Matemáticas, UNAM
Semestre 2015-2

ECUACIONES DIFERENCIALES I

Tarea No. 2

Nociones básicas, campo de direcciones y método de isoclinas

Prof. Jesús López Estrada[1]
Ayudante Roberto Méndez Méndez

Ciudad Universitaria
Febrero de 2015

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

1. ¿Qué es una EDO?

2. ¿Qué es sistemas EDOs?

3. Contesta: Verdadero (V) o Falso (F) y justifica tu respuesta.

   a) Si un problema es *bajo-determinado* entonces su solución, si existe, es única.

   b) Si un problema es *sobre-determinado* entonces, generalmente, no tiene solución.

   c) Un problema se dice *bien-determinado*, cuando se tienen las condiciones necesarias para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

   d) El problema
   $$y' = f(x, y)$$
   está *bien-determinado.*

   e) El problema
   $$y'' = f(x, y) \quad y(t_0) = y_0\,, y(t_1) = y_1$$
   está *sobre-determinado.*

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$¿Bajo qué condiciones la expresión diferencial:
   $$A\underset{\sim}{y}' = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \tag{1}$$
   es una EDO?

   Si A es la matriz
   $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   ¿Es la expresión diferencial (1) una EDO?

5. Ninguna de las ecuaciones diferenciales siguientes se pueden resolver con los métodos analíticos usuales:
   $$\dot{x} = x^2 - t\,, \qquad \frac{dy}{dx} = e^{x\,y^2}\,, \qquad y' = x^2 + y^2$$
   Usando MAPLE, Mathematica, ó Matlab, describe el campo direccional y algunas de sus soluciones. Por otro lado, describe algunas de sus isoclinas y algunas de sus soluciones.

   Ejemplo: Para la segunda ecuación, un programa sencillo en Maple 18, utilizando la paleta de comandos, es:
   $$\begin{array}{l} \mathit{with}(\mathit{DEtools}): \\ \mathit{dfieldplot}\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y\left(x\right) = \mathrm{e}^{x*y(x)^2}, y\left(x\right), x = -5..5, y = -5..5\right) \end{array}$$
   lo mismo que antes pero escribiendo las instrucciones es:

   ```
   with(DEtools):
   dfieldplot(diff(y(x), x) = exp(x*y(x)^2), y(x), x = -5 .. 5, y = -5 .. 5);
   ```

6. Aplicando el método de las isoclinas, describe el comportamiento geométrico de las soluciones o curvas integrales para cada una de las ecuaciones siguientes:
   $$\begin{array}{lll} a)\ y' = \dfrac{x(1-y^2)}{y(1-x^2)} & b)\ y' = \dfrac{3x}{y} & c)\ y' = \dfrac{3y}{x} \\ d)\ y' = y(2-3y) & e)\ y' = \dfrac{x+y}{x-y} & f)\ y' = cos\,(y-2x) \\ g)\ y' = \dfrac{x^2}{y} & h)\ y' = x - y & i)\ y' = x(2-3x) \end{array}$$

7. Hechando mano de las isoclinas $y' = 0$ y $y' = \pm\infty$, describe la conducta geométrica de las curvas integrales para cada una de las ecuaciones siguientes:

$$y' = \frac{(x-3)y}{(5-x-y)x} \qquad\qquad y' = \frac{(5-x-y)y}{(y-3)x}$$

Sugerencia: Es conveniente observar los valores de las pendientes sobre la recta $y = 2$ para la primera de estas ecuaciones. Lo análogo se aplica para la segunda.

8. Las isoclinas de las ecuaciones $y' = f(x)$ y $y' = g(y)$ son rectas verticales y horizontales, respectivamente ¿Cómo son las isoclinas de las ecuaciones siguientes?

$$y' = g(\frac{y}{x}), \qquad y' = a(x)y + b(x), \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x - a_{12}y}$$

9. Considera la ecuación diferencial

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{2}$$

bajo el supuesto que el determinante $Dt(A)$ de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

es diferente de cero.

a) Muestra que la isoclina $y' = m\,(m \in \mathbb{R})$ de la ecuación (2)es de la forma $y = kx$, $(k \in \mathbb{R})$, si $a_{22} - a_{12}m \neq 0$, ó $x = 0$ en otro caso.

b) Muestra que la isoclina $y = kx\,(k \in \mathbb{R})$ es solución de la ecuación (2) ssi k es raíz real de la *ecuación discriminante* $q(z)$ asociada a (2) dada por

$$q(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21}$$

c) Ahora, recordando que $q(z)$ tiene raíces reales ssi

$$\Delta_q \equiv (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \geq 0$$

Muestra que la ecuación (2) tiene isoclinas que son solución ssi $\Delta(A)$ de la matriz A es positivo; i.e.,

$$\Delta(A) \equiv [Tr(A)]^2 - 4Dt(A) \geq 0$$

Sugerencia: Verifica que $\Delta_q = \Delta(A)$.

d) Para cada una de las ecuaciones siguientes, dí si tiene isoclinas que sean solución

$$y' = \frac{-x + 4y}{2y + x}, \qquad y' = \frac{2(2x - y)}{2x + y}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 7y}{2x - 7y} \tag{3}$$

e) Halla las isoclinas solución de las ecuaciones del inciso anterior.

f) Finalmente, después de dibujar algunas isoclinas para cada una de las ecuaciones en el inciso (d), describe la conducta geométrica de sus soluciones.

10. Halla las curvas ortogonales a la familia de circunferencias concéntrica en el origen.

Muestra que las isoclinas $y' = m$, $x \neq 0$, de la ecuación $y' = y/x$ son ellas mismas sus "curvas integrales".

Referencias

[Hub] Hubbard, J., West, B., *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach*, Vol.1, Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, 1995. Cap.1: Qualitative Methods.

[Kis] Kiseliov, A., Krasnov, M., Makarenko, G., *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, MIR, 4ta. Edición, 1984. Caps. 1 y 2.

[JS] Jordan P., Smith D., *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Oxford, 2007

[L] López Estrada Jesús, *El Mundo de la Computación Científica*, Presentación Posgrado, 2014