# PARTE II

## Modelo Depredador-Presa de Lotka-Volterra

Historia:

Umberto D'Ancona realizó registros pesqueros en el mar Adriático Superior durante y después de la 1ra. Guerra Mundial, observando la periodicidad de peces presa y depredador, y notó la DISMINUCION en promedio de los peces presa al disminuir la captura.

El modelo de Lotka-Volterra da una clara explicación de este fenómeno.

En las manos de Volterra nace la

ECOLOGIA MATEMATICA.

SUPUESTOS:

S.1. La población depredadora se alimenta solo de la presa.

S.2. La población presa se alimenta del medio con recursos ilimitados

S.3. Ambas poblaciones se distribuyen sin preferencias, sin diferenciación de edades y sexos.

PLANTEAMIENTO (Principio de Continuidad)

$x(t)$ tamaño de la población presa en el tiempo $t$

$y(t)$ tamaño de la población depredador en el tiempo $t$

En ausencia de $y$

$$\boxed{\frac{1}{x}\frac{dx}{dt} = a} - by$$

$$\boxed{\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \boxed{cx} - \mu}$$

En ausencia de $x$

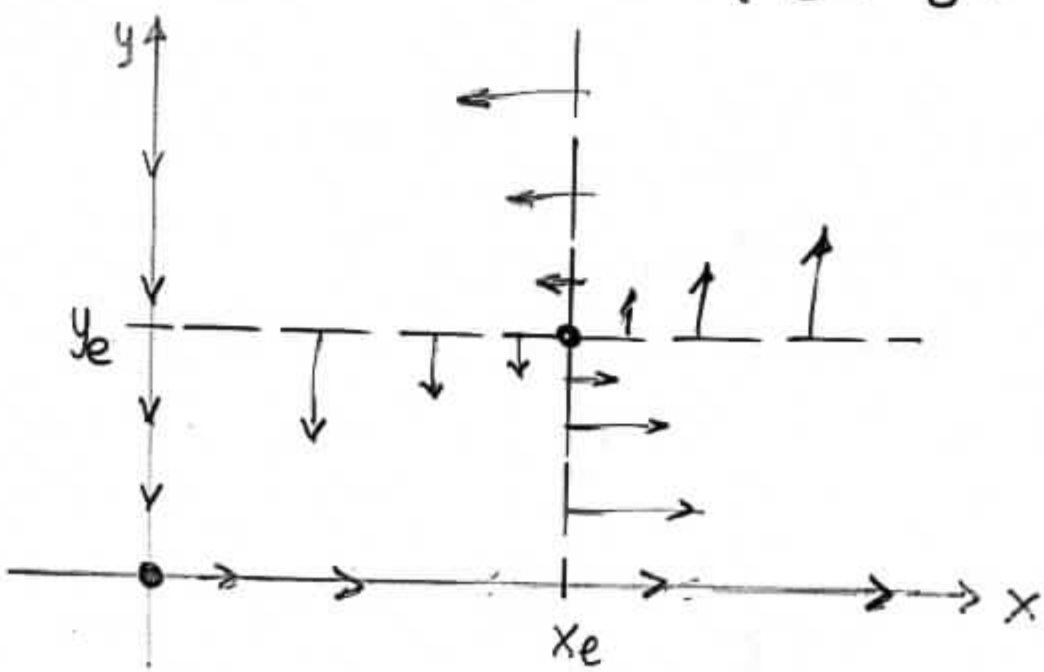
MODELO

$$(LV)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(cx-\mu) \\[2ex] \dfrac{dx}{dt} = x(a-by) \end{cases} \qquad x, y \geq 0$$

(A) Soluciones de Equilibrio:

Trivial: $(0,0)$

No-trivial: $(x_e, y_e) = \left(\frac{\mu}{c}, \frac{a}{b}\right)$



(B) Calculo de Curvas Integrales

Como antes procedamos a eliminar el tiempo en el sistema (LV); obteniendo q'

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(cx-\mu)}{x\,(a-by)} \qquad \left( ó\ \frac{dy}{dx} = \frac{cx-\mu}{x}\,\frac{y}{a-by} \right)$$

ó bien que

$$\frac{a-by}{y}\,dy = \frac{cx-\mu}{x}\,dx$$

o sea que

$$\left(c\,dx - \mu\,\frac{dx}{x}\right) + \left(b\,dy - a\,\frac{dy}{y}\right) = 0$$

Así, integrando se obtiene que

(C.1) Si $(x(t), y(t))$ es una sol$^{n}$ de (LV) entonces

$$h(t) =_{def} c\,x(t) - \mu \ln x(t) + b\,y(t) - a \ln y(t) \equiv C$$

donde $C = c x_0 - \mu \ln x_0 + b y_0 - a \ln y_0$, si se tiene que $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.

Así, integrando se tiene que

$$V = \int_{x_e}^{x} \left(c\,d\xi - \mu \frac{d\xi}{\xi}\right) + \int_{y_e}^{y} \left(b\eta - a\frac{d\eta}{\eta}\right), \quad V \text{ cte.}$$

o sea que

$$c(x-x_e) - \mu \ln \frac{x}{x_e} + b(y-y_e) - a \ln \frac{y}{y_e} = V$$

Obs. Si $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ entonces

$$V = V(x_0, y_0)$$

donde

$$V(x,y) =_{def} c(x-x_e) - \mu \ln \frac{x}{x_e} + b(y-y_e) - a \ln \frac{y}{y_e}$$

$\quad$ _(ec. LV1)

(B) Geom. analítica de curvas integrales.

Considérese a la fcn:

$$\varphi(z) = \alpha(z-z_e) - \beta \ln \frac{z}{z_e}$$

$$(z_e > 0 \text{ dado})$$

Propiedades:

(i) $\varphi(z)$ es de clase $C^\infty$:

$\varphi(z) \geq 0$, si $z>0$ y $\varphi(z)=0$ ssi $z=z_e$

Dem. Claramente $\varphi(z_e)=0$. Y como $\varphi'(z) = \alpha - \beta/z$, se sigue que $\varphi'(z_e)<0$ si $z<z_e$; y que $\varphi'(z)>0$, si $z>z_e$.

(ii) $\varphi(z) \to \infty$ cdo $z \to 0^+$

(iii) $\varphi(z) \to \infty$ cdo $z \to \infty$

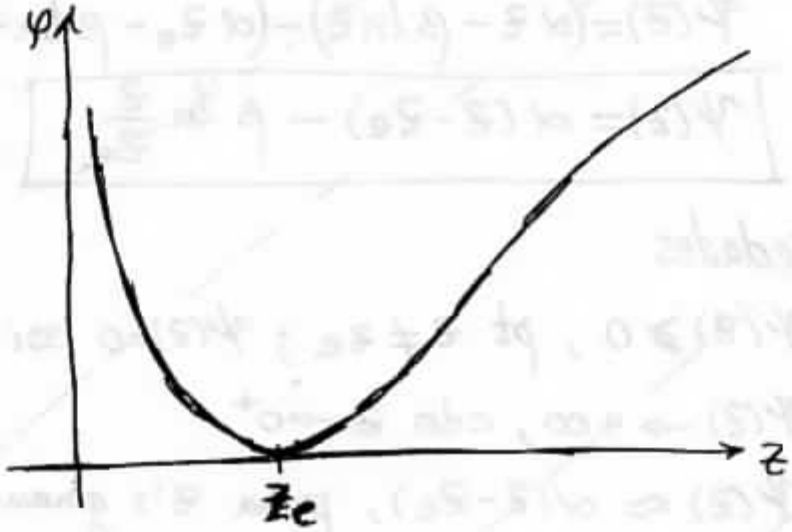



Fig 1. Gráfica de $\varphi$.

3.- Sea

$$\boxed{V(x,y)=\left[c(x-x_e)-\mu\ln\frac{x}{x_e}\right]+\left[b(y-y_e)-a\ln\frac{y}{y_e}\right], \quad \text{para } x,y>0}$$

Propiedades:

(i). $V(x,y)\geq 0$ pt $(x,y)$; $x,y>0$

$V(x,y)=0$ ssi $(x,y)=(x_e,y_e)$

(ii). $V(x,y)$ es continuam. diferenciable* en $x>0, y>0$.

(iii). Si $(x(t),y(t))$ es una solución de (LV) entonces

$$V(x(t),y(t))\equiv k\ ,\ k\geq 0 \text{ cte.}$$

Dem. Ejercicio

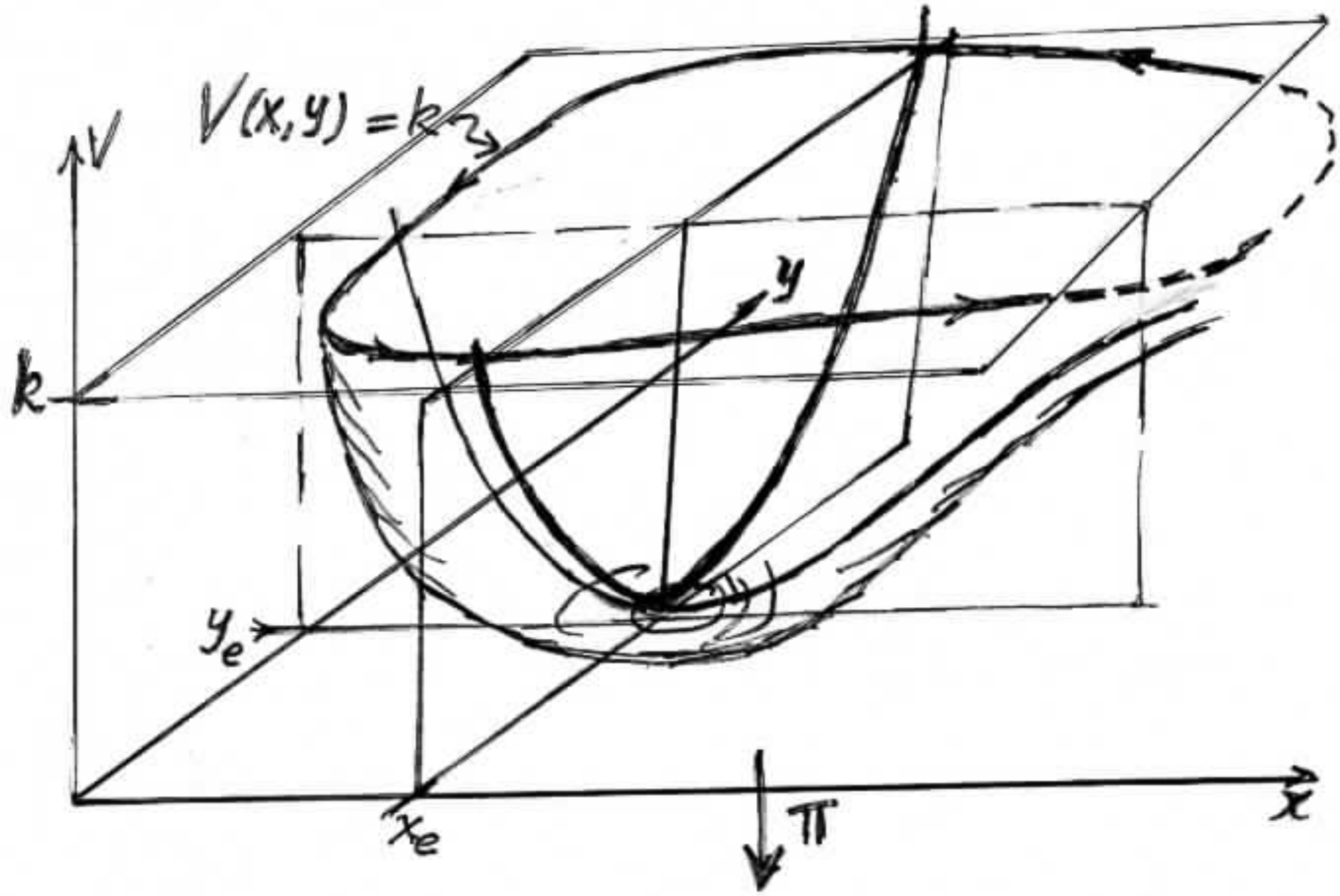
~~$V(x(t),y(t)) = h(x(t),y(t)) - h(x_e,y_e)$~~

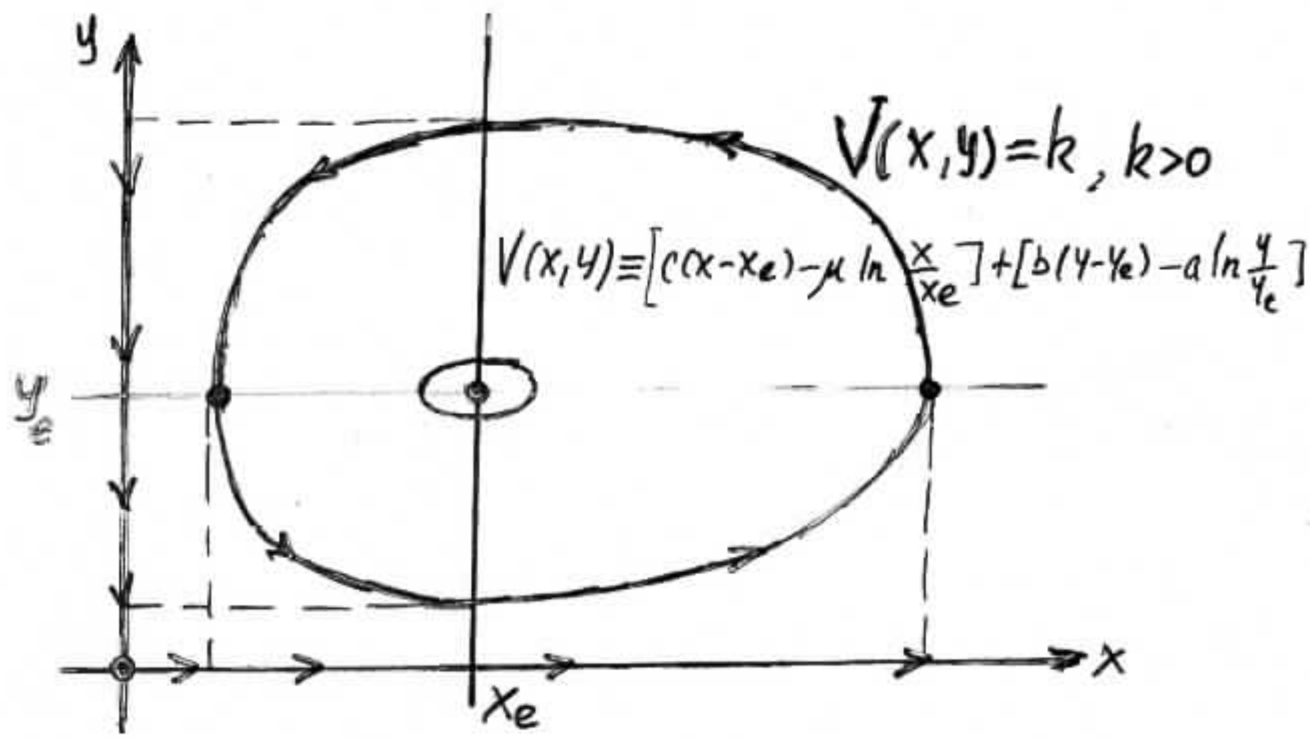
~~$= C - h(x_e,y_e) = k\ (\geq 0)$.~~

Nota. Si $V(x(t),y(t))\equiv 0 \Rightarrow$

$(x(t),y(t))=(x_e,y_e)$ pt $t$

(*) De hecho de clase $C^\infty$.


V(x,y) = k
V
k
y
$y_e$
$x_e$
x
π


y
$V(x,y)=k, k>0$
$V(x,y)\equiv\left[c(x-x_e)-\mu\ln\frac{x}{x_e}\right]+\left[b(y-y_e)-a\ln\frac{y}{y_e}\right]$
$y_e$
x
$x_e$

(C.2) Las soluciones $(x(t), y(t))$ de (LV) son periodicas.

—— // ——

## (D) Poblaciones Promedio.

Sea $(x(t), y(t))$ una solución de (LV) de periodo $T > 0$..

Las poblaciones promedio son

$$\bar{x} =_{def} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \qquad \bar{y} =_{def} \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

Af. 1. $\bar{x} = x_e$, $\bar{y} = y_e$. $\frac{dy}{dt} = y(cx - \mu)$

De la 1ra. ecn en (LV) se tiene que

$$\ln\left|\frac{y(T)}{y(0)}\right| = \int_{y(0)}^{y(T)} \frac{dy}{y} = \int_0^T \{cx(t) - \mu\}\,dt$$

$y(0) = y(T)$

$$\therefore\ 0 = c\int_0^T x(t)\,dt - \mu T \Rightarrow \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{\mu}{c} = x_e$$

Análogamente, se tiene que $\bar{y} = y_e$.

(E) Explicación de Volterra al Fenomeno D'Ancona.

El modelo de (LV) bajo captura es

$$\frac{dy}{dt} = y(cx-\mu) - \varepsilon y$$

$$\frac{dx}{dt} = x(a-by) - \varepsilon x$$

si se supone que la captura es proporcional a las poblaciones.

Rescribiendo dicho sist. como

$$\frac{dy}{dt} = y\,(cx-(\mu+\varepsilon))$$

$$\frac{dx}{dt} = x\,((a-\varepsilon)-by)$$

se sigue inmediatamente (Af. 1) que

$$\bar{x}_\varepsilon = \frac{\mu+\varepsilon}{c}, \qquad \bar{y}_\varepsilon = \frac{a-\varepsilon}{b}$$

Ilustración: ¡Plagas que crecen, en promedio, bajo fumigación!

## (F) Calculando el Periodo de Oscilación.

El método empleado en el Oscilador Armónico y el Péndulo para hallar una expresión analítica para el periodo de oscilación, ahora no funciona.

Pues no se ve nada fácil despejar explicitam. a $y$ como función de $x$ de

$$V(x,y)=k$$

$$\boxed{V(x,y)=\left[c(x-x_e)-\mu\ln\frac{x}{x_e}\right]+\left[b(y-y_e)-a\ln\frac{y}{y_e}\right]}$$

Alternativa: Cálculo numérico (véase tarea del tema).

(G) Cálculo del Periodo para Oscilaciones Pequeñas alrededor de $(x_e, y_e)$.

Tomando $x = x_e + \xi$, $y = y_e + \eta$ se tiene que

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{dy}{dt} = (y_e+\eta)\,(c(x_e+\xi)-\mu)$$

$$= (y_e+\eta)\,\underbrace{(cx_e-\mu)}_{=0} + c(y_e+\eta)\xi$$

$$\therefore \frac{d\eta}{dt} = c'\xi + c\xi\eta \quad , c' = cy_e$$

Analogamente, se tiene que

$$\frac{d\xi}{dt} = -b'\eta - b\xi\eta \quad , \quad b' = bx_e$$

Luego, despreciando los términos cuadráticos.

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y(cx-\mu) \\ \frac{dx}{dt} &= x(a-by) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= c'\xi \\ \frac{d\xi}{dt} &= -b'\eta \end{aligned}\right.$$

$$c' = cy_e, \quad b' = bx_e$$

Ahora recordemos que

$$(1)\quad m\ddot{x}+kx=0 \longrightarrow \begin{cases}\dot{v}=-\frac{k}{m}x\\ \dot{x}=v\end{cases} \longrightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

$$(2)\quad \ell\ddot{\theta}+g\theta=0 \longrightarrow \begin{cases}\dot{\omega}=-\frac{g}{\ell}\theta\\ \dot{\theta}=\omega\end{cases} \longrightarrow \boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

Así, multiplicando por $-\frac{1}{b'}$ y tomando $\tau=-b't$ se sigue que

$$\begin{Bmatrix}-\frac{1}{b'}\frac{d\eta}{dt}=-\frac{c'}{b'}\xi\\ -\frac{1}{b'}\frac{d\xi}{dt}=\eta\end{Bmatrix} \xrightarrow{\tau=-b't} \begin{Bmatrix}\frac{d\eta}{d\tau}=-\frac{c'}{b'}\xi\\ \frac{d\xi}{d\tau}=\eta\end{Bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{T_{(\tau)}=2\pi\sqrt{\frac{b'}{c'}}}$$

Y como el signo menos en $\tau=-b't$ sólo invierte el sentido de recorrido:

$$T=\frac{1}{b'}T_{(\tau)}=\frac{1}{b'}\left(2\pi\sqrt{\frac{b'}{c'}}\right)\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\sqrt{b'c'}}$$

$$\therefore \boxed{T=\frac{2\pi}{\sqrt{a\mu}}}$$ ← debido al parecer a LOTKA.

Aún cuando no se ve como hallar una expresión analítica explícita para el periodo $T(C)_\varepsilon$ se puede, sin embargo, demostrar la sgte

**TMA**. Para la solución de (LV) con C.I.

$$x(0) = A\ ,\ y(0) = y_e$$

se tiene que $T_A \to \infty$, cdo $A \to 0^+$.

Dem. Tarea.

Sug: Para ello, **héchese** mano del tma. de continuidad de la solución con respecto a sus C.I.

Tma Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f: \mathbb{R}\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ continua y globalmente Lipschitz (i.e. existe $L>0$ tq $\|f(t,\underline{x}) - f(t,\underline{y})\| \le L\|\underline{x}-\underline{y}\|$, pt $(t,\underline{x})$, $(t,\underline{y}) \in \mathbb{R}\times\Omega$). Si $\underline{\varphi}(t)$ y $\underline{\psi}(t)$ son las soluciones correspondientes a los pbtos:

$$\dot{\underline{x}} = f(t,\underline{x}) \qquad\qquad \dot{\underline{x}} = f(t,\underline{x})$$
$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \qquad\qquad \underline{x}(t_0) = \underline{y}_0$$

para $t\in[t_0, t_0+T]$ entonces

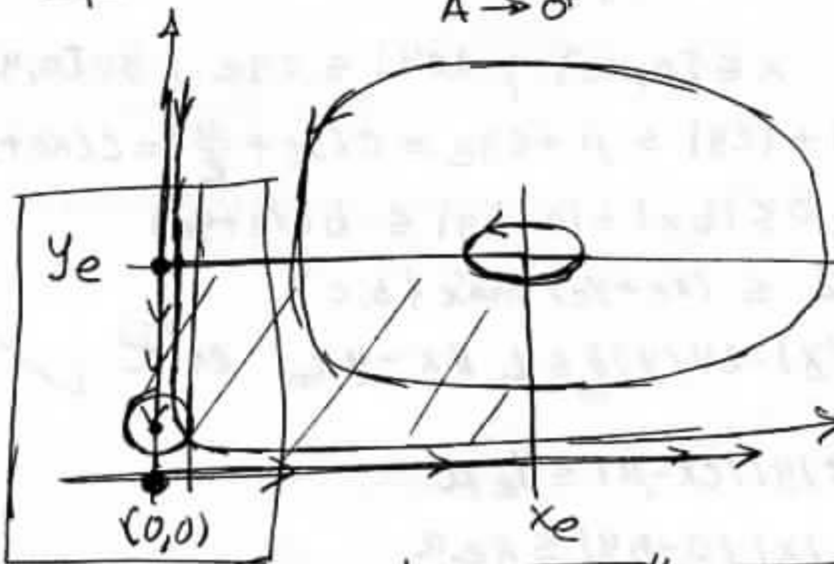
$$\|\underline{\varphi}(t) - \underline{\psi}(t)\| \le \|\underline{x}_0 - \underline{y}_0\| e^{LT}$$

(i.e. Dada $\varepsilon>0$

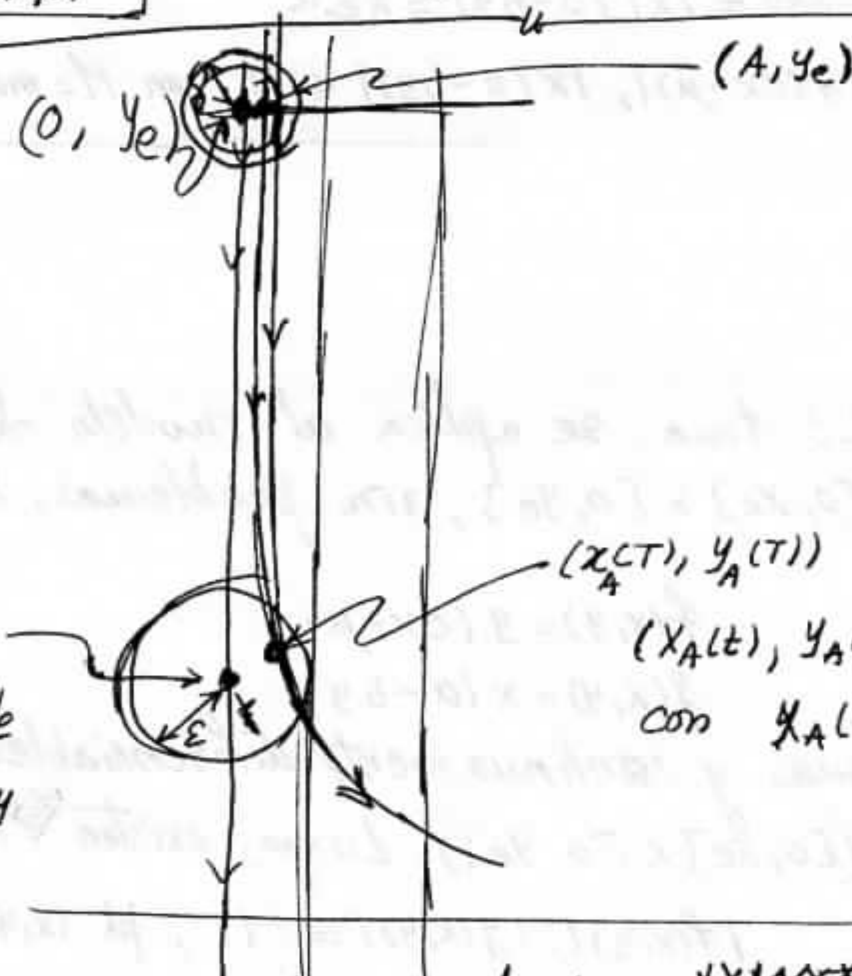
$$\|\underline{\varphi}(t) - \psi(t)\| < \varepsilon \qquad \text{pt } t\in[t_0, t_0+T],$$

si $\|\underline{x}_0 - \underline{y}_0\| < \delta = \varepsilon e^{-LT}$).

Aplicación: $T_A \to \infty$, $A \to 0^+$ $\qquad x(0)=A,\ y(0)=y_e$




Sea
$D: 0 \le x \le \frac{1}{2}x_e,\ 0 \le y \le y_e$
Claramente $D$ es cpto en $\mathbb{R}^2$ y como el sist (LV) es localm. Lips en $\mathbb{R}^2_+$, se sigue que es globalm. Lips en $D$.




$(0, y^*(T))$
$y^*(t)$ soln de
$y' = -\mu y$
$y(0) = y_e$

$(x_A(t), y_A(t))$ soln
con $x_A(0) = A,\ y_A(0) = y_e$

Como para $\varepsilon > 0$ y $T \gg 1$ dados, existe $\delta > 0$ tq

$$\|(X_A(T), Y_A(T)) - (0, y^*(T))\| < \varepsilon \quad , \text{ si } \quad 0 < A < \delta$$

se sigue que Dado $T \gg 1$ existe $\delta > 0$ tq

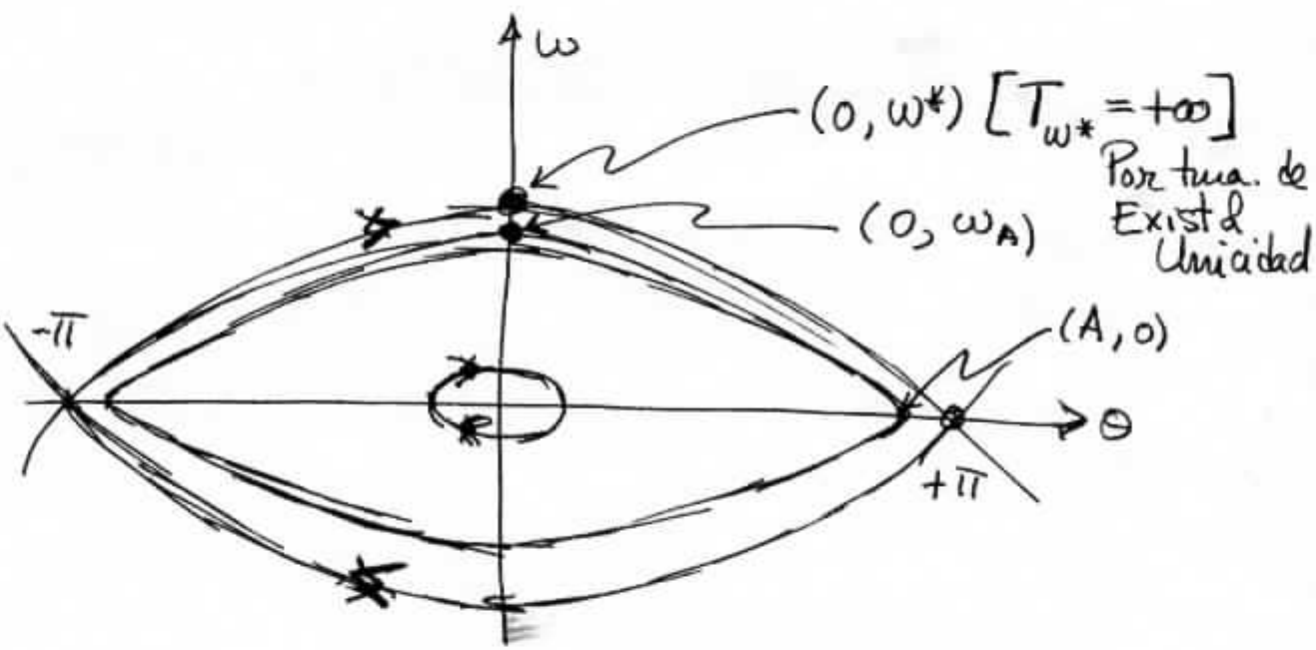
$$T_A > T, \qquad \text{si} \quad 0 < A < \delta$$

Esto es, $T_A \to \infty$ cuando $A \to 0^+$.

l.q.q.d. #

— // —

Este mismo método se aplica al Péndulo




Concretamente

$$T_A \to +\infty \quad \text{cdo} \quad \omega_A \to \omega^*$$

i.e. $\boxed{T_A \to +\infty \quad \text{cdo} \quad A \to \pi}$