Posgrado en Matemáticas, UNAM

Análisis Numérico I

Semestre 2014-2

El mundo de la Computación Científica

Jesús López Estrada
Departamento de Matemáticas
FCiencias-UNAM
jele@matematicas.unam.mx
jelpz@hotmail.com

Posgrado en Matemáticas, UNAM

Análisis Numérico I

Semestre 2014-2

El mundo de la Computación Científica

Jesús López Estrada
Departamento de Matemáticas
FCiencias-UNAM
jele@matematicas.unam.mx
jelpz@hotmail.com

Pensamiento

Toda la gloria del mundo
cabe en un grano de maíz
y no hay satisfacción, ni premio
más grande que cumplir con el deber.

José Martí

Pensamiento

Toda la gloria del mundo
cabe en un grano de maíz
y no hay satisfacción, ni premio
más grande que cumplir con el deber.

José Martí

Objetivo.

El propósito central de este tema es dar una introducción al Cómputo Científico, reflexionando sobre varios de sus involucrados aspectos como son: la computadora digital en nuestra vida diaria, la Modelación Matemática, y con ello, los conceptos de problema bajo, sobre y bien-determinado, como de mal y bien-planteado a la Hadamard, y finalmente, los conceptos del Análisis Numérico de problema bien y mal-condicionado, como de un método numéricamente estable.

Objetivo.

El propósito central de este tema es dar una introducción al Cómputo Científico, reflexionando sobre varios de sus involucrados aspectos como son: la computadora digital en nuestra vida diaria, la Modelación Matemática, y con ello, los conceptos de problema bajo, sobre y bien-determinado, como de mal y bien-planteado a la Hadamard, y finalmente, los conceptos del Análisis Numérico de problema bien y mal-condicionado, como de un método numéricamente estable.

Plan

I. Un poco de Computación Científica

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

V.1) Clásicos

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

V.1) Clásicos

V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

- V.1) Clásicos
- V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)
- V.3) Del Algebra Matricial Numérica

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

V.1) Clásicos

V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)

V.3) Del Algebra Matricial Numérica

VI. Concepto de método numéricamente estable

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

V.1) Clásicos

V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)

V.3) Del Algebra Matricial Numérica

VI. Concepto de método numéricamente estable

VII. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

V.1) Clásicos

V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)

V.3) Del Algebra Matricial Numérica

VI. Concepto de método numéricamente estable

VII. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

VIII. Nuevamente problemas bien-planteados

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

- V.1) Clásicos
- V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)
- V.3) Del Algebra Matricial Numérica

VI. Concepto de método numéricamente estable

VII. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

VIII. Nuevamente problemas bien-planteados

IX. Los errores el Cómputo Científico.

Plan

I. Un poco de Computación Científica

II. Algo sobre Modelación Matemática

III. ¿Qué es un problema Bien-determinado?

IV. ¿Qué es un problema Bien-planteado? Un poco de historia

V. Problemas Mal-planteados

V.1) Clásicos

V.2) De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos)

V.3) Del Algebra Matricial Numérica

VI. Concepto de método numéricamente estable

VII. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

VIII. Nuevamente problemas bien-planteados

IX. Los errores el Cómputo Científico.

I. Un poco de Computación Científica

- Dos antecedentes importantes:

I. Un poco de Computación Científica

- Dos antecedentes importantes:

1. Desde los inicios de la civilización hemos tenido la necesidad de contar y medir.

I. Un poco de Computación Científica

- Dos antecedentes importantes:

1. Desde los inicios de la civilización hemos tenido la necesidad de contar y medir.
2. Inventando a $\mathbb{N}$ para CONTAR y los $\mathbb{R}$ -pasando por los $\mathbb{Q}$- para MEDIR.

I. Un poco de Computación Científica

- Dos antecedentes importantes:

1. Desde los inicios de la civilización hemos tenido la necesidad de contar y medir.
2. Inventando a $\mathbb{N}$ para CONTAR y los $\mathbb{R}$ -pasando por los $\mathbb{Q}$- para MEDIR.

- ¿Para qué calcular?

I. Un poco de Computación Científica

- Dos antecedentes importantes:

1. Desde los inicios de la civilización hemos tenido la necesidad de contar y medir.
2. Inventando a $\mathbb{N}$ para CONTAR y los $\mathbb{R}$ -pasando por los $\mathbb{Q}$- para MEDIR.

- ¿Para qué calcular?

Para la toma de decisiones sobre acciones concretas sobre abasto de bienes de consumo y servicios (energía, agua, comida, vestido, etc.), planeación de producción y distribución de bienes y servicios, prevención ante huracanes y contaminación ambiental, etc.

- Instrumentos de cálculo:

- Instrumentos de cálculo:

1. Antes de la difusión de los números hindú-arábigos: el ABACO.

- Instrumentos de cálculo:

1. Antes de la difusión de los números hindú-arábigos: el ABACO.
2. Y después, LÁPIZ y PAPEL; y poco más después, las TABLAS DE LOGARITMOS.

- Instrumentos de cálculo:

1. Antes de la difusión de los números hindú-arábigos: el ABACO.
2. Y después, LÁPIZ y PAPEL; y poco más después, las TABLAS DE LOGARITMOS.
3. Luego arribaron las CALCULADORAS MECÁNICAS. y REGLA de CÁLCULO

- Instrumentos de cálculo:

1. Antes de la difusión de los números hindú-arábigos: el ABACO.
2. Y después, LÁPIZ y PAPEL; y poco más después, las TABLAS DE LOGARITMOS.
3. Luego arribaron las CALCULADORAS MECÁNICAS. y REGLA de CÁLCULO
4. Y finalmente, llegó la COMPUTADORA DIGITAL, pasando por las las calcuradoras programables.

- Instrumentos de cálculo:

1. Antes de la difusión de los números hindú-arábigos: el ABACO.
2. Y después, LÁPIZ y PAPEL; y poco más después, las TABLAS DE LOGARITMOS.
3. Luego arribaron las CALCULADORAS MECÁNICAS. y REGLA de CÁLCULO
4. Y finalmente, llegó la COMPUTADORA DIGITAL, pasando por las las calcuradoras programables.

- ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

- ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.

- ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.
2. Cálculo de integrales como:

$$\int_0^1 sen\, x^2\, dx, \;\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \; etc.$$

- ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.
2. Cálculo de integrales como:

$$\int_0^1 sen\, x^2\, dx, \ \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \ etc.$$

3. Cálculo del cero de la función $x - e^{-x} = 0$.

- ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.
2. Cálculo de integrales como:

$$\int_0^1 sen\, x^2\, dx, \;\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \; etc.$$

3. Cálculo del cero de la función $x - e^{-x} = 0$.
4. Resolución de EDO's, EDP's, EDE's, EcIntgls e Intgro-D's, etc.

• ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.
2. Cálculo de integrales como:

$$\int_0^1 sen\, x^2\, dx, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \; etc.$$

3. Cálculo del cero de la función $x - e^{-x} = 0$.
4. Resolución de EDO's, EDP's, EDE's, EcIntgls e Intgro-D's, etc.
5. Evaluación de funciones especiales y cálculo de transformadas integrales (Fourier, Laplace, Radón, etc.)

• ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.
2. Cálculo de integrales como:

$$\int_0^1 sen\, x^2\, dx, \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \; etc.$$

3. Cálculo del cero de la función $x - e^{-x} = 0$.
4. Resolución de EDO's, EDP's, EDE's, EcIntgls e Intgro-D's, etc.
5. Evaluación de funciones especiales y cálculo de transformadas integrales (Fourier, Laplace, Radón, etc.)

Nota. Dos fuentes de error en el cómputo numérico: 1) por discretización; y 2) por redondeo al efectuar los cálculos en una Aritmética de Punto Flotante.

• ¿Para que los métodos numéricos?

Para efectuar en tiempos razonablemente breves procesos de cálculo numérico que involucran numerosas operaciones aritméticas. Pero, también para:

1. Cálculo del perímetro de la elipse.
2. Cálculo de integrales como:

$$\int_0^1 sen\, x^2\, dx, \;\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} dx, \; etc.$$

3. Cálculo del cero de la función $x - e^{-x} = 0$.
4. Resolución de EDO's, EDP's, EDE's, EcIntgls e Intgro-D's, etc.
5. Evaluación de funciones especiales y cálculo de transformadas integrales (Fourier, Laplace, Radón, etc.)

Nota. Dos fuentes de error en el cómputo numérico: 1) por discretización; y 2) por redondeo al efectuar los cálculos en una Aritmética de Punto Flotante.

- Errores por discretización

- Errores por discretización

Los errores de discretización se producen al sustituir un proceso al límite por uno algebraico.

- Errores por discretización

Los errores de discretización se producen al sustituir un proceso al límite por uno algebraico.

Ejemplos:

- Errores por discretización

Los errores de discretización se producen al sustituir un proceso al límite por uno algebraico.

Ejemplos:

1. Los métodos básico de cuadratura numérica se obtienen de sustituir el límite

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

• Errores por discretización

Los errores de discretización se producen al sustituir un proceso al límite por uno algebraico.

Ejemplos:

1. Los métodos básico de cuadratura numérica se obtienen de sustituir el límite

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

   por la suma

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

- Errores por discretización

Los errores de discretización se producen al sustituir un proceso al límite por uno algebraico.

Ejemplos:

1. Los métodos básico de cuadratura numérica se obtienen de sustituir el límite

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

por la suma

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

con un error de discretización

$$e_n = \left| \int_a^b f\,dx - \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k}) \right|$$

• Errores por discretización

Los errores de discretización se producen al sustituir un proceso al límite por uno algebraico.

Ejemplos:

1. Los métodos básico de cuadratura numérica se obtienen de sustituir el límite

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

por la suma

$$\int_a^b f\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})$$

con un error de discretización

$$e_n = |\int_a^b f\,dx - \sum_{k=0}^{n} w_{n,k} f(\xi_{n,k})|$$

2. Para hallar el cero ξ de la función $x - e^{-x} = 0$, se puede ver que la sucesión de puntos $\{x_k\}$ generada por el método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ a partir de $x_0 \in [0, 1]$ dado, converge a ξ. Al sustituir el límite por $x_n \approx \xi$, se comete un error $e_n = |\xi - x_n|$ de discretización llamado, en este caso, de convergencia.

2. Para hallar el cero ξ de la función $x - e^{-x} = 0$, se puede ver que la sucesión de puntos $\{x_k\}$ generada por el método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ a partir de $x_0 \in [0,1]$ dado, converge a ξ. Al sustituir el límite por $x_n \approx \xi$, se comete un error $e_n = |\xi - x_n|$ de discretización llamado, en este caso, de convergencia.

3. Para la resolución numérica por diferencias finitas del problema con dos puntos de frontera

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

2. Para hallar el cero ξ de la función $x - e^{-x} = 0$, se puede ver que la sucesión de puntos $\{x_k\}$ generada por el método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ a partir de $x_0 \in [0,1]$ dado, converge a ξ. Al sustituir el límite por $x_n \approx \xi$, se comete un error $e_n = |\xi - x_n|$ de discretización llamado, en este caso, de convergencia.

3. Para la resolución numérica por diferencias finitas del problema con dos puntos de frontera

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

Considérese la partición uniforme $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, de paso $h = \frac{b-a}{n+1}$ y sustitúyase el límite $y''(x_k)$ por la diferencia dividida

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2}$$

2. Para hallar el cero ξ de la función $x - e^{-x} = 0$, se puede ver que la sucesión de puntos $\{x_k\}$ generada por el método de Newton $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$ a partir de $x_0 \in [0, 1]$ dado, converge a ξ. Al sustituir el límite por $x_n \approx \xi$, se comete un error $e_n = |\xi - x_n|$ de discretización llamado, en este caso, de convergencia.

3. Para la resolución numérica por diferencias finitas del problema con dos puntos de frontera

$$-y'' + q(x)y = f(x), \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

Considérese la partición uniforme $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, de paso $h = \frac{b-a}{n+1}$ y sustitúyase el límite $y''(x_k)$ por la diferencia dividida

$$\frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2}$$

cometiendo un error de discretización $e_n \approx O(h^2)$, para obtener

$$-y_{k-1} + (2 + h^2 q_k)y_k - y_{k+1} = h^2 f_k$$

que es el i-ésimo renglón del sistema de ecuaciones

$$A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b}$$

que es el i-ésimo renglón del sistema de ecuaciones

$$A\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 2+h^2q_1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2+h^2q_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2+h^2q_3 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & -1 & 2+h^2q_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2+h^2q_n \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{y}^t = (y_1, y_2 \dots, y_n)$$

$$\underset{\sim}{b}^t = (h^2f(x_1) - A, h^2f(x_2), \dots, h^2f(x_{n-1}), h^2f(x_n) - B)$$

- Errores por redondeo

- Errores por redondeo

En una computadora digital con arquitectura de 62b, sólo es posible almacenar en memoria un número finito de cifras (binarias, octales, hexadecimales, etc.):

Ejemplos:

1. Sea $a = 1/3$ en base 10, $a = 0.333\ldots$. Pero en una computadora de 32b en doble precisión $a = 0.33...3$ con 16 veces el dígito 3. Con error de discretización $e_n \simeq \sum_{k=16}^{\infty} 3/10^k$, en este caso llamado por **redondeo**.

• Errores por redondeo

En una computadora digital con arquitectura de 62b, sólo es posible almacenar en memoria un número finito de cifras (binarias, octales, hexadecimales, etc.):

Ejemplos:

1. Sea $a = 1/3$ en base 10, $a = 0.333\ldots$. Pero en una computadora de 32b en doble precisión $a = 0.33...3$ con 16 veces el dígito 3. Con error de discretización $e_n \simeq \sum_{k=16}^{\infty} 3/10^k$, en este caso llamado por **redondeo**.

2. Pensando en una aritmética con sólo 3 cifras decimales calcular $s = a + b$ y $p = a * b$ donde $a = 7.98$ y $b = 9.65$. Se tiene que $s = 17.63$ redondeada a 3 cifras es $\tilde{s} = 17.6$ con error $e_a = 0.03$ por redondeo. Y que $p = 77.007$ redondeado a 3 cifras es $\tilde{p} = 77.0$ con error $e_a = 0.007$ por redondeo.

• Errores por redondeo

En una computadora digital con arquitectura de 62b, sólo es posible almacenar en memoria un número finito de cifras (binarias, octales, hexadecimales, etc.):

Ejemplos:

1. Sea $a = 1/3$ en base 10, $a = 0.333\ldots$. Pero en una computadora de 32b en doble precisión $a = 0.33...3$ con 16 veces el dígito 3. Con error de discretización $e_n \simeq \sum_{k=16}^{\infty} 3/10^k$, en este caso llamado por **redondeo**.

2. Pensando en una aritmética con sólo 3 cifras decimales calcular $s = a + b$ y $p = a * b$ donde $a = 7.98$ y $b = 9.65$. Se tiene que $s = 17.63$ redondeada a 3 cifras es $\tilde{s} = 17.6$ con error $e_a = 0.03$ por redondeo. Y que $p = 77.007$ redondeado a 3 cifras es $\tilde{p} = 77.0$ con error $e_a = 0.007$ por redondeo.

- Dos comentarios importantes:

- Dos comentarios importantes:

1) El uso de la Computadora Digital va desde la administración contable y de inventario de la tienda de la esquina, hasta la investigación científica, pasando por una amplia gama de aplicaciones (control automatizado de procesos, desarrollo de prototipos, exploración geofísica de minerales, estudios de impacto ambiental, dinámica de enfermedades, etc.)

- Dos comentarios importantes:

1) El uso de la Computadora Digital va desde la administración contable y de inventario de la tienda de la esquina, hasta la investigación científica, pasando por una amplia gama de aplicaciones (control automatizado de procesos, desarrollo de prototipos, exploración geofísica de minerales, estudios de impacto ambiental, dinámica de enfermedades, etc.)

2) La matematización de las Ciencias y la Tecnología (desarrollo impresionante desde los años 1950's) debido a:

   – El surgimiento de áreas nuevas de la Matemática: I. de O., Control Optimo, Optimización Combinatoria, Control Estocástico, Sistemas Dinámicos y Complejidad, EDA's, Teoría y Resolución de Problemas Mal-planteados (ó Problemas Inversos), etc.

- Dos comentarios importantes:

1) El uso de la Computadora Digital va desde la administración contable y de inventario de la tienda de la esquina, hasta la investigación científica, pasando por una amplia gama de aplicaciones (control automatizado de procesos, desarrollo de prototipos, exploración geofísica de minerales, estudios de impacto ambiental, dinámica de enfermedades, etc.)

2) La matematización de las Ciencias y la Tecnología (desarrollo impresionante desde los años 1950's) debido a:

   – El surgimiento de áreas nuevas de la Matemática: I. de O., Control Optimo, Optimización Combinatoria, Control Estocástico, Sistemas Dinámicos y Complejidad, EDA's, Teoría y Resolución de Problemas Mal-planteados (ó Problemas Inversos), etc.

   – El advenimiento de la Computadora Digital:

- Dos comentarios importantes:

1) El uso de la Computadora Digital va desde la administración contable y de inventario de la tienda de la esquina, hasta la investigación científica, pasando por una amplia gama de aplicaciones (control automatizado de procesos, desarrollo de prototipos, exploración geofísica de minerales, estudios de impacto ambiental, dinámica de enfermedades, etc.)

2) La matematización de las Ciencias y la Tecnología (desarrollo impresionante desde los años 1950's) debido a:
   - El surgimiento de áreas nuevas de la Matemática: I. de O., Control Optimo, Optimización Combinatoria, Control Estocástico, Sistemas Dinámicos y Complejidad, EDA's, Teoría y Resolución de Problemas Mal-planteados (ó Problemas Inversos), etc.
   - El advenimiento de la Computadora Digital:

     "La Computadora Digital es un invento maravilloso del hombre equiparable a la máquina de vapor, el teléfono y el automóvil entre otros. Pero a diferencia de todos estos, la Computadora ha enaltecido el potencial intelectual del hombre, permitiéndole penetrar en los secretos de la naturaleza"

     Tikhonov A.N. et al., *Ill-Posed Problems in the Nature Sciences*, MIR (1987).

- Dos comentarios importantes:

1) El uso de la Computadora Digital va desde la administración contable y de inventario de la tienda de la esquina, hasta la investigación científica, pasando por una amplia gama de aplicaciones (control automatizado de procesos, desarrollo de prototipos, exploración geofísica de minerales, estudios de impacto ambiental, dinámica de enfermedades, etc.)

2) La matematización de las Ciencias y la Tecnología (desarrollo impresionante desde los años 1950's) debido a:

   – El surgimiento de áreas nuevas de la Matemática: I. de O., Control Optimo, Optimización Combinatoria, Control Estocástico, Sistemas Dinámicos y Complejidad, EDA's, Teoría y Resolución de Problemas Mal-planteados (ó Problemas Inversos), etc.

   – El advenimiento de la Computadora Digital:

     "La Computadora Digital es un invento maravilloso del hombre equiparable a la máquina de vapor, el teléfono y el automóvil entre otros. Pero a diferencia de todos estos, la Computadora ha enaltecido el potencial intelectual del hombre, permitiéndole penetrar en los secretos de la naturaleza"

     Tikhonov A.N. et al., *Ill-Posed Problems in the Nature Sciences*, MIR (1987).

II. Algo sobre Modelación Matemática

II. Algo sobre Modelación Matemática

- ¿Qué es un modelo?

II. Algo sobre Modelación Matemática

- ¿Qué es un modelo?

  Es la abstracción, simplificación o reducción de un objeto (real o abstracto), proceso, fenómeno. Es una caricatura de la algo, que destaca aquellos rasgos que interesan estudiar o investigar.

II. Algo sobre Modelación Matemática

- ¿Qué es un modelo?

  Es la abstracción, simplificación o reducción de un objeto (real o abstracto), proceso, fenómeno. Es una caricatura de la algo, que destaca aquellos rasgos que interesan estudiar o investigar.

  Los modelos pueden ser materiales como las maquetas y las personas. O bien, abstractos, como el átomo de Bohr y los modelos euclidianos y no-euclidianos del palno y el espacio.

II. Algo sobre Modelación Matemática

- ¿Qué es un modelo?

  Es la abstracción, simplificación o reducción de un objeto (real o abstracto), proceso, fenómeno. Es una caricatura de la algo, que destaca aquellos rasgos que interesan estudiar o investigar.

  Los modelos pueden ser materiales como las maquetas y las personas. O bien, abstractos, como el átomo de Bohr y los modelos euclidianos y no-euclidianos del palno y el espacio.

- ¿Qué es un modelo matemático?

II. Algo sobre Modelación Matemática

- ¿Qué es un modelo?

  Es la abstracción, simplificación o reducción de un objeto (real o abstracto), proceso, fenómeno. Es una caricatura de la algo, que destaca aquellos rasgos que interesan estudiar o investigar.

  Los modelos pueden ser materiales como las maquetas y las personas. O bien, abstractos, como el átomo de Bohr y los modelos euclidianos y no-euclidianos del palno y el espacio.

- ¿Qué es un modelo matemático?

  Es una caricatura de algo concreto (real), dada en términos matemáticos.

II. Algo sobre Modelación Matemática

- ¿Qué es un modelo?

  Es la abstracción, simplificación o reducción de un objeto (real o abstracto), proceso, fenómeno. Es una caricatura de la algo, que destaca aquellos rasgos que interesan estudiar o investigar.

  Los modelos pueden ser materiales como las maquetas y las personas. O bien, abstractos, como el átomo de Bohr y los modelos euclidianos y no-euclidianos del palno y el espacio.

- ¿Qué es un modelo matemático?

  Es una caricatura de algo concreto (real), dada en términos matemáticos.

- ¿Qué es la Modelación Matemática?

- ¿Qué es la Modelación Matemática?
  - Es el arte de traducir problemas de las ciencias, las ingenierías y el sector productivo en formulación matemática tratable, cuyo estudio teórico y numérico nos proporcione ideas y sugerencias útiles para dar una solución a los problemas originalmente planteados.

- ¿Qué es la Modelación Matemática?
  - Es el arte de traducir problemas de las ciencias, las ingenierías y el sector productivo en formulación matemática tratable, cuyo estudio teórico y numérico nos proporcione ideas y sugerencias útiles para dar una solución a los problemas originalmente planteados.
  - Es la vinculación del mundo de las matemáticas con el mundo real.

- ¿Qué es la Modelación Matemática?
  - Es el arte de traducir problemas de las ciencias, las ingenierías y el sector productivo en formulación matemática tratable, cuyo estudio teórico y numérico nos proporcione ideas y sugerencias útiles para dar una solución a los problemas originalmente planteados.
  - Es la vinculación del mundo de las matemáticas con el mundo real.
  - Es un "instrumento" mental para generar o profundizar el conocimiento. Por ejemplo, poner un número a algo.

- ¿Qué es la Modelación Matemática?
  - Es el arte de traducir problemas de las ciencias, las ingenierías y el sector productivo en formulación matemática tratable, cuyo estudio teórico y numérico nos proporcione ideas y sugerencias útiles para dar una solución a los problemas originalmente planteados.
  - Es la vinculación del mundo de las matemáticas con el mundo real.
  - Es un "instrumento" mental para generar o profundizar el conocimiento. Por ejemplo, poner un número a algo.
  - Es un recurso que permite elevar los niveles y calidad de la Producción.

- ¿Qué es la Modelación Matemática?

  - Es el arte de traducir problemas de las ciencias, las ingenierías y el sector productivo en formulación matemática tratable, cuyo estudio teórico y numérico nos proporcione ideas y sugerencias útiles para dar una solución a los problemas originalmente planteados.

  - Es la vinculación del mundo de las matemáticas con el mundo real.

  - Es un "instrumento" mental para generar o profundizar el conocimiento. Por ejemplo, poner un número a algo.

  - Es un recurso que permite elevar los niveles y calidad de la Producción.

Nota. En la modelación matemática se tiene una fuente de error que es muy difícil de valorar, pero que hay que tener muy en cuenta, según sea la aplicación. Como lo ilustra muy bien las tablas de balística (tiro parabólico).

- ¿Qué es la Modelación Matemática?

    - Es el arte de traducir problemas de las ciencias, las ingenierías y el sector productivo en formulación matemática tratable, cuyo estudio teórico y numérico nos proporcione ideas y sugerencias útiles para dar una solución a los problemas originalmente planteados.

    - Es la vinculación del mundo de las matemáticas con el mundo real.

    - Es un "instrumento" mental para generar o profundizar el conocimiento. Por ejemplo, poner un número a algo.

    - Es un recurso que permite elevar los niveles y calidad de la Producción.

Nota. En la modelación matemática se tiene una fuente de error que es muy difícil de valorar, pero que hay que tener muy en cuenta, según sea la aplicación. Como lo ilustra muy bien las tablas de balística (tiro parabólico).

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

  Ejemplos:

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

  Ejemplos:

  - El problema de hallar la recta que pase por un punto dado en el plano;

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por un punto dado en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$. Más incognitas que ecs.;

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

  Ejemplos:

  - El problema de hallar la recta que pase por un punto dado en el plano;
  - Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, m < n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$. Más incognitas que ecs.;
  - Resolver la ecuación $y'' = f(x, y, y')$.

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

  Ejemplos:

  - El problema de hallar la recta que pase por un punto dado en el plano;
  - Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$. Más incognitas que ecs.;
  - Resolver la ecuación $y'' = f(x, y, y')$.
  - Resolver la ecuación de Laplace $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = 0, \quad \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$.

III. Concepto de problema bien planteado:

Antes

III.1 Concepto de prob. bajo, sobre y bien-determinado

- Se dice que un porblema es bajo-determinado, si las condiciones del problema son insuficientes para poder hablar de la unicidad de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por un punto dado en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m < n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$. Más incognitas que ecs.;

  – Resolver la ecuación $y'' = f(x, y, y')$.

  – Resolver la ecuación de Laplace $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = 0, \quad \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$.

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

  Ejemplos:

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por tres puntos dados en el plano;

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por tres puntos dados en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, n < m,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por tres puntos dados en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, n < m,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

  – Resolver el problema con valores de frontera $y' = f(x, y), y(a) = A, y(b) = B, a < b$.

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por tres puntos dados en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, n < m,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

  – Resolver el problema con valores de frontera $y' = f(x,y), y(a) = A, y(b) = B, a < b$.

  – Resolver el problema de Hadamard (Ecn. de Poisson con C.I.): $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}), \quad \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Con condiciones iniciales $u(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}), \partial_n u(\underset{\sim}{x})$[a] $= g(\underset{\sim}{x}), \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$.

[a] $\partial_n u$ denota la derivada parcial normal de u sobre la frontera de Ω

- Se dice que un porblema es sobre-determinado, si las condiciones del problema a satisfacer son demasiadas para poder hablar de la existencia de la solución del problema.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pase por tres puntos dados en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, n < m,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

  – Resolver el problema con valores de frontera $y' = f(x,y), y(a) = A, y(b) = B, a < b$.

  – Resolver el problema de Hadamard (Ecn. de Poisson con C.I.): $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}), \quad \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Con condiciones iniciales $u(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}), \partial_n u(\underset{\sim}{x})$[a]$= g(\underset{\sim}{x}), \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$.

[a] $\partial_n u$ denota la derivada parcial normal de u sobre la frontera de Ω

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

  Ejemplos:

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pasa por dos puntos dados en el plano;

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

  Ejemplos:

  - El problema de hallar la recta que pasa por dos puntos dados en el plano;
  - Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m = n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pasa por dos puntos dados en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m = n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

  – Resolver la ecuación $y'' = f(x, y, y')$ con valores a la frontera

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad a < b.$$

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

  Ejemplos:

  - El problema de hallar la recta que pasa por dos puntos dados en el plano;
  - Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m = n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;
  - Resolver la ecuación $y'' = f(x, y, y')$ con valores a la frontera
  $$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad a < b.$$
  - Resolver la ecuación de potencial de Laplace $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = 0, \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ con condiciones de frontera $u(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}), \underset{\sim}{x} \in \partial_1\Omega,$ $\partial_n u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}), \underset{\sim}{x} \in \partial_2\Omega,$ donde $\partial_1\Omega \bigcup \partial_2\Omega = \partial\Omega$.

- Se dice que un porblema es bien-determinado, si las condiciones sobre el problema son suficientes para poder hablar de la existencia y unicidad de su solución.

  Ejemplos:

  – El problema de hallar la recta que pasa por dos puntos dados en el plano;

  – Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m = n,$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$;

  – Resolver la ecuación $y'' = f(x, y, y')$ con valores a la frontera

  $$y(a) = A, \quad y(b) = B, \quad a < b.$$

  – Resolver la ecuación de potencial de Laplace $\Delta u(\underset{\sim}{x}) = 0, \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ con condiciones de frontera $u(\underset{\sim}{x}) = f(\underset{\sim}{x}), \underset{\sim}{x} \in \partial_1\Omega,$ $\partial_n u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}), \underset{\sim}{x} \in \partial_2\Omega,$ donde $\partial_1\Omega \bigcup \partial_2\Omega = \partial\Omega$.

Un poco de historia

- Planteado un problema, la existencia y unicidad de su solución es un aspecto fundamental para la Matemática.

Un poco de historia

- Planteado un problema, la existencia y unicidad de su solución es un aspecto fundamental para la Matemática.
- J. Hadamard (Sur les Problemes Aux Derivées Partielies et leur Signification Physique, Bull. U. Princeton 13 (1902) 49-52), introdujo los términos de problema *Bien-* y *Mal-planteado*; entendiendo, por lo primero, un problema que en general es posible (i.e. existencia de la solución) y determinado (i.e. unicidad de la solución); y por lo segundo, un problema que no es Bien-planteado.

Un poco de historia

- Planteado un problema, la existencia y unicidad de su solución es un aspecto fundamental para la Matemática.

- J. Hadamard (Sur les Problemes Aux Derivées Partielies et leur Signification Physique, Bull. U. Princeton 13 (1902) 49-52), introdujo los términos de problema *Bien-* y *Mal-planteado*; entendiendo, por lo primero, un problema que en general es posible (i.e. existencia de la solución) y determinado (i.e. unicidad de la solución); y por lo segundo, un problema que no es Bien-planteado.
  - Hizo notar que las 3 ecuaciones clásicas de la Física Matemática (onda, calor y potencial) con condiciones iniciales y/o de frontera dictadas por la Física, según el caso, son casos típicos de problemas **B-pdos**.

Un poco de historia

- Planteado un problema, la existencia y unicidad de su solución es un aspecto fundamental para la Matemática.

- J. Hadamard (Sur les Problemes Aux Derivées Partielies et leur Signification Physique, Bull. U. Princeton 13 (1902) 49-52), introdujo los términos de problema *Bien-* y *Mal-planteado*; entendiendo, por lo primero, un problema que en general es posible (i.e. existencia de la solución) y determinado (i.e. unicidad de la solución); y por lo segundo, un problema que no es Bien-planteado.
  - Hizo notar que las 3 ecuaciones clásicas de la Física Matemática (onda, calor y potencial) con condiciones iniciales y/o de frontera dictadas por la Física, según el caso, son casos típicos de problemas **B-pdos**.
  - También mostró que la ecn. de Laplace en 3D con condiciones de Cauchy sobre el plano yz (problema de Hadamard) es en general imposible, luego **M-pdo**. Sin embargo, para Hadamard este problema carece de relevancia (¿Por qué?)

- En **1917**, en una reunión de la sociedad matemática Suiza, J. Hadamard dió a conocer su clásico ejemplo de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x > 0$$

- En **1917**, en una reunión de la sociedad matemática Suiza, J. Hadamard dió a conocer su clásico ejemplo de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x > 0$$

con condiciones iniciales:

$$u(0, y) = 0 \;\text{ y }\; \partial_x u(0, y) = A_n sen(ny)$$

- En **1917**, en una reunión de la sociedad matemática Suiza, J. Hadamard dió a conocer su clásico ejemplo de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x > 0$$

  con condiciones iniciales:

$$u(0, y) = 0 \ \text{ y } \ \partial_x u(0, y) = A_n sen(ny)$$

  cuya solución es:

$$u(x, y) = \frac{A_n}{n} senh(nx) sen(ny)$$

- En **1917**, en una reunión de la sociedad matemática Suiza, J. Hadamard dió a conocer su clásico ejemplo de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x > 0$$

con condiciones iniciales:

$$u(0, y) = 0 \;\; \text{y} \;\; \partial_x u(0, y) = A_n sen(ny)$$

cuya solución es:

$$u(x, y) = \frac{A_n}{n} senh(nx) sen(ny)$$

Afm. La solución no depende continuamente de sus datos ($u(0, y) = \partial_x u(0, y) \equiv 0$).

- En **1917**, en una reunión de la sociedad matemática Suiza, J. Hadamard dió a conocer su clásico ejemplo de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x > 0$$

con condiciones iniciales:

$$u(0, y) = 0 \ \text{ y } \ \partial_x u(0, y) = A_n sen(ny)$$

cuya solución es:

$$u(x, y) = \frac{A_n}{n} senh(nx) sen(ny)$$

Afm. La solución no depende continuamente de sus datos $(u(0, y) = \partial_x u(0, y) \equiv 0)$.
En efecto, en topología $\mathcal{C}^{p-1}$, se tiene que $A_n sen(ny), \text{ con } A_n = n^{-p}$, tiende a la función idénticamente cero. Pero para $x > 0$ dada: $|\frac{A_n}{n} sh(nx) sen(ny)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

- En **1917**, en una reunión de la sociedad matemática Suiza, J. Hadamard dió a conocer su clásico ejemplo de problema de Cauchy para la ecuación de Laplace:

$$\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0, \quad x > 0$$

con condiciones iniciales:

$$u(0, y) = 0 \ \text{ y } \ \partial_x u(0, y) = A_n sen(ny)$$

cuya solución es:

$$u(x, y) = \frac{A_n}{n} senh(nx) sen(ny)$$

Afm. La solución no depende continuamente de sus datos ($u(0, y) = \partial_x u(0, y) \equiv 0$). En efecto, en topología $\mathcal{C}^{p-1}$, se tiene que $A_n sen(ny), \text{ con } A_n = n^{-p}$, tiende a la función idénticamente cero. Pero para $x > 0$ dada: $|\frac{A_n}{n} sh(nx) sen(ny)| \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

- Hoy día, por un Problema B-pdo. (a la Hadamard) se entiende un problema cuya solución existe, es única y depende continuamente de sus datos.

- Hoy día, por un Problema B-pdo. (a la Hadamard) se entiende un problema cuya solución existe, es única y depende continuamente de sus datos.
- Si un cierto fenómeno en estudio no cumpliera con esta condición, entonces muy pequeños cambios en sus datos bastarián para cambiar radicalmente su marcha. Así, no parecería estar gobernado por leyes precisas, sino más bien por el azar (Éste es precisamente el concepto de azar de Poincaré).

- Hoy día, por un Problema B-pdo. (a la Hadamard) se entiende un problema cuya solución existe, es única y depende continuamente de sus datos.
- Si un cierto fenómeno en estudio no cumpliera con esta condición, entonces muy pequeños cambios en sus datos bastarián para cambiar radicalmente su marcha. Así, no parecería estar gobernado por leyes precisas, sino más bien por el azar (Éste es precisamente el concepto de azar de Poincaré).

• **Reflexión.** Desde el punto de vista de la Física, o más generalmente de la Modelación Matemática, **la dependencia continua de la solución con respecto de sus datos, es una condición natural y fundamental**; pues en la vida práctica se tienen que considerar las fuentes de error en Computación Científica siguientes: (i) de medición, pues es usual que los datos del problema se obtengan por medición, (ii) de modelación, al hacerse simplificaciones de la realidad, (iii) de discretización, debidos a procesos de discretización, al calcular integrales, sustituir derivadas por diferencias finitas o reemplazar espacios de funciones por espacios de elementos finitos, y (iv) de cálculo, a causa que los cálculos numéricos en Aritmética de Punto Flotante (APF) o precisión finita.

- Hoy día, por un Problema B-pdo. (a la Hadamard) se entiende un problema cuya solución existe, es única y depende continuamente de sus datos.
- Si un cierto fenómeno en estudio no cumpliera con esta condición, entonces muy pequeños cambios en sus datos bastarián para cambiar radicalmente su marcha. Así, no parecería estar gobernado por leyes precisas, sino más bien por el azar (Éste es precisamente el concepto de azar de Poincaré).

• **Reflexión.** Desde el punto de vista de la Física, o más generalmente de la Modelación Matemática, **la dependencia continua de la solución con respecto de sus datos, es una condición natural y fundamental**; pues en la vida práctica se tienen que considerar las fuentes de error en Computación Científica siguientes: (i) de medición, pues es usual que los datos del problema se obtengan por medición, (ii) de modelación, al hacerse simplificaciones de la realidad, (iii) de discretización, debidos a procesos de discretización, al calcular integrales, sustituir derivadas por diferencias finitas o reemplazar espacios de funciones por espacios de elementos finitos, y (iv) de cálculo, a causa que los cálculos numéricos en Aritmética de Punto Flotante (APF) o precisión finita.

IV Problemas Mal-planteados.

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

1) De la Física Matemática:

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

1) De la Física Matemática:

1.1) Problema de Hadamard: Ecuación de potencial con C.I. o de Cauchy.

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

1) De la Física Matemática:

1.1) Problema de Hadamard: Ecuación de potencial con C.I. o de Cauchy.

1.2) Ecuación de onda con Condiciones de Dirichlet.

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

1) De la Física Matemática:

1.1) Problema de Hadamard: Ecuación de potencial con C.I. o de Cauchy.

1.2) Ecuación de onda con Condiciones de Dirichlet.

1.3) Problema retógrado del Calor*.

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

1) De la Física Matemática:

1.1) Problema de Hadamard: Ecuación de potencial con C.I. o de Cauchy.

1.2) Ecuación de onda con Condiciones de Dirichlet.

1.3) Problema retógrado del Calor*.

Considérese el problema directo de la ecuación de calor para una barra de longitud unitaria térmicamente aislada

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 \leq x \leq 1, \text{ y } t \geq 0$$

con Condiciones Iniciales (C.I.s) $u(x,0) = f(x)$ y de frontera $u(0,t) = u(1,t) = 0$, para toda $0 \leq t$.

IV Problemas Mal-planteados.

IV.1 Clásicos.

1) De la Física Matemática:

1.1) Problema de Hadamard: Ecuación de potencial con C.I. o de Cauchy.

1.2) Ecuación de onda con Condiciones de Dirichlet.

1.3) Problema retógrado del Calor*.

Considérese el problema directo de la ecuación de calor para una barra de longitud unitaria térmicamente aislada

$$\partial_t u = \partial_x^2 u, \quad 0 \leq x \leq 1, \text{ y } t \geq 0$$

con Condiciones Iniciales (C.I.s) $u(x,0) = f(x)$ y de frontera $u(0,t) = u(1,t) = 0$, para toda $0 \leq t$.

El problema retrógrado del calor consiste en determinar la C.I. $f(x)$ a partir de la distribución de temperatura observada $h(x) = u(x,T),\ 0 < x < 1$ en un instante $T > 0$ dado.

El problema retrógrado del calor consiste en determinar la C.I. $f(x)$ a partir de la distribución de temperatura observada $h(x) = u(x, T),\ 0 < x < 1$ en un instante $T > 0$ dado.

Por el método de separación de variables es directo verificar que la solución del problema directo viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\, cos\, 2\pi k\, x + b_k\, sen\, 2\pi k\, x) e^{-\lambda_k\, t} \tag{1}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de $f \in L_2[0,1]$, y en donde $\lambda_k = O(k^2)$.

El problema retrógrado del calor consiste en determinar la C.I. $f(x)$ a partir de la distribución de temperatura observada $h(x) = u(x, T),\ 0 < x < 1$ en un instante $T > 0$ dado.

Por el método de separación de variables es directo verificar que la solución del problema directo viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k\, x + b_k \operatorname{sen} 2\pi k\, x) e^{-\lambda_k t} \tag{1}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de $f \in L_2[0,1]$, y en donde $\lambda_k = O(k^2)$. De (1) se sigue que los coeficientes de Fourier de $h(x)$ vienen dados por

$$\tilde{a}_k = a_k e^{-\lambda_k}, \quad \tilde{b}_k = b_k e^{-\lambda_k}$$

El problema retrógrado del calor consiste en determinar la C.I. $f(x)$ a partir de la distribución de temperatura observada $h(x) = u(x,T),\ 0 < x < 1$ en un instante $T > 0$ dado.

Por el método de separación de variables es directo verificar que la solución del problema directo viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\, cos\, 2\pi k\, x + b_k\, sen\, 2\pi k\, x) e^{-\lambda_k\, t} \tag{1}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de $f \in L_2[0,1]$, y en donde $\lambda_k = O(k^2)$. De (1) se sigue que los coeficientes de Fourier de $h(x)$ vienen dados por

$$\tilde{a}_k = a_k e^{-\lambda_k}, \quad \tilde{b}_k = b_k e^{-\lambda_k}$$

Luego el problema retrógrado del calor se reduce a determinar los coeficientes de Fourier de $f(x)$ a partir de los correspondientes de $h(x)$.

El problema retrógrado del calor consiste en determinar la C.I. $f(x)$ a partir de la distribución de temperatura observada $h(x) = u(x,T),\ 0 < x < 1$ en un instante $T > 0$ dado.

Por el método de separación de variables es directo verificar que la solución del problema directo viene dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k\, cos\, 2\pi k\, x + b_k\, sen\, 2\pi k\, x) e^{-\lambda_k\, t} \tag{1}$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de $f \in L_2[0,1]$, y en donde $\lambda_k = O(k^2)$. De (1) se sigue que los coeficientes de Fourier de $h(x)$ vienen dados por

$$\tilde{a}_k = a_k e^{-\lambda_k}, \quad \tilde{b}_k = b_k e^{-\lambda_k}$$

Luego el problema retrógrado del calor se reduce a determinar los coeficientes de Fourier de $f(x)$ a partir de los correspondientes de $h(x)$.

Ahora, si se considera a la función $h_p(x)$ con coeficiente de Fourier $a'_k = \tilde{a}_k + \varepsilon_k$ y $b'_k = \tilde{b}_k + \varepsilon_k$, donde $\varepsilon_k = \dfrac{\varepsilon\, \pi}{\sqrt{2 \cdot 6}\, k}$, en lugar de $h(x)$ entonces considerando que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$, es directo verificar que:

en lugar de $h(x)$ entonces considerando que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$, es directo verificar que:

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|_{L_2}^2 = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|^2_{L_2} = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

Lo prueba que el problema es **M-pdo** a la Hadamard. No es difícil ver que aunque $f(x)$ sea muy suave (i.e., $f \in C^p$ con $p \gg 1$), este problema sigue siendo **M-pdo**

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|_{L_2}^2 = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

Lo prueba que el problema es **M-pdo** a la Hadamard. No es difícil ver que aunque $f(x)$ sea muy suave (i.e., $f \in C^p$ con $p \gg 1$), este problema sigue siendo **M-pdo** Este problema tiene una aplicación importante es el diseño de microchips en su fase de litografía por haces de electrones sobre hojuelas de ... %buscar referencia

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|_{L_2}^2 = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

Lo prueba que el problema es **M-pdo** a la Hadamard. No es difícil ver que aunque $f(x)$ sea muy suave (i.e., $f \in C^p$ con $p \gg 1$), este problema sigue siendo **M-pdo** Este problema tiene una aplicación importante es el diseño de microchips en su fase de litografía por haces de electrones sobre hojuelas de ... %buscar referencia

2) Del Análisis:

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|^2_{L_2} = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

Lo prueba que el problema es **M-pdo** a la Hadamard. No es difícil ver que aunque $f(x)$ sea muy suave (i.e., $f \in C^p$ con $p \gg 1$), este problema sigue siendo **M-pdo** Este problema tiene una aplicación importante es el diseño de microchips en su fase de litografía por haces de electrones sobre hojuelas de ... %buscar referencia

2) Del Análisis:

2.1) Diferenciación numérica.

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|^2_{L_2} = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

Lo prueba que el problema es **M-pdo** a la Hadamard. No es difícil ver que aunque $f(x)$ sea muy suave (i.e., $f \in C^p$ con $p \gg 1$), este problema sigue siendo **M-pdo** Este problema tiene una aplicación importante es el diseño de microchips en su fase de litografía por haces de electrones sobre hojuelas de ... %buscar referencia

2) Del Análisis:

2.1) Diferenciación numérica.

Ejemplo: Considérense una función $f \in C^1[0,1]$ y sean $f_k(x) = f(x) + A_k sen\, 2\pi k^2\, x$ con $A_k = 1/2\pi k$. Claramente, se tiene que

$$\|f - f_k\|_\infty = \frac{1}{2\pi k} \to 0$$

y que

$$\|f' - f'_k\|_\infty = k \to \infty$$

(i) $\|h_p - h\|_{L_2} = \varepsilon$, y que

(ii) $\|f_p - f\|^2_{L_2} = \varepsilon^2 \lim_{n\to\infty} \sum_0^n e^{2\lambda_k T} \to \infty$

Lo prueba que el problema es **M-pdo** a la Hadamard. No es difícil ver que aunque $f(x)$ sea muy suave (i.e., $f \in C^p$ con $p \gg 1$), este problema sigue siendo **M-pdo** Este problema tiene una aplicación importante es el diseño de microchips en su fase de litografía por haces de electrones sobre hojuelas de ... %buscar referencia

2) Del Análisis:

2.1) Diferenciación numérica.

Ejemplo: Considérense una función $f \in C^1[0,1]$ y sean $f_k(x) = f(x) + A_k sen\, 2\pi k^2\, x$ con $A_k = 1/2\pi k$. Claramente, se tiene que

$$\|f - f_k\|_\infty = \frac{1}{2\pi k} \to 0$$

y que

$$\|f' - f_k'\|_\infty = k \to \infty$$

2.2) Sumación de Series de Fourier (Véase Arsenin-Tikjonov [?], pág. 11).

2.2) Sumación de Series de Fourier (Véase Arsenin-Tikjonov [?], pág. 11).

En efecto, condérese para $f \in C^1[0,1]$, su serie de Fouier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, cos 2\pi \, kx$$

Y sea $\tilde{f}(x)$, con coeficientes de Fourier perturbados $\tilde{a}_k = a_k + \epsilon \frac{\sqrt{6}}{\pi k}$. Se tiene que

i) $\|\{\tilde{a}_k\} - \{a_k\}\|_{l_2} = \epsilon$. Y,

ii) $\|\tilde{f} - f\|_\infty = \epsilon \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} cos \, 2\pi kx$ que en $t = 0$, por ejemplo, vale ∞.

Luego, este es un problema M-pdo a la Hadamard

2.2) Sumación de Series de Fourier (Véase Arsenin-Tikjonov [?], pág. 11).

En efecto, condérese para $f \in C^1[0,1]$, su serie de Fouier

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \, cos 2\pi \, kx$$

Y sea $\tilde{f}(x)$, con coeficientes de Fourier perturbados $\tilde{a}_k = a_k + \epsilon \frac{\sqrt{6}}{\pi k}$. Se tiene que

i) $\|\{\tilde{a}_k\} - \{a_k\}\|_{l_2} = \epsilon$. Y,

ii) $\|\tilde{f} - f\|_\infty = \epsilon \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} cos \, 2\pi kx$ que en $t = 0$, por ejemplo, vale ∞.

Luego, este es un problema M-pdo a la Hadamard

2.3) La ecuación de Fredholm de primera especie:

$$\int_0^1 k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $k(\cdot,\cdot)$ y f son funciones continua.

2.3) La ecuación de Fredholm de primera especie:

$$\int_0^1 k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $k(\cdot,\cdot)$ y f son funciones continua.

Sea u la solución de esta ecuación, y sean $f_k(x) = f(x) + A\int_0^1 k(x,t)cos\,2\pi ktdt$ con $A > 1$ dada, y $u_k(x) = u(x) + A\,cos\,2\pi kx$. Es directo ver que

i) $\|f_k - f\|_\infty = max_{x\in[0,1]} A\int_0^1 k(x,t)cos\,2\pi ktdt \to 0$. Y,

ii) $\|u_k - u\|_\infty = A$

Lo que prueba que este problema es M-pdo a la Hadamard.

2.4) Continuación armómica.

2.3) La ecuación de Fredholm de primera especie:

$$\int_0^1 k(x,t)u(t)dt = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

donde $k(\cdot,\cdot)$ y f son funciones continua.

Sea u la solución de esta ecuación, y sean $f_k(x) = f(x) + A\int_0^1 k(x,t)cos\, 2\pi ktdt$ con $A > 1$ dada, y $u_k(x) = u(x) + A\, cos\, 2\pi kx$. Es directo ver que

i) $\|f_k - f\|_\infty = max_{x\in[0,1]} A\int_0^1 k(x,t)cos\, 2\pi ktdt \to 0$. Y,

ii) $\|u_k - u\|_\infty = A$

Lo que prueba que este problema es M-pdo a la Hadamard.

2.4) Continuación armómica.

Pensando en geometría circular, el problema consiste en extender la función armónica $u(\rho,\theta)$ del disco

$$D_r = \{(\rho,\theta)|0 \leq \rho \leq r,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

al disco

$$D_R = \{(\rho,\theta)|\, 0 \leq \rho \leq R,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \quad (R > r)$$

De la representación integral de Poisson para $u(\rho,\theta)$ en D_R, dada $u_R(\theta)=u(R,\theta)$:

$$u(\rho,\theta)=\int_0^{2\pi} k_R(\rho,\theta;\varphi)u_R(\varphi)d\varphi$$

donde

$$k_R(\rho,\theta;\varphi)=\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho cos(\varphi-\theta)}$$

se sigue que la solución del problema se reduce, dada $f(\theta)=u(r,\theta)$ a resolver la ecuación integral de Fredholm de primer tipo,

$$\int_0^{2\pi} k_R(\theta;\varphi)u_R(\varphi)d\varphi=f(\theta),\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

donde $k_R(\theta;\varphi)=k_R(\rho,\theta;\varphi)$. Luego, se sigue que este problema es M-pdo a la Hadamard.

IV.2 De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos).

IV.2 De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos).

1) Tomografía computarizada (ultrasonido, impedancia eléctrica-mamografía, emisión y resonancia magnética).

IV.2 De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos).

1) Tomografía computarizada (ultrasonido, impedancia eléctrica-mamografía, emisión y resonancia magnética).

2) Exploración geofísica de minerales (gravimetría, sismología, impedancia eléctrica, etc.) y valoración de reservas de petróleo en primera y segunda fase.

IV.2 De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos).

1) Tomografía computarizada (ultrasonido, impedancia eléctrica-mamografía, emisión y resonancia magnética).

2) Exploración geofísica de minerales (gravimetría, sismología, impedancia eléctrica, etc.) y valoración de reservas de petróleo en primera y segunda fase.

3) Determinación del coeficiente de transmisibilidad en acuíferos confinados.

IV.2 De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos).

1) Tomografía computarizada (ultrasonido, impedancia eléctrica-mamografía, emisión y resonancia magnética).

2) Exploración geofísica de minerales (gravimetría, sismología, impedancia eléctrica, etc.) y valoración de reservas de petróleo en primera y segunda fase.

3) Determinación del coeficiente de transmisibilidad en acuíferos confinados.

En general, problemas inversos mal-planteados son frecuentemente encontrados en las ciencias y las ingenierías (astrofísica, geofísica, espectroscopía, diseño de antenas, diseño óptimo de sistemas técnicos y construcciones de ingeniería, planeación óptima, control óptimo de diversos procesos, entre muchos otros.)

IV.2 De la tecnología (Casos típicos de problemas inversos).

1) Tomografía computarizada (ultrasonido, impedancia eléctrica-mamografía, emisión y resonancia magnética).

2) Exploración geofísica de minerales (gravimetría, sismología, impedancia eléctrica, etc.) y valoración de reservas de petróleo en primera y segunda fase.

3) Determinación del coeficiente de transmisibilidad en acuíferos confinados.

En general, problemas inversos mal-planteados son frecuentemente encontrados en las ciencias y las ingenierías (astrofísica, geofísica, espectroscopía, diseño de antenas, diseño óptimo de sistemas técnicos y construcciones de ingeniería, planeación óptima, control óptimo de diversos procesos, entre muchos otros.)

Ejemplo ilustrativo.

Reconstruir el coeficiente de “conductividad eléctrica” $\sigma(\underset{\sim}{x})$ en el problema de valores a la frontera:

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_1$$

$$\partial_n u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_2$$

$$(\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset,\ \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \partial D)$$

conociendo una tabla de valores de su solución $u(\underset{\sim}{x})$:

Ejemplo ilustrativo.

Reconstruir el coeficiente de "conductividad eléctrica" $\sigma(\underset{\sim}{x})$ en el problema de valores a la frontera:

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_1$$

$$\partial_n u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_2$$

$$(\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset,\ \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \partial D)$$

conociendo una tabla de valores de su solución $u(\underset{\sim}{x})$:

$$T_u = \{u_j = (\varphi_j \circ A)[\sigma_a] + \varepsilon_j, j = 1, n\}$$

Ejemplo ilustrativo.

Reconstruir el coeficiente de "conductividad eléctrica" $\sigma(\underset{\sim}{x})$ en el problema de valores a la frontera:

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_1$$

$$\partial_n u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_2$$

$$(\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset,\ \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \partial D)$$

conociendo una tabla de valores de su solución $u(\underset{\sim}{x})$:

$$T_u = \{u_j = (\varphi_j \circ A)[\sigma_a] + \varepsilon_j, j = 1, n\}$$

donde $(\varphi_j \circ A)[\sigma_a] \equiv A[\alpha](\underset{\sim}{x}_j)$, con φ_j el funcional de evalución de la solución $u(\underset{\sim}{x})$ en $\{\underset{\sim}{x}_j\} \subset D$ y $A : C(D) \to C^2(D)$ está dado por $\sigma_a(\underset{\sim}{x}) \xrightarrow{A} u(\underset{\sim}{x})$ y $\varepsilon_j, j = \overline{1, n}$ son variables aleatorias $i.i.d.\ \sim (0, \sigma^2)$.

Ejemplo ilustrativo.

Reconstruir el coeficiente de "conductividad eléctrica" $\sigma(\underset{\sim}{x})$ en el problema de valores a la frontera:

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_1$$

$$\partial_n u(\underset{\sim}{x}) = 0,\ \underset{\sim}{x} \in \Gamma_2$$

$$(\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \emptyset,\ \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 = \partial D)$$

conociendo una tabla de valores de su solución $u(\underset{\sim}{x})$:

$$T_u = \{u_j = (\varphi_j \circ A)[\sigma_a] + \varepsilon_j, j = 1, n\}$$

donde $(\varphi_j \circ A)[\sigma_a] \equiv A[\alpha](\underset{\sim}{x}_j)$, con φ_j el funcional de evalución de la solución $u(\underset{\sim}{x})$ en $\{\underset{\sim}{x}_j\} \subset D$ y $A : C(D) \to C^2(D)$ está dado por $\sigma_a(\underset{\sim}{x}) \xrightarrow{A} u(\underset{\sim}{x})$ y $\varepsilon_j, j = \overline{1, n}$ son variables aleatorias $i.i.d.\ \sim (0, \sigma^2)$.

Nota. Usualmente no se tiene dado explícitamente el operador *continuo* (**usualmente no lineal**) A explícitamente. Pero siempre posible su evaluación numérica A_h, donde $h > 0$ es una medida del tamaño de las celdas de la malla (discretización del dominio D) y para el cual se tiene $|(\varphi_j \circ A)[u] - (\varphi_j \circ A_h)[u]| \simeq O(h^q)$, para cierta $q > 0$.

Nota. Usualmente no se tiene dado explícitamente el operador *continuo* (**usualmente no lineal**) A explícitamente. Pero siempre posible su evaluación numérica A_h, donde $h > 0$ es una medida del tamaño de las celdas de la malla (discretización del dominio D) y para el cual se tiene $|(\varphi_j \circ A)[u] - (\varphi_j \circ A_h)[u]| \simeq O(h^q)$, para cierta $q > 0$.

Reconstrucción de funciones bajo la acción de un operador

Nota. Usualmente no se tiene dado explícitamente el operador *continuo* (**usualmente no lineal**) A explícitamente. Pero siempre posible su evaluación numérica A_h, donde $h > 0$ es una medida del tamaño de las celdas de la malla (discretización del dominio D) y para el cual se tiene $|(\varphi_j \circ A)[u] - (\varphi_j \circ A_h)[u]| \simeq O(h^q)$, para cierta $q > 0$.

Reconstrucción de funciones bajo la acción de un operador

- Sean $A, A_h : D_A \subset B \to H$ operadores (o transformadas) continuos, pero A con inverso no continuo (B de Banach y H de Hilbert), $\{\varphi_j\}_{j=1}^{n} \subset H^*$ y $W(\overset{i}{\hookrightarrow} B)$ de Hilbert, i inmersión continua o compacta.

Nota. Usualmente no se tiene dado explícitamente el operador *continuo* (**usualmente no lineal**) A explícitamente. Pero siempre posible su evaluación numérica A_h, donde $h > 0$ es una medida del tamaño de las celdas de la malla (discretización del dominio D) y para el cual se tiene $|(\varphi_j \circ A)[u] - (\varphi_j \circ A_h)[u]| \simeq O(h^q)$, para cierta $q > 0$.

Reconstrucción de funciones bajo la acción de un operador

- Sean $A, A_h : D_A \subset B \to H$ operadores (o transformadas) continuos, pero A con inverso no continuo (B de Banach y H de Hilbert), $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset H^*$ y $W(\overset{i}{\hookrightarrow} B)$ de Hilbert, i inmersión continua o compacta.

Problema : Dada la tabla de valores observados de $g \in B$:

$$T_g = \{y_j = \varphi_j[A_h[g]] + \varepsilon_j, j = 1, n\}$$

donde $\varepsilon_j, j = \overline{1, n}$ son variables aleatorias $i.i.d. \sim (0, \sigma^2)$. Hallar $u \in W$ reconstrución de g.

Nota. Usualmente no se tiene dado explícitamente el operador *continuo* (**usualmente no lineal**) A explícitamente. Pero siempre posible su evaluación numérica A_h, donde $h > 0$ es una medida del tamaño de las celdas de la malla (discretización del dominio D) y para el cual se tiene $|(\varphi_j \circ A)[u] - (\varphi_j \circ A_h)[u]| \simeq O(h^q)$, para cierta $q > 0$.

Reconstrucción de funciones bajo la acción de un operador

- Sean $A, A_h : D_A \subset B \to H$ operadores (o transformadas) continuos, pero A con inverso no continuo (B de Banach y H de Hilbert), $\{\varphi_j\}_{j=1}^n \subset H^*$ y $W(\overset{i}{\hookrightarrow} B)$ de Hilbert, i inmersión continua o compacta.

Problema : Dada la tabla de valores observados de $g \in B$:

$$T_g = \{y_j = \varphi_j[A_h[g]] + \varepsilon_j, j = 1, n\}$$

donde $\varepsilon_j, j = \overline{1, n}$ son variables aleatorias $i.i.d.\ \sim (0, \sigma^2)$. Hallar $u \in W$ reconstrución de g.

- Nótese que este es un problema, claramente, *bajo-determinado*.

- Nótese que este es un problema, claramente, *bajo-determinado*.

Regularización a la Tíjonov: bosquejo

- Nótese que este es un problema, claramente, *bajo-determinado*.

Regularización a la Tíjonov: bosquejo

- Si $L : W(\equiv H^m(D)) \to L_2(D)$ es un operador diferencial de orden m, entonces el problema anterior se puede re-emplazar por el problema *variacional* siguiente:

- Nótese que este es un problema, claramente, *bajo-determinado*.

Regularización a la Tíjonov: bosquejo

- Si $L : W(\equiv H^m(D)) \to L_2(D)$ es un operador diferencial de orden m, entonces el problema anterior se puede re-emplazar por el problema *variacional* siguiente:

Problema . Hallar $g_\gamma \in W \bigcap D_A$ *reconstrución regularizada* de g tal que minimice la funcional

$$J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}] \equiv \sum_{j=1}^{n} w_j(y_j - \varphi_j[A_h[\tilde{g}]])^2 + \gamma S[\tilde{g}],\ \gamma > 0,\ \text{dado}$$

donde $w_j > 0,\ j = \overline{1,n}$ son pesos y $S[u] \equiv \int_D |L[\tilde{g}](\underset{\sim}{\xi})|^2 d\underset{\sim}{\xi}$ es un funcional estabilizante o suavizante.

- Nótese que este es un problema, claramente, *bajo-determinado*.

Regularización a la Tíjonov: bosquejo

- Si $L : W(\equiv H^m(D)) \to L_2(D)$ es un operador diferencial de orden m, entonces el problema anterior se puede re-emplazar por el problema *variacional* siguiente:

Problema . Hallar $g_\gamma \in W \bigcap D_A$ *reconstrución regularizada* de g tal que minimice la funcional

$$J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}] \equiv \sum_{j=1}^{n} w_j (y_j - \varphi_j[A_h[\tilde{g}]])^2 + \gamma S[\tilde{g}],\ \gamma > 0,\ \text{dado}$$

donde $w_j > 0,\ j = \overline{1,n}$ son pesos y $S[u] \equiv \int_D |L[\tilde{g}](\underset{\sim}{\xi})|^2 d\underset{\sim}{\xi}$ es un funcional estabilizante o suavizante.

- Nótese que este problema es bien-determinado y que la funcional de Tíjonov $J_{\gamma,h}[\tilde{g}]$ es propia, acotada inferiormente y coersitiva para $\gamma > 0$ (i.e., $J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}] \to +\infty$, cuando $\|u\|_W \to \infty$).

- Nótese que este es un problema, claramente, *bajo-determinado*.

Regularización a la Tíjonov: bosquejo

- Si $L : W(\equiv H^m(D)) \to L_2(D)$ es un operador diferencial de orden m, entonces el problema anterior se puede re-emplazar por el problema *variacional* siguiente:

Problema . Hallar $g_\gamma \in W \bigcap D_A$ *reconstrución regularizada* de g tal que minimice la funcional

$$J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}] \equiv \sum_{j=1}^{n} w_j(y_j - \varphi_j[A_h[\tilde{g}]])^2 + \gamma S[\tilde{g}],\ \gamma > 0,\ \text{dado}$$

donde $w_j > 0,\ j = \overline{1,n}$ son pesos y $S[u] \equiv \int_D |L[\tilde{g}](\underset{\sim}{\xi})|^2 d\underset{\sim}{\xi}$ es un funcional estabilizante o suavizante.

- Nótese que este problema es bien-determinado y que la funcional de Tíjonov $J_{\gamma,h}[\tilde{g}]$ es propia, acotada inferiormente y coersitiva para $\gamma > 0$ (i.e., $J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}] \to +\infty$, cuando $\|u\|_W \to \infty$).

- Además convexa (de hecho cuadrática), cuando A es lineal. Luego, bajo el supuesto que $ker((\bigcap_{j=1}^{n} ker(\varphi_j \circ A_h)) \bigcap ker(L)) = \emptyset$, para toda $\gamma > 0$ dada, el problema

$$\min_{u \in W} J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}]$$

tiene una única solución g_γ, la cual depende continuamente de los datos del problema original.

- Además convexa (de hecho cuadrática), cuando A es lineal. Luego, bajo el supuesto que $ker((\bigcap_{j=1}^{n} ker(\varphi_j \circ A_h)) \bigcap ker(L)) = \emptyset$, para toda $\gamma > 0$ dada, el problema

$$\min_{u \in W} J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}]$$

tiene una única solución g_γ, la cual depende continuamente de los datos del problema original.

- Más aun, si g es suficientemente regular entonces $u_\gamma \overset{W}{\to} g$, como $\gamma(\equiv \gamma(h,\sigma)\,), h, \sigma \to 0^+$ coordinadamente con cierta regla.

- Además convexa (de hecho cuadrática), cuando A es lineal. Luego, bajo el supuesto que $ker((\bigcap_{j=1}^{n} ker(\varphi_j \circ A_h))\bigcap ker(L)) = \emptyset$, para toda $\gamma > 0$ dada, el problema

$$\min_{u \in W} J_{\gamma,h,\sigma}[\tilde{g}]$$

tiene una única solución g_γ, la cual depende continuamente de los datos del problema original.

- Más aun, si g es suficientemente regular entonces $u_\gamma \overset{W}{\to} g$, como $\gamma(\equiv \gamma(h,\sigma)\,), h, \sigma \to 0^+$ coordinadamente con cierta regla.

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

Determinación numérica del rango de una matriz Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, determinar su rango numérico $rgo_{\#}(A)$.

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

Determinación numérica del rango de una matriz Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, determinar su rango numérico $rgo_{\#}(A)$.

- El $rgo_{\#}(A)$, se obtiene mediante una descomposición numérica (LU, QR, RRQR, DVS, etc.) de A. O sea:

$$rgo_{\#}(A) = rgo(A + E)$$

donde $\|E\| \lesssim n\|A\|u$, siendo u la unidad de redondeo de la Aritm. Pto. Flotante usada.

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

Determinación numérica del rango de una matriz Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, determinar su rango numérico $rgo_{\#}(A)$.

- El $rgo_{\#}(A)$, se obtiene mediante una descomposición numérica (LU, QR, RRQR, DVS, etc.) de A. O sea:

$$rgo_{\#}(A) = rgo(A + E)$$

donde $\|E\| \lesssim n\|A\|u$, siendo u la unidad de redondeo de la Aritm. Pto. Flotante usada.

- **Ilustación**: Considérense las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad , \text{ con } \epsilon > 0$$

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

Determinación numérica del rango de una matriz Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, determinar su rango numérico $rgo_{\#}(A)$.

- El $rgo_{\#}(A)$, se obtiene mediante una descomposición numérica (LU, QR, RRQR, DVS, etc.) de A. O sea:

$$rgo_{\#}(A) = rgo(A + E)$$

donde $\|E\| \lesssim n\|A\|u$, siendo u la unidad de redondeo de la Aritm. Pto. Flotante usada.

- **Ilustación**: Considérense las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad , \text{ con } \epsilon > 0$$

Claramente $rgo(A) = 1$ y $rgo(A_\epsilon) = 2$, para toda $\epsilon > 0$. Luego, $\lim_{\epsilon \to 0} rgo(A_\epsilon) > rgo(A)$.

IV.3 Del Algebra Matricial Numérica.

Tres problemas mal-planteados del Algebra Matricial estrechamente relacionados:

Determinación numérica del rango de una matriz Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, determinar su rango numérico $rgo_{\#}(A)$.

- El $rgo_{\#}(A)$, se obtiene mediante una descomposición numérica (LU, QR, RRQR, DVS, etc.) de A. O sea:

$$rgo_{\#}(A) = rgo(A + E)$$

donde $\|E\| \lesssim n\|A\|u$, siendo u la unidad de redondeo de la Aritm. Pto. Flotante usada.

- **Ilustación**: Considérense las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_\epsilon = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \quad , \text{ con } \epsilon > 0$$

Claramente $rgo(A) = 1$ y $rgo(A_\epsilon) = 2$, para toda $\epsilon > 0$. Luego, $\lim_{\epsilon \to 0} rgo(A_\epsilon) > rgo(A)$.

Por tanto, el problema de determinar el rango numérico de una matriz es un problema M-pdo.

Por tanto, el problema de determinar el rango numérico de una matriz es un problema M-pdo.

Ejercicio. Demuestra que la función $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ es semi-continua inferiormente.

Por tanto, el problema de determinar el rango numérico de una matriz es un problema M-pdo.

Ejercicio. Demuestra que la función $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ es semi-continua inferiormente.

Ejercicio. Demuestra que $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ restringida a las matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango máximo (i.e., $rgo(A) = min\{m, n\}$), es una función continua.

Por tanto, el problema de determinar el rango numérico de una matriz es un problema M-pdo.

Ejercicio. Demuestra que la función $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ es semi-continua inferiormente.

Ejercicio. Demuestra que $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ restringida a las matrices $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango máximo (i.e., $rgo(A) = min\{m, n\}$), es una función continua.

- En la práctica, esto se manifiesta en la sobre determinación de $rgo(A)$, con graves consecuencias para los métodos de truncamiento, en el llamado caso de **rango mal-determinado (i.e., cuando no hay una clara separación entre valores singulares "grandes" y "muy pequeños")**, para el cálculo de $A^\dagger$ y la forma canónica de Jordan $A = XJX^{-1}$ de A, incluyendo los de regularización para la resolución de problemas mal-pdos.

Por tanto, el problema de determinar el rango numérico de una matriz es un problema M-pdo.

Ejercicio. Demuestra que la función $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ es semi-continua inferiormente.

Ejercicio. Demuestra que $\varphi_r(A) \equiv rgo(A)$ restringida a las matrices $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango máximo (i.e., $rgo(A) = min\{m, n\}$), es una función continua.

- En la práctica, esto se manifiesta en la sobre determinación de $rgo(A)$, con graves consecuencias para los métodos de truncamiento, en el llamado caso de **rango mal-determinado (i.e., cuando no hay una clara separación entre valores singulares "grandes" y "muy pequeños")**, para el cálculo de $A^\dagger$ y la forma canónica de Jordan $A = XJX^{-1}$ de A, incluyendo los de regularización para la resolución de problemas mal-pdos.

Cálculo numérico de la matriz pseudo-inversa Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}_r^{m\times n}$, $r < \min\{m,n\}$, calcular su matriz *inversa generalizada de Moore-Penrose* $A^\dagger$.

Afm. El cálculo numérico de $A^\dagger$ es un problema **Mal-pdo**.

En efecto, considérese a la matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A+E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Es directo verificar que

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } (A+E)^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

Cálculo numérico de la matriz pseudo-inversa Veamos

Problema. Dada $A \in \mathbb{R}_r^{m\times n}$, $r < \min\{m,n\}$, calcular su matriz *inversa generalizada de Moore-Penrose* $A^{\dagger}$.

Afm. El cálculo numérico de $A^{\dagger}$ es un problema **Mal-pdo**.

En efecto, considérese a la matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } A + E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Es directo verificar que

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } (A+E)^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

De donde claramente se sigue que $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| = \varepsilon^{-1}$

En general, si $rgo(A+E) > rgo(A)$ entonces se tiene que

En general, si $rgo(A+E) > rgo(A)$ entonces se tiene que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$, y

En general, si $rgo(A+E) > rgo(A)$ entonces se tiene que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$, y

b) $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$

En general, si $rgo(A+E) > rgo(A)$ entonces se tiene que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$, y

b) $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$

Y en otro caso, que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \leq c\|A^{\dagger}\|$, y

En general, si $rgo(A+E) > rgo(A)$ entonces se tiene que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$, y

b) $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$

Y en otro caso, que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \leq c\|A^{\dagger}\|$, y

b) $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \leq 3\max\{\|A^{\dagger}\|, (A+E)^{\dagger}\}\|E\|$

En general, si $rgo(A+E) > rgo(A)$ entonces se tiene que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$, y

b) $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \geq \|E\|^{-1}$

Y en otro caso, que

a) $\|(A+E)^{\dagger}\| \leq c\|A^{\dagger}\|$, y

b) $\|(A+E)^{\dagger} - A^{\dagger}\| \leq 3\max\{\|A^{\dagger}\|, (A+E)^{\dagger}\}\|E\|$

Tma. La aplicación $A \xrightarrow{\varphi} A^\dagger$ es de gráfica cerrada.

Tma. La aplicación $A \xrightarrow{\varphi} A^\dagger$ es de gráfica cerrada.

Dem. Sea $(A_0, B_0) \in \overline{Gr(\varphi)}$, luego existe $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que

$$(i) \quad A_n \to A_0 \qquad \text{y} \qquad (ii) \quad A_n^\dagger \to A_0^\dagger$$

Tma. La aplicación $A \xrightarrow{\varphi} A^{\dagger}$ es de gráfica cerrada.

Dem. Sea $(A_0, B_0) \in \overline{Gr(\varphi)}$, luego existe $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que

$$(i) \quad A_n \to A_0 \qquad \text{y} \qquad (ii) \quad A_n^{\dagger} \to A_0^{\dagger}$$

P.d. $B_0 = A_0^{\dagger}$

Tma. La aplicación $A \xrightarrow{\varphi} A^{\dagger}$ es de gráfica cerrada.

Dem. Sea $(A_0, B_0) \in \overline{Gr(\varphi)}$, luego existe $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que

$$(i) \quad A_n \to A_0 \qquad \text{y} \qquad (ii) \quad A_n^{\dagger} \to A_0^{\dagger}$$

P.d. $B_0 = A_0^{\dagger}$

Como $A_n \to A_0$ y $\{\|A_n^{\dagger}\|\}$ es acotada. Se sigue que

$$rgo(A_n) \leq rgo(A_0), \;\; \text{si } n \geq N$$

para cierta N.

Tma. La aplicación $A \xrightarrow{\varphi} A^{\dagger}$ es de gráfica cerrada.

Dem. Sea $(A_0, B_0) \in \overline{Gr(\varphi)}$, luego existe $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que

$$(i) \quad A_n \to A_0 \qquad \text{y} \qquad (ii) \quad A_n^{\dagger} \to A_0^{\dagger}$$

P.d. $B_0 = A_0^{\dagger}$

Como $A_n \to A_0$ y $\{\|A_n^{\dagger}\|\}$ es acotada. Se sigue que

$$rgo(A_n) \leq rgo(A_0), \;\; \text{si } n \geq N$$

para cierta N.

Consecuentemente, se tiene que $A_n^{\dagger} \to A_0^{\dagger}$. Por lo tanto, se concluye que

$$B_0 = A_0^{\dagger} \quad \#$$

Tma. La aplicación $A \xrightarrow{\varphi} A^\dagger$ es de gráfica cerrada.

Dem. Sea $(A_0, B_0) \in \overline{Gr(\varphi)}$, luego existe $\{A_n\} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$ tal que

$$(i) \quad A_n \to A_0 \qquad \text{y} \qquad (ii) \quad A_n^\dagger \to A_0^\dagger$$

P.d. $B_0 = A_0^\dagger$

Como $A_n \to A_0$ y $\{\|A_n^\dagger\|\}$ es acotada. Se sigue que

$$rgo(A_n) \leq rgo(A_0), \quad \text{si } n \geq N$$

para cierta N.

Consecuentemente, se tiene que $A_n^\dagger \to A_0^\dagger$. Por lo tanto, se concluye que

$$B_0 = A_0^\dagger \quad \#$$

Nota. El cálculo de $A^\dagger$ vía descomposiciones de A que revelan el rango, no es mala opción para el caso de rango *bien-determinado*. En otro caso, una buena alternativa es la pseudo-inversa minimal de Leonov, en términos de la cual se tiene como sub-producto la determinación del rango de A.

Cálculo numérico de la forma normal de Jordan: La forma normal de Jordan $A = X^{-1}JX$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

está claramente dada por $J = A$ y $X = I$.

Cálculo numérico de la forma normal de Jordan: La forma normal de Jordan $A = X^{-1}JX$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

está claramente dada por $J = A$ y $X = I$.

Mientras que para la matriz

$$A + E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo numérico de la forma normal de Jordan: La forma normal de Jordan $A = X^{-1}JX$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

está claramente dada por $J = A$ y $X = I$.

Mientras que para la matriz

$$A + E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$X_E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ no converge a } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

Cálculo numérico de la forma normal de Jordan: La forma normal de Jordan $A = X^{-1}JX$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

está claramente dada por $J = A$ y $X = I$.

Mientras que para la matriz

$$A + E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$X_E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ no converge a } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$J_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ no converge a } J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cálculo numérico de la forma normal de Jordan: La forma normal de Jordan $A = X^{-1}JX$ para

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

está claramente dada por $J = A$ y $X = I$.

Mientras que para la matriz

$$A + E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$X_E = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ no converge a } X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$J_E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \text{ no converge a } J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Con el algoritmo QR se calcula la Forma de Schur de A:

$$A + E = URU' \; , \; U \text{ “unitaria”} \quad \text{y} \quad R \text{ triangular inferior}$$

los elementos de la diagonal de R son los auto-valores numéricos $\tilde{\lambda}_k$ de A.

- Tres dificultades numéricas:

1) Determinación de la mutiplicidad algebraica de $\tilde{\lambda}_j$.

   pause

2) Determinación de la mutiplicidad geométrica de $\tilde{\lambda}_j$. Vencidas estas dificultades, se tiene que

$$U'(A+E)U = T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1k} \\ & T_{22} & \cdots & T_{2k} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & T_{kk} \end{bmatrix}$$

3) Determinar P no singular (pero posiblemente mal-comportada) tal que

$$P^{-1}TP = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & J_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & J_{kk} \end{bmatrix}$$

3) Determinar P no singular (pero posiblemente mal-comportada) tal que

$$P^{-1}TP = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & J_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & J_{kk} \end{bmatrix}$$

Entre sus aplicaciones está el calculo operacional, i.e., evaluar $f(A)$, donde f es una función trascendente o especial dada en su desarrollo en serie.

3) Determinar P no singular (pero posiblemente mal-comportada) tal que

$$P^{-1}TP = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & J_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & J_{kk} \end{bmatrix}$$

Entre sus aplicaciones está el calculo operacional, i.e., evaluar $f(A)$, donde f es una función trascendente o especial dada en su desarrollo en serie.

Refs.

B. Kagstrom, A. Ruhe, *An Algorithm for Numerical Computation of the Jordan Normal Form of a Complex Matrix*, ACM toms 6(3), 398-419.

B. Kagstrom, A. Ruhe, *ALGORITHM 560: JNF, An Algorithm for Numerical Computation of the Jordan Normal Form of a Complex Matrix [F2]*, ACM toms 6(3), 437-443.

3) Determinar P no singular (pero posiblemente mal-comportada) tal que

$$P^{-1}TP = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ & J_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & J_{kk} \end{bmatrix}$$

Entre sus aplicaciones está el calculo operacional, i.e., evaluar $f(A)$, donde f es una función trascendente o especial dada en su desarrollo en serie.

Refs.

B. Kagstrom, A. Ruhe, *An Algorithm for Numerical Computation of the Jordan Normal Form of a Complex Matrix*, ACM toms 6(3), 398-419.

B. Kagstrom, A. Ruhe, *ALGORITHM 560: JNF, An Algorithm for Numerical Computation of the Jordan Normal Form of a Complex Matrix [F2]*, ACM toms 6(3), 437-443.

V. Concepto de método numéricamente estable

• Se dice que un método numérico μ para un problema P es *numéricamente estable*, si produce *soluciones numéricas* que son *solución exacta* del mismo problema P, pero con *datos "ligeramente perturbados"*.

V. Concepto de método numéricamente estable

• Se dice que un método numérico μ para un problema P es *numéricamente estable*, si produce *soluciones numéricas* que son *solución exacta* del mismo problema P, pero con *datos "ligeramente perturbados"*.

• Algunos ejemplos clásicos son:

1) El método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial (si $\underset{\sim}{x}^a$ es la solución numérica de $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ entonces se tiene que $(A + E)\underset{\sim}{x}^a = \underset{\sim}{b}$, para alguna matriz E tal que $\|E\| \sim n\|A\|u$).

V. Concepto de método numéricamente estable

• Se dice que un método numérico μ para un problema P es *numéricamente estable*, si produce *soluciones numéricas* que son *solución exacta* del mismo problema P, pero con *datos "ligeramente perturbados"*.

• Algunos ejemplos clásicos son:

1) El método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial (si $\underset{\sim}{x}^a$ es la solución numérica de $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ entonces se tiene que $(A + E)\underset{\sim}{x}^a = \underset{\sim}{b}$, para alguna matriz E tal que $\|E\| \sim n\|A\|u$).

2) Método de Householder-Golub para la resolición de problemas de Min Q's lineales:

$$\min_{\underset{\sim}{\beta}} \|\underset{\sim}{y} - \mathbb{X}\underset{\sim}{\beta}\|_2^2$$

V. Concepto de método numéricamente estable

• Se dice que un método numérico μ para un problema P es *numéricamente estable*, si produce *soluciones numéricas* que son *solución exacta* del mismo problema P, pero con *datos "ligeramente perturbados"*.

• Algunos ejemplos clásicos son:

1) El método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial (si $\underset{\sim}{x}^a$ es la solución numérica de $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ entonces se tiene que $(A+E)\underset{\sim}{x}^a = \underset{\sim}{b}$, para alguna matriz E tal que $\|E\| \sim n\|A\|u$).

2) Método de Householder-Golub para la resolición de problemas de Min Q's lineales:

$$\min_{\underset{\sim}{\beta}} \|\underset{\sim}{y} - \mathbb{X}\underset{\sim}{\beta}\|_2^2$$

vía la descomposición QR con pivoteo por columnas: Dada $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}, p \leq n$, existe

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tales que

$$\mathbb{X} = Q \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tales que

$$\mathbb{X} = Q \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema triangular

$$R\underset{\sim}{\beta} = Q_1^t\,\underset{\sim}{y}$$

donde $Q = [Q_1 \,|\, Q_2]\,,\, Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tales que

$$\mathbb{X} = Q \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema triangular

$$R\underset{\sim}{\beta} = Q_1^t\, \underset{\sim}{y}$$

donde $Q = [Q_1 \,|\, Q_2]\,,\; Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

En lugar, de resolver las populares ecuaciones normales

$$\mathbb{X}^t\mathbb{X}\underset{\sim}{\beta} = \mathbb{X}^t\underset{\sim}{y}$$

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tales que

$$\mathbb{X} = Q \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema triangular

$$R\underset{\sim}{\beta} = Q_1^t \underset{\sim}{y}$$

donde $Q = [Q_1 \,|\, Q_2]\,,\, Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

En lugar, de resolver las populares ecuaciones normales

$$\mathbb{X}^t\mathbb{X}\underset{\sim}{\beta} = \mathbb{X}^t\underset{\sim}{y}$$

3) Descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$:

$$A = U \cdot \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix} \cdot V^H$$

donde U, V unitarias y $D = diag(s_1, s_2, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0)$.

$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $R \in \mathbb{R}^{p\times p}$ tales que

$$\mathbb{X} = Q \begin{bmatrix} R \\ O \end{bmatrix}$$

resolviendo el sistema triangular

$$R\underset{\sim}{\beta} = Q_1^t \underset{\sim}{y}$$

donde $Q = [Q_1 \,|\, Q_2]\,,\, Q_1 \in \mathbb{R}^{n\times p}$.

En lugar, de resolver las populares ecuaciones normales

$$\mathbb{X}^t\mathbb{X}\underset{\sim}{\beta} = \mathbb{X}^t\underset{\sim}{y}$$

3) Descomposición en valores singulares de $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$:

$$A = U \cdot \begin{bmatrix} D \\ O \end{bmatrix} \cdot V^H$$

donde U, V unitarias y $D = diag(s_1, s_2, \ldots, s_r, 0, \ldots, 0)$.

4) Algoritmo QR para el calculo de auto-valores y auto-vectores de de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
.

4) Algoritmo QR para el calculo de auto-valores y auto-vectores de de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

5) Métodos de Quasi-Newton (¿?).

4) Algoritmo QR para el calculo de auto-valores y auto-vectores de de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
.

5) Métodos de Quasi-Newton (¿?).

6) Métodos de un paso para EDO's:

6) Métodos de un paso para EDO's:

Se conocen algunos trabajos en esta dirección, para los métodos de Runge-Kutta, demostrando que la solución numérica $\underset{\sim}{y} = \varphi_a(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta})$, es solución exacta de una ecuación diferencial vecina (Véase, MOAN Per Christian, *On rigorous modified equations for discretizations of ODEs*, Centre of Maths for Appls., Oslo U., July 4,2005).

6) Métodos de un paso para EDO's:

Se conocen algunos trabajos en esta dirección, para los métodos de Runge-Kutta, demostrando que la solución numérica $\underset{\sim}{y} = \varphi_a(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta})$, es solución exacta de una ecuación diferencial vecina (Véase, MOAN Per Christian, *On rigorous modified equations for discretizations of ODEs*, Centre of Maths for Appls., Oslo U., July 4,2005).

7) Solución de EDP's: Para los métodos en diferencias para el problema de Dirichlet

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) + b(\underset{\sim}{x})u = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$$

que tiene lugar en mamografía y valoración de reservas para la extracción de segunda fase de petróleo.

6) Métodos de un paso para EDO's:

Se conocen algunos trabajos en esta dirección, para los métodos de Runge-Kutta, demostrando que la solución numérica $\underset{\sim}{y} = \varphi_a(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta})$, es solución exacta de una ecuación diferencial vecina (Véase, MOAN Per Christian, *On rigorous modified equations for discretizations of ODEs*, Centre of Maths for Appls., Oslo U., July 4,2005).

7) Solución de EDP's: Para los métodos en diferencias para el problema de Dirichlet

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) + b(\underset{\sim}{x})u = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$$

que tiene lugar en mamografía y valoración de reservas para la extracción de segunda fase de petróleo.

¿Qué se sabe?

6) Métodos de un paso para EDO's:

Se conocen algunos trabajos en esta dirección, para los métodos de Runge-Kutta, demostrando que la solución numérica $\underset{\sim}{y} = \varphi_a(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta})$, es solución exacta de una ecuación diferencial vecina (Véase, MOAN Per Christian, *On rigorous modified equations for discretizations of ODEs*, Centre of Maths for Appls., Oslo U., July 4,2005).

7) Solución de EDP's: Para los métodos en diferencias para el problema de Dirichlet

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) + b(\underset{\sim}{x})u = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$$

que tiene lugar en mamografía y valoración de reservas para la extracción de segunda fase de petróleo.

¿Qué se sabe?

- Para Samarsky, un método en diferencias es *estable* si es un problema bien-planteado; i.e., existen constamtes M_1, M_2 y M_3 independientes de $0 < h \leq h_0$ tales que

$$\|u_h\|_\infty \leq M_1\|\sigma|_{w_h}\| + M_2\|b|_{w_u}\| + M_3\|f|_{w_u}\|$$

6) Métodos de un paso para EDO's:

Se conocen algunos trabajos en esta dirección, para los métodos de Runge-Kutta, demostrando que la solución numérica $\underset{\sim}{y} = \varphi_a(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta})$, es solución exacta de una ecuación diferencial vecina (Véase, MOAN Per Christian, *On rigorous modified equations for discretizations of ODEs*, Centre of Maths for Appls., Oslo U., July 4,2005).

7) Solución de EDP's: Para los métodos en diferencias para el problema de Dirichlet

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) + b(\underset{\sim}{x})u = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$$

que tiene lugar en mamografía y valoración de reservas para la extracción de segunda fase de petróleo.

¿Qué se sabe?

- Para Samarsky, un método en diferencias es *estable* si es un problema bien-planteado; i.e., existen constamtes M_1, M_2 y M_3 independientes de $0 < h \leq h_0$ tales que

$$\|u_h\|_\infty \leq M_1\|\sigma|_{w_h}\| + M_2\|b|_{w_u}\| + M_3\|f|_{w_u}\|$$

VI. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

• ¿Qué sentido tiene aplicar un método numéricamente estable μ a un problema P mal-planteado?

VI. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

• ¿Qué sentido tiene aplicar un método numéricamente estable μ a un problema P mal-planteado?

• Respuesta: ninguno.

VI. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

• ¿Qué sentido tiene aplicar un método numéricamente estable μ a un problema P mal-planteado?

• Respuesta: ninguno.

• **Reflexión**. Los métodos numéricamente estables sólo tiene sentido para los problemas bien-planteados.

VI. La importancia del concepto de problema bien-planteado en Análisis Numérico

• ¿Qué sentido tiene aplicar un método numéricamente estable μ a un problema P mal-planteado?

• Respuesta: ninguno.

• **Reflexión**. Los métodos numéricamente estables sólo tiene sentido para los problemas bien-planteados.

VII. Nuevamente Problemas Bien-planteados

VII. Nuevamente Problemas Bien-planteados

Sistemas de ecuaciones lineales algebraicas:

VII. Nuevamente Problemas Bien-planteados

Sistemas de ecuaciones lineales algebraicas:

Problema. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, hallar $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ *t.q.*

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

VII. Nuevamente Problemas Bien-planteados

Sistemas de ecuaciones lineales algebraicas:

Problema. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, hallar $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ *t.q.*

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

Tma. Si A es no singular entonces $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tiene una única solución

$$\underset{\sim}{x}_e = A^{-1}\underset{\sim}{b}$$

que depende continuamente de las entradas de A y las compomentes de $\underset{\sim}{b}$.

VII. Nuevamente Problemas Bien-planteados

Sistemas de ecuaciones lineales algebraicas:

Problema. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, hallar $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ *t.q.*

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

Tma. Si A es no singular entonces $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tiene una única solución

$$\underset{\sim}{x}_e = A^{-1}\underset{\sim}{b}$$

que depende continuamente de las entradas de A y las compomentes de $\underset{\sim}{b}$.

Para su demostración, obsérvese que este problema es equivalente a despejar $\underset{\sim}{x}$ de la ecuación

$$F(A,\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0} \quad \text{donde} \quad F(A,\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{x}) \equiv A\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{b}$$

VII. Nuevamente Problemas Bien-planteados

Sistemas de ecuaciones lineales algebraicas:

Problema. Dadas $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^n$, hallar $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ *t.q.*

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

Tma. Si A es no singular entonces $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ tiene una única solución

$$\underset{\sim}{x}_e = A^{-1}\underset{\sim}{b}$$

que depende continuamente de las entradas de A y las compomentes de $\underset{\sim}{b}$.

Para su demostración, obsérvese que este problema es equivalente a despejar $\underset{\sim}{x}$ de la ecuación

$$F(A,\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0} \quad \text{donde} \quad F(A,\underset{\sim}{b},\underset{\sim}{x}) \equiv A\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{b}$$

Así, este tma. es consecuencia directa del tma. de la función implícita:

$$\underset{\sim}{x}_e = \varphi(A, \underset{\sim}{b})[\equiv A^{-1}\underset{\sim}{b}]$$

es una función de clase C^p con p un entero, cualquiera dado.

Así, este tma. es consecuencia directa del tma. de la función implícita:

$$\underset{\sim}{x}_e = \varphi(A, \underset{\sim}{b})[\equiv A^{-1}\underset{\sim}{b}]$$

es una función de clase C^p con p un entero, cualquiera dado.

En resumen, el problema de resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ es un problema B-pdo, siempre que A sea no-singular.

Así, este tma. es consecuencia directa del tma. de la función implícita:

$$\underset{\sim}{x}_e = \varphi(A, \underset{\sim}{b})[\equiv A^{-1}\underset{\sim}{b}]$$

es una función de clase C^p con p un entero, cualquiera dado.

En resumen, el problema de resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ es un problema B-pdo, siempre que A sea no-singular.

Ceros de funciones:

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$, $B : \|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0\| < R$ y $F : B \to \mathbb{R}^n$ con segundas derivadas continuas sobre la bola cerrada $B_0 : \|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0\| \leq r,\ 0 < r < R$.

Problema. Resolver la ecuación $F(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{0}$.

- Existencia y unicidad:

  Véase Kantorovich, Akilov, *Functional Anal. in Normed Spaces*, Macmillan, 1964.

- Dependencia continua:

  Se dice que $\underset{\sim}{x}^* \in int(B)$ es un cero regular de F si $F(\underset{\sim}{x}^*) = 0$ y $DF(\underset{\sim}{x}^*)$ es no singular.

  Tma. Si $\underset{\sim}{x}^*$ es un cero regular de F entonces

  (a) exite una bola $B(\underset{\sim}{x}^*, r)$ donde $\underset{\sim}{x}^*$ es el único cero de F.

  (b) dada U una C^1 vec. ab. de F existe una vec. $V \subset B(\underset{\sim}{x}^*, r)$ de $\underset{\sim}{x}^*$ y una C^1-aplicación $\xi : U \to V$ tal que $\underset{\sim}{x}^*_G = \xi(G)$ es el único cero reg. de G en $B(\underset{\sim}{x}^*, r)$.

Dem. (bosquejo): La idea es considerar la ecuación

$$A(F, \underset{\sim}{x})[\equiv F(\underset{\sim}{x})] = \underset{\sim}{0}$$

donde $A : C^1(B(\underset{\sim}{x}^*, r)) \times B(\underset{\sim}{x}^*, r) \to \mathbb{R}^n$ tiene derivada de Fréchet continua y $B(\underset{\sim}{x}^*, r)) \times$ I

es de Banach con respecto $\|(F, \underset{\sim}{x})\|_B \equiv \|F\|_1 + \|\underset{\sim}{x}\|$.

Y como $D_x A(F, \underset{\sim}{x}) = DF(\underset{\sim}{x})$ y $\underset{\sim}{x}^*$ es regular, por el tma. de la función implícita, se puede despejar a $\underset{\sim}{x}^*_F \equiv \xi(F)$, siendo $\xi : U \to V$ de clase C^1.

Ref: Jongen H. Th., Jonker P., Twilt F., *Nonlinear Optm. in* $\mathbb{R}^n$*. II: Transversality, Flows, Parametric Aspects*, Peter Lang (1986).

Mínimo de funciones

:

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

Problema. Hallar el mínimo de g en Ω,; i.e., hallar

$$\underset{\sim}{x}^* \in \Omega \ t.q. \ g(\underset{\sim}{x}^*) \leq g(\underset{\sim}{x}), \ \ p.t. \ \underset{\sim}{x} \in \Omega$$

- Existencia y unicidad: Aquí contamos con una variedad de resultados, dos de los más importantes son:

  - Si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es semi-continua inferiormente y

  (1) (Weierstrass) Ω es compacto, o

  (2) que g sea coercitiva (i.e., $g(\underset{\sim}{x}) \to +\infty \text{ como } \|\underset{\sim}{x}\| \to \infty$) y que g sea inferiormente acotada

  entonces g alcanza su mínimo global en cierto $\underset{\sim}{x}^* \in \Omega$.

  Si además D es convexo y g es estrictamente convexa, el punto de mínimo es único.

  Beltrami E.J., *An Algorithmic Approach to Nonlinear Anal. and Optn.*, A.P. (1970).

Dependencia continua:

Ahora sea $\Omega = B \subset \mathbb{R}^n$, $B : \|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0\| < R$ y $g : B \to \mathbb{R}$ continua y con segunda derivada continua sobre la bola cerrada $B_0 : \|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{x}_0\| \leq r,\ 0 < r < R$.

Se dice que $\underset{\sim}{x}^* \in int(B)$ es un punto de mínimo regular de $g : \Omega \to \mathbb{R}$ si

$$\nabla g(\underset{\sim}{x}^*) = 0 \text{ y } H_g(\underset{\sim}{x}^*) \text{ es positivo def.}$$

- **Tma**. Si $\underset{\sim}{x}^*$ es un punto de mínimo regular de g entonces

  (a) exite una bola $B(\underset{\sim}{x}^*, r)$ donde $\underset{\sim}{x}^*$ es el único punto de mímimo de g.

  (b) dada U una C^2 vec. ab. de g existe una vec. $V \subset B(\underset{\sim}{x}^*, r)$ de $\underset{\sim}{x}^*$ y una C^2-aplicación:

  $\xi : U \to V$ tal que $\underset{\sim}{x}^*_h = \xi(h)$ es el único pto. de mín. reg. de h en $B(\underset{\sim}{x}^*, r)$.

La idea de la demostración consite en aplicar el tma. de la función impícita en espacios de Banach a la ecuación

$$A(g, \underset{\sim}{x}) \equiv \nabla g(\underset{\sim}{x}) = 0$$

Solución de EDO's:

Dada $f : [t_0, T] \times \Omega \times \mathbb{B} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ y $\underset{\sim}{\eta} \in \mathbb{R}^n$:

Prob. Hallar $\underset{\sim}{y} = \varphi(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta}),\ t \in [t_0, T]$, *t.q.* es la solución del problema de V.I.:

$$\dot{\underset{\sim}{y}} = f(t, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{\beta}), \quad \text{con } \underset{\sim}{y}(t_0) = \underset{\sim}{\eta} \tag{2}$$

De la teoría básica de existencia y unicidad:

Tma. Si f es continua y (globalmente) Lipschitz con respecto a $\underset{\sim}{y}$ y $\underset{\sim}{\beta}$ entonces el problema de Cauchy (2) tiene una única solución $\underset{\sim}{y} = \varphi_f(t; t_0, \underset{\sim}{\eta}, \underset{\sim}{\beta})$, continua con respecto a todos sus argumentos.

De donde se sigue que el problema de Cauchy (2) es **B-plntdo** a la Hadamard.

Solución de EDP's

El problema de Dirichlet

$$-\nabla(\sigma(\underset{\sim}{x})\nabla u) + b(\underset{\sim}{x})u = f(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

$$u(\underset{\sim}{x}) = g(\underset{\sim}{x}),\ \underset{\sim}{x} \in \partial\Omega$$

que tiene lugar en mamografía y valoración de reservas para la extracción de segunda fase de petróleo es un problema bien-planteado con respecto a sus datos $\sigma(\underset{\sim}{x}), b(\underset{\sim}{x}), f(\underset{\sim}{x}), \Omega$ y $\partial\Omega$.

X. Comentarios Finales

1. El concepto de Problema Bien-planteado juega un papel central en la Computación Científica, tanto en la Modelación Matemática como en Computo Numérico.

2. Los Métodos Numéricamente Estables tienen sentido sólo para resolver Problemas Bien-planteados.

References

[Heat] Heath M.T., Chapter 1: “Scientific Computing”. Scientific Computing: An Introductory Survey. McGraw-Hill, N.Y., 2nd Edition, 2002.

[GyOr] Golub G.H., Ortega J., *Scientific Computing and Differential Equations : An Introduction to Numerical Methods*, Acad. Press, Boston (1992).

[TikA] Tikhonov A.N. and Arsénine V.Y., *Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*, Èditions MIR, Moscou (1976). Traducción al Inglés por F. John, *Solutions of Ill-posed Problems*, Wiley (1977)