Notas en desarrollo
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-1

Ecuaciones diferenciales I

Teorá básica de existencia y unicidad para el Problema de Cauchy

Prof. Jesús López Estrada[1]

Ciudad Universitaria
Noviembre de 2014

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM.
e-mail: jele@matematicas.unam.mx

En este notas se estudían los elementos básicos de la teoría de existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy o de valores iniciales para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's). Por razones de exposición, pero sin pérdida de generalidad, se cosiderá el caso escalar $y' = f(x,y)$, dejando al lector la tarea de rescribir la discusión para sistemas de n ecuaciones de primer orden con n variables de estado $\dot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$.

1 Introducción

Los primeros teoremas de existencia unicidad de la solución para el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) && (1.1)\\ y(x_0) &= y_0 && (1.2) \end{aligned}$$

se deben a A. Cauchy. De hecho, él fue el primero en definir el problema de valores iniciales (2.2), también llamado de Cauchy.

El primero de estos teoremas, históricamente el primer teorema de existencia y unicidad con $f(x,y)$ de forma general, dice que si en la ecuación $y' = f(x,y)$, se tiene que $f(x,y)$ es análitica en una vecindad de (x_0, y_0) entonces el problema de Cauchy (2.2) tiene localmente (i.e., definida en $I_\alpha(x_0) \equiv [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, para alguna $\alpha > 0$) una única solución $\varphi(x)$) análitica. Cuya demostración obtiene aplicando técnicas de mayoración (Véase Petrovsky [Ptv], pág. 50).

El segundo de estos teoremas dice que si $f(x,y)$ en continua y tiene $\partial_y f(x,y)$ continua en una vecindad de (x_0, y_0) entonces el problema de Cauchy (2.2) tiene localmente una única solución. La segunda de estas condiciones resulta, desde el punto de vista práctico, algo excesiva. Después de un trabajo arduo en el cuál participarón varios autores, finalmente se llegó al teorema siguiente que será re-formulado después de manera más elaborada:

Teorema 1.1. *[Cauchy-Lipschitz] Si $f(x,y)$ es continua y de Lipschitz (con respecto a y) en una vecindad de (x_0, y_0), entonces el problema de Cauchy (2.2) tiene una única solución local.*

Definición 1.1. *Se dice que $f(x,y)$ es (globalmente) de Lipschitz (g-Lips) respecto a y, si existe $L > 0$ tal que*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para todo (x,y_1), (x,y_2) en el dominio de definición de $f(x,y)$.

Ejercicio 1.1. *Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene $\partial_y f$ acotada en Ω, demuestra que f es g-Lips con respecto a y.*

Definición 1.2. *Se dice que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es (localmente) de Lipschitz (l-Lips) respecto a y, si dado $(x_*, y_*) \in \Omega$ existe $L > 0$ y $\delta > 0$ tales que*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

para todo (x,y_1), $(x,y_2) \in I_\delta(x_*) \times I_\delta(y_*) \subset \Omega$ (en el entendido de que $I_\delta(z) = [z - \delta, z + \delta]$).

Ejercicio 1.2. *Si $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tiene $\partial_y f \in C(\Omega)$, demuestra que f es l-Lips con respecto a y.*

Ejemplo 1.1. *Si $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I = [a, b]$ son continuas entonces $f(x, y) = a(x)y + b(x)$ es g-Lips en $I \times \mathbb{R}$.*

En efecto, viendo que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |a(x)|\,|y_1 - y_2|$$

y considerando, por ser $a(x)$ continua, que existe $L > 0$ tal que $|a(x)| \leq L$, se sigue que

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = L\,|y_1 - y_2|$$

para todo (x, y_1), $(x, y_2) \in I \times \mathbb{R}$.

Ejemplo 1.2. *Considera a la función $f(x, y) = y^2$ definida en $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ¿es g-Lips?*

La respuesta es negativa. Para verlo, supóngase que es g-Lips, i.e., que existe $L > 0$ tal que $|y_1^2 - y_2^2| \leq L|y_1 - y_2|$. Luego, se sigue que $|y_1 + y_2| \leq L$, para todo (x, y_1), $(x, y_2) \in D$ con $y_1 \neq y_2$. Lo que es, claramente, un absurdo. Pues tomado, por ejemplo, $y_1 = L$ y $y_2 = 2L$, se obtiene que $3L \leq L$, osea que $3 \leq 1$!!!!

No obstante, como $\partial_y f(x, y) = 2y$ es continua, $f(x, y) = y^2$ es l-Lips.

Ejercicio 1.3. *Sean $a > 0$ y $b > 0$ cualesquiera dados ¿Es la función $f(x, y) \equiv \sqrt{|y|}$ de Lips en $[-a, a] \times [-b, b]$?*

Ejercicio 1.4. *Se sabe, o si lo prefieres demuestra, que si $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua, $g(c) = 0$, $c \in (a, b)$, $g(y) \neq 0$, si $y \neq c$, y la integral impropia*

$$\int_{y_0}^{c\pm} \frac{dy}{g(y)} = \pm\infty \tag{1.3}$$

(i.e., es divergente), entonces el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= g(y) \\ y(x_0) &= y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in (a, b) \end{aligned} \tag{1.4}$$

tiene una 'unica solución dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} c \;, & si \quad y_0 = c \\ \Gamma(x - x_0) \;, & si \quad y_0 \neq c \end{cases}$$

en donde $\Gamma(y)$ es la función inversa de la primitiva $G(y)$ de $1/g(y)$ con $G(y_0) = 0$.

En lo que sigue se dan condiciones que implican la condición (1.3) en el teorema anterior.

1. *Demuestra que si g es diferenciable en c entonces la condición (1.3) tiene lugar.*

2. *Prueba que si g es l-Lips entonces se la condición (1.3) se cumple.*

Claramente, estas condiciones son mucho más cómodas de verificar que la condición (1.3).

2 Teorema de Cauchy-Lipschitz

Para la demostración del teorema 1.1, es conveniente probar antes un caso especial. Para lo cuál se harán antes unas puntualizaciones.

Si $f : I_a(x_0) \times I_b(y_0) \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe $M > 0$ tal que

$$|f(x,y)| \leq M, \qquad \text{para todo } \ (x,y) \in I_a(x_0) \times I_b(y_0) \tag{2.1}$$

Teorema 2.1. *[Cauchy-Lipschitz] Si $f(x,y)$ es continua y de Lipschitz (con respecto a y) en el rectángulo $R = I_a(x_0) \times I_b(y_0)$, entonces el problema de Cauchy*

$$y' = f(x,y) \tag{2.2}$$

$$y(x_0) = y_0 \tag{2.3}$$

tiene una única solución local $\varphi(x)$, para $x \in I_\alpha(x_0)$, donde $\alpha \leq \min\{a, b/M\}$.

—–Insertar figura1

Antes de bosquejar la demostración de este teorema, aclaremos la elección del parámetro α. Por (2.1), se tiene que la gráfica de la solución $\varphi(x)$ del problema de Cauchy (2.2) vive entre las rectas $y - y_0 = \pm M(x - x_0)$. Si estas rectas cortan los lados verticales del rectángulo, entonces $\alpha = a$. Con lo que se garantiza que la gráfica de la solución $\varphi(x)$ vive en el rectángulo R. Y si estas rectas cortan por los lados horizontales del rectángulo R, digamos en $x_0 - \alpha$ y $x_0 + \alpha$ entonces se tiene que $M = b/\alpha$, de donde se obtiene que $\alpha = b/M$. Y consecuentemente, que $\alpha \leq \min\{a, b/M\}$, en cualquier caso.

El bosquejo de demostración que se va a presentar a continuación sigue, en esencia, la línea trazada por Cauchy.

Los pasos centrales de la demostración son los siguientes:

1. Un primer

   Lema 2.1. *Resolver el problema de Cauchy (2.2) es equivalente a resolver la ecuación integral*

   $$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, y(\xi))d\xi \tag{2.4}$$

   en el sentido que si $\varphi(x)$ es solución de uno de ellos, entonces es solución también del otro.

   La demostración de este lema se sigue directamente de los dos teoremas fundamentales del Cálculo, y se deja como ejercicio al lector.

   Ejercicio 2.1. *Demuestra que si $\varphi(x)$ es solución del problema de Cauchy (2.2) entonces $\varphi(x)$ es uniformemente continua.*

   Sugerencia: Usa el lema anterior y la acotación (2.1).

2. Dos definiciones técnicas y un lema. Pero antes véamos la puntualización siguiente: Dada $h = a/n$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, considérese la malla $x_j = x_0 \pm jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$ del intervalo $[x_0 - a, x_0 + a]$

Definición 2.1. *A la función* $\varphi_h : I_a(x_0) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\varphi_h(x) = y_j + f(x_j, y_j)(x - x_j), \quad \text{si} \quad x \in [x_j, x_{j+1}),$$

donde

$$y_j = y_{j-1} + f(x_{j-1}, y_{j-1})\, h$$

se le conoce por una ***quebrada de Euler*** *de paso* h.

Claramente, una quebrada de Euler es una función continua con derivada continua salvo -posiblemente- en los puntos de malla x_j[2].

Definición 2.2. *[ϵ-solición aproximada] Dada* $\epsilon > 0$, *una función* $\varphi_\epsilon : I_a(x_0) \to \mathbb{R}$ *se dice que es una* ***ϵ-solución aproximada*** *del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

si

i) es continua en $I_a(x_0)$,

ii) tiene derivada continua en todo $I_a(x_0)$, *salvo un número finito de puntos, y*

iii) satisface que

$$\varphi_\epsilon(x_0) = y_0 \tag{2.5}$$

$$|\varphi_\epsilon'(x) - f(x, \varphi_\epsilon(x))| \leq \epsilon \quad \text{para toda} \quad x \in I_a(x_0) \tag{2.6}$$

Ahora, una puntualización conveniente, que juega un papel importante en la demostración del lema que se enuncia a continuación. Como $f : I_a(x_0) \times I_b(y_0) \to \mathbb{R}$ es continua y el rectángulo $R = I_a(x_0) \times I_b(y_0)$ es un conjunto acotado y cerrado del plano, f es unoformemente continua en R; i.e., dada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \epsilon, \quad \text{si } |x_1 - x_2|,\, |y_1 - y_2| < \delta \tag{2.7}$$

Lema 2.2. *Dada* $\epsilon > 0$, *existe una* $h = h(\epsilon)$ *tal que la quebrada de Euler* $\varphi_\epsilon(x)$ *es una* ϵ*-solución aproximada del problema de Cauchy (2.2).*

Para la demostración, dada $\epsilon > 0$, considérese la relación $\epsilon - \delta$ en (2.7) debida a la continuidad uniforme de $f(x, y)$. Tomando $0 < h < \min \delta, \delta/M$ con $M > 0$ como en (2.1), para $x \in [x_j, x_{j+1})$, $j > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} |y_j - \varphi_h(x)| &= |y_j - (y_j + f(x_j, y_j)(x - x_j))| \\ &= |f(x_j, y_j)|\, |x - x_j| \\ &\leq Mh \end{aligned}$$

[2]Pues, en general, $\varphi'(x_j^-) = f(x_{j-1}, y_{j-1})$ es diferente de $\varphi'(x_j^+) = f(x_j, y_j)$

Luego como $0 < h < \min \delta, \delta/M$ se sigue que

$$|x_j - x|,\ |y_j - \varphi_h(x)| < \delta \tag{2.8}$$

Y consecuentemente que

$$|\varphi_h'(x) - f(x, \varphi_h(x))| = |f(x_j, y_j) - f(x, \varphi_h(x))| < \epsilon$$

De donde se sigue que $|\varphi_h'(x) - f(x, \varphi_h(x))| < \epsilon$, para toda $x \in [x_0, x_0 + a]$. Para el caso $x \in [x_0 - a, x_0]$, la argumentación es completamente similar. En conclusión, $\varphi_h(x)$ es una ϵ-solución aproximada del problema de Cauchy (2.2), como se quería probar.

3. El siguiente paso es central para la construcción de la solución $\varphi(x)$ del problema de Cauchy bajo discusión. Para ello, veamos antes laa puntualización siguiente: Claramente, si $\varphi_\epsilon(x)$ es una ϵ-solución aproximada del problema de Cauchy (2.2) entonces

$$\varphi_\epsilon'(x) = f(x, \varphi_\epsilon(x)) + w_\epsilon(x)$$

donde $|w_\epsilon(x)| \leq \epsilon$. Y consecuentemente, que

$$\varphi_\epsilon(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \{f(\xi, \varphi_\epsilon(\xi)) + w_\epsilon(\xi)\} d\xi \tag{2.9}$$

Lema 2.3. *[de preparación] Si $\varphi_{\epsilon_1}(x)$ y $\varphi_{\epsilon_2}(x)$ son dos ϵ-soluciones del problema de Cauchy, entonces*

$$|\varphi_{\epsilon_1}(x) - \varphi_{\epsilon_2}(x)| \leq \int_{x_0}^{x} \{L|\varphi_{\epsilon_1}(\xi) - \varphi_{\epsilon_2}(\xi)| + \epsilon\} d\xi \tag{2.10}$$

donde $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

La demostración es directa de (2.9) y se deja de ejercicio al lector.

Ahora un lema técnico muy útil:

Lema 2.4. *[Desigualdad de Gronwall] Si $z(x)$ en una función continua en $[x_0, x_0 + \alpha]$ tal que*

$$0 \leq z(x) \leq a + \int_{x_0}^{x} \{L\, z(\xi) + b\} d\xi, \qquad (a, b \text{ y } L > 0)$$

entonces

$$0 \leq z(x) \leq a e^{L(x - x_0)} + \frac{b}{L}\left(e^{L(x - x_0)}\right) \tag{2.11}$$

La demostración que se bosqueja a continuación está tomada de Sotomayor [Sot]. Para ello, sea $w(x) \equiv a + \int_{x_0}^{x} \{L\, z(\xi) + b\} d\xi$. Claramente, se ve que

a) $0 \leq z(x) \leq w(x)$,

b) $w(x_0) = a$, y

c) $w'(x) = L\, z(x) + b$. Luego, por a), $w'(x) \leq L\, w(x) + b$

En consecuencia, se tiene que $w'(x) - L\,w(x) \leq b$. O sea que $\frac{d}{dx}\left(e^{-Lx}w(x)\right) \leq be^{-Lx}$. Luego, integrando se obtiene que

$$w(x) \leq ae^{L(x-x_0)} + \frac{b}{L}\left(e^{L(x-x_0)}\right)$$

de donde se sigue la desiguldad de Gronwall (2.11).

Lema 2.5. *Si $\varphi_{\epsilon_1}(x)$ y $\varphi_{\epsilon_2}(x)$ son dos ϵ-soluciones del problema de Cauchy, entonces*

$$|\varphi_{\epsilon_1}(x) - \varphi_{\epsilon_2}(x)| \leq \frac{\epsilon}{L}\left(e^{L\,\alpha} - 1\right) \tag{2.12}$$

donde $\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

La demostración se obtiene de la desigualdad de Gronwall y el lema 2.3.

4. En este paso se da la construcción de la solución $\varphi(x)$ de la solución del problema de Cauchy bajo estudio.

Pero antes, una puntualización oportuna: Recuérdese que una sucesión de funciones $\{\varphi_n(x), x \in I\}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo converge *uniformemente* a $\varphi(x)$, si dada $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \epsilon, \quad \text{para toda } \ x \in I$$

si $n \geq N$.

Ejercicio 2.2. *Considérese a la suceción de los polinomios mónicos $\{\varphi_n(x) = x^n\}$:*

(a) definidos sobre el intervalo $[0,1]$ y sea $\varphi(x)$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \quad , & si\ x < 1 \\ 1 \quad , & si\ x = 1 \end{cases}$$

¿Converge $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ uniformemente cuando $n \to \infty$?

(b) definidos sobre el intervalo $[0,a]$, $0 < a < 1$ y sea $\varphi(x) \equiv 0$. Demuestra que $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ uniformemente cuando $n \to \infty$.

Lema 2.6. *Sea $\{\epsilon_n > 0\}$ es una sucesión que converge a cero cuando $n \to \infty$ dada. Si $\{\varphi_{\epsilon_n}(x)\}$ es la correspondiente sucesión de ϵ-soluciones del problema de Cauchy (2.2), entonces $\{\varphi_{\epsilon_n}(x)\}$ es de Cauchy, en el sentido de la convergencia uniforme.*

La demostración de este lema se sigue directamente del lema 2.5, y se dejan los detalles por hacer al lector.

Y como el espacio de las funciones continuas $C(I_\alpha(x_0))$ con respecto a la convergencia uniforme[3] es un espacio completo, existe $\varphi(x)$ en $C(I_\alpha(x_0))$ tal que $\varphi_{\epsilon_n}(x) \to \varphi(x)$ uniformemente, cuando $n \to \infty$.

[3]i.e., con respecto a la norma de Tchebyshev:

$$\|\varphi\|_\infty \equiv \max_{x \in I_\alpha(x_0)} |\varphi(x)|$$

.

Ahora, para probar que la función $\varphi(x)$ antes construida es solución del problema de Cauchy (2.2), tomemos en cuenta que

$$\varphi_{\epsilon_n}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} \{f(\xi, \varphi_{\epsilon_n}(\xi)) + w_{\epsilon_n}(\xi)\} d\xi$$

con $|w_{\epsilon_n}(x)| \leq \epsilon_n$, para toda $x \in I_\alpha(x_0)$.

O bien que

$$|\varphi_{\epsilon_n}(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{\epsilon_n}(\xi)) d\xi| \leq \epsilon_n \, \alpha$$

Luego, tomando el límite cuando $n \to \infty$, se obtiene que

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi| \leq 0$$

O bien que

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

Con lo que se concluye la demostración de la existencia de la solución del problema de Cauchy (2.2).

En la argumentación anterior se hecho mano de los siguientes resultados que dejamos como ejercicio:

Ejercicio 2.3. *Demuestra que si $\{\varphi_n(x)\}$ son funciones continuas que convergen uniformente a $\varphi(x)$ sobre un intervalo cerrado y acotado $I \subset \mathbb{R}$ entonces*

i) $\varphi(x)$ *es continua.*

ii) $\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_n(\xi)) d\xi \to \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$, *cuando* $n \to \infty$

5. Unicidad de la solución: Sean $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ dos soluciones del problema de Cauchy (2.2). Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi \\ \psi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

O bien que

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, \psi(\xi))] \, d\xi$$

Así, tomando valores absolutos, para $x \geq x_0$, se sigue que

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_{x_0}^{x} L \, |\varphi(\xi)) - \psi(\xi)| d\xi$$

Luego, aplicando la desigualdad de Gronwall para $z(x) \equiv |\varphi(x) - \psi(x)|$ se tiene que

$$0 \leq |\varphi(x) - \psi(x)| \leq 0$$

O sea que $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ para $x \geq x_0$. Y en como de manera análoga de prueba que $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ para $x \leq x_0$. Se tiene que $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, en todo $I_\alpha(x_0)$. Con esto se concluye la demostración del teorema de Cauchy- Lipschitz básico siguiendo las ideas trazadas por Cauchy.

3 Extenciones del teorema de Cauchy-Lipschitz

Para poder enunciar el teorema de Cauchy-Lipschitz para sistemas de primer orden en n variables de estado, es necesario hacer antes algunas puntualizaciones:

Empecemos, por considerar a $\mathbb{R}^n$ equipado alguna norma, por ejemplo, con la norma de Tchebyshev:

$$\|\underset{\sim}{y}\|_\infty \equiv \max_j\{|y_j|\},$$

que por $B_b(\underset{\sim}{y_0})$ se entenderá la bola (cerrada) con centro en $\underset{\sim}{y_0}$ y radio $b > 0$[4], y que

$$\underset{\sim}{f} : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

es un campo vectorial continuo.

Luego, por ser el campo vectorial $\underset{\sim}{f}$ continuo sobre el rectángulo (conjunto cerrado y acotado) $R = I_a(t_0) \times B_b(\underset{\sim}{y_0}) \subset D$, existe $M > 0$ tal que

$$\|\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})\| \leq M, \qquad \text{para todo } (t, \underset{\sim}{y}) \in R \tag{3.1}$$

Diremos el campo vectorial $\underset{\sim}{f}$ es de **g-Lips** si existe $L > 0$ tal que

$$\|\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y_1}) - \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y_2})\| \leq L\,\|\underset{\sim}{y_1} - \underset{\sim}{y_2}\|$$

Dejando al lector como ejercicio escribir la definición de un campo vectorial $\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$ l-Lips.

Teorema 3.1. *[Cauchy-Lipschitz] Si $\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$ es un campo vectorial continuo y l-Lips (con respecto a $\underset{\sim}{y}$) en el rectángulo $R = I_a(t_0) \times B_b(\underset{\sim}{y_0})$, entonces el problema de Cauchy*

$$\dot{\underset{\sim}{y}}(t) = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \tag{3.2}$$

$$\underset{\sim}{y}(t_0) = \underset{\sim}{y_0} \tag{3.3}$$

tiene una única solución local $\underset{\sim}{\varphi}(t)$, $t \in I_\alpha(t_0)$, donde $\alpha \leq \min\{a, b/M\}$.

[4] i.e.,

$$B_b(\underset{\sim}{y_0}) = \{\underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underset{\sim}{y} - \underset{\sim}{y_0}\| \leq b\}$$

El teorema siguiente es una consecuencia directa del teorema de Cauchy-Lipschitz, dejando los detalles de la demostración al lector interesado.

Teorema 3.2. *[Cauchy-Lipschitz] Si $\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$ es un campo vectorial continuo y de Lipschitz (con respecto a $\underset{\sim}{y}$) definido sobre un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}}(t) &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) && (3.4) \\ \underset{\sim}{y}(t_0) &= \underset{\sim}{y_0} && (3.5) \end{aligned}$$

tiene una única solución local $\underset{\sim}{\varphi}(t)$, $t \in I_\alpha(t_0)$, para alguna $\alpha > 0$.

Ahora pasemos a ver algunas consecuencias de este último teorema.

Definición 3.1. *Se dice que $\underset{\sim}{\phi} : (\alpha, \omega) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ en donde bien puede ser $\alpha = -\infty$ y $\omega = \infty$, es una solución maximal del problema de Cauchy (3.1), si dada cualquier otra de sus soluciones $\underset{\sim}{\psi} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ se tiene que $J \subset (\alpha, \omega)$.*

Para ver que el problema de (3.1) tiene una única solución maximal, considérese al conjunto

$$\Phi = \left\{ \underset{\sim}{\varphi} : I_\varphi \to \mathbb{R}^n, \text{ solución del problema de Cauchy (3.1)} \right\} \tag{3.6}$$

en donde $I_\varphi \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto.

Las afirmaciones siguientes son consecuencia directa del teorema 3.2:

Afirmación 3.1. *Este conjunto Phi definido en (3.6) es no vacio.*

Afirmación 3.2. *Si $\underset{\sim}{\varphi_1}$, $\underset{\sim}{\varphi_2} \in \Phi$ entonces $\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \equiv \underset{\sim}{\varphi_2}(t)$ para toda $t \in I_{\varphi_1} \cap I_{\varphi_2}$.*

Teorema 3.3. *Si $\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$ es un campo vectorial continuo y l-Lips (con respecto a $\underset{\sim}{y}$) sobre un dominio $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}}(t) &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) && (3.7) \\ \underset{\sim}{y}(t_0) &= \underset{\sim}{y_0}, \quad (t_0, \underset{\sim}{y_0}) \in D && (3.8) \end{aligned}$$

tiene una única solución maximal $\underset{\sim}{\phi}(t)$, $t \in (\alpha, \omega)$. Más aún, $(t, \underset{\sim}{\phi}(t)) \to \partial D$, cuando $t \to \alpha^+$, o bien cuando $t \to \omega^-$.

Para su demostración considérese a la función

$$\underset{\sim}{\phi} : \cup_{\varphi \in \Phi} I_\varphi \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$\underset{\sim}{\phi}(t) = \underset{\sim}{\varphi}(t), \quad t \in I_\varphi$$

Por la afirmación 3.2 $\underset{\sim}{\phi}(t)$ está bien definida. Aplicando el teorema 3.2, se deja al lector establecer que $\underset{\sim}{\phi}$ es la solición maximal del problema de Cauchy (3.1) y que $(t, \underset{\sim}{\phi}(t)) \to \partial D$, cuando $t \to \alpha^+$, o bien cuando $t \to \omega^-$.

4 Teoremas de existencia y unicidad global

En esta sección regresamos al caso escalar por simplicida de la notación.

Se acaba de ver que si $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y localmente de Lipschitz entonces el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \qquad (x_0, y_0) \in D \tag{4.1}$$

tiene una única solución $\varphi(x)$, $x \in (\alpha, \omega) \subset \mathbb{R}$, siendo (α, ω) su intervalo máximo de definición. Más aún, que $(x, \varphi(x) \to \partial D$ cuando $x \to \alpha^+$ ó ω^-.

Ahora, ¿Qué se puede decir para el caso $D = (a, b) \times \mathbb{R}$ en donde $-\infty \leq a$ y $b \leq \infty$?, ¿Basta que f sea l-Lips para que el problema (4.1) tenga una única solución definida en todo (a, b)?

Antes de responder a estas preguntas, considérense los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1. *Se tiene que la solución del problema*

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

está dada por

$$\varphi(x) = \frac{y_0}{1 + y_0(x - x_0)},$$

para $x \in (\alpha, \infty)$*, con* $\alpha = x_0 - y_0^{-1}$*, si* $y_0 > 0$*; o bien para* $x \in (-\infty, \omega)$*, con* $\omega = x_0 - y_0^{-1}$*, si* $y_0 < 0$*; ó* $\varphi(x) \equiv 0$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$*, si* $y_0 = 0$*. Nótese que* $f(x, y) \equiv -y^2$ *es continua y l-Lips en todo el plano, y que la única solución de (4.2) que está definida para toda* $x \in \mathbb{R}$ *es la solución trivial* $\varphi(x) \equiv 0$*.*

Ejemplo 4.2. . *Sabemos que la solución del problema*

$$\begin{cases} y' = -y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{4.3}$$

está dada por $\varphi(x) = y_0 e^{-(x - x_0)}$, $x \in \mathbb{R}$*. Nótese que* $f(x, y) \equiv -y$ *es globalmente de Lipschitz en todo el plano.*

Lo anterior sugiere poder demostrar el siguiente

Teorema 4.1. *[De Existencia y Unicidad Global] Si* $f(x, y)$ *es continua y g-Lips en* $(a, b) \times \mathbb{R}$ *entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{matrix} y' = f\,(x, y) \\ y\,(x_0) = y_0 \end{matrix} \qquad (x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R} \tag{4.4}$$

tiene una única solución definida en todo el intervalo (a, b)*.*

La idea es probar que si $\varphi(x)$ es una solución del problema (4.1) definida en cualquier intervalo $[\beta, \gamma] \subset (a, b)$, entonces $\varphi(x)$ es finita y bien definida para $x = \beta$ y $x = \gamma$. Y por tanto, se puede extender, tanto a la izquierda de β, como a la derecha de γ, al menos que $\beta = a$ y $\gamma = b$ Para ello, probaremos primero que la función

$$w(x) = |\varphi(x) - y_0|\,,\ x \in [\beta, \gamma]$$

está acotada.

En efecto, por ser $\varphi(x)$ solución de (4.1), se tiene que

$$\varphi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

ó sea que

$$\varphi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} \{f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, y_0)\}\, d\xi + \int_{x_0}^{x} f\,(\xi, y_0)\, d\xi$$

de donde, al tomar el valor absoluto, se obtiene que

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi)) - f(\xi, y_0)|\, d\xi \right| + \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|\, d\xi \right|$$

Pero como f es globalmente de Lipschitz, se sigue que

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L\, |\varphi(\xi) - y_0|\, d\xi \right| + \left| \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|\, d\xi \right|$$

Y como $f(\xi, y_0)$ es una función continua sobre $[\beta, \gamma]$ (esto por ser f continua en $(a, b) \times \mathbb{R}$, por hipótesis), existe $M_{y_0} \geq 0$ tal que $|f(\xi, y_0)| \leq M_{y_0}$, $\xi \in [\beta, \gamma]$. Luego, entonces se obtiene que

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^{x} L\, |\varphi(\xi) - y_0|\, d\xi \right| + M_{y_0}\, |x - x_0| \tag{4.5}$$

Lema 4.1. *[Gronwall extendido] Sean u y λ funciones no negativas, $x \in [x_0, \gamma)$ y $\alpha(x) \geq \alpha \geq 0$, $\alpha(x_0) = \alpha \geq 0$. Si*

$$u(x) \leq \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \quad x \in [x_0, \gamma)$$

entonces

$$0 \leq u(x) \leq \alpha(x) + e^{v(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-v(\xi)} \lambda(\xi) \alpha(\xi)\, d\xi \quad x \in [x_0, \gamma) \tag{4.6}$$

en donde

$$v(x) = \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi)\, d\xi$$

En particular, si $\alpha(x) \equiv 0$ entonces $u(x) \equiv 0$.

Demostración. Tomando

$$w(x) = \alpha(x) + \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi)\, u(\xi)\, d\xi \tag{4.7}$$

es inmediato ver que:

(i) $0 \leq u(x) \leq w(x)$

(ii) $w(x_0) = \alpha(x_0) = \alpha \geq 0$

Así, derivando en (4.7) y tomando en cuenta (i), se tiene que

$$w'(x) = \alpha'(x) + \lambda(x)\, u(x) \leq \alpha'(x) + \lambda(x)\, w(x)$$

o sea que

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-\ell(x)} w(x)\right) \leq e^{-\ell(x)}\alpha'(x), \qquad \ell(x) = \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi) d\xi$$

Luego integrando, se obtiene que

$$e^{-\ell(x)} w(x) - \alpha = e^{-\ell(x)} w(x) - e^{-\ell(x_0)} w(x_0) \leq \int_{x_0}^{x} e^{-\ell(\xi)}\alpha'(\xi)\, d\xi$$

o sea que

$$w(x) \leq e^{-\ell(x)} \left[\alpha + e^{-\ell(\xi)}\alpha(\xi)\Big|_{x_0}^{x} - \int_{x_0}^{x} e^{-\ell(\xi)}\left(-\lambda(\xi)\right)\alpha(\xi)\, d\xi\right]$$

o bien que

$$0 \leq u(x) \leq w(x) \leq \alpha(x) + e^{\ell(x)} \int_{x_0}^{x} e^{-\ell(\xi)}\lambda(\xi)\alpha(\xi)\, d\xi$$

□

Como corolario se tiene el siguiente

Lema 4.2 (Gronwall)**.** *Sean $u(x)$ y $\lambda(x)$ funciones no negativas, $x \in [x_0, \gamma)$, $\alpha \geq 0$. Si*

$$u(x) \leq \alpha + \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi) u(\xi)\, d\xi\,, \qquad x \in [x_0, \gamma)$$

entonces

$$0 \leq u(x) \leq \alpha e^{-\ell(x)}, \qquad \ell(x) = \int_{x_0}^{x} \lambda(\xi)\, d\xi\,,\ \ x \in [x_0, \gamma) \tag{4.8}$$

En particular, si $\alpha = 0$ entonces $u(x) \equiv 0$.

Regresemos a la demostración del teorema 4.1, aplicando la desigualdad extendida de Gronwall (Lema 4.1) a la relación (4.5), obtenemos que

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq M_{y_0}(x - x_0) + e^{L(x-x_0)} \int_{x_0}^{x} e^{-L(\xi - x_0)} L M_{y_0}(\xi - x_0) d\xi\,, \quad x \in [x_0, \gamma)$$

desigualdad que podemos re-escribir como

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq M_{y_0}(x - x_0) + e^{L(x-x_0)} \left[\frac{M_{y_0}}{L} \int_{x_0}^{x} e^{-L(\xi - x_0)} \left(L(\xi - x_0)\right) \left(L d\xi\right) \right]$$

o bien como

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq M_{y_0}(x - x_0) + \frac{M_{y_0}}{L} e^{L(x-x_0)} \int_{0}^{L(x-x_0)} e^{-\xi} \xi \, d\xi, \quad \xi = L(\xi - x_0)$$

Y ya que

$$\int_{0}^{L(x-x_0)} e^{-\xi} \xi \, d\xi = 1 - e^{-L(x-x_0)} - L(x - x_0) e^{L(x-x_0)}$$ [5]

finalmente se obtiene que

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq M_{y_0}(x - x_0) + \frac{M_{y_0}}{L} e^{L(x-x_0)} - \frac{M_{y_0}}{L} - M_{y_0}(x - x_0)$$

o sea que

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq \frac{M_{y_0}}{L} \left(e^{L(x-x_0)} - 1 \right), \quad x \in [x_0, \gamma)$$

Por otro lado, (4.5) para $x \in (\beta, x_0]$, toma la forma

$$|\varphi(x) - y_0| \leq - \int_{x_0}^{x} L \, |\varphi(\xi) - y_0| \, d\xi - \int_{x_0}^{x} M_{y_0} \, d\xi$$

o sea que

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \int_{x}^{x_0} L \, |\varphi(\xi) - y_0| \, d\xi + \int_{x}^{x_0} M_{y_0} \, d\xi$$

o bien que

$$|\varphi(x) - y_0| \leq M_{y_0}(x_0 - x) + \int_{x}^{x_0} L \, |\varphi(\xi) - y_0| \, d\xi$$

Así, al aplicar la desigualdad extendida de Gronwall, se llega a que

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq \frac{M_{y_0}}{L} \left[e^{L(x_0 - x)} - 1 \right], \quad x \in (\beta, x_0]$$

[5]

$$\begin{aligned}
\int_0^{L(x-x_0)} e^{-\xi} \xi \, d\xi &= -e^{-\xi}\xi\Big|_0^{L(x-x_0)} - \int_0^{L(x-x_0)} \left(-e^{-\xi}\right) d\xi \\
&= -\xi e^{-\xi}\Big|_0^{L(x-x_0)} - e^{-\xi}\Big|_0^{L(x-x_0)} \\
&= 1 - e^{-L(x-x_0)} - L(x - x_0) e^{L(x-x_0)}
\end{aligned}$$

En conclusión se tiene que

$$0 \leq |\varphi(x) - y_0| \leq \frac{M_{y_0}}{L}\left[e^{L|x-x_0|} - 1\right], \quad x \in (\beta, \gamma)$$

Esto es, la función $w(x) \equiv |\varphi(x) - y_0|$, $x \in (\beta, \gamma)$ es acotada. Luego, la demostración del teorema 4.1 quedará completa si demostramos que los limites

$$\lim_{x \to \beta^+} \varphi(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \gamma^-} \varphi(x)$$

existen.

Lema 4.3. *Sea* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D = (a, b) \times \mathbb{R}$, *continua y globalmente de Lipschitz. Si* $\varphi(x)$, $x \in (\beta, \gamma)$, *con* $[\beta, \gamma] \subset (a, b)$, *es una solución del problema*

$$\textit{(PVI)} \qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \qquad (x_0, y_0) \in D$$

entonces $\varphi(x)$ *es uniformemente continua, y en particular los limites* $\lim_{x \to \beta^+} \varphi(x)$ *y* $\lim_{x \to \gamma^-} \varphi(x)$ *existen.*

Demostración. Por el lema 4.1 (desigualdad de Gronwall extendida) sabemos que la gráfica de $\varphi(x)$ está contenida en el conjunto cerrado y acotado

$$C = \left\{ (x, y) \,\middle|\, 0 \leq |y - y_0| \leq \frac{M_{y_0}}{L}\left[e^{L|x-x_0|} - 1\right], \; x \in [\beta, \gamma] \right\}$$

Y como f es continua, existe $M > 0$ tal que $|f(x, y)| \leq M$, para toda $(x, y) \in C$. Ahora, por ser $\varphi(x)$ solución de (4.4):

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

Consecuentemente, para $x, x' \in (\beta, \gamma)$, se tiene que

$$\varphi(x) - \varphi(x') = \int_{x'}^{x} f(\xi, \varphi(\xi)) d\xi$$

de donde se sigue que

$$|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq \left| \int_{x'}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi))| \, d\xi \right|$$

o sea que: $|\varphi(x) - \varphi(x')| \leq M\,|x - x'|$, $x, x' \in (\beta, \gamma)$. Lo que prueba que $\varphi(x)$ es uniformemente continua en (β, γ).

Para demostrar que $\lim_{x \to \beta^+} \varphi(x)$ existe, partamos suponiendo lo contrario. Esto es, que existen sucesiones $\{x_n\}, \{x'_n\} \subset (\beta, \gamma)$ que convergen a β, y que

$$\varphi(x_n) \to \ell_1, \qquad \varphi(x'_n) \to \ell_2 \qquad (\ell_1 \neq \ell_2)$$

Luego, se tiene que

$$0 < |\ell_1 - \ell_2| = \lim_{n\to\infty} |\varphi(x_n) - \varphi(x_n')| \leq \lim_{n\to\infty} M\,|x_n - x_n'| = 0 \quad !$$

De manera análoga se prueba que $\lim_{x\to\gamma^-} \varphi(x)$ existe. Esto completa la demostración del lema. $\square$

Ejercicio 4.1. *Sean $a(x)$ y $b(x)$, funciones continuas en $[a,b]$. Demuestra que las soluciones de la ecuación*

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad\qquad x \in [a,b]$$

están definidas en todo $[a,b]$.

Ejercicio 4.2. *Sean $a(x)$ y $b(x)$, $x \in \mathbb{R}$, funciones continuas. Demuestra que la solución del problema*

$$\begin{aligned} y' + a(x)y = b(x) &\qquad\qquad x \in \mathbb{R} \\ y(x_0) = x_0 &\qquad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

tiene una única solución $\varphi(x)$ definida en toda la recta real.

Ejercicio 4.3. *Para demostrar el siguiente*

Tma. *Si $\underset{\sim}{f} : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, locamente de Lipchitz respecto a $\underset{\sim}{y}$ y acotada (i.e., para toda $(t, \underset{\sim}{y}) \in [a,b]\times\mathbb{R}^n$, se tiene que $\| \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{y}) \| \leq M$, para alguna $M > 0$), entonces la solución del problema*

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}} &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \\ \underset{\sim}{y}(t_0) &= \underset{\sim}{y}_0, \quad a < t_0 < b \end{aligned} \tag{4.9}$$

tiene una única solución $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ definida sobre todo $[a,b]$.

desarolla los incisos siguientes

a) Demuestra que si $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ es solución de (4.1) definida en el intervalo $(c,d) \subset [a,b]$ entonces $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ es acotada en (c,d).

b) Sea $t_n \in (c,d)$, con $t_n \to d$, cuando $n \to \infty$, demuestra que existe $\underset{\sim}{z} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\underset{\sim}{\varphi}(t_n) \to \underset{\sim}{z}$ (i.e., el $\lim_{t\to d^-} \underset{\sim}{\varphi}(t)$ existe). Análogamente, $\lim_{t\to c^+} \underset{\sim}{\varphi}(t)$ también existe. Sugerencia: Basta con mostrar que $\| \underset{\sim}{\varphi}(t_{n+k}) - \underset{\sim}{\varphi}(t_n) \| \leq M \mid t_{n+k} - t_n \mid$. (¿Por qué?)

c) Muestra aplicando el tma. de Cauchy-Lipschitz al problema de Cauchy auxiliar

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}} &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \\ \underset{\sim}{y}(d) &= \underset{\sim}{z} \quad a < t_0 < b \end{aligned} \tag{4.10}$$

es posible extender la solución $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ de manera única hacia la derecha de d en un tramo $\eta > 0$ (i.e., del intervalo (c, d) al intervalo $(c, d + \eta)$), a menos que $c = d$.

Concluye.

Ilustración El problema

$$y' + \frac{1}{\sqrt{1 + x^3}} y = \arctan x$$
$$y(0) = 1$$

tiene una única solución $\varphi(x)$ definida en todo $\mathbb{R}$.

5 Continuidad respecto a Condiciones Iniciales y parámetros.

Como ya se ha visto la solución del problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{y} &= ay \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

viene dada por

$$y(t, t_0, y_0, a) = y_0 \, e^{a(t - t_0)}$$

la cual es claramente una función continua con respecto a todos sus argumentos.

A continuación se prueba, primeramente, que la solución del problema de Cauchy depende continuamente de las condiciones iniciales.

Teorema 5.1. *Si el campo vectorial $\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$ es continuo y L-Lips en el "rectángulo" $R = I_{t_0} \times B_b(\underset{\sim}{y_0})$ entonces la solución $\underset{\sim}{\varphi}(t; t_0, \underset{\sim}{y_0})$ del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{y}} &= \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}) \\ \underset{\sim}{y}(t_0) &= \underset{\sim}{y_0} \end{aligned} \tag{5.2}$$

es continua respecto a todos sus argumentos. En particular, uniforme con respecto a t_0 y $\underset{\sim}{y_0}$.

Demostración. Sean $\underset{\sim}{\varphi_*}(t; t_0^*, \underset{\sim}{y_0}^*)$ y $\underset{\sim}{\varphi}(t; t_0, \underset{\sim}{y_0})$ las soluciones de la ecuación $\dot{\underset{\sim}{y}} = \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y})$ con condiciones iniciales de $\underset{\sim}{y}(t_0^*) = \underset{\sim}{y_0}^*$ y $\underset{\sim}{y}(t_0) = \underset{\sim}{y_0}$, respectivamente.

Luego se tiene que

$$\underset{\sim}{\varphi_*}(t; t_0^*, \underset{\sim}{y_0}^*) = \underset{\sim}{y_0}^* + \int_{t_0^*}^{t} \underset{\sim}{f}(\xi, \underset{\sim}{\varphi_*}(\xi; t_0^*, \underset{\sim}{y_0}^*)\, d\xi$$

y que

$$\underset{\sim}{\varphi}(t;t_0,\underset{\sim}{y_0}) = \underset{\sim}{y_0} + \int_{t_0}^{t} \underset{\sim}{f}(\xi,\underset{\sim}{\varphi}(\xi;t_0,\underset{\sim}{y_0}))\,d\xi$$

De donde se sigue restando miembro a miembro y tomando normas que

$$\begin{aligned}\|\underset{\sim}{\varphi_*}(t;t_0^*,\underset{\sim}{y_0}^*) - \underset{\sim}{\varphi}(t;t_0,\underset{\sim}{y_0})\| \le \|\underset{\sim}{y_0}^* - \underset{\sim}{y_0}\| + \left|\int_{t_0^*}^{t_0} \|\underset{\sim}{f}(\xi,\underset{\sim}{\varphi_*}(\xi;t_0^*,\underset{\sim}{y_0}^*)\|\,d\xi\right| \\ + \left|\int_{t_0^*}^{t_0} L\,\|\underset{\sim}{\varphi_*}(\xi;t_0^*,\underset{\sim}{y_0}^*) - \underset{\sim}{\varphi}(\xi;t_0,\underset{\sim}{y_0})\|\,d\xi\right|\end{aligned}$$

O bien que,

$$\begin{aligned}\|\underset{\sim}{\varphi_*}(t;t_0^*,\underset{\sim}{y_0}^*) - \underset{\sim}{\varphi}(t;t_0,\underset{\sim}{y_0})\quad\| \le &\ \left(\|\underset{\sim}{y_0}^* - \underset{\sim}{y_0}\| + M\,|t_0^* - t_0|\right) \\ + &\ \left|\int_{t_0^*}^{t_0} L\,\|\underset{\sim}{\varphi_*}(\xi;t_0^*,\underset{\sim}{y_0}^*) - \underset{\sim}{\varphi}(\xi;t_0,\underset{\sim}{y_0})\|\,d\xi\right|\end{aligned}$$

donde M es cota de $\|\underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{y})\|$ en el rectángulo $R = I_{t_0}\times B_b(\underset{\sim}{y_0})$. Luego aplicando la desigualdad de Gronwall, se obtiene que

$$\|\underset{\sim}{\varphi_*}(t;t_0^*,\underset{\sim}{y_0}^*) - \underset{\sim}{\varphi}(t;t_0,\underset{\sim}{y_0})\| \le \left(\|\underset{\sim}{y_0}^* - \underset{\sim}{y_0}\| + M\,|t_0^* - t_0|\right)\,e^a$$

De donde se sigue que $\underset{\sim}{\varphi}(t;t_0,\underset{\sim}{y_0})$ es continua con respecto a t_0 y $\underset{\sim}{y_0}$, uniformemente en t. $\square$

Ahora, como consecuencia de este teorema veamos la continuidad de la solución del problema de Cauchy con respecto a parámetros. En efecto, observando que el problema de Cauchy

$$\begin{aligned}\dot{\underset{\sim}{y}} &= \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{y},\underset{\sim}{\beta}) \\ \underset{\sim}{y}(t_0) &= \underset{\sim}{y_0}\end{aligned} \tag{5.3}$$

se puede, claramente, reformular como

$$\begin{aligned}\dot{\underset{\sim}{z}} &= \underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{z}) \\ \underset{\sim}{z}(t_0) &= \underset{\sim}{z_0}\end{aligned} \tag{5.4}$$

en donde

$$\underset{\sim}{z}(t) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y}(t) \\ \underset{\sim}{\theta}(t)\end{bmatrix} \qquad \underset{\sim}{z_0} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{y_0} \\ \underset{\sim}{\beta}\end{bmatrix}$$

y

$$\underset{\sim}{F}(t,\underset{\sim}{z}) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{z}) \\ \underset{\sim}{0}\end{bmatrix}$$

Es directo verificar que si $\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{\beta})$ es de L-Lips con respecto a $\underset{\sim}{y}$ y $\underset{\sim}{\beta}$. Esto es, que

$$\|\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y_2}, \underset{\sim}{\beta_2}) - \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{y_1}, \underset{\sim}{\beta_1})\| \leq L \left(\|\underset{\sim}{y_2} - \underset{\sim}{y_1}\| + \|\underset{\sim}{\beta_2} - \underset{\sim}{\beta_1}\| \right) \|$$

en el "cubo" $K = I_a(t_0) \times B_b(\underset{\sim}{y_0}), B_c(\underset{\sim}{\beta}) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ entonces $\underset{\sim}{F}(t, \underset{\sim}{z})$ es también L-Lips [6] en el cubo K. Luego, por el teorema anterior, se sigue que la solución $\underset{\sim}{\varphi}(t; t_0, \underset{\sim}{y_0}, \underset{\sim}{\beta})$ del problema de Cauchy (5.3) es continua en todos sus argumentos, siendo esta dependencia uniformemente continua con respectos a sus últimos 3 argumentos.

[6] En efecto, se verifica que

$$\|\underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{z_2}) - \underset{\sim}{f}(t, \underset{\sim}{z_1})\| \leq L \, \|\underset{\sim}{z_2} - \underset{\sim}{z_1}\|$$

en el cubo K con respecto a la norma vectorial $\|\underset{\sim}{z}\| \equiv \|\underset{\sim}{y}\| + \|\underset{\sim}{\theta}\|$.

References

[Hur] Hurwitz, *Lectures on Differential Equations*,

[Sot] Sotomayor J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, 1979.

[Ptv] Petrovsky, I.G., *Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1966.