sea $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $g(c) = 0$ y $g(y) \neq 0$, si $y \neq c$. Si existe L $tg \ |g(y) - g(c)| < L|y - c|$, demuestra que el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= g(y), & y(x_0) &= y_0, \\ pt \ x_0 &\in \mathbb{R} & y \ pt \ y_0 &\in (a, b) \end{aligned}$$

tiene una única solución dada por

13. Sea $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $\varphi(x)$ es una solución de la ecuación $y' = g(y)$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = c$, $a < c < b$, demuestra que $\varphi^*(x) \equiv c$ es también una solución de dicha ecuación.