Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 3

La ecuación $y'(x) = f(x)$

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Febrero de 2015

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

1. Hallar la solución general ó "particular", según sea el caso, de las ecuaciones diferenciales siguientes:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{\sqrt[3]{x^2+1}} \qquad b)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$$

$$c)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+4}} \qquad y(0)=0$$

$$d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{2-3x-x^2}} \qquad e)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^2 x \cos 3x$$

$$f)\ \frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}^4 x \qquad g)\ \frac{dy}{dx} = x^3\sqrt{x^2+a^2}$$

$$h)\ \frac{dy}{dx} = \frac{4x^2+x+1}{x^3-1} \qquad i)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1-\tan^2 x}{\sec^2 x}$$

$$i)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{x} \qquad j)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

$$k)\ \frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{e^{2x}+1} \qquad l)\ \frac{dy}{dx} = sen^2 x \cos^3 x$$

$$m)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{1+sen^2 x} \qquad y(0)=1$$

$$n)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{1+x^5}} \qquad o)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^4+1}$$

$$p)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^m}{\sqrt{x^2-1}}$$

2. Desarrolla el análisis cualitativo para cada una de las ecuaciones siguientes:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \qquad b)\ \frac{dy}{dx} = sen\left(x^2\right)$$

$$c)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \qquad d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x}$$

3. Describe el comportamiento de las soluciones de las siguientes ecuaciones alrededor de sus curvas integrales de la forma $x=a$:

$$a)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(4-x)} \qquad b)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sen\, x}$$

$$c)\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad d)\ \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+x+1}{\sqrt{|x|}\,(x-2)}$$

4. Sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas sobre $I=[a,b]$. y $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ soluciones de los problemas

$$\begin{array}{ll} y_1' = f(x) & y_1(x_0) = y_0 \\ y_2' = g(x) & y_2(\widetilde{x}_0) = \widetilde{y}_0 \\ \multicolumn{2}{c}{(x_0, \widetilde{x}_0 \in \overset{o}{I}, y_0, \widetilde{y}_0 \in \mathbb{R}),} \end{array}$$

respectivamente. Demuestra que si $|f(x)-g(x)| \leq M$, $\forall\ x \in I$, entonces

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leq M\,|\widetilde{x}_0 - x_0| + |\widetilde{y}_0 - y_0|\,, \quad \forall \quad x \in I$$

Comenta.

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es periódica de periodo $p>0$, si p es el menor real positivo tal que $f(t+p)=f(t)$, $\forall$ $t \in \mathbb{R}$. Considere la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t) \tag{1}$$

con f ***continua y periódica de periodo*** p.

a) ¿Es natural esperar que las soluciones de (1) sean periódicas?

b) Muestra que la ecuación $\dot{x} = \operatorname{sen} t$ tiene soluciones periódicas, mientras que la ecuación $\dot{x} = \operatorname{sen}^2 t$ no.

c) Demuestra que si (1) tiene una solución $\varphi(t)$ periódica entonces todas sus soluciones son periódicas.

d) Si $\varphi(t)$ es una solución de (1) tal que $\varphi(0)=\varphi(p)$ con $p>0$. Prueba que $\varphi(t)$ es periódica.

e) Demuestra que $\varphi(t)$ es una solución periódica de periodo $p > 0$ de (1) ssi $\int_0^p f(s)ds = 0$.

f) El promedio $\overline{f}$ de una función periódica $f(t)$ de periodo $p > 0$, se define como

$$\overline{f} = \frac{1}{p}\int_0^p f(s)ds$$

Demuestra que

i) Si $\overline{f} = 0$ entonces las soluciones de (1) son periódicas.

ii) Si $\overline{f} > 0$ entonces las soluciones de (1) tienden a ∞ cuando $t \to \infty$.

iii) Si $\overline{f} < 0$ entonces las soluciones de (1) tienden a $-\infty$ cuando $t \to \infty$.

g) Describe el comportamiento al infinito de las soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$\text{i) } y^{'} = sen 2\pi x \quad \text{ii) } y' = \sqrt{1 - k^2 sen^2\, x},\ (0 < k^2 < 1)$$
$$\text{iii) } y' = -\cos^2 x$$

6. Halla la solución general de las ecuaciones siguientes:

$$a) \quad y'' = 0 \qquad b) \quad y^{(4)} = e^x \qquad c) \quad y''' = xe^{-x} \qquad d) \quad y^{(n)} = 0$$

7. Prueba que la solución general de la ecuación:

$$y'' = f(x), \tag{2}$$

donde $x \in (a, b)$ y $f(x)$ es una función continua, está dada por

$$y(x) = cx + d + \int_{x_0}^{x} (x - \xi)f(\xi)d\xi,$$

para algún $x_0 \in (a, b)$.

Sugerencia: Muestra primero que

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\eta} f(\xi)d\xi d\eta$$

con $x_0 \in (a, b)$ dada, es una solución de (2), la cuál se puede rescribir como

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} (x - \xi)f(\xi)d\xi$$

al verificar que

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\eta} f(\xi)d\xi d\eta = \int_{x_0}^{x}\int_{\xi}^{x} f(\xi)d\eta d\xi = \int_{x_0}^{x} (x - \xi)f(\xi)d\xi$$

8. Demuestra que resolver el problema de Cauchy (Problema de Valores Iniciales)

$$x'' = f(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1$$

es equivalente a resolver la ecuación integral

$$x(t) = x_0 + x_1 t + \int_0^t (t - s)f(s, x(s))ds$$

9. Sea $f(x)$, $x \in (a, b)$ una función continua, demuestra que la solución general de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} = f(x)$$

está dada por

$$y(x) = p(x) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n - 1)!} f(\xi)d\xi,$$

con $x_0 \in (a, b)$, y donde $p(x)$ es un polinomio de grado a lo más $n - 1$.

Sugerencia: Usa inducción matemática para probar que

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi_{n-1}} \cdots \int_{x_0}^{\xi_1} f(\xi)d\xi d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x - \xi)^{n-1}}{(n - 1)!} f(\xi)d\xi$$

10. Dado un blanco a una distancie $d < a$, donde a es el alcance máximo con una velocidad inicial de lanzamiento v_0. Halla el ángulo θ para dar en el blanco. ¿Es la solución única?