Notas en desarrollo
FCiencias, UNAM
Semestre 2015-2

Ecuaciones diferenciales I

Sobre la ecuación $y' = g(y)$

Prof. Jesús López Estrada[1]

Ciudad Universitaria
Actualización Febrero de 2015

[1]Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias – UNAM

1. Introducción

En esta sección se estudia a la ecuación $y' = g(y)$, ecuación modelo de los sistemas de ecuaciones autónomos que serán analizados posteriormente. Nótese que si $g(c) = 0$ entonces $y(x) \equiv c$ es una solución constante de la ecuación $y' = g(y)$, llamada también de solución de **equilibrio**. Por ejemplo, la ecuación $y' = y(1-y)$, tiene a $y \equiv 0$ y $y \equiv 1$ como soluciones de equilibrio. ¿Cuáles son las soluciones de equilibrio de la ecuación $y' = \mathit{sen}\, y$?

2. La ecuación $y' = g(y)$

Sea $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, $I = (a, b)$, $a < b$. Y sea $\varphi(x)$ una solución de la la ecuación

$$y' = g(y) \tag{1}$$

entonces

$$\varphi'(x) = g(\varphi(x)), \qquad \text{para } x \in I_\varphi$$

donde $I_\varphi \subset \mathbb{R}$ es el dominio de definición de la solución $\varphi(x)$. Suponiendo que $g(\varphi(x)) \neq 0$, $\varphi(x) \in I$, reescribimos la última identidad como

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = 1$$

e integrando respecto a x, se tiene que

$$\int^x \frac{\varphi'(\xi)}{g(\varphi(\xi))} d\xi = \int^x d\xi$$

luego, aplicando el teorema de sustitución con $y = \varphi(x)$, obtenemos

$$\int^{\varphi(x)} \frac{dy}{g(y)} = x + c \tag{2}$$

Pero, como $g(y)$ es continua y $g(y) \neq 0$ en I, por el primer teorema fundamental del Cálculo, existe $G(y)$, *primitiva* de $1/g(y)$ (i.e., $G'(y) = 1/g(y)$). Por tanto, (2) se puede reescribir como

$$G(\varphi(x)) = x + c \tag{3}$$

Observando que $G'(y) = 1/g(y) \neq 0$ (i. e. $G'(y) > 0$ o $G'(y) < 0$ en I) entonces, por el teorema de la función inversa, $G(y)$ tiene función inversa, digamos $\Gamma(y)$. Luego, pre-componiendo con Γ en ambos lados de (3), se sigue que

$$\Gamma(G(\varphi(x))) = \Gamma(x + c)$$

o sea

$$\varphi(x) = \Gamma(x + c)$$

Así, se ha demostrado el siguiente

Teorema 2.1.
Si $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y $g(y) \neq 0$ en I entonces la solución general de la ecuación $y' = g(y)$ está dada por

$$y(x) = \Gamma(x + c), \qquad \text{para alguna } \ c \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad x \in I_c \tag{4}$$

donde $\Gamma(y)$ es la función inversa de $G(y)$ y $G(y)$ una primitiva de $\dfrac{1}{g(y)}$.

Se deja al lector agudo la tarea de demostrar que la solución (4) no depende de la primitiva $G(y)$ tomada para la función $1/g(y)$.

Teorema 2.2.
Si $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $g(y) \neq 0$, $y \in I$, entonces el problema de Cauchy[2]

$$\begin{aligned} y' &= g(y), \\ y(x_0) &= y_0 \qquad x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in int(I) \end{aligned} \tag{5}$$

tiene una única solución dada por

$$y(x) = \Gamma(x - x_0), \quad x \in I_{(x_0, y_0)} \subset \mathbb{R} \tag{6}$$

donde $\Gamma(y)$ es la función inversa de la primitiva $G(y)$ de $1/g(y)$ con $G(y_0) = 0$.

Demostración. .

I) *Existencia*: Claramente se tiene $y(x_0) = \Gamma(0) = y_0$.

Ahora, por verificar que

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x - x_0) \equiv g(\Gamma(x - x_0)), \quad \text{para} \quad x \in I_{(x_0, y_0)}$$

En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Gamma(x - x_0) &= \Gamma'(x - x_0) \\ &= \frac{1}{G'(\Gamma(x - x_0))}, \quad \text{por el tma. de la función inversa} \\ &= g(\Gamma(x - x_0)), \quad \text{por ser } G(y) \text{ primitiva de } \ g(y) \end{aligned}$$

II) *Unicidad*: Sea $\varphi(x)$ solución del problema de Cauchy (5). Esto es, que

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= g(\varphi(x)), \quad x \in I_\varphi \\ \varphi(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Para demostrar que $\varphi(x) = \Gamma(x - x_0)$, reescríbase $\varphi'(x) = g(\varphi(x))$ como

$$\frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = 1 \tag{7}$$

[2] También llamado problema con valores iniciales (PVI)

e intégrese de x_0 a x:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(\xi)}{g(\varphi(\xi))} d\xi = \int_{x_0}^{x} d\xi = x - x_0 \tag{8}$$

Luego, aplicando el teorema de sustitución con $\eta = \varphi(x)$, se tiene que

$$\int_{\varphi(x_0)}^{\varphi(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = x - x_0$$

y si $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$ entonces

$$G(\varphi(x)) = x - x_0$$

Como $G(y)$ tiene inversa $\Gamma(y)$, precomponiendo con Γ, se obtiene

$$\Gamma(G(\varphi(x))) = \Gamma(x - x_0)$$

o sea

$$(\Gamma \circ G)(\varphi(x)) = \Gamma(x - x_0)$$

y en consecuencia

$$\varphi(x) = \Gamma(x - x_0)$$

con $I_\varphi \subset I_{(x_0,y_0)}$.

□

El siguiente teorema considera el caso en el que $g(y)$ se anula en un punto $c \in I$

Teorema 2.3.
Si $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, $g(c) = 0$, $c \in int(I)$, $g(y) \neq 0$ para toda $y \neq c$, y además la integral impropia

$$\int_{y}^{c\pm} \frac{dy}{g(y)}$$

es divergente, entonces el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= g(y) \\ y(x_0) &= y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \in I \end{aligned} \tag{9}$$

tiene una única solución dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} c & \text{si} \quad y_0 = c \\ \Gamma(x - x_0) & \text{si} \quad y_0 \neq c \end{cases}$$

Demostración. Si $y_0 = c$ es inmediato ver que $\varphi(x) \equiv c$ es solución del problema de Cauchy (9).

Si $y_0 \neq c$ hay que considerar 4 casos. Veamos el caso

$$(a) \quad y_0 < c; \quad g(y) < 0, \quad si \quad y < c$$

Sea $\varphi(x)$ solución del problema de Cauchy (9), entonces

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= g(\varphi(x)) \\ \varphi(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

ya que $g(y) < 0$, procedemos de manera análoga a lo hecho en (7) y (8), obteniendo nuevamente la expresión

$$\int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\eta}{g(\eta)} = x - x_0$$

Ahora, tomando el limite $x \to -\infty$, se sigue que

$$\int_{y_0}^{c-} \frac{d\eta}{g(\eta)} = x_{-\infty} - x_0$$

y como por hipótesis

$$\int_{y_0}^{c-} \frac{d\eta}{g(\eta)} = -\infty$$

se concluye que $x_{-\infty} = -\infty$, lo que dice que $\varphi(x)$ alcanza a la recta $y = c$ en $x = -\infty$. $\square$

Análogamente, se tratan los otros casos.

Ejemplo 2.1.
Describir la conducta geométrica de las soluciones de la ecuación

$$y' = y(1-y) \tag{10}$$

Claramente $y \equiv 0$ y $y \equiv 1$ son soluciones constantes de (10).
Por otro lado, es directo ver que

$$y(1-y) \begin{cases} < 0 & si \quad y < 0 \\ > 0 & si \quad 0 < y < 1 \\ < 0, & si \quad y > 1 \end{cases}$$

Lo que dice que las soluciones de esta ecuación son crecientes si su gráfica vive dentro de la franja $\mathbb{R} \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, y decrecientes si viven en los semi-planos $\mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ y $\mathbb{R} \times (1, \infty)$ (figura 2).

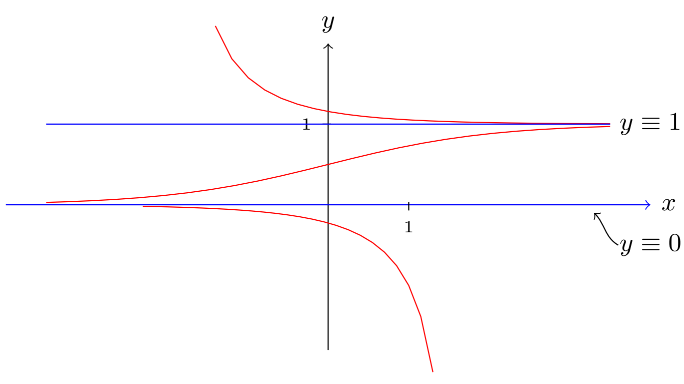

Figura 1:

Derivando la ecuación (10), obtenemos

$$\begin{aligned} y'' = \frac{d}{dx} y(1-y) &= y' - 2yy' \\ &= (1-2y)y' \end{aligned}$$

y sustituyendo y'

$$y'' = (1-2y)y(1-y)$$

De esta última ecuación deducimos que

$$y'' \begin{cases} < 0, & si \quad y < 0 \\ > 0, & si \quad 0 < y < \frac{1}{2} \\ < 0, & si \quad \frac{1}{2} < y < 1 \\ > 0, & si \quad y > 1 \end{cases}$$

Lo cual indica que las gráficas de las soluciones por abajo de la recta $y = 1/2$ son cóncavas y que por arriba son convexas.

Para ver que las soluciones no-constantes son asintóticas a $y \equiv 0$ y $y \equiv 1$, se tiene que probar que las integrales impropias

$$\int_{y_0}^{0\pm} \frac{dy}{y(1-y)} \quad y \quad \int_{y_0}^{1\pm} \frac{dy}{y(1-y)}$$

son divergentes.

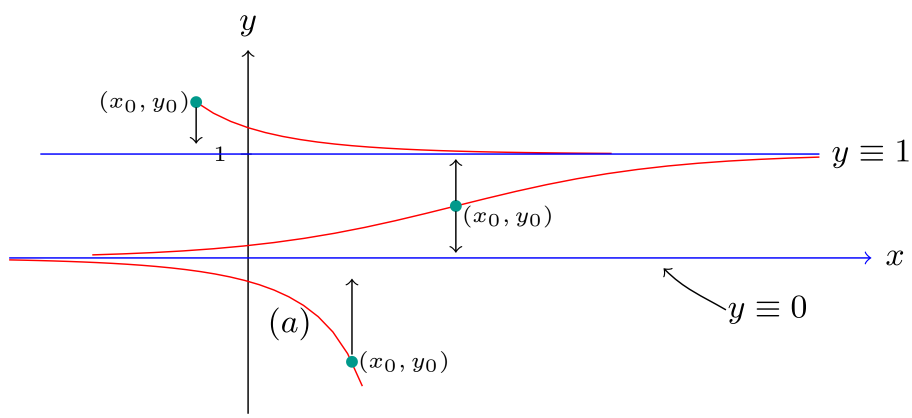

Figura 2:

Veamos el siguiente caso:

Caso (a) (figura 2)

$$y_0 < 0, \quad \int_{y_0}^{0-} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} \tag{11}$$

Por demostrar que la integral es divergente, es decir

$$\int_{y_0}^{0-} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} = -\infty \tag{12}$$

Demostración. Como claramente existen constantes $0 < m < M = 1$ (¿Cuánto vale m?) tales que $m \leq \frac{1}{1-\eta} \leq M$, $\eta \in (y_0, 0)$, se tiene que

$$\frac{1}{\eta(1-\eta)} \leq \frac{m}{\eta}$$

Y consecuentemente que

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{0-} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} &\leq m \int_{y_0}^{0-} \frac{d\eta}{\eta} \\
&= -m \int_{0+}^{-y_0} \frac{d\eta}{\eta} \\
&= -m(ln|-y_0| - ln(0+)) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

□

De igual manera se pueden obtener los otros casos.
Finalmente, hallemos la solución analítica del problema de Cauchy:

$$\begin{aligned}
y' &= y(1-y) \\
y(x_0) &= y_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \quad y_0 \neq 0,\, 1
\end{aligned} \tag{13}$$

partiendo de

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} = \int_{x_0}^{x} d\xi$$

o bien de

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} = x - x_0 \tag{14}$$

y dado que

$$\frac{1}{\eta(1-\eta)} = \frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta(1-\eta)} &= \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta} + \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{1-\eta} \\
&= \ln \frac{y}{y_0} - \ln \frac{1-y}{1-y_0} \\
&= \ln \left(\frac{y}{y_0} \frac{1-y_0}{1-y} \right)
\end{aligned}$$

Luego, sustituyendo en (14), y aplicando la exponencial, se obtiene que

$$\frac{y}{1-y} \frac{1-y_0}{y_0} = e^{x-x_0}$$

o bien que

$$y = \frac{y_0 e^{x-x_0}}{1-y_0} (1-y)$$

o sea que

$$y \left(1 + \frac{y_0 e^{x-x_0}}{1-y_0} \right) = \frac{y_0 e^{x-x_0}}{1-y_0}$$

de donde finalmente, después de hacer álgebra básica, se obtiene que la solución buscada está dada por

$$y = \frac{y_0}{y_0 + (1-y_0)e^{-(x-x_0)}} \tag{15}$$

Expresión a partir de la cual se pueden constatar las propiedades asintóticas de las soluciones de la ecuación (13) con respecto a sus soluciones de equilibrio $y \equiv 0$ y $y \equiv 1$. #

Ejemplo 2.2.
Discutir el comportamiento geométrico de las soluciones de la ecuación

$$y' = -\sqrt{|y|} \tag{16}$$

- Claramente $y \equiv 0$ es solución constante (o de equilibrio) de esta ecuación.
- El dominio de la ecuación es todo $\mathbb{R}^2$.
- Como $-\sqrt{|y|} < 0$, para toda $y \neq 0$, todas sus soluciones son decrecientes, salvo para la solución constante $y \equiv 0$, como se puede apreciar al graficar el campo direccional (figura 3).

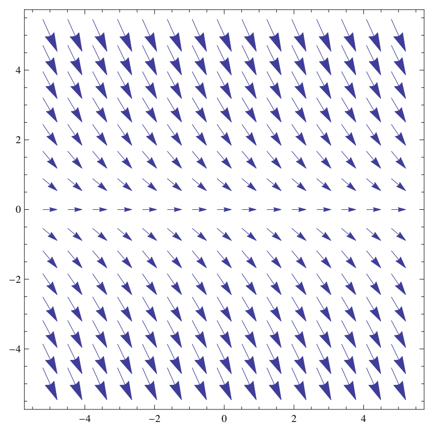

Figura 3:

Derivando en $y' = -\sqrt{|y|}$, se obtiene que

$$y'' = \frac{d}{dx}(-\sqrt{|y|})$$

Hay dos casos a considerar:

1) Si $y > 0$, $|y| = y$, entonces se tiene que

$$y'' = -\frac{y'}{2\sqrt{y}} = -\frac{y'}{2(-y')} = \frac{1}{2} > 0$$

2) Si $y < 0$, $|y| = -y$, entonces se verifica que

$$y'' = \frac{d}{dx}(-\sqrt{-y}) = -\frac{-y'}{2\sqrt{-y}} = \frac{y'}{2(-y')} = -\frac{1}{2} < 0$$

lo cual implica, que las soluciones de la ecuación diferencial bajo estudio, cuya gráfica viven en el semi-plano $y > 0$ son convexas y que las que viven en el semi-plano $y < 0$ son cóncavas.

Ahora pasemos a resolver la ecuación (16). Esta se puede poner en la forma

$$\frac{dy}{\sqrt{|y|}} = -dx \tag{17}$$

Como las integrales impropias, tanto para el caso $y_0 > 0$

$$\int_{y_0}^{0+} \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int_{0+}^{y_0} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \lim_{\alpha \to 0^+} 2\sqrt{y}\Big|_{\alpha}^{y_0} = 2\sqrt{y_0}$$

como para el caso $y_0 < 0$

$$\int_{y_0}^{0-} \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \int_{y_0}^{0-} \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -\lim_{\alpha \to 0^-} 2\sqrt{-y}\Big|_{y_0}^{\alpha} = 2\sqrt{-y_0}$$

son convergentes, se sigue que las soluciones de la ecuación bajo estudio, alcanzan tangencialmente a la solución constante $y \equiv 0$ (figura 4).

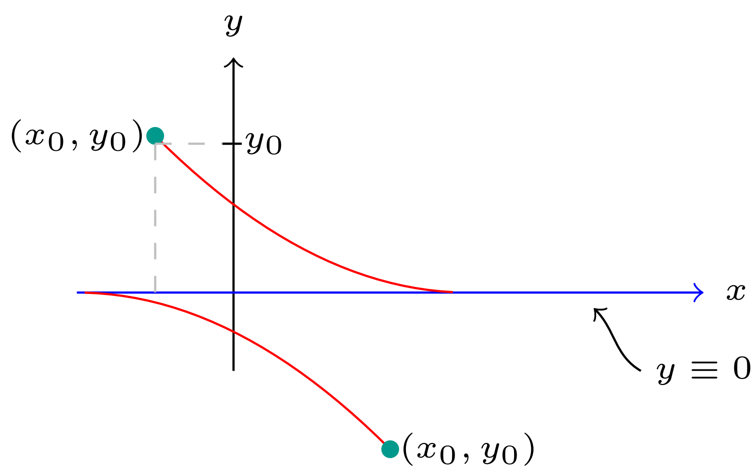

Figura 4:

- Tipos de solución:

Para el caso $y > 0$, la ecuación (17)queda como

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -dx$$

luego, integrando, se tiene que

$$\int^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}} = -\int^{x} d\xi$$

o sea que $2\sqrt{y} = -x + c$, para alguna $c \in \mathbb{R}$, o bien que

$$y = \left(\frac{x-c}{2}\right)^2$$

para alguna $c \in \mathbb{R}$. La cual tiene sólo sentido para $x \leq c$ (figura 5) ¿Por qué?.

Análogamente se tiene que la solución para el caso $y < 0$ está dada por

$$y = -\left(\frac{x-c}{2}\right)^2$$

para alguna $c \in \mathbb{R}$. La cual tiene sólo sentido para $x \geq c$ (¿Por qué?)

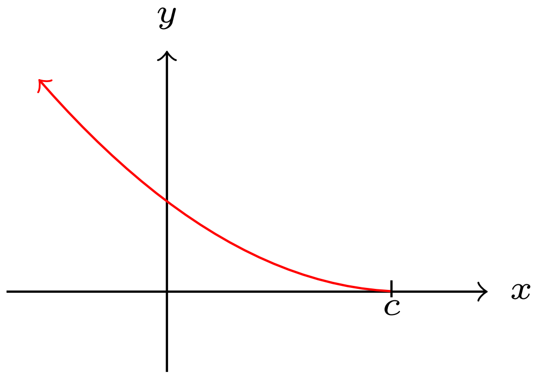

Figura 5:

Por tanto, la solución general de la ecuación $y' = -\sqrt{|y|}$ puede tomar una de las formas siguientes:

I)
$$y \equiv 0$$

II)
$$y = \begin{cases} \left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2, & \text{si } x \leq c \\ -\left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2, & \text{si } x > c \end{cases}$$

III)
$$y = \begin{cases} \left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2, & \text{si } x \leq c \\ 0 \quad, & \text{si } x > c \end{cases}$$

IV)
$$y = \begin{cases} 0 \quad, & \text{si } x > c \\ -\left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2, & \text{si } x \leq c \end{cases}$$

V)
$$y = \begin{cases} \left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x \leq c \\ 0 & \text{si } c < x \leq c + \varepsilon \\ -\left(\dfrac{x-c}{2}\right)^2 & \text{si } x > c + \varepsilon \end{cases} \tag{18}$$

donde c es la constante de integración y $\varepsilon > 0$ cualquiera dado (figura 6).

Finalmente cabe mencionar que consecuentemente el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} y' &= -\sqrt{|y|} \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

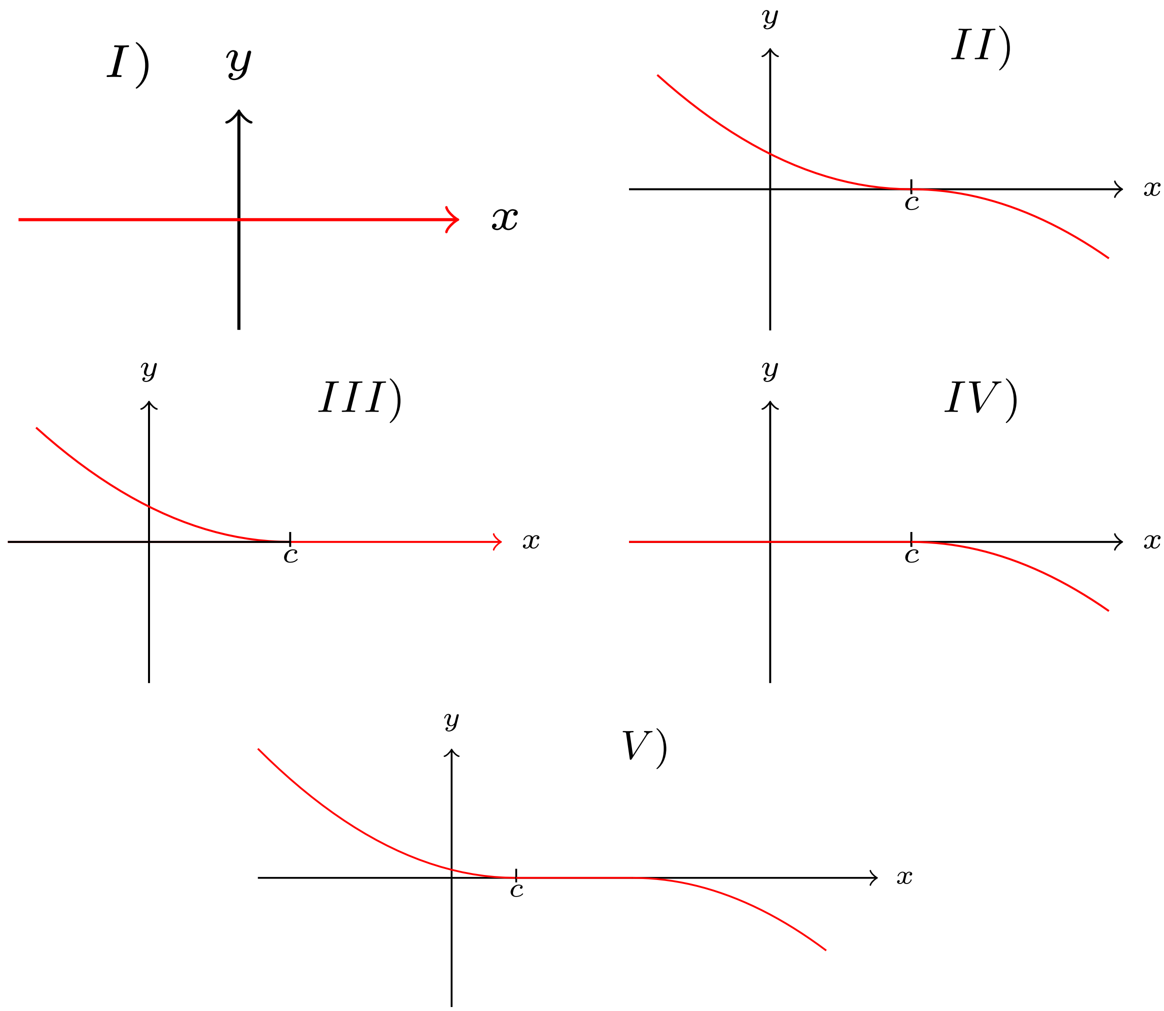

Figura 6:

no tiene una única solución ¿Cuántas tiene?

Aplicación 2.1.
Hallar el tiempo en que se vacía un tinaco de agua cilíndrico de radio $R > 0$ y altura $H > 0$, que tiene un agujero circular de radio $r << R$ en su tapa inferior.

—–Va imagen del tinaco

Sea $h(t)$ la altura del agua en el tinaco en el tiempo t. Por calcular la variación del volumen ΔV en un lapso de tiempo comprendido entre t y $t + \Delta t$, de dos maneras diferentes:
- Primera:

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta h + \eta\,, \text{ en donde } \quad \frac{\eta}{\Delta h} \to 0, \text{ cuando } \Delta h \to 0 \tag{19}$$

- Segunda:

$$\Delta V = -\pi r^2 \cdot d + \xi\,, \quad \frac{\xi}{\Delta t} \to 0 \text{ cuando } \Delta t \to 0$$

en donde $a = \pi\, r^2$ es el área del orificio en la base del tinaco y d es la distancia recorrida por un paquete de chorro de agua a través del orificio. Así, dado que $d = v \cdot \delta t$ en donde $v = \sqrt{2gh}$ es la velocidad de salida del lǵuido, según la ley de Torricelli, se sigue que

$$\Delta V = -\pi\, r^2 \sqrt{2gh}\, \Delta t + \xi, \quad \frac{\xi}{\Delta t} \to 0 \text{ cuando } \Delta t \to 0 \tag{20}$$

Luego, de (19) y (20) se sigue que

$$\pi R^2 \Delta h + \eta = -\pi\, r^2 \sqrt{2gh} \Delta t + \xi$$

ó sea que

$$\pi R^2 \frac{\Delta h}{\Delta t} + \frac{\eta}{\Delta t} = -\pi\, r^2 \sqrt{2gh} + \frac{\xi}{\Delta t}$$

Tomando el límite cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene que:

$$\pi R^2 lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta t} + lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta}{\Delta t} = -\pi\, r^2 \sqrt{2gh}$$

Y considerando que

$$lim_{\Delta t \to 0} \frac{\eta}{\Delta t} = lim_{\Delta t \to 0} (\frac{\eta}{\Delta h})(\frac{\Delta h}{\Delta t}) = 0 \tag{21}$$

si $h = h(t)$ es diferenciable, se obtiene que la ecuación que describe el vaciado del tinaco es:

$$\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}; \quad k = \sqrt{2g} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \tag{22}$$

Dado que el tinaco está inicialmente lleno, la "cinemática" de su vaciado está descrita por el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -k\sqrt{h} \\ h(0) &= H \end{aligned} \tag{23}$$

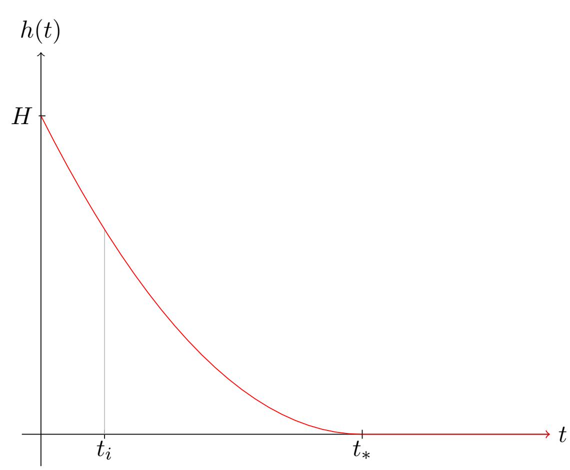

Figura 7:

Aunque para conocer el tiempo t_* en que tarda el tinaco en vaciarse, basta con resolver el problema:

$$\int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = \int_0^{t_*} -k\,dt$$

Así, integrando, se tiene que

$$2\sqrt{h}\Big|_H^0 = -kt_*$$

ó sea que

$$t_* = \frac{2\sqrt{H}}{k}$$

Luego sustituyendo el valor de k dado en (22), se obtiene

$$t_* = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

#

3. Ejemplos adicionales

Halla la “solución” general para cada una de las ecuaciones siguientes:

1. $y' = \sqrt{1-y^2}$

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{y'(\xi)d\xi}{\sqrt{1-y(\xi)^2}} &= \int^x d\xi \\
\int^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} &= \int^x d\xi \\
\int^y \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} &= x+c \\
-\arccos y &= x+c \\
\therefore\ y &= \cos(-x+c) \quad \textit{es la solución general}
\end{aligned}$$

   ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Qué otras soluciones tiene esta ecuación?

2. $\dot{x} = e^x$

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int^t \frac{\dot{x}(\xi)d\xi}{e^{x(\xi))}} &= \int^t d\xi \\
\int^{x(t)} \frac{d\eta}{e^\eta} &= t+c \\
-e^{-x(t)} &= t+c \\
\therefore\quad x(t) &= \ln{(-t+c)^{-1}} \quad \textit{es la solución general}
\end{aligned}$$

   ¿Cuál es su dominio de definición?

3. $\dfrac{dx}{dt} = x^2(1-x^2)$

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{d\eta}{\eta^2(1-\eta^2)} &= t+c \\
\int^x \frac{d\eta}{\eta^2} + \int^x \frac{d\eta}{1-\eta^2} &= t+c \\
\therefore\ \frac{-1}{x} + \ln((1-x^2)^{-\dfrac{1}{2}} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{x} &= t+c
\end{aligned}$$

   En esta expresión está implícita la solución general. ¿Cuál es su dominio de definición? ¿Qué otras soluciones tiene esta ecuación?

4. $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2\, y$

   Solución:

$$\begin{aligned}
\int^y \frac{d\eta}{cos^2\,\eta} &= t+c \\
\int^y \sec^2\,\eta\, d\eta &= t+c \\
\tan y &= t+c \\
\therefore\quad y &= \arctan(t+c) \quad \textit{es la solución general}
\end{aligned}$$

¿Qué otras soluciones tiene esta ecuación?

5. $y' = ky^m, \quad k \in \mathbb{R}$

Solución:

$$\begin{aligned} \int^y \frac{d\eta}{\eta^m} &= kt + c \\ \frac{y^{-m+1}}{-m+1} &= kt + c \\ \therefore \quad y &= ((-m+1)(kt+c))^{\frac{1}{-m+1}} \quad \textit{es la solución general} \end{aligned}$$

6. $\dot{x} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\eta^2}{\eta^2 - 1} &= t + c \\ \frac{1}{4}\ln(x^2 - 1) &= t + c \\ \ln(x^2 - 1) &= 4t + c \\ \therefore \quad x &= \sqrt{\exp(4t + c)} \quad \text{es la solución general} \end{aligned}$$

¿Cuál es su dominio de definición? ¿Qué otras soluciones tiene esta ecuación?