Teorema de Clasificación de Sistemas EDO's de Primer Orden en el Plano

Jesús López Estrada*

October 29, 2014

Abstract

Con excepción del bien conocido libro de Ford [Frd], la demostración que usualmente aparece en los libros de texto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO's) del teorema de clasificación de las soluciones de equilibrio de un sistema de primer orden de EDO's con coeficientes constantes en el plano, hace uso de conocimientos básicos del Algebra Lineal. Y si bien estos requisitos (autovalores y autovectores de una matriz) no se pueden considerar exigentes, resulta de interés presentar una demostración de este teorema sin auxilio de tales requerimientos. El objetivo de este trabajo es dar una demostración del teorema en cuestión usando nociones básicas sobre los métodos de resolución de la de la ecuación diferencial homogénea $y' = h(y/x)$ (i.e., reduciendo a tal ecuación a una de variables separadas vía el cambio de variable de Leibnitz $z = y/x$, o bien mediante el cambio de coordenadas de cartesianas a polares) y de nociones también básicas de las propiedades geométricas de sus soluciones.

1 Introducción

La demostración que usualmente -con excepción del libro de texto de Ford [Frd]- aparece en los libros de EDO's del teorema de clasificación general de los sistemas lineales de EDO's de primer orden con coeficientes constantes en el plano de fases (véase la Fig.1 abajo, para una descripción gráfica de este teorema), hace uso de conocimientos básicos del Algebra Lineal. Y aún cuando estos requisitos no se pueden considerar exigentes, es de gran interés poder presentar, en un primer curso, una demostración lo más elemental posible de este teorema central, recurriendo a conocimientos previamente vistos en el mismo primer curso de EDO's. El objetivo de este trabajo es dar una demostración del teorema antes referido echando mano de sólo de conocimientos previos sobre: (1) la resolución y propiedades geométricas de las soluciones de la ecuación homogénea $y' = h(y/x)$, y (2) el comportamiento geométrico de las soluciones de la ecuación $r' = a(\theta)r$ con $a(\theta)$ una función 2π periódica.

En fin, el propósito de este trabajo es presentar una demostración alternativa y elemental del siguiente:

*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Cd. Universitaria, 04510 México D.F., MEXICO; e-mail: jele@lya.fciencias.unam.mx

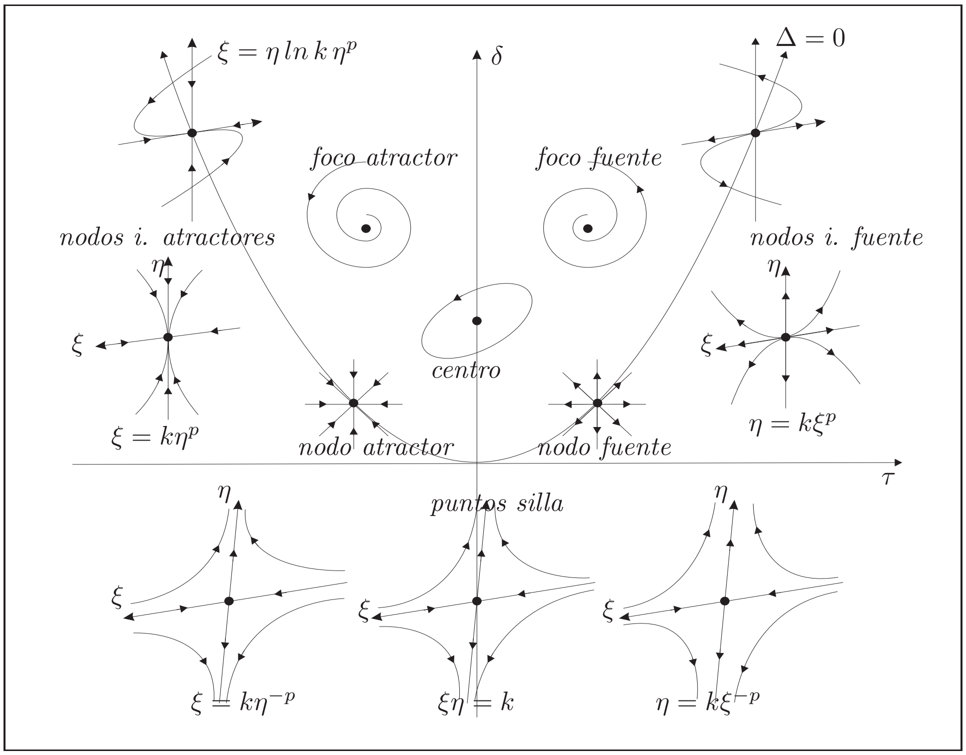

Figura 1: Tma. de Clasificación Gral. de sistemas lineales de EDO's de primer orden en el plano. Aquí, $\tau \equiv Tr(A)$, $\delta \equiv Det(A)$ y $\Delta \equiv \Delta(A) = \tau^2 - 4\delta$, donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es la matriz dada en (1.1)) asociada al sistema lineal de EDO's (1.2), que aparecen enseguida.

Teorema. *Para el sistema lineal*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y\\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned}$$

se tiene que:

(a) *Si* $\delta < 0$ *entonces su solución de equilibrio es un punto* ***silla***.

(b) *Si* $\delta > 0$ *y* $\Delta < 0$ *entonces su solución de equilibrio es un* ***foco***; *estable si* $\tau < 0$ *e inestable si* $\tau > 0$.

(c) *Si* $\delta > 0$ *y* $\Delta \geq 0$ *entonces su solución de equilibrio es un* ***nodo***; *estable si* $\tau < 0$ *e inestable si* $\tau > 0$.

(d) *Si* $\delta > 0$ *y* $\tau = 0$ *entonces su solución de equilibrio es un* ***centro***.

A continuación se describe el contenido del presente trabajo. En la sección 2, con el propósito de hacer este trabajo autocontenido, se revisan los requerimientos sobre las propiedades geométricas de las soluciones de la ecuación homogénea $y' = h(y/x)$. En particular, se ve que la ecuación homogénea $y' = h(y/x)$ tiene curvas integrales de la forma $y = mx$, $x \neq 0$, *ssi* m es un punto fijo de $h(z)$, y que las soluciones de la ecuación lineal homogénea $r' = a(\theta)r$ con $a(\theta)$ una función 2π periódica, tienden a 0 cuando $\theta \to \infty$ si $\bar{a} > 0$, que tienden a ∞ si $\bar{a} < 0$, y que son 2π periódicas si $\bar{a} = 0$, donde

$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\theta)d\theta$$

En la sección 3, se dan las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación homogénea

$$y' = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11} + a_{12}y}$$

la cuál se obtiene del sistema de EDO's de primer orden

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y\\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y\end{aligned} \tag{1.1}$$

al eliminar la variable independiente t, tenga curvas integrales de la forma $y = mx$, $x \neq 0$ [1]:

$$q_A(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21}$$

[1] Bajo el supuesto que a_{12} y a_{21} son ambas no nulas, pues en caso contrario el sistema (1.1) se reduce a un sistema desacoplado

$$\frac{dx}{dt} = a_{11}x, \qquad \frac{dy}{dt} = a_{22}y$$

y su estudio es directo dejandolo al lector.

La sección 4 es la más extensa, ahí se discute el caso $\Delta(A) > 0$, donde aparecen los *puntos silla* para $Dt(A) < 0$ y los *nodos impropios* si $Dt(A) > 0$, en donde $Dt(A) \equiv a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ denota al determinate de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

asociada al sistema de primer orden de EDO's (1.1).

En la sección 5, se estudia el caso $\Delta(A) = 0$, donde también aparecen los nodos impropios no genéricos. En la sección 6, se analiza el caso $\Delta(A) < 0$, caso en el cual tienen lugar los *focos* si $Tr(A) \neq 0$ y los *centros* si $Tr(A) = 0$, donde $Tr(A) \equiv a_{11} + a_{22}$ denota a la traza de la matriz A dada en (1.2). En la sección 7, se discute la reducción del sistema (1.1), para el caso $\Delta(A) < 0$ a uno diagonal en el sistema de coordenadas ξ, η. Mientras que en la sección 8, se trata la reducción del mismo sistema (1.2) al sistema

$$\begin{array}{rcrcl} \dot{x} & = & \lambda x & + & \eta \\ \dot{\eta} & = & & + & \lambda\,\eta \end{array}$$

Y por último, en la sección 9, para el caso $\Delta(A) < 0$, se ve la reducción del sistema (1.1) al sistema de la forma

$$\begin{array}{rcl} \dot{u} & = & au - bv \\ \dot{v} & = & bu + av \end{array}$$

Ejercicio 1.1. *Con el sólo cálculo de $\delta = Dt(A)$, $\tau = Tr(A)$ y $\Delta = \tau^2 - 4\delta$ (discriminante de A), determina el tipo de la solución de equilibrio (punto silla, nodo, foco ó centro) del sistema $\dot{\underline{x}} = A\underline{x}$, donde*

$$\begin{array}{llll}
(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} & (b) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} & (c) \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \\
(d) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & (e) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & (f) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \\
(g) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} & (h)\ A = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & (i) \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Describe su estabilidad. ¿Cuáles de ellos son genéricos?

Ejercicio 1.2. ** El modelo matemático del sistema mecánico consistente de un objeto de masa m atado a un resorte con constante de Hooke k y con resistencia del medio proporcional a su velocidad (con constante de proporcionalidad ν), el cuál se mueve sobre una línea recta horizontal está dado por la ecuación diferencial*

$$m\,\ddot{x} + \nu\,\dot{x} + kx = 0$$

a) Muestra que esta ecuación se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones lineales de primer orden en el plano. ¿De qué tipo es su solución de equilibrio?
Sugerencia: Introduce la variable $y = \dot{x}$.
b) En cualquier caso, muestra que la solución de equilibrio de este sistema es siempre (asintóticamente) estable. Interpreta físicamente.

2 Antecedentes

En esta sección se repasan algunos prerrequisitos a cerca del sistema de primer orden de EDO's en el plano con relación a la ecuación homogénea $y' = h(y/x)$.

2.1. Si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es no-singular (i.e., $Dt(A) \neq 0$) entonces $(x, y) = (0, 0)$ es la única solución (aislada) de equilibrio del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{2.1}$$

La pregunta es ¿Cuál es el comportamiento geométrico de las soluciones del sistema (2.1) alrededor de su solución de equilibrio? A la respuesta de esta pregunta esta dedicado el presente trabajo y para poder responderla, se hacen antes algunas consideraciones.

Para empezar, es conveniente observar que el sistema (2.1), por ser lineal y de coeficientes constantes, es globalmente Lipschitz. Consecuentemente sus trayectorias solución están definidas para toda $t \in \mathbb{R}$. Y que al eliminar la variable independiente (i.e., la variable t) en el sistema (2.1) se da lugar a la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{2.2}$$

o sea, a la ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x}) \tag{2.3}$$

con

$$h(z) = \frac{a_{21} + a_{22}z}{a_{11} + a_{12}z} \tag{2.4}$$

donde el punto de equilibrio $(0, 0)$ del sistema (2.1) es ahora un punto singular de la ecuación homogénea (2.3).

Luego, recordando que la ecuación (2.3), mediante el cambio de variable $z(x) = y(x)/x$ de Leibnitz, se transforma en la ecuación de variables separadas

$$x\frac{dz}{dx} = h(z) - z \tag{2.5}$$

es directo ver que:

(1) Si $f(z) \equiv z$ entonces la ecuación (2.2) se reduce a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

cuya curva integral general está dada por $y = kx$, $x \neq 0$ y $x = 0$, $y \neq 0$. Lo que corresponde, con relación al sistema (2.1), al caso $a_{11} = a_{22} = \lambda$, $a_{12} = a_{21} = 0$; o sea, al caso que (2.1) se reduce al sistema desacoplado

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x, \qquad \frac{dy}{dt} = \lambda y$$

cuyo punto de equilibrio $(0,0)$ es un *nodo* estable o inestable, dependiendo si λ es negativa o positiva.

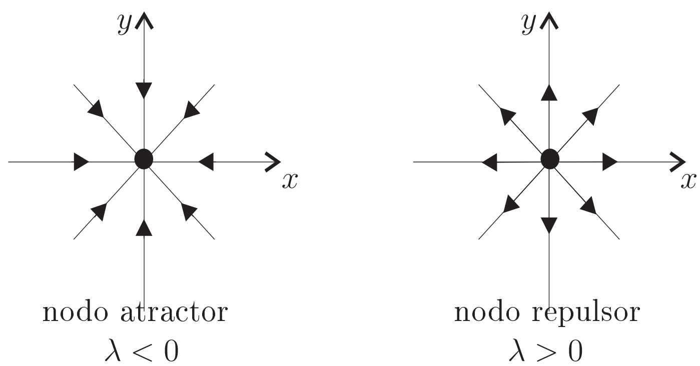

Figura 2: Nodos estables e inestables

(2) Si $h(z)$ no es idénticamente z entonces es directo verificar que $z = m$ es una solución constante de la ecuación (2.5) ssi m es un punto fijo de $h(z)$, en cuyo caso $y = mx$, $x \neq 0$ es curva integral de la ecuación (2.3).

2.2. Bajo ciertas circunstancias para el análisis del sistema (2.1), es conveniente pensar a la ecuación homogénea $\frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x})$ en coordenadas polares. Es de interés observar que esta ecuación en coordenadas polares toma la forma

$$\frac{dr}{d\theta} = a(\theta) r \tag{2.6}$$

donde

$$\begin{aligned} a(\theta) &= \frac{cos\,\theta + sen\,\theta\, h(tg\theta)}{cos\,\theta\, h(tg\theta) - sen\,\theta} \\ &= -\frac{a_{11} cos^2\theta + (a_{12} + a_{21}) cos\,\theta\, sen\,\theta + a_{22} sen^2\theta}{a_{12} cos^2\theta + (a_{11} - a_{22}) cos\,\theta\, sen\,\theta - a_{21} sen^2\theta} \end{aligned} \tag{2.7}$$

al considerar que $h(z)$ está dada por (2.4), es claramente una función 2π periódica.

Ahora, recordando que el valor promedio $\bar{a}$ de una función periódica de periodo $T > 0$ se define como

$$\bar{a} = \frac{1}{T} \int_0^T a(\theta) d\theta$$

se tiene el siguiente

Lema 2.1. *Sea $a(\theta)$ una función periódica de periodo $T > 0$:*
(a) Si $\bar{a} < 0$ entonces las soluciones (no triviales) de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ tienden a cero cuando $\theta \to \infty$,
(b) Si $\bar{a} > 0$ entonces las soluciones (no triviales) de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ tienden a ∞ cuando $\theta \to \infty$, y
(c) Si $\bar{a} = 0$ entonces las soluciones (no triviales) de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ son periódicas de periodo T.

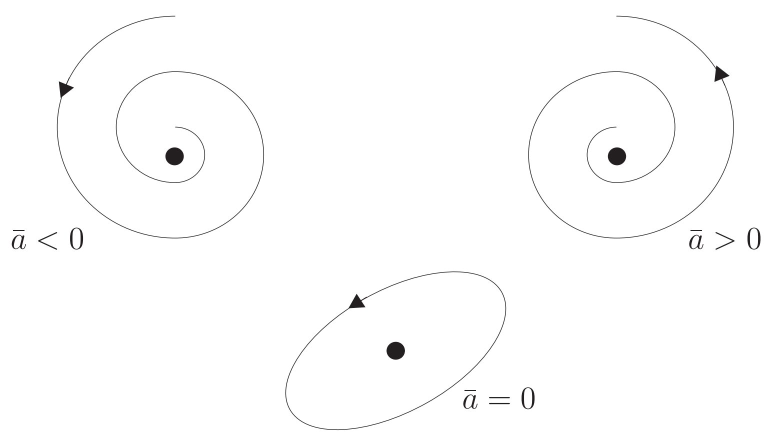

Figura 3: Representación Gráfica del Lema 2.1

Demostración. Obsérvese que:

(1) Si $\varphi(\theta)$ es una solución de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ y $\varphi(\theta^*) = 0$ entonces, por el teorema de existencia y unicidad, $\varphi(\theta) \equiv 0$.

(2) Si $\varphi(\theta)$ es una solución de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ entonces, debido a la periodicidad de $a(\theta)$, se tiene que $\psi(\theta) \equiv \varphi(\theta + T)$ es también una solución de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$.

(3) Si $\varphi(\theta)$ y $\psi(\theta)$ son soluciones de la ecuación $\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$, $\varphi(\theta)$ no trivial, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(\theta) = c\varphi(\theta)$. En efecto, basta con verificar que $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\psi(\theta)}{\varphi(\theta)}\right) \equiv 0$.

(4) Consecuentemente, por (2) y (3), existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(\theta + T) = c\varphi(\theta)$.

(5) Así, $\varphi(\theta)$ es una solución periodica de periodo T de la ecuación $\dfrac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ ssi $c = 1$.

(6) Si $\mid c \mid > 1$ entonces $\mid \varphi(\theta) \mid \to \infty$, cuando $\theta \to \infty$. Y si $0 < \mid c \mid < 1$ entonces $\varphi(\theta) \to 0$, cuando $\theta \to \infty$.

En efecto, dada cualquier sucesión θ_n, $\theta_n \to \infty$, para cada θ_n existe $k_n \in \mathbb{N}$ y $\vartheta n \in [0, T)$ tal que $\theta_n = k_n T + \vartheta_n$. Luego entonces se tiene que

$$\varphi(\theta_n) = c^{k_n} \varphi(\vartheta_n)$$

Ahora como $\varphi(\theta)$ es una función continua en $[0, T]$, existen μ y M tales que

$$0 < \mu \leq \mid \varphi(\theta) \mid \leq M, \text{ para toda } \theta \in [0, T]$$

Consecuentemente se tiene que

$$\mu \mid c \mid^{k_n} \leq \mid \varphi(\theta_n) \mid \leq M \mid c \mid^{k_n}$$

De donde se sigue (6).

(7) Finalmente, veamos que $c = e^{T\bar{a}}$.

En efecto, recordando que solución analítica $\varphi(\theta)$ de la ecuación $\dfrac{dr}{d\theta} = a(\theta)r$ está dada por $\varphi(\theta) = r_0\, exp\left(\int_0^\theta a(\theta)d\theta\right)$, es directo ver, por (4), que $c = \dfrac{\varphi(\theta + T)}{\varphi(\theta)} = exp\left(\int_\theta^{\theta+T} a(\theta)d\theta\right)$. Esto es, que $c = e^{T\bar{a}}$.

De (5), (6) y (7) se completa la demostración del lema. $\square$

Regresando a nuestro sistema de ecuaciones (2.1), por el lema anterior, tendremos que su estado de equilibrio $(0, 0)$, será un *foco* estable o inestable, dependiendo de que $\bar{a}$ sea menor o mayor que cero, o bien un *centro* si $\bar{a} = 0$. En la sección 6 se probará que $\bar{a} = Tr(A)/2$.

Ejercicio 2.1. *Si $\varphi(x)$ es una solución de la ecuación $y' = h(y/x)$, demuestra que $\psi(\widetilde{x}) =_{def} k\,\varphi(\widetilde{x}/k)$, $(k \neq 0)$ es también solución. Esto es, la transformación $\widetilde{x} = kx$, $\widetilde{y} = ky$ manda soluciones en soluciones de la ecuación $y' = h(y/x)$.*

Ejercicio 2.2. ** [Sot] Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y $m \in \mathbb{R}$ tq $h(m) = m$. Demuestra que*

a). Si $h'(m) < 1$ entonces ninguna solución de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x}) \tag{2.8}$$

es tangente en $(0, 0)$ a la solución $y = mx$.

b). Si $h'(m) > 1$ entonces existe una infinidad de soluciones de (2.8) tangentes en el origen a la solución $y = mx$.

NOTA. Dos funciones φ y ψ definidas para $x > 0$, se dice que son tangentes en el origen si

$$\lim_{x \to 0} \frac{\psi(x) - \varphi(x)}{x} = 0$$

Ejercicio 2.3. ** En la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes para que las curvas integrales de la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = h(\frac{y}{x}) \tag{2.9}$$

representen curvas cerradas alrededor del origen, desarrolla los incisos siguientes:

a). Muestra que la ecuación (2.9), en coordenadas polares, se transforma en la ecuación en variables separadas (lineal)

$$\frac{dr}{d\theta} = a(\theta)\, r\,, \tag{2.10}$$

en donde

$$a(\theta) = \frac{\cos\theta\ + sen\theta\, h(\tan\theta)}{\cos\theta\ h(\tan\theta) - sen\theta}\,. \tag{2.11}$$

Sugerencia: Deriva, con respecto a θ, a la identidad $r^2 = x^2 + y^2$.

b). Rescribiendo (2.11) como

$$a(\theta) = \frac{1 + \tan\theta\, h(\tan\theta)}{h(\tan\theta) - \tan\theta}\,,$$

Demuestra que si $h(\tan\theta_0) = \tan\theta_0$, para algún θ_0, entonces $y = kx$, $x \neq 0$ con $k = \tan\theta_0$, es una curva integral de la ecuación original (2.9). Esto es, si el denominador de $a(\theta)$ se anula para algún valor de θ entonces la ecuación (2.9) no puede tener curvas integrales cerradas alrededor del origen.

c). Demuestra que si $a(\theta) \equiv 0$ entonces $r =$ cte. es la curva integral general de la ecuación (2.10), y con ello, de (2.9). Más aún, que la ecuación (2.9) se reduce a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

d). Del inciso (a) se sigue que la ecuación (2.9) tiene curvas integrales cerradas ssi la ecuación (2.10) tiene soluciones periódicas. ***Concluye****.*

Sugerencia: Usa el lema 2.1.

e). Más aún, bajo el supuesto que $f(z) \neq z$, pt z, sea

$$\overline{a} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\theta)\, d\theta\,.$$

Prueba que si $\overline{a} < 0$ entonces las soluciones de (2.9) tienden a 0 cuando $\theta \to \infty$, y que si $\overline{a} > 0$ entonces tales soluciones tienden a ∞ cuando $\theta \to \infty$.

3 La ecuación discriminante

En esta sección se estudian las condiciones bajo las cuáles la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{3.1}$$

admite soluciones de la forma $y = mx$, $x \neq 0$. Lo que equivale a dar las condiciones bajo las cuáles la función (véase el punto (2) en el apartado 2.1 en la sección anterior)

$$h(z) = \frac{a_{21} + a_{22}z}{a_{11} + a_{12}z} \tag{3.2}$$

respecto a la ecuación en variables separadas

$$x\frac{dz}{dx} = h(z) - z \tag{3.3}$$

tiene a $m \in \mathbb{R}$ como punto fijo.

Y como $m \in \mathbb{R}$ es un punto fijo de $h(z)$ sí y solo si m es un cero real de la ecuación $h(z) - z = 0$, se sigue -para $h(z)$ dada por (3.2)- que m debe ser una raíz real del polinomio cuadrático

$$q_A(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21} \tag{3.4}$$

el cuál se obtiene directamente al sustituir (3.2) en $h(z) - z = 0$, y que de aquí en adelante llamaremos *polinomio discriminante* asociado al sistema (2.1). [2]

Luego, el polinomio discriminante $q_A(z)$ tendrá dos, una o ninguna raíz real, dependiendo del valor de su discriminante

$$\Delta_q \equiv (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}$$

Esto es, dependiendo de si Δ_q es positivo, cero o negativo. El lector puede verificar directamente que $\Delta_q = \Delta(A)$, donde

$$\Delta(A) \equiv [Tr(A)]^2 - 4Dt(A) \tag{3.7}$$

es el discriminante para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

asociada al sistema (2.1), y en donde $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$ y $Dt(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ son la traza y el determinante de la misma matriz A.

Como resumen de esta discusión, se tiene el siguiente

[2] Esto presupone que ambos a_{12} y a_{21} no son simultáneamente igual a cero. Si no es el caso, entonces el sistema (2.1) se reduce al sistema desacoplado

$$\dot{x} = a_{11}x, \quad \dot{y} = a_{22}y \tag{3.5}$$

Y consecuentemente, la ecuación homogénea (3.1) se reduce a $\frac{dy}{dx} = k\frac{y}{x}$, con $k = \frac{a_{22}}{a_{11}}$, cuyas curvas integrales están dadas por

$$y = c \mid x \mid^k \tag{3.6}$$

De (3.5) y (3.6) es directo describir la conducta geométrica de las soluciones del sistema (3.5) alrededor de su punto de equilibrio $(0, 0)$, en el plano de fases. Por otro lado, en lo que sigue se supondrá, sin pérdida de generalidad, que a_{12} es distinto de cero. Si $a_{12} = 0$ entonces tomando el cambio de variable de Leibnitz $z(y) = x(y)/y$, se obtiene la ecuación homogénea $\frac{dx}{dy} = h(x/y)$ con $h(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}}$. Así, hallar los puntos fijos de $h(z)$ significa hallar las raíces reales del polinomio cuadrático $q^*(z) = a_{21}z^2 + (a_{22} - a_{11})z - a_{12}$.

Lema 3.1. *La ecuación homogénea*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}$$

(a) tiene dos curvas integrales distintas de la forma $y = mx$, $x \neq 0$ *ssi* $\Delta(A) > 0$.
(b) tiene una sola curva integral de la forma $y = mx$, $x \neq 0$ *ssi* $\Delta(A) = 0$. *Y,*
(c) no tiene curvas integrales de la forma $y = mx$, $x \neq 0$ *ssi* $\Delta(A) < 0$.

En la Fig. 4 que sigue se da una ilustración geométricamente de este lema.

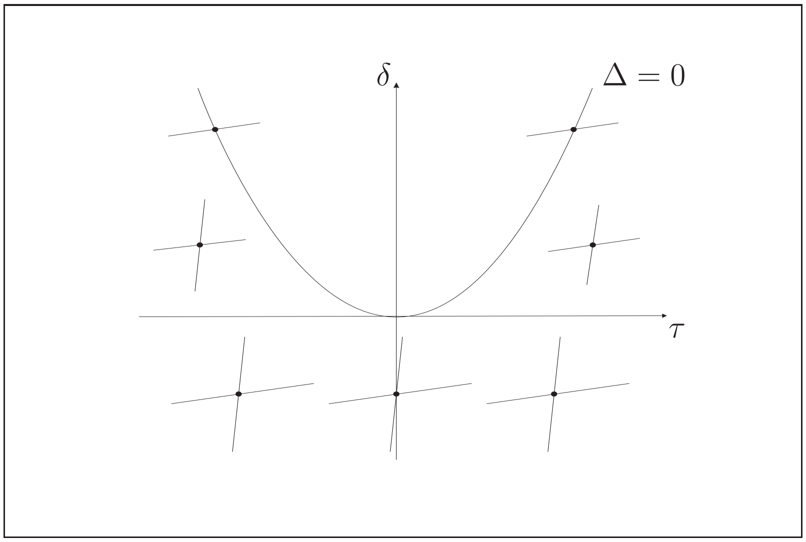

Figura 4: Representación gráfica del Lema Discriminante: $\delta \equiv Dt(A)$, $\tau \equiv Tr(A)$ y $\Delta \equiv \Delta(A)$; $\Delta < 0$ arriba de la parábola ($\Delta = 0$), y $\Delta > 0$ abajo de ella.

Ejercicio 3.1. *El el sistema de ecuaciones*

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

al eliminar la variable "tiempo" t*, se da lugar a la ecuación homogénea*

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{21}x + a_{122}y}, \tag{3.9}$$

la que a su vez, mediante el cambio de variable $y\,z(y) = x(y)$*, se puede reescribir como*

$$y\frac{dz}{dy} = f(z) - z, \qquad donde \quad f(z) = \frac{a_{11}z + a_{12}}{a_{21}z + a_{22}} \tag{3.10}$$

a) Si $f(z) \equiv z$ *, explica porque la solución general de la ecuación (3.9) está dada por* $z = k$*, para* $y \neq 0$*. O equivalentemente, la solución general de la ecuación (3.8) está dada por* $x = ky$*, para* $y \neq 0$*.*

b) Muestra que $m \in \mathbb{R}$ es una solución de la ecuación $f(z) - z = 0$ ssi m es solución de la ecuación cuadrática

$$q(z) = 0, \qquad \textit{donde} \qquad q(z) = a_{21} z^2 + (a_{22} - a_{11}) z - a_{12} \tag{3.11}$$

y que el discriminante Δ_q de esta ecuación cuadrática $q_A(z) = 0$, se puede reescribir como sigue

$$\Delta_q = [Tr(A)]^2 - 4Dt(A)$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

c). Muestra que si $\Delta_q > 0$, entonces las rectas $x = m_1 y$ y $x = m_2 y$, $y \neq 0$, donde m_1 y m_2 son raíces reales de la ecuación cuadrática (3.11), son curvas integrales de la ecuación (3.8), .

d) Muestra que si $\Delta_q = 0$, entonces la ecuación (3.8) admite sólo una curva integral de la forma $x = my$ ¿qué es m?.

e) Muestra que si $\Delta < 0$, entonces la ecuación homogénea (3.8) no admite curva integral alguna de la forma $x = my$.

Ejercicio 3.2. *Considera la ecuación diferencial*

$$y' = \frac{a_{21} x + a_{22} y}{a_{11} x + a_{12} y} \tag{3.12}$$

bajo el supuesto que el determinante $Dt(A)$ de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

es diferente de cero.

a) Muestra que las isoclinas de la ecuación (3.12) son líneas rectas por el origen.

b) Muestra que la isoclina $y = mx \, (m \in \mathbb{R})$ es solución de la ecuación (3.12) ssi m es raíz real de la ecuación discriminante $q_A(z)$ asociada a (3.12), donde

$$q_A(z) = a_{12} z^2 + (a_{11} - a_{22}) z - a_{21}$$

c) Muestra que la ecuación (3.12) tiene isoclinas que son solución ssi

$$\Delta(A) \equiv [Tr(A)]^2 - 4Dt(A) \geq 0$$

d) Muestra que

$$h'(z) = \frac{Dt(A)}{(a_{11} + a_{12} z)^2} \tag{3.14}$$

e) Demuestra la siguiente

Afm 1. Si $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) (\equiv a_{11} + a_{22}) < 0$ entonces las curvas integrales de la ecuación (3.12) son tangentes en el origen a la curva integral $y = m_2 x$, $x \neq 0$, donde $m_1 < m_2$ son las raíces de la ecuación discriminante $q_A(z) = 0$.

Sugerencia: (i) Muestra que $\Delta_q = \Delta(A)$; (ii) Muestra que $\lambda_1 = a_{11} + a_{12}m_1$ y que $\lambda_2 = a_{11} + a_{12}m_2$, donde λ_1 y λ_2, $\lambda_1 < \lambda_2$ son las raíces del polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(a)\lambda + Dt(A)$ asociado a la matriz (3.13).

f) Demuestra la siguiente

Afm 2. Si $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) > 0$ entonces las curvas integrales de la ecuación (3.12) son tangentes en el origen a la curva integral $y = m_1 x,\ x \neq 0$.

g) Demuestra la siguiente

Afm 3. Si $Dt(A) < 0$ entonces no hay curva integral de la ecuación (3.12) que sea tangente en el origen a las soluciones $y = m_1 x, y = m_2 x,\ x \neq 0$.

Ejercicio 3.3. *Para cada una de las ecuaciones siguientes:*

a) Dí si tiene isoclinas que sean curva integral

$$y' = \frac{x - y}{y - 3x}\,, \qquad y' = \frac{x + 3y}{x - 2y}\,, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{x + 8y}{2x - 9y}$$

b) Halla las isoclinas que sean curva integral para cada una de las ecuaciones del inciso anterior.

c) Finalmente, después de dibujar algunas isoclinas para cada una de las ecuaciones en el inciso (a), describe la conducta geométrica de sus curvas integrales.

4 Análisis del caso $\Delta(A) > 0$

Si $\Delta(A) > 0$ entonces el polinomio discriminante

$$q_A(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21} \tag{4.1}$$

tiene dos raíces reales $m_1 < m_2$. Y por ello, la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{4.2}$$

tiene a las semi-rectas $y = m_1 x$, $x \neq 0$ y $y = m_2 x$, $x \neq 0$ como curvas integrales.

Ahora, observando que la ecuación en variables separadas

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{a_{21} + a_{22}z}{a_{11} + a_{12}z} - z$$

se puede reescribir como

$$x\frac{dz}{dx} = -\frac{q_A(z)}{a_{11} + a_{12}z}$$

o bien como

$$\frac{a_{12}z + a_{11}}{a_{12}(z - m_1)(z - m_2)}\,dz = -\frac{dx}{x}$$

al considerar que $q_A(z) = a_{12}(z - m_1)(z - m_2)$. Y por lo tanto, como

$$\frac{z + b}{(z - m_1)(z - m_2)}\,dz = -\frac{dx}{x}, \quad \text{con} \quad b = \frac{a_{11}}{a_{12}} \tag{4.3}$$

Ahora, efectuando la descomposición en fracciones parciales del lado izquierdo de (4.3), se tiene que

$$\frac{z+b}{(z-m_1)(z-m_2)} = \frac{A}{z-m_1} + \frac{B}{z-m_2} \tag{4.4}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{a_{12}\,m_1 + a_{11}}{a_{12}(m_1-m_2)} \\ B &= \frac{a_{12}\,m_2 + a_{11}}{a_{12}(m_1-m_2)} \end{aligned}\right\}$$

Pero echando mano de las expresiones explícitas para m_1 y m_2; i.e., de

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{-(a_{11}-a_{22})-\delta_*}{2a_{12}} \\ m_2 &= \frac{-(a_{11}-a_{22})+\delta_*}{2a_{12}} \\ &(\delta_* = \sqrt{\Delta(A)}) \end{aligned}\right\}$$

es directo verificar que

$$A = -\frac{\lambda_1}{\delta_*}, \quad \text{y} \quad B = \frac{\lambda_2}{\delta_*} \tag{4.5}$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{Tr(A)-\delta_*}{2}, \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \frac{Tr(A)+\delta_*}{2} \tag{4.6}$$

son las raíces del polinomio característico

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Dt(A)$$

de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

asociada al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

Así, usando (4.5) en (4.4), se tiene que (4.3) se puede reescribir como

$$\left(\frac{-\lambda_1/\delta_*}{z-m_1} + \frac{\lambda_2/\delta_*}{z-m_2}\right) dz = -\frac{dx}{x}$$

o bien como

$$\frac{-\lambda_1\,dz}{z-m_1} + \frac{\lambda_2\,dz}{z-m_2} = -\delta_*\frac{dx}{x}$$

De donde al integrar se obtiene que

$$\mid z-m_1 \mid^{-\lambda_1} \mid z-m_2 \mid^{\lambda_2} = c \mid x \mid^{-\delta_*}$$

y consecuentemente, al sustituir $z = y/x$ y al considerar que $\delta_* = -\lambda_1 + \lambda_2$ (lo cuál se sigue directamente de (4.6)), se tiene que las curvas integrales de la ecuación homogénea (4.2) están dadas por

$$(y - m_1 x)^{-\lambda_1}(y - m_2 x)^{\lambda_2} = c \tag{4.7}$$

Luego, con el propósito de describir geométricamente a estas curvas integrales, introdúzcanse las coordenadas

$$\xi = y - m_2 x \quad \text{y} \quad \eta = y - m_1 x \tag{4.8}$$

en términos de las cuáles la ecuación (4.7) de las curvas integrales de la ecuación homogénea (4.2), toman la forma

$$\eta^{-\lambda_1}\,\xi^{\lambda_2} = c \tag{4.9}$$

Pasemos ahora considerar dos subcasos, los cuales a su vez se subdividen en varias posibilidades.

4.1 Subcaso $Dt(A) < 0$

Veamos tres posibilidades:

4.1.1 $Dt(A) < 0$ y $Tr(A) < 0$.

Como $Dt(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$ y $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2$, se tiene $Dt(A) < 0$ y $Tr(A) < 0$ significa que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, con $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Luego entonces, (4.9) se transforma en $\eta^{-\lambda_1/\lambda_2}\,\xi = k$, con $k = c^{1/\lambda_2}$, o bien en

$$\xi = k\eta^{-p}, \quad \text{con} \quad p = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1 \tag{4.10}$$

Por lo que las curvas integrales son curvas parecidas a hipérbolas que se pegan más rápidamente al eje de las η's.

4.1.2 $Dt(A) < 0$ y $Tr(A) = 0$.

Como la $Tr(A) = 0$, se tiene que $\lambda_1 = -\lambda_2$. Por lo que (4.9) se reduce a

$$\xi\,\eta = k, \quad \text{con} \quad k = c^{-1/\lambda_2} \tag{4.11}$$

Por lo que las curvas integrales son hipérbolas equiláteras.

4.1.3 $Dt(A) < 0$ y $Tr(A) > 0$.

Que $Dt(A) < 0$ y $Tr(A) > 0$ significa que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, con $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Luego la ecuación (4.9) se puede reformular como $\eta\,\xi^{-\lambda_2/\lambda_1} = k$, con $k = c^{-1/\lambda_1}$, o sea como

$$\eta = k\xi^{-p}, \quad \text{con} \quad p = -\lambda_2/\lambda_1 > 1 \tag{4.12}$$

Ecuación que describe curvas parecidas a hipérbolas que se pegan más rápidamente al eje de las η's.

4.2 Subcaso $Dt(A) > 0$

Por estudiar dos posibilidades:

4.2.1 $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) < 0$.

Aquí $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) < 0$ significa que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, por lo que la ecuación (4.9) se puede replantear como $\eta^{-\lambda_1/\lambda_2}\,\xi = k$, con $k = c^{1/\lambda_2}$, o sea como

$$\xi = k\eta^p, \quad \text{con} \quad p = \lambda_1/\lambda_2 > 1 \tag{4.13}$$

Ecuación que describe a curvas similares a parábolas con eje de simetría a lo largo del eje de las ξ's.

4.2.2 $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) > 0$.

Que $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) > 0$ significa que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$. Luego la ecuación (4.9) se puede reformular como $\eta\,\xi^{-\lambda_2/\lambda_1} = k$, con $k = c^{-1/\lambda_1}$, o sea como

$$\eta = k\xi^p, \quad \text{con} \quad p = \lambda_2/\lambda_1 > 1 \tag{4.14}$$

Ecuación que describe curvas parecidas a parábolas con eje de simetría a lo largo del eje de las η's.

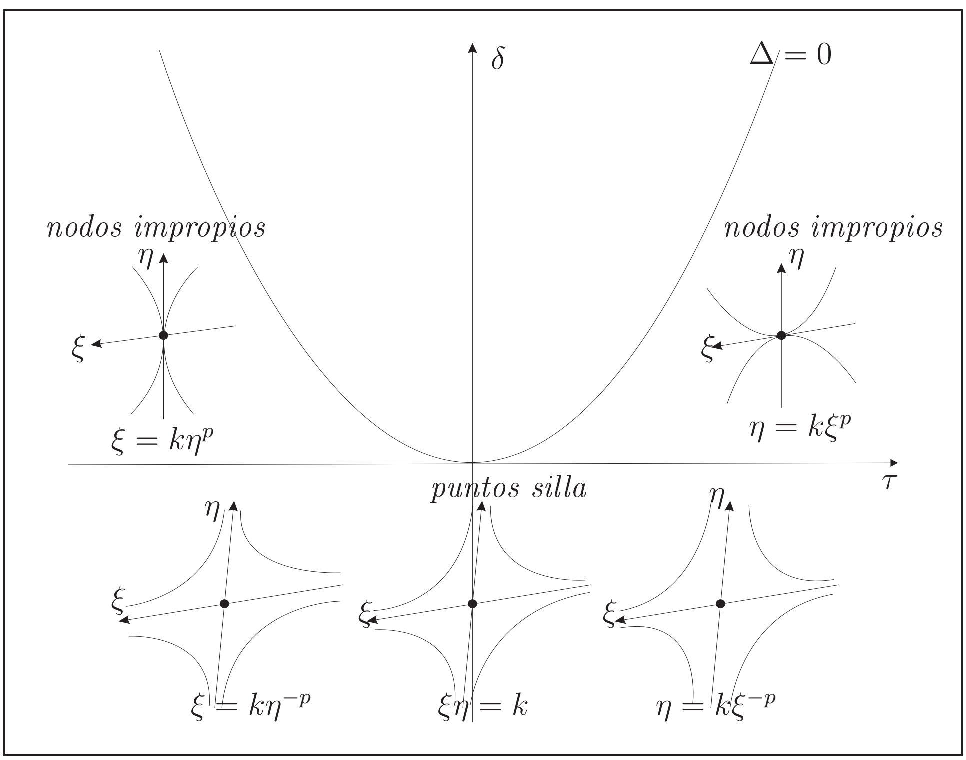

Figura 5: Recapitulación gráfica del Tma. Gral. de Clasificación de los sistemas lineales de primer orden en el plano: Caso $\Delta(A) > 0$.

5 Análisis del caso $\Delta(A) = 0$

Si $\Delta(A) = 0$ entonces el polinomio discriminante

$$q_A(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21} \tag{5.1}$$

tiene una sola raíz real m. Y por ello, la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{5.2}$$

tiene solo a la semi-recta $y = m\,x$, $x \neq 0$ como curva integral.

Ahora, como $m \in \mathbb{R}$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio discriminante (5.1), se tiene que tal polinomio se puede reescribir como $q_*(z) = a_{12}(z - m)^2$. Consecuentemente, la ecuación con variables separadas

$$\frac{a_{12}z + a_{11}}{q_A(z)}\,dz = -\frac{dx}{x}$$

que resulta de aplicar el cambio de variable de Leibnitz $z = y/x$ a la ecuación homogénea (5.2), se puede reformular como

$$\frac{z + b}{z^2 - 2mz + m^2}\,dz = -\frac{dx}{x}\,, \quad \text{con} \quad b = \frac{a_{11}}{a_{12}}$$

o sea como

$$\frac{1}{2}\,\frac{2z - 2m}{z^2 - 2mz + m^2} + (b + m)\frac{du}{u^2} = -\,\frac{dx}{x}\,, \quad \text{donde} \quad u = z - m$$

Así, integrando de obtiene que

$$\ln \mid z - m \mid -p^{-1}(z - m) = -\ln(c \mid x \mid), \quad \text{donde} \quad p^{-1} = b + m = \frac{\lambda_*}{a_{12}}$$ [3]

o sea que

$$\ln \mid z - m \mid + \ln\, c \mid x \mid = \frac{p^{-1}}{z - m}$$

o bien que

$$\frac{1}{\lambda_*}\,\ln\, c\,(y - mx) = \frac{a_{12}^{-1}x}{y - mx}$$

De donde, al introducir las coordenadas $\xi = a_{12}^{-1}x,\ \eta = y - mx$, se concluye que las curvas integrales de la ecuación homogénea (5.2) están dadas por la ecuación

$$\xi = \eta\,\ln\,k\,\eta^q, \quad \text{donde} \quad q = \frac{1}{\lambda_*} \tag{5.3}$$

[3] Aquí, λ_* es la raíz doble del polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Dt(A)$.

y $k = c^q$. Ahora, tomando en cuenta que

$$\frac{d\xi}{d\eta} = \ln\, k\,\eta^q + q$$

se sigue que $\dfrac{d\xi}{d\eta} = 0$ ssi $\ln\, k\,\eta^q + q = 0$. Esto es, ssi $\eta(\ln\, k\,\eta^q + q) = 0$, con $\eta \neq 0$. O sea,

$$\frac{d\xi}{d\eta} = 0 \quad \text{ssi} \quad \xi + q\,\eta = 0.$$

Lo que dice que las curvas integrales (5.3) cortan a la recta $\xi + q\,\eta = 0$ paralelamente al eje de las η's. En la Fig. 6 que sigue se ilustra el comportamiento geométrico de estas curvas en el sistema de coordenadas $\xi = a_{12}^{-1}x$, $\eta = y - mx$.

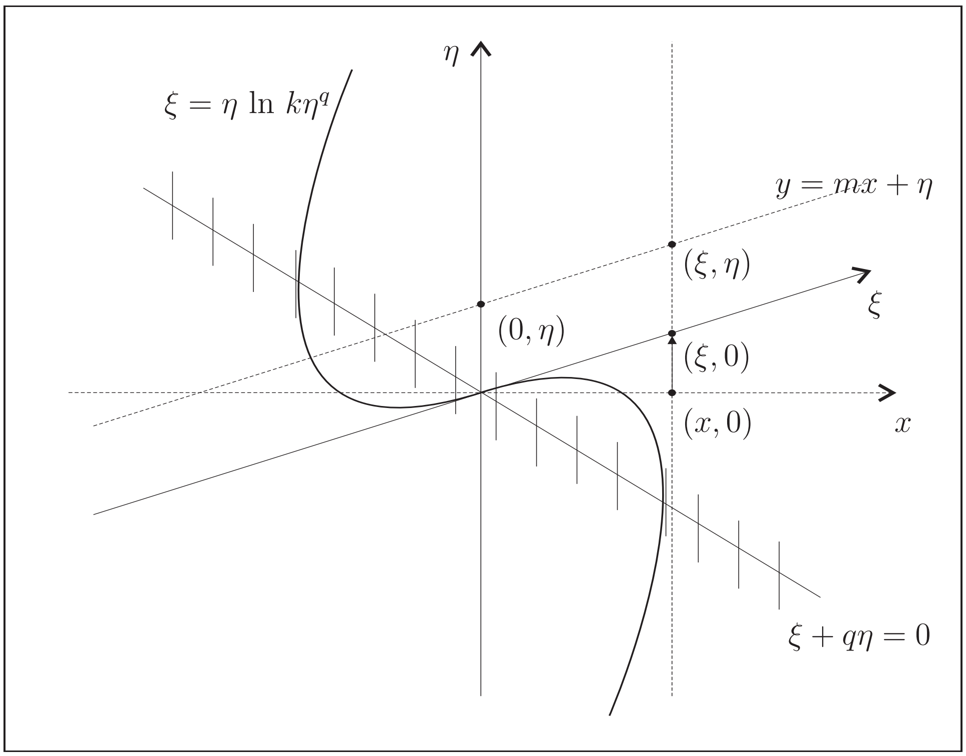

Figura 6: Representación Gráfica de Nodos impropios, caso $\Delta(A) = 0$.

Y en la Fig. 7 que viene a continuación se resume la discusión de las dos últimas secciones.

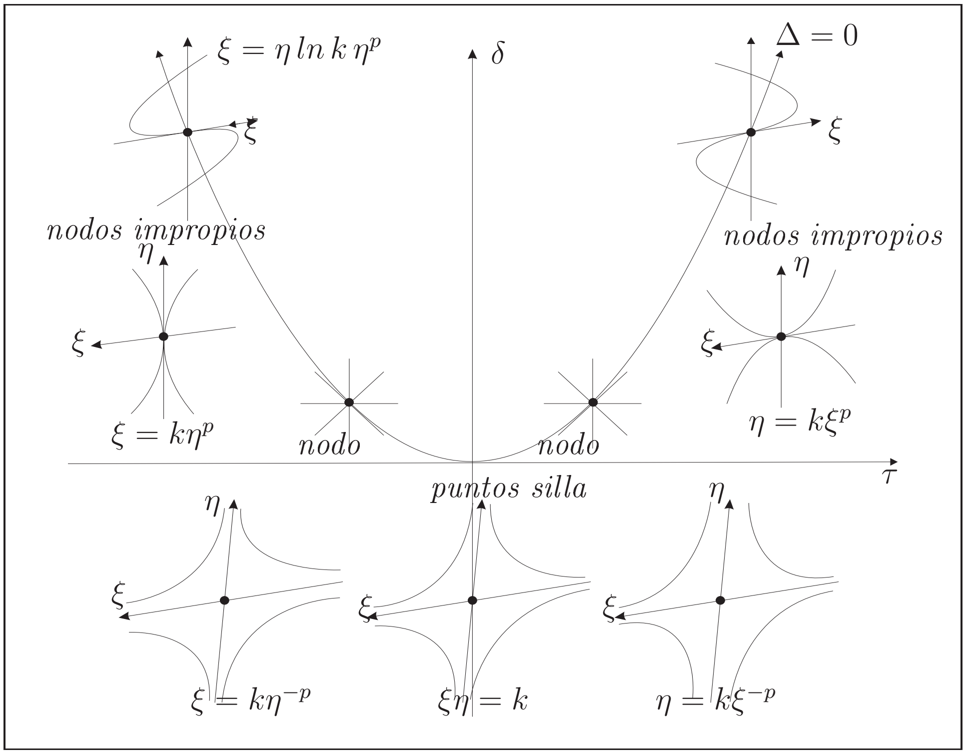

Figura 7: Recapitulación gráfica del Tma. Gral. de Clasificación de los sistemas lineales de primer orden en el plano: Caso $\Delta(A) \leq 0$.

Ejemplo 5.1. *Considérese el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\,x + y \\ \dot{y} &= -3y \end{aligned} \tag{5.4}$$

Para el cual se tiene que $\tau = -1$, $\delta = -6$ *y* $\Delta = 23$*; luego su solución de equilibrio* $(0,0)$ *es un punto silla.*
Después de eliminar la variable independiente en este sistema se obtiene la ecuación homogénea:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y}{2x + y} \tag{5.5}$$

que bajo el cambio de variable $z = y/x$ *se transforma en la ecuación de variables separadas:*

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{-3z}{2 + z} - z$$

cuyo polinomio discriminante es $q(z) = z(z+5)$*. Por lo que tiene a* $y = 0$, $y + 5x = 0$, $x \neq 0$ *como curvas integrales.*

Ahora, rescribiendo a esta ecuación como:

$$\frac{z+2}{z(z+5)}dz = -\frac{dx}{x}$$

hallando la descomposición en fracciones parciales de la función $\frac{z+2}{z(z+5)}$*, se tiene esta ecuación se puede rescribir como:*

$$(\frac{2/5}{z} + \frac{3/5}{z+5})dz = -\frac{dx}{x}$$

de donde integrando se obtiene que $\frac{2}{5}\ln|z|+\frac{3}{5}\ln|z+5| = \ln c^{1/5}|x|^{-1}$*, o bien que* $|z|^2\,|z+5|^3 = c|x|^{-5}$*. De donde se sigue las curvas integrales de la ecuación (5.5) están dadas por*

$$y^2(y+5x)^3 = c$$

Expresión que en términos de las nuevas variables $\xi = y+5x$ *y* $\eta = y$*, toma la forma:*

$$\eta = c\xi^{-3/2}$$

6 Análisis del caso $\Delta(A) < 0$

Ahora como $\Delta(A) < 0$, el polinomio discriminante $q_A(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21}$ no admite raíces reales. Y por ello, la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{6.1}$$

no admite curvas integrales de la forma $y = mx$, con $x \neq 0$. Lo que sugiere reconsiderar al sistema bajo estudio

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{6.2}$$

en coordenadas polares.

Es directo, aúnque un poco tedioso, verificar que el sistema (6.2) en coordenadas polares toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{r} &= p(\theta)r, \qquad \text{con} \quad p(\theta) \equiv p(cos\,\theta, sen\,\theta) \\ \dot{\theta} &= q(\theta), \qquad \text{con} \quad q(\theta) \equiv q(cos\,\theta, sen\,\theta) \end{aligned} \tag{6.3}$$

donde

$$\begin{aligned} p(u,v) &= a_{11}u^2 + (a_{12} + a_{21})uv + a_{22}v^2 \\ q(u,v) &= a_{12}u^2 + (a_{22} - a_{11})uv - a_{12}v^2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Lema 6.1. *Si* $\Delta(A) < 0$ *entonces*

(a) $q(u,v)$ *es positiva definida (i.e.,* $q(u,v) > 0$*, para toda* $(u,v) \neq (0,0)$*, si* $a_{12} > 0$*). Y,*

(b) $q(u,v)$ *es negativa definida (i.e.,* $q(u,v) < 0$*, para toda* $(u,v) \neq (0,0)$*, si* $a_{12} < 0$*).*

Demostración. Si $a_{12} > 0$ entonces, completando cuadrados, se tiene que

$$\begin{aligned} q(u,v) &= \left(\sqrt{a_{21}}\; u + \frac{a_{22}-a_{11}}{2\sqrt{a_{21}}}\; v\right)^2 - \left(a_{12} + \frac{(a_{22}-a_{11})^2}{4a_{21}}\right) v^2 \\ &= \left(\sqrt{a_{21}}\; u + \frac{a_{22}-a_{11}}{2\sqrt{a_{21}}}\; v\right)^2 - \left(\frac{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{4a_{21}}\right) v^2 \end{aligned}$$

O sea que

$$q(u,v) = \left(\sqrt{a_{21}}\; u + \frac{a_{22}-a_{11}}{2\sqrt{a_{21}}}\; v\right)^2 + \gamma\, v^2, \quad \gamma = -\frac{\Delta(A)}{4a_{21}} > 0$$

Luego entonces se sigue que $q(u,v) > 0$, para toda $(u,v) \neq (0,0)$. Por otro lado, si $q(u,v) = 0$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt{a_{21}}\; u + \frac{a_{22}-a_{11}}{2\sqrt{a_{21}}}\; v &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned}$$

lo que implica que $u = 0$ y $v = 0$. Por lo que, $q(u,v) = 0$ ssi $(u,v) = (0,0)$.

Para el caso que $a_{21} < 0$, basta tomar $\widetilde{q}(u,v) \equiv -q(u,v)$. Pues así, $\widetilde{a}_{21} = -a_{21} > 0$. Consecuentemente, por lo anterior, $\widetilde{q}(u,v)$ es positiva definida. De donde se concluye que $q(u,v)$ es negativa definida. □

Ahora, eliminando la variable independiente t en el sistema (6.3), se obtiene la ecuación lineal homogénea

$$\frac{dr}{d\theta} = a(\theta) r, \quad \text{con} \quad a(\theta) \equiv \frac{p(\theta)}{q(\theta)}.$$

Corollario 6.1. *Si $\Delta(A) < 0$ entonces la función $a(\theta) \equiv \dfrac{p(\theta)}{q(\theta)}$ es una función continua y periódica de periodo 2π.*

Se sigue del hecho que $p(\theta)$ y $q(\theta)$ son funciones cuadráticas en $cos\,\theta$ y $sen\,\theta$, y que (por el lema 6.1), $q(\theta)$ es siempre positivo, o siempre negativo.

El lector puede establecer sin dificultad las siguientes dos identidades:

$$\left.\begin{aligned} 2p(\theta) &= Tr(A) + (a_{11} - a_{22}) cos\, 2\theta + (a_{12} + a_{21}) sen\, 2\theta \\ 2q(\theta) &= (a_{21} - a_{12}) + (a_{21} + a_{12}) cos\, 2\theta + (a_{22} - a_{11}) sen\, 2\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Recordando que

$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(\theta) d\theta$$

se tiene la siguiente

Proposición 6.1. *Para la función 2π-periódica $a(\theta) \equiv \dfrac{p(\theta)}{q(\theta)}$, se cumple que*

$$\bar{a} = \frac{Tr(A)}{2} \tag{6.6}$$

Demostración. Tomando $Q(\theta) = 2q(\theta)$, de las identidades (6.5) se sigue que

$$a(\theta) = \frac{Tr(A)}{Q(\theta)} + \frac{(a_{11} - a_{22})cos\,2\theta + (a_{12} + a_{21})sen\,2\theta}{Q(\theta)}$$

o sea que

$$a(\theta) = \frac{Tr(A)}{2}\frac{1}{q(\theta)} - \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{d\theta}Q(\theta)}{Q(\theta)}$$

o bien que

$$a(\theta) = \frac{Tr(A)}{2}\frac{1}{q(\theta)} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\,ln\,Q(\theta)$$

De donde se sigue que

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{Tr(A)}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{q(\theta)} - \frac{1}{4\pi}\,ln\,\frac{Q(2\pi)}{Q(0)} \end{aligned}$$

Ahora, como $Q(\theta)$ es 2π-periódica, el último término de la última igualdad es igual a cero. Por lo tanto, se tiene que

$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi}\frac{Tr(A)}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{q(\theta)}$$

Y como de la segunda ecuación del sistema (6.3) se obtiene que $dt = \dfrac{d\theta}{q(\theta)}$, se tiene que

$$\bar{a} = \frac{1}{2\pi}\frac{Tr(A)}{2}\int_0^{2\pi} dt = \frac{Tr(A)}{2}$$

□

Como resumen de la discusión de esta sección, se tiene el siguiente

Teorema 6.1. *Bajo la condición que* $\Delta(A) < 0$*:*
(a) Si $Tr(A) < 0$ *entonces las curvas integrales de la ecuación homogénea (6.1), tienden al origen en forma de espiral.*
(b) Si $Tr(A) = 0$ *entonces las curvas integrales de la ecuación homogénea (6.1) son curvas cerradas alrededor del origen.*
(c) Si $Tr(A) > 0$ *entonces las curvas integrales de la ecuación homogénea (6.1), se alejan del origen en forma de espiral.*

Cuya demostración se sigue directamente de la proposición anterior y del lema 2.1. En la figura 8, se resume toda la discusión hecha hasta aquí.

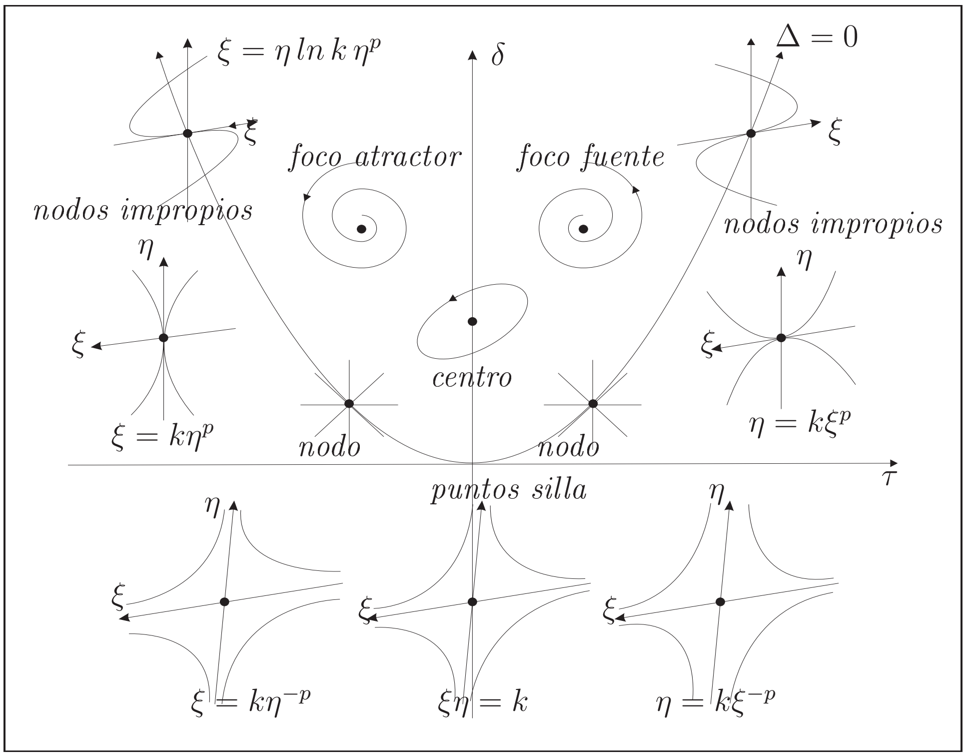

Figura 8: Recapitulación gráfica de las curvas integrales en el Teorema de Clasificación General de los sistemas lineales de primer orden en el plano.

Ejercicio 6.1. *Considera a la ecuación homogénea*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx+ay}{ax-by} \tag{6.7}$$

con $b > 0$, se obtiene de eliminar la variable independiente t en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by \\ \dot{y} &= bx + ay \end{aligned} \tag{6.8}$$

¿Cuánto vale su discriminante? ¿Admite la ecuación (6.7) curvas integrales de la forma $y = mx$, $x \neq 0$?

a). Muestra que la ecuación (6.7) en coordenadas polares toma la forma

$$r = ce^{\gamma\theta}, \qquad c = k^{-1} \tag{6.9}$$

¿De que tipo es la solución de equilibrio del sistema (6.8)? Considera todos los casos posibles.

Sugerencia: Observa que $Tr[A] = 2a$.

c). Muestra que en coordenadas polares, la ecuación (6.8) toma la forma $\dfrac{dr}{d\theta} = \gamma r$ cuya solución general está dada, precisamente, por la ecuación (6.9).

7 Trayectorias solución para el caso $\Delta(A) > 0$

Hasta ahora se ha visto que al eliminar la variable independiente en el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{7.1}$$

se obtiene la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y} \tag{7.2}$$

la cuál, si $\Delta(A) > 0$, admite dos curvas integrales de la forma $y = m_1 x$, y $y = m_2 x$, $x \neq 0$, donde $m_1 < m_2$ son las raíces reales del polinomio discriminante $q_A(z) = a_{12}z^2 + (a_{11} - a_{22})z - a_{21}$. Más aún, en el sistema de coordenadas $\eta = y - m_1 x$, $\xi = y - m_2 x$, las curvas integrales de la ecuación homogénea (7.2), están dadas por

$$\eta^{-\lambda_1}\,\xi^{\lambda_2} = c$$

El propósito de la presente sección en mostrar que el sistema (7.1) en el sistema de coordenadas ξ, η se reduce al sistema desacoplado

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_1 \xi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \lambda_2 \eta \tag{7.3}$$

donde $\lambda_1 = a_{12}m_1 + a_{11}$ y $\lambda_2 = a_{12}m_2 + a_{11}$, si $a_{12} > 0$, [4] son las raíces reales del polinomio caracterśtico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Dt(A)$.

En efecto, véase que

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \dot{y} - m_2 \dot{x} \\ &= (a_{21}x + a_{22}y) - m_2(a_{11}x + a_{12}y) \\ &= (a_{21} - m_2a_{11})x + (a_{22} - m_2a_{12})y \end{aligned}$$

y como $y = \xi + m_2x$, se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (a_{21} - m_2a_{11})x + (a_{22} - m_2a_{12})(\xi + m_2x) \\ &= [(a_{21} - m_2a_{11}) + (a_{22} - m_2a_{12})m_2]x + (a_{22} - m_2a_{12})\xi \\ &= -(a_{12}m_2^2 + (a_{11} - a_{22})m_2 - a_{21})x + (a_{22} - m_2a_{12})\xi \end{aligned}$$

o sea que

$$\dot{\xi} = -q_A(m_2) + (a_{22} - m_2a_{12})\xi$$

o bien, como $q_A(m_1) = 0$, que

$$\dot{\xi} = (a_{22} - m_2a_{12})\xi$$

Por otro lado, se verifica que

$$\begin{aligned} a_{22} - m_2a_{12} &= a_{22} - \left(\frac{-(a_{11} - a_{22}) + \delta_*}{2a_{12}}\right) a_{12} \\ &= a_{22} + \frac{(a_{11} - a_{22}) - \delta_*}{2} \\ &= \frac{(a_{11} + a_{22}) - \delta_*}{2} \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

En conclusión, se tiene que

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \, \xi$$

como se quería mostrar.

De manera completamente análoga, se muestra que

$$\dot{\eta} = \lambda_2 \, \eta$$

Ahora bien, como la solución general del sistema (7.3) está dada por

$$\xi = c_1e^{\lambda_1 t}, \qquad \eta = c_2e^{\lambda_2 t}$$

para $Dt(A) < 0$ (lo que significa que $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$), se tiene que

$$\xi \to 0 \quad \text{y} \quad |\, \eta \,| \to \infty, \text{ cuando } t \to \infty.$$

[4]En otro caso, $\lambda_1 = a_{12}m_2 + a_{11}$ y $\lambda_2 = a_{12}m_1 + a_{11}$

Mientras que para $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) < 0$ (lo que significa que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$), se tiene que

$$\xi,\ \eta \to 0, \text{ cuando } t \to \infty.$$

Y que para $Dt(A) > 0$ y $Tr(A) > 0$ (lo que significa que $0 < \lambda_1 < \lambda_2$), se tiene que

$$|\,\xi\,|,\ |\,\eta\,| \to \infty \text{ cuando } t \to \infty.$$

8 Trayectorias solución para el caso $\Delta(A) = 0$

Para el estudio de las trayectorias solución del sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned}$$

cuando $\Delta(A) = 0$ (i.e., cuando el polinomio discriminante $q_*(z)$ tiene una sóla raíz real m de multiplicidad dos), veamos que en las coordenadas x, η, este sistema se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \lambda_*\xi + \eta \\ \dot{\eta} &= \lambda_*\eta \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde λ_* es la raíz doble del correspondiente polinomio caraterístico $p_A(\lambda)$.

En efecto, procediendo de manera similar al caso anterior, derivando a $\eta = y - mx$, con respecto a t, se obtiene que

$$\dot{\eta} = -q_*(m)x + (a_{22} - m\,a_{12})\eta \tag{8.2}$$

Ahora, dado que la raíz doble m de $q_*(z)$ está dada por $m = -\dfrac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$, es inmediato ver que

$$a_{22} - m\,a_{12} = a_{22} - a_{12}\left(-\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\right) = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \lambda_*$$

Consecuentemente, (8.2) se reduce a la ecuación

$$\dot{\eta} = \lambda_*\,\eta \tag{8.3}$$

que el precisamente la segunda ecuación el sistema reducido (8.1).

Por otro lado, como $y = mx + \eta$, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ &= (a_{11} + a_{12}m)x + a_{12}\eta \end{aligned}$$

o bien que

$$\dot{x} = \lambda_*\,x + a_{12}\eta \tag{8.4}$$

pues es directo ver que

$$a_{11} + a_{12}m = a_{11} + a_{12}\left(-\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}\right) = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \lambda_*$$

Así, si se introduce la variable $\xi = a_{12}^{-1}x$ entonces (8.4) se reduce a

$$\dot{\xi} = \lambda_* \xi + \eta$$

que es precisamente la primera ecuación del sistema reducido (8.1).

Por último, como la solución general del sistema reducido (8.1) correspondiente al caso $\Delta(A) = 0$, está dada por

$$\xi = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_* t}, \qquad \eta = c_2 e^{\lambda_* t}$$

se sigue que

1. Si $Tr(A) < 0$ (i.e., $\lambda_*[= Tr(A)/2] < 0$) entonces

$$\xi(t), \eta(t) \to 0\,, \qquad t \to \infty$$

2. Si $Tr(A) > 0$ (i.e., $\lambda_*[= Tr(A)/2] > 0$) entonces

$$\mid \xi(t) \mid, \mid \eta(t) \mid \to 0\,, \qquad t \to \infty$$

Con esto, queda completa la demostración del teorema de clasificación de los puntos de equilibrio de los sistemas lineales EDO's con coeficientes constantes en el plano.

9 Forma normal de los sistemas lineales de primer orden en el plano de fases para el caso $\Delta(A) < 0$.

En las últimas dos secciones se ha visto que el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \tag{9.1}$$

se reduce, en el sistema de coordenadas $\eta\, vs.\, \xi$ a una de las siguientes formas canónicas:
a) Para $\Delta(A) > 0$:

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi \qquad \dot{\eta} = \lambda_1 \eta$$

b) Para $\Delta(A) = 0$:

$$\dot{\xi} = \lambda_* \xi + \eta \qquad \dot{\eta} = \lambda_* \eta$$

En esta última sección, se presenta un estudio complementario a la discusión hecha en la sección 6, para este caso $\Delta(A) < 0$. Específicamente se halla la forma canónica del sistema (9.1), a partir de la cuál se da la descripción analítica de sus trayectorias solución.

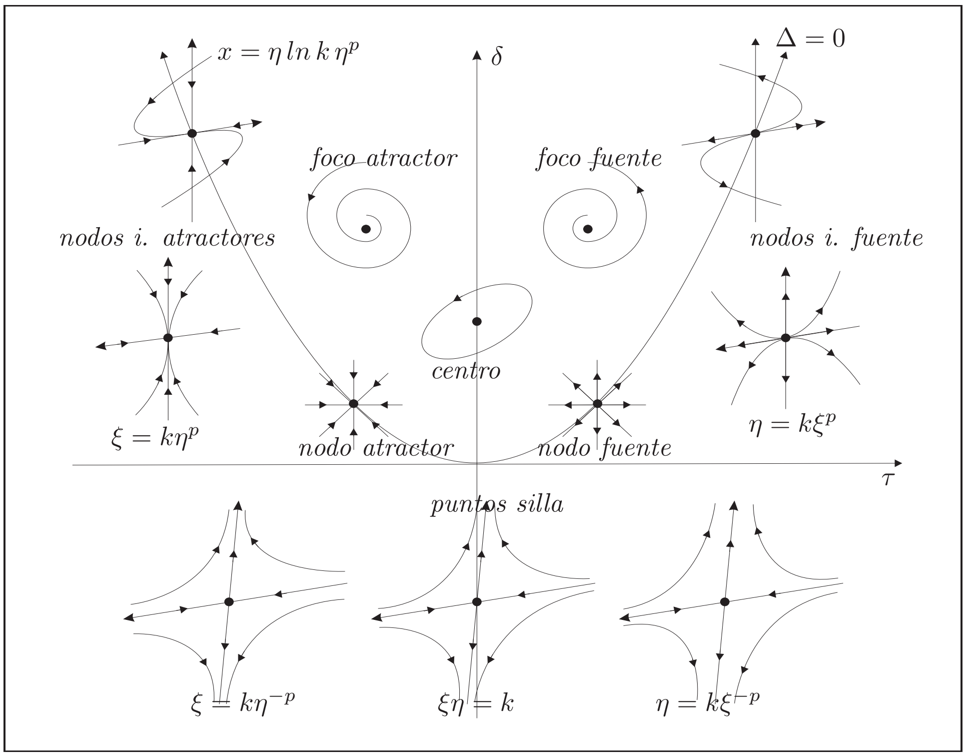

Figura 9: Representación gráfica del Teorema de Clasificación General de los sistemas lineales de EDO's de primer orden en el plano de fases.

Como para el caso $\Delta(A) < 0$, las raíces del polinomio discriminante $q_A(z)$ son complejo conjugadas. Esto es, si $m_2 = \alpha + i\,\beta$ entonces $m_1 = \alpha - i\,\beta$, luego se tiene que el cambio de coordenadas

$$\xi = y - m_2 x\,, \qquad \eta = y - m_2 x$$

toma valores en los números complejos. Pero, al separar las partes real e imaginaria, es directo ver que se pueden reescribir como $\xi = u + iv$, $\eta = u - iv$, donde

$$\begin{aligned} u &= y - \alpha x \\ v &= \beta x \end{aligned} \tag{9.2}$$

Claramente, estas nuevas coordenadas u y v toman valores reales, para valores reales de x y y.

En lo que sigue se verá que en las coordenadas $u - v$ dadas en (9.2), el sistema de ecuaciones diferenciales (9.1) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= au - bv \\ \dot{v} &= bu + av \end{aligned} \tag{9.3}$$

en donde a y b son la parte real e imaginaria de las raíces complejas $\lambda_* = a \pm ib$, $b > 0$ del polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 - Tr(A)\lambda + Dt(A)$. Esto es,

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{Tr(A)}{2} \\ b &= \frac{\sqrt{-\Delta(A)}}{2} \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

Procediendo de manera análoga a las secciones 7 y 8, se ve que derivando $u = y - \alpha x$ respecto a t, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{y} - \alpha\,\dot{x} \\ &= (a_{21} - \alpha a_{11})x + (a_{22} - \alpha a_{12})y \end{aligned}$$

luego, como $y = \alpha x + u$, se sigue que

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (a_{21} - \alpha a_{11})x + (a_{22} - \alpha a_{12})(\alpha x + u) \\ &= -q_A(\alpha)x + (a_{22} - \alpha a_{12})u \end{aligned}$$

o bien, como $x = v/\beta$, que

$$\dot{u} = -\frac{q_A(\alpha)}{\beta}v + (a_{22} - \alpha a_{12})u \tag{9.5}$$

Ahora, recordando que si $m_2 = \alpha + i\beta$, es raíz de $q_A(z)$ entonces

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}} \\ \beta &= \frac{\sqrt{-\Delta(A)}}{2a_{12}} \end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

y tomando en cuenta a (9.4), se tiene que

$$a_{22} - \alpha a_{12} = a$$

Consecuentemente, se tiene que (9.5) se reduce a

$$\dot{u} = au - \frac{q_A(\alpha)}{\beta} v \tag{9.7}$$

Mientras, considerando que $0 = q_A(m_2) = q_A(\alpha + i\beta)$, y que

$$\begin{aligned} q_A(\alpha + i\beta) &= a_{12}(\alpha + i\beta)^2 + (a_{11} - a_{22})(\alpha + i\beta) - a_{21} \\ &= (q_A(\alpha) - a_{12}\beta^2) + i(2\alpha + (a_{11} - a_{22}))\beta \end{aligned}$$

se sigue, que $q_A(\alpha) = a_{12}\beta^2$. Luego, por (9.4) y (9.6), se obtiene que

$$\frac{q_A(\alpha)}{\beta} = a_{12}\beta = \frac{\sqrt{-\Delta(A)}}{2} = b \tag{9.8}$$

Por lo que, (9.7) toma finalmente la forma

$$\dot{u} = au - bv \tag{9.9}$$

Por otro lado, derivando $v = \beta x$ respecto a t, se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \beta \dot{x} \\ &= a_{11}\beta x + a_{12}\beta(\alpha x + u) \\ &= (a_{11} + \alpha a_{12})\beta x + \beta a_{12} u \end{aligned}$$

o bien, por (9.8), que

$$\dot{v} = bu + (a_{11} + \alpha a_{12})v \tag{9.10}$$

Y como

$$a_{11} + \alpha a_{12} = a_{11} + \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}}\right) a_{12} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} = \frac{Tr(A)}{2} = a$$

Se sigue que (9.10) se reduce finalmente a

$$\dot{v} = bu + av \tag{9.11}$$

En conclusión, si $\Delta_q = \Delta(A) < 0$ entonces el sistema (9.1), en las coordenadas u y v dadas por (9.2), se reduce al sistema formado por las ecuaciones (9.9) y (9.11), o sea al sistema (9.3), como se quería probar.

Ejercicio 9.1. *Demuestra que la ecuación homogénea*

$$\frac{dv}{du} = \frac{bu + av}{au - bv}$$

que se obtiene del sistema (9.3) al eliminar la variable independiente t, en coordenadas polares, se reduce a la ecuación lineal homogénea

$$\frac{dr}{d\theta} = \gamma r, \quad \gamma = a/b$$

cuya solución general está dada por

$$r = c\, e^{\gamma\, \theta}$$

De donde concluye que el estado de equilibrio del sistema (9.1) es un foco estable o inestable, dependiendo de si $Tr(A)\,(=2a)$ es negativa o positiva, o bien un centro si $Tr(A) = 0$. Lo que corrobora el análisis hecho en la sección 6.

References

[Frd] Lester R. FORD, *Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, Toronto, London, 1955.

[Sot] Sotomayor J., *Lições de equações diferenciais ordinárias*, IMPA, 1979.

[Rxn] Roxin E.O., *Ordinary Differential Equations*, Wadsworth Publishing Co., Belmomt, California, 1972.