Notas en desarrollo
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-1

Ecuaciones diferenciales I

Sistemas Lineales de EDO's: Teoría básica general

Prof. Jesús López Estrada[1]

Ciudad Universitaria
Última Edición: Noviembre de 2014

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

1 Introducción

El próposito de estas notas es presentar los elementos básicos de la teoría general de los sistemas lineales de **E**cuaciones **D**iferenciales **O**rdinarias (EDO's). La cuál se basa en la Teoría Básica de Existencia y Unicidad de las EDO's.

2 Existencia y unicidad

En lo que sigue se estudían los siguientes sistemas lineales de EDO's, homogéneos, en el primer caso, y no-homogéneos en el segundo

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}, \quad t \in I \tag{1}$$

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}(t), \quad t \in I \tag{2}$$

en donde

$$A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad A(t) = (a_{ij}(t))\,,\, i,j = 1,\ldots,n$$

y

$$\underset{\sim}{b} : I \to \mathbb{R}^n\,,\, \underset{\sim}{b}(t) = (b_1(t), ...b_n(t))^t$$

siendo $I = [a,b] \subset \mathbb{R}\,,\, a < b$.

Teorema 2.1. *Si $(a_{ij}(t))$ y $b_j(t)$ son continuas sobre I entonces el problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{x}} &= A(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}(t) \\ \underset{\sim}{x}(t_0) &= \underset{\sim}{x_0} \\ (t_0, \underset{\sim}{x_0}) &\in I \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3}$$

tiene una única solución $\underset{\sim}{\varphi}(t) : I \to \mathbb{R}^n$.

Demostración. Es consecuencia directa de que $\underset{\sim}{f}(t,x) \equiv A(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}(t)$ es continua y globalmente Lipsfchitz sobre $I \times \mathbb{R}^n$. □

Ahora, el lector podrá sin dificultad demostrar que si $(a_{ij}(t))$ y $b_j(t)$ son continuas sobre todo $\mathbb{R}$, el problema

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{x}} &= A(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}(t) \\ \underset{\sim}{x}(t_0) &= \underset{\sim}{x_0} \\ (t_0, \underset{\sim}{x_0}) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{4}$$

tiene una única solución $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ definida sobre todo $\mathbb{R}$.

3 Sistema homogéneo

En esta sección, se estudía la forma de la solución general del sistema lineal homogéneo

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$$

tomando como motivación el siguiente

Lema 3.1. *Si $\underset{\sim}{\varphi}_p(t)$ es una solución (2) y $\underset{\sim}{\varphi}_h(t)$ es solución de (1), ambas definidas sobre $[a,b]$ entonces $\underset{\sim}{\varphi}(t) = \underset{\sim}{\varphi}_h(t) + \underset{\sim}{\varphi}_p(t)$ es también solución de (2) en $[a,b]$. Inversamente, si $\underset{\sim}{\varphi}_1(t)$ y $\underset{\sim}{\varphi}_2(t)$, $t \in [a,b]$ son dos solucines de (2) entonces $\underset{\sim}{\varphi}(t) = \underset{\sim}{\varphi}_1(t) - \underset{\sim}{\varphi}_2(t)$ es solución de (1).*

La demostración es directa y deja como ejercicio al lector.

Empecemos por considerar al conjunto

$$S_h \equiv \{\underset{\sim}{\varphi} \in C^1(I) \,:\, \underset{\sim}{\varphi}(t) \text{ solución de } \dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}\}$$

Claramente, S_h es no vacio (¿Por qué?).

Lema 3.2. *El conjunto S_h de todas las soluciones del sistema homogéneo $\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$ es un subespacio vectorial de $C^1(I)$.*

La demostración es directa y se deja como ejercicio al lector.

Aquí, la pregunta natural es ¿Cuál es la dimensión del subespacio $S_h \subset C^1(I)$?

Teorema 3.1. *$dim(S_h) = n$*

Demostración. Considérese, para $t_0 \in [a,b]$ dado, a la aplicación de evaluación

$$T_{t_0} : S_h \to \mathbb{R}^n$$

dada por

$$T_{t_0}[\underset{\sim}{\varphi}] = \underset{\sim}{\varphi}(t_0)$$

la cu'al es claramente lineal.

Afirmación 3.1. *T_{t_0} es suprayectiva $(i.e., dim(S_h) \geq n)$.*

En efecto, dada $x_0 \in \mathbb{R}^n$, por el teorema existencia y unicidad (Teorema 2.1), existe una única solución $\underset{\sim}{\varphi}(t)$, $t \in I$, del problema de Cauchy

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$$

$$\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x}_0$$

Claramente, $T_{t_0}[\underset{\sim}{\varphi}] = \underset{\sim}{x}_0$.

Afirmación 3.2. $N(T_{t_0}) = \{\underset{\sim}{\varphi}(t) \equiv 0\}$ (*i.e.*, $\dim(S_h) \leq n$).

En efecto, esto es consecuencia directa del siguiente

Lema 3.3. *Sea $\underset{\sim}{\varphi}(t)$ una solución del sistema homogéneo $\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$. Si $\underset{\sim}{\varphi}(t^*) = 0$ para algún $t^* \in I$, entonces $\underset{\sim}{\varphi}(t) \equiv 0$.*

Demostración. Sea $\underset{\sim}{\varphi_0}(t) \equiv 0\,,\ t \in I$. Claramente, $\underset{\sim}{\varphi_0}(t) \in S_h$ (¿Por qué?). Y por supuesto, $\underset{\sim}{\varphi_0}(t^*) = 0$.

Luego, por el teorema de existencia y unicidad (Teorema 2.1), $\underset{\sim}{\varphi}(t) \equiv \underset{\sim}{\varphi_0}(t)\,,\ t \in I$. Y por lo tanto, se tiene que $\underset{\sim}{\varphi}(t) \equiv 0$. □

De estas dos afirmaciones, se sigue que T_{t_0} es un isomorfismo algebraico entre S_h y $\mathbb{R}^n$. En conclusión, hemos probado que

$$dim(S_h) = n$$

□

Corolario 3.1. *Sea $\{\underset{\sim}{v_i}\}_{i=1}^n$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $t_0 \in I$ dado. Si $\underset{\sim}{\varphi_i}(t) \equiv \underset{\sim}{\varphi_i}(t, t_0, \underset{\sim}{v_i})$ son, respectivamente, la solución del problema de Cauchy*

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$$
$$\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{v_i}$$
$$(i = 1, ..., n)$$

entonces $\{\underset{\sim}{\varphi_i}(t)\}_{i=1}^n$ es una base para S_h.

Demostración. Por ser T_{t_0} un isomorfismo algebraico entre S_h y $\mathbb{R}^n$, $T_{t_0}^{-1}$, se tiene que $T_{t_0}^{-1}$ manda conjuntos linealmente independientes (*l.i.*) en conjuntos *l.i.* Luego, si $\{\underset{\sim}{v_i}\}_{i=1}^n$ es una base de $\mathbb{R}^n$, entonces $\{\underset{\sim}{\varphi_i}(t) \equiv T_{t_0}^{-1}(\underset{\sim}{v_i})\}_{i=1}^n$ es una base de S_h. □

Definición 3.1. *Sean $\varphi_i(t)\,,\ i = 1, \ldots, n$, soluciones de $\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}\,,\ t \in I$. Se dice que $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ es un* **conjunto fundamental** *de soluciones de sistema $\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$ si y sólo si $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$ es l.i. en I.*

Así, dado un conjunto fundamnetal de soluciones $\{\underset{\sim}{\varphi_i}(t)\}_{i=1}^n$ de $\dot{\underset{\sim}{x}} = A(t)\underset{\sim}{x}$ se tiene que

$$\underset{\sim}{\varphi}(t) = \Sigma_{i=1}^n c_i \underset{\sim}{\varphi_i}(t)$$

para toda $\underset{\sim}{\varphi}(t) \in S_h$. Esto es, la *solución general* del sistema homogéneo $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$ está dada por

$$\underset{\sim}{\varphi}(t) = \Sigma_{i=1}^{n} c_i \underset{\sim}{\varphi}_i(t)$$

o bien por

$$\underset{\sim}{\varphi}(t) = \Phi(t)\underset{\sim}{c} \tag{5}$$

donde $\Phi_{n\times n}(t) = [\underset{\sim}{\varphi}_1(t) \mid \underset{\sim}{\varphi}_2(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi}_n(t)]$.

Observación 3.1. *Si* $\{\underset{\sim}{\varphi}_i(t)\}_{i=1}^{n}$ *son soluciones de* $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$ *y se toma a*

$$\Phi(t) = [\underset{\sim}{\varphi}_1(t) \mid \underset{\sim}{\varphi}_2(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi}_n(t)]$$

entonces $\Phi(t)$ *es una solución del sistema matricial*

$$X' = A(t)X$$

En efecto, se verifica que

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) &= [\dot{\underset{\sim}{\varphi}}_1(t) \mid \dot{\underset{\sim}{\varphi}}_2(t) \mid ... \mid \dot{\underset{\sim}{\varphi}}_n(t)] \\
&= [A(t)\underset{\sim}{\varphi}_1(t) \mid A(t)\underset{\sim}{\varphi}_2(t) \mid ... \mid A(t)\underset{\sim}{\varphi}_n(t)] \\
&= A(t)[\underset{\sim}{\varphi}_1(t) \mid \underset{\sim}{\varphi}_2(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi}_n(t)]
\end{aligned}$$

Y por lo tanto que

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$$

Definición 3.2. *Sea* $\Phi(t) : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$*, una matriz solución del sistema matricial* $\dot{X}= A(t)X$*. Se dice que* $\Phi(t)$ *es una* **matriz fundamental** *del sistema* $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$ *si y sólo si las columnas de* $\Phi(t)$ *,* $t \in I$*, son un conjunto fundamental para* $\dot{x}= A(t)\underset{\sim}{x}$*.*

Lema 3.4. *Si* $\Phi(t)$ *es solución del problema matricial de Cauchy*

$$\begin{aligned}
\dot{X} &= A(t)X \\
X(t_0) &= V
\end{aligned}$$

donde $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es no singular, entonces* $\Phi(t)$ *es una matriz fundamental de* $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$*. E inversamente, si* $\Phi(t)$ *es una matriz fundamental de* $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$ *entonces* $\Phi(t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es no singular.*

Demostración. Para la parte directa, hay que demostrar que si $\Phi(t)\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ para toda $t \in I$, entonces $\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$, razonemos por contrapuestas.
Si $\Phi(t^*)\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ con $\underset{\sim}{c} \neq \underset{\sim}{0}$, para alguna $t^* \in I$, entonces se tiene que $\Phi(t)\underset{\sim}{c} \equiv \underset{\sim}{0}$ con $\underset{\sim}{c} \neq \underset{\sim}{0}$. Y en particular que $\Phi(t_0)\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ con $\underset{\sim}{c} \neq \underset{\sim}{0}$. Lo que implica que $V\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$ con $\underset{\sim}{c} \neq \underset{\sim}{0}$. Lo que es contrario a la hipótesis que V es no-singular. Por tanto, si $\Phi(t)$ es fundamental.

Inversamente, si $\Phi(t_0) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es singular entonces existe $\underset{\sim}{c} \neq \underset{\sim}{0}$ tal que $\Phi(t_0)\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{0}$. Consecuentemente, se tiene que $\underset{\sim}{\psi}(t) \equiv \Phi(t)\underset{\sim}{c}$ es solución del problema de Cauchy

$$\begin{array}{rcl} \dot{\underset{\sim}{x}} & = & A(t)\underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{x}(t_0) & = & \underset{\sim}{0} \end{array}$$

Por lo tanto, $\Phi(t)\underset{\sim}{c}$ $(= \underset{\sim}{\psi}(t)) \equiv \underset{\sim}{0}$ con $\underset{\sim}{c} \neq \underset{\sim}{0}$. Contraviniendo la hipótesis de que $\Phi(t)$ es fundamental. En conclusión, si $\Phi(t)$ es fundamental entonces $\Phi(t_0)$ es necesariamente no singular. □

Lema 3.5. *Si $\Phi(t)$, $t \in I$, es una matriz fundamental de $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$ entonces $det(\Phi(t)) \neq 0$, para todo $t \in I$.*

Demostración. Es consecuencia directa del lema anterior, y se dejan los detalles como ejercicio para el lector. □

Nota: Este Lema se sigue también como consecuencia directa de la fórmula de Liouville

$$det(\Phi(t)) = det(\Phi(t_0))e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds}$$

que se ver'a después.

Ejercicio 3.1. *Si $\Phi : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene entradas de clase C^1, muestra que*

$$\frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t)) = -\Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)$$

Lema 3.6. *Si $\Phi(t)$ y $\Psi(t)$ son dos matrices fundamentales de $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$ entonces existe $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no-singular tal que $\Psi(t) = \Phi(t)C$.*

Demostración. Sea $\Theta(t) = \Phi^{-1}(t)\Psi(t)$, derivando se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \Theta'(t) & = & \frac{d}{dt}(\Phi^{-1}(t))\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\dot{\Psi}(t) \\ & = & -\Phi^{-1}(t)\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)(A(t)\Psi(t)) \\ & = & \Phi^{-1}(t)[-A\Phi(t)(\Phi^{-1}(t)\Psi(t)) + A(t)\Psi(t)] \\ & = & \Phi^{-1}(t)[-A\Phi(t)\Theta(t) + A(t)\Psi(t)] \\ & = & \Phi^{-1}(t)\cdot 0 \\ & = & 0 \end{array}$$

Consecuentemente, $\Theta(t) \equiv C$ ($C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ constante). O sea que $\Phi^{-1}(t)\Psi(t) \equiv C$, o bien que $\Psi(t) = \Phi(t)C$, con $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no-singular. $\square$

Proposición 3.1. *La solución del problema de Cauchy*

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{x}} &= A(t)\underset{\sim}{x} \\ \underset{\sim}{x}(t_0) &= \underset{\sim}{x_0} \end{aligned}$$

est'a dada por

$$\underset{\sim}{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underset{\sim}{x_0} \tag{6}$$

donde $\Phi(t)$ es una matriz fundamental del sistema $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$.

Demostración. La solución general del sistema $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$, como ya se vió antes, est'a dada por $\underset{\sim}{\varphi}(t) = \Phi(t)\underset{\sim}{c}$. Ahora, por las condiciones iniciales $\underset{\sim}{x}(t_0) = \underset{\sim}{x_0}$ se tiene que $\underset{\sim}{c} = \Phi^{-1}(t_0)\underset{\sim}{x_0}$. Y por lo tanto, que $\underset{\sim}{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underset{\sim}{c}$.
Para ver que (6) no depende de la matriz fundamental seleccionada, sean $\Psi(t)$ y $\Phi(t)$ dos matrices fundamentales del sistema $\dot{\underset{\sim}{x}}= A(t)\underset{\sim}{x}$. Por el Lema 3.6, se tiene que $\Psi(t) = \Phi(t)C$ con $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no-singular. Luego entonces

$$\begin{aligned} \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\underset{\sim}{x_0} &= (\Phi(t)C)(\Phi(t_0)C)^{-1}\underset{\sim}{x_0} \\ &= \Phi(t)(CC^{-1})\Phi^{-1}(t_0)\underset{\sim}{x_0} \\ &= \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\underset{\sim}{x_0} \end{aligned}$$

$\square$

4 Problema de Cauchy No-homogéneo

En esta sección se estudía el problema de Cauchy para el sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned} \dot{\underset{\sim}{x}} &= A(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{b}(t) \\ \underset{\sim}{x}(t_0) &= \underset{\sim}{x_0} \end{aligned} \tag{7}$$

mediante el método de *Variación de Parámetros*, el cuál consiste en buscar su solución $\underset{\sim}{x}(t)$ de la forma

$$\underset{\sim}{x}(t) = \Phi(t)\underset{\sim}{c}(t) \tag{8}$$

Luego, sustituyendo en la ecuación en (7), se tiene que

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t)\utilde{c}(t) + \Phi(t)\dot{\utilde{c}}(t) &= \dot{\utilde{x}}(t) \\ &= A(t)\utilde{x} + \utilde{b}(t) \\ &= A(t)\Phi(t)\utilde{c}(t) + \utilde{b}(t)\end{aligned}$$

Y como $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ se sigue que

$$\Phi(t)\dot{\utilde{c}}(t) = \utilde{b}(t)$$

o bien que

$$\dot{\utilde{c}}(t) = \Phi^{-1}(t)\utilde{b}(t)$$

De donde, integrando, se tiene que

$$\utilde{c}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)b(s)ds + \utilde{\xi}$$

Así, sustituyendo esta expresión para $\utilde{c}(t)$ en (8), se obtiene la solución general de la ecuación no-homogénea (7):

$$\utilde{x}(t) = \Phi(t)(\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau)\utilde{b}(\tau)d\tau + \utilde{\xi})$$

que bien podemos rescribir también como

$$\utilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\utilde{b}(\tau)d\tau + \Phi(t)\utilde{\xi}$$

Ahora, por las condiciones iniciales, se tiene que

$$\utilde{x}_0 = \utilde{x}(t_0) = \Phi(t_0)\utilde{\xi}$$

de donde se sigue que

$$\utilde{\xi} = \Phi^{-1}(t_0)\utilde{x}_0$$

Y por lo tanto, la solución del problema de Cauchy (7) está dada por

$$\utilde{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\utilde{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\utilde{b}(\tau)d\tau$$

Observación 4.1. *Nótese que el primer término en esta fórmula $\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\utilde{x}_0$ es la solución de la correspondiente ecuación homogénea con C.I.'s $\utilde{x}(t_0) = \utilde{x}_0$. Y que su segundo término $\int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)\utilde{b}(\tau)d\tau$ es la solución de la ecuación no-homogénea con C.I.'s nulas $\utilde{x}(t_0) = \utilde{0}$.*

Proposición 4.1. ***(Fórmula de Liouville)*** *Si $\Phi(t) : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es solución de la ecuación matricial $\dot{X}= A(t)X$ entonces*

$$det(\Phi(t)) = e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(\tau))d\tau} det(\Phi(t_0)), \qquad t \in I \tag{9}$$

y para un $t_0 \in I$ dado.

Para ello, antes los ejercicios siguientes

Ejercicio 4.1. *Muestra que*

a) $Tr[A^t] = Tr[A]$,

b) $Tr[AB] = Tr[BA]$. *Y,*

c) Si $B = PAP^{-1}$ entonces $Tr[B] = Tr[A]$ (i.e., la traza es un invariante algebraico por similitud).

Ejercicio 4.2. *Si $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene entradas $a_{ij}(t)$ diferenciables para toda $t \in I$ entonces*

$$\frac{d}{dt}(det(A(t))) = \sum_{j=1}^{n} det([\underset{\sim}{a_1}(t) \mid ... \mid \dot{\underset{\sim}{a_j}}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{a_n}(t)])$$

al escribir $A(t) = [\underset{\sim}{a_1}(t) \mid \underset{\sim}{a_2}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{a_n}(t)]$, en donde $\underset{\sim}{a_j}(t)$ denota a la j-ésima columna de $A(t)$.

Sugerencia: Recuerda que $det(A(t)) = \sum_{\sigma\in\Pi_n}(-1)^{|\sigma|}a_{\sigma(1),1}(t)...a_{\sigma(n),n}(t)$, en donde $|\sigma|$ es la paridad de $\sigma \in \Pi_n$.

Regresando a la

Demostración. Basta con verificar que $u(t) \equiv det(\Phi(t))$ es la solución de la ecuación escalar $u' = tr(A(t))u$ con condición inicial $u(t_0) = det(\Phi(t_0))$.

Usando el ejercicio 4.2, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(det(\Phi(t))) &= \frac{d}{dt}det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)]) \\ &= \sum_{j=1}^{n} det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid \dot{\underset{\sim}{\varphi_j}}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)]) \end{aligned}$$

al considerar a la matriz $\Phi(t) = [\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)]$, donde $\varphi_j(t)$ denota a la j-ésima columna de $\Phi(t)$.

De donde se sigue que

$$\frac{d}{dt}(det(\Phi(t))) = \sum_{j=1}^{n} det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid A(t)\underset{\sim}{\varphi_j}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)])$$

Ahora, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $\Phi(t)$ es una matriz fundamental. Y escribiendo a $A(t)$ en términos de la base $\{\underset{\sim}{\varphi_j}(t)\}_{j=1}^n$, se tiene que

$$A(t)\Phi(t) = \Phi(t)\tilde{A}^t(t)$$

donde $\tilde{A}(t) = (\alpha_{ij}(t))$. O sea que

$$A(t)\underset{\sim}{\varphi_j}(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(t)\underset{\sim}{\varphi_k}(t)\,, \quad j = 1...n$$

Así se sigue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}det(\Phi(t)) &= \sum_{j=1}^{n} det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}\underset{\sim}{\varphi_k}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)]) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk}(t) det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_k}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)])
\end{aligned}$$

en donde $\underset{\sim}{\varphi_k}(t)$ está ocupando la j-ésima columna en todos estos determinantes. Y dado que $det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_k}(t) \mid ... \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)]) = 0\,,$ para $k \neq j$, se obtiene que

$$\frac{d}{dt}det(\Phi(t)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj} det([\underset{\sim}{\varphi_1}(t) \mid \cdots \mid \underset{\sim}{\varphi_j}(t) \mid \cdots \mid \underset{\sim}{\varphi_n}(t)])$$

o bien que

$$\frac{d}{dt}det(\Phi(t)) = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jj}(t)\right) det(\Phi(t))$$

Finalmente, aplicando los incisos (a) y (c) del ejercicio 4.1, se concluye que

$$\frac{d}{dt}det(\Phi(t)) = Tr[A(t)] \cdot det(\Phi(t))$$

□