Tomado de: M. de Guzman, EDO's, Teoría de Estabilidad y Control, Alhambra;

ORIGEN Y EVOLUCION DE LA TEORIA DE ECUACIONES DIFERENCIALES

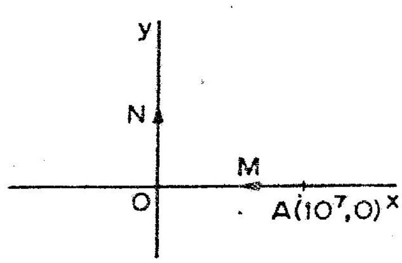
Las notas históricas contenidas en este capítulo están en su mayor parte basadas en el apéndice elaborado por JUSCHKEWITSCH en el texto de W. W. STEPANOV [1963].

Existen textos, como el de INCE [1927] y HARTMAN [1964], que contienen referencias históricas exactas aisladamente. La obra histórica reciente de KLINE [1972] contiene varios capítulos dedicados especialmente a narrar el desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Para aquellos que se introducen por vez primera en el estudio de las ecuaciones diferenciales parece aconsejable posponer la lectura de esta introducción histórica hasta después de haber leído por lo menos los capítulos 2-5.

1.1. LOS ORIGENES

Los primeros ensayos de tratamiento de ecuaciones diferenciales tuvieron lugar probablemente hacia finales del siglo XVI y comienzos del XVII, motivados por la producción de tablas de logaritmos. I. NAPIER (1550-1617) empleó la siguiente interpretación cinemática en la construcción de sus tablas:



Se considera sobre un eje $0X$ un móvil M que en el instante $t=0$ parte de $A(10^7, 0)$ con velocidad $-V$, siendo esta velocidad $v(t)$ en cada instante t proporcional a la distancia de M a 0. Sobre otro eje $0y$ se considera otro móvil N que parte de 0 en el instante $t=0$ con velocidad constante V. Sea $x(t)$ la distancia de M a 0, e $y(t)$ la de N a 0 en el instante t. NAPIER definió entonces $y(t)$ como el logaritmo de $x(t)$, $y(t)=Lx(t)$.

En terminología moderna se puede poner:

$$x(0)=10^7, \qquad dx/dt=-Vx/10^7,$$
$$y(0)=0, \qquad dy/dt=V,$$

y, así,

$$dy/dx=-10^7/x, \qquad x(0)=10^7, \qquad y(0)=0$$

de donde resulta:

$$y=Lx=10^7 \log (10^7/x)$$

Las tablas de Napier constituyen, por tanto, una solución numérica, obtenida por aproximaciones, de una ecuación diferencial de primer orden. La elección arbitraria de la constante 10^7 está basada en la costumbre de la época de dar al sen $\pi/2$ el valor 10^7. De esta forma los logaritmos de los senos de ángulos entre 0 y $\pi/2$ eran dados en las tablas de Napier por enteros positivos.

En el estudio de problemas relacionados con los fenómenos naturales ya Galileo (1564-1642) y Descartes (1596-1650) utilizaron ecuaciones diferenciales. Al resolver el problema del espacio recorrido por un cuerpo en caída libre, Galileo (1638) dio la medida de este espacio, $s(t)$, como el área de un triángulo rectángulo de catetos el tiempo t y la velocidad $v(t)=gt$.

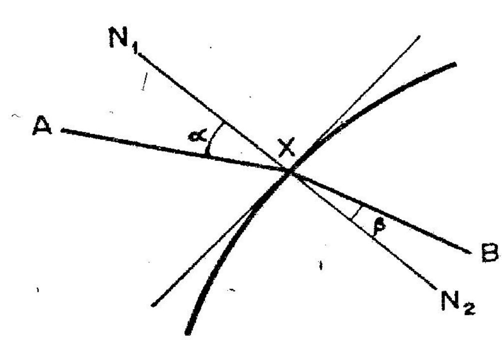
Por tanto:

$$s(t)=\frac{1}{2}gt^2$$

Descartes, motivado por sus trabajos de óptica, enunció y resolvió en 1628 el primero de los problemas llamados de *inversión de la tangente*, que vinieron a desempeñar un papel muy importante en el desarrollo del cálculo y de las ecuaciones diferenciales.

Dados dos puntos fijos A, B, en el plano, se trata de obtener una curva C que los separe, de modo que si se toma cualquier punto X de la curva y se traza la normal N_1N_2 a ella en X, se tenga:

$$\frac{\text{sen } AXN_1}{\text{sen } BXN_2}=k$$



La solución de este problema, que implica la solución de una ecuación diferencial, fue dada por el mismo DESCARTES en la forma de un óvalo de cuarto orden (óvalo de Descartes), esencialmente mediante el uso del cálculo infinitesimal.

Un problema típico de inversión de la tangente es el siguiente, propuesto por F. DE BEAUNE (1601-1652). Se trata de obtener una curva $y=y(x)$, cuya subtangente s_t satisfaga:

$$y/s_t=\frac{x-y}{a};$$

es decir,

$$dy/dx=\frac{x-y}{a}$$

DESCARTES hizo uso de la sustitución

$$x=\frac{X}{\sqrt{2}}, \qquad y=Y+\frac{X}{\sqrt{2}}-a$$

obteniendo

$$\frac{dY}{dX}=-\frac{Y}{a\sqrt{2}}$$

problema que ya NAPIER había resuelto un cuarto de siglo antes. No disponiendo DESCARTES de la noción de logaritmo, dio una interpretación cinemática de las curvas solución, obteniendo sus puntos como intersección de dos rectas que se mueven. DESCARTES manifestó su opinión de que la curva es trascendente (mecánica, en su terminología) y de que no podría existir un método general para la solución de tales problemas. Sin embargo, muy poco después, la solución de estos problemas, que en realidad conducen a ecuaciones diferenciales que admiten una separación de variables, fue reducida a cuadraturas. En 1669, I. BARROW (1630-1677) demostró geométricamente que las curvas cuya subtangente s_t satisface

$$s_t/y=\frac{f(y)}{\psi(x)}$$

vienen determinadas por una ecuación que se puede expresar:

$$\int f(y)\,dy=\int \psi(x)\,dx$$

1.2. DE FINES DEL SIGLO XVII HASTA EL SIGLO XIX

El primer periodo de la historia de las ecuaciones diferenciales comienza propiamente con los trabajos de NEWTON (1642-1727) y LEIBNIZ (1646-1716). Este periodo comprende el último cuarto del siglo XVII y el siglo XVIII. Los problemas que motivaron este desarrollo fueron el estudio de la dinámica puntual y de los cuerpos rígidos, así como ciertos problemas geométricos, conduciendo, a través de los métodos de cálculo diferencial e integral, a los tipos más sencillos de ecuaciones de primero y segundo orden.

En la primera mitad del siglo XVIII, las ecuaciones diferenciales se convirtieron en el instrumento básico de investigación de problemas de mecánica, de geometría diferencial y del cálculo de variaciones. Al final de esta época algunos problemas físicos, como el problema de la cuerda vibrante, aparecen formulados en forma de ecuaciones en derivadas parciales. En la segunda mitad del siglo XVIII tales ecuaciones en derivadas parciales encuentran amplia aplicación también en la teoría de superficies.

Durante este periodo el esfuerzo se centra en el estudio de métodos particulares de solución aplicables a diferentes tipos concretos de ecuaciones diferenciales. Tales métodos trataban de expresar las soluciones mediante las funciones elementales y mediante integrales de combinaciones de ellas. A dichas integrales se aplicaban entonces métodos de aproximación. Los problemas generales de existencia, comportamiento de soluciones, puntos singulares, etc., no llegaron a considerarse. En este periodo comenzó, pues, a desarrollarse un conjunto variado de técnicas particulares que, con el tiempo, llegó a adquirir una unidad y el carácter sistemático de una teoría.

NEWTON, en *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1686), resuelve una serie de ecuaciones diferenciales. La «segunda ley» de los *Principia* viene formulada así: «El cambio del movimiento (de la velocidad del movimiento) es proporcional a la fuerza motriz y tiene lugar en la dirección de la línea recta según la cual esta fuerza actúa.» Así, al resolver el problema del movimiento rectilíneo de un punto atraído hacia otro con una fuerza proporcional a la distancia, NEWTON resuelve la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$$

Al tratar el problema del movimiento rectilíneo de un punto movido por una fuerza constante, en un medio que ofrece una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad, NEWTON resuelve la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} = m - n\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

Por ninguna parte aparecen en los *Principia* las expresiones analíticas de dichas ecuaciones diferenciales o de sus soluciones.

La presentación es puramente geométrica y procede por construcciones sintéticas. La primera presentación puramente analítica de problemas de mecánica aparece publicada por EULER. Sin embargo, el *Methodus fluxionum et serierum infinitarum,* que fue escrito por NEWTON en 1671 y publicado en 1736, contiene ecuaciones diferenciales en forma explícita.

En el método de las fluxiones aparecen dos problemas fundamentales: *a)* «Dada una relación entre los fluentes (corresponden a funciones), hállese la relación que satisface las fluxiones (derivadas).» *b)* «Dada una ecuación, que contiene fluxiones, hállese una relación entre los fluentes.» Como se ve, *b)* es equivalente a la solución de

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0,$$

en el caso de una variable independiente.

El método general empleado por NEWTON fue el método de aproximaciones sucesivas, representando las soluciones mediante una serie de potencias de exponente positivo o negativo. Para NEWTON era natural el hacerlo así, teniendo en cuenta que la solución por cuadraturas conducía a menudo a funciones trascendentes no bien conocidas. NEWTON no se preocupó mucho por dar a sus soluciones una forma cerrada. Así, por ejemplo, propone la solución de

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{a-x}$$

como

$$y=x+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{2a^2}+\dots$$

En general, NEWTON presenta como solución aquella en la que el término constante de la serie es cero, haciendo notar que añadiendo constantes se obtienen otras soluciones.

NEWTON estudió también ecuaciones diferenciales ordinarias con tres y más variables. Era consciente de que tales ecuaciones permiten imponer condiciones complementarias a las variables. Así, en la ecuación

$$x\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}+2=0$$

se puede imponer, además, $x=y$ o $2y=a+x$, o bien $y^2=x$, etc.

El estudio de las ecuaciones diferenciales tomó otra dirección con LEIBNIZ (el primero en introducir el término «ecuación diferencial») y los hermanos JAKOB BERNOULLI (1654-1705) y JOHANN BERNOULLI (1667-1748). Los tres utilizaron también desarrollos en series de potencias para la resolución de ecuaciones. Pero, junto a este método, introdujeron también los fundamentos para la clasificación de las ecuaciones diferenciales y para los métodos generales para la reducción de ecuaciones diferenciales a cuadraturas.

Las ecuaciones más sencillas de reducir a cuadraturas son las de variables separables. Los primeros esfuerzos fueron dirigidos a reducir ecuaciones de primer orden a este tipo. Así, en 1693, LEIBNIZ consiguió reducir las ecuaciones homogéneas mediante la sustitución $y=ux$. Poco más tarde, él mismo logró reducir a variables separables la ecuación lineal de primer orden mediante la sustitución $y=uv$.

En 1696-1697, resolvieron LEIBNIZ y los BERNOULLI por este procedimiento la ecuación propuesta por JAKOB:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$$

mediante el cambio $y^{1-n}=u$, que la reduce a una ecuación lineal.

El factor integrante fue utilizado esporádicamente por JOHANN BERNOULLI (por primera vez en 1691-1692, pero el método no fue publicado hasta 1742). En particular demostró él, en 1700, que el orden de la ecuación lineal

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_ny=0$$

puede reducirse sucesivamente mediante la multiplicación por un factor x^k. Esta ecuación fue llamada más tarde de Euler, quien en 1740 dio con la sustitución, hoy utilizada comúnmente, $x=e^t$. La solución de BERNOULLI, sin embargo, no fue publicada hasta más tarde. En 1697, JOHANN BERNOULLI propuso y resolvió el problema de las trayectorias, para el cual también LEIBNIZ indicó un método de solución.

Por esta misma época también se obtuvieron las soluciones de algunas ecuaciones sencillas, como las que resultan en el problema de encontrar la curva de descenso más rápido, la braquistócrona.

Para ecuaciones de segundo orden del tipo $f(x, y', y'')=0$, o bien $g(y, y', y'')=0$, propuso JOHANN BERNOULLI el cambio $y'=p$, con el que resulta

$$f\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)=0, \quad \text{o bien} \quad g\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right)=0,$$

ecuaciones de primer orden. Pero este método fue publicado por él muchos años después de que RICCATI (1676-1754) lo hiciera en 1715.

Más tarde contribuyeron al desarrollo de la teoría los matemáticos más famosos del siglo XVIII. Particularmente importantes fueron los trabajos de EULER (1707-1783), CLAIRAUT (1713-1765), D'ALEMBERT (1717-1783) y LAGRANGE (1736-1813).

EULER utilizó la teoría de ecuaciones diferenciales en multitud de problemas de mecánica (mecánica celeste y balística, sobre todo), geometría y análisis, obteniendo, a partir de 1732, toda una serie de magníficos resultados. Con EULER, la teoría de ecuaciones diferenciales se transforma en una disciplina independiente, con sus dos grandes ramas, ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales.

En un trabajo publicado en 1743 presentó EULER el método clásico de solución de la ecuación diferencial ordinaria lineal con coeficientes constantes mediante la sustitución $y=e^{kx}$, que ya había utilizado en otros trabajos, en 1732. Para el caso de raíces múltiples del polinomio asociado propuso $y=ue^{kx}$. En el caso de un par de raíces complejas conjugadas $\alpha \pm \beta i$, la sustitución $y=ue^{x}$ le condujo a la ecuación

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\beta^2 u=0$$

cuya solución trigonométrica le era conocida. Precisamente el estudio de esta ecuación le condujo, en 1740, al conocimiento de una solución particular para $\beta=1$ en las dos formas diferentes, $2\cos x$ y $e^{xi}+e^{-xi}$. Por medio del desarrollo en serie de potencias llegó a la convicción de que ambas coincidían. Esto le condujo a la fórmula

$$e^{\alpha i}=\cos\alpha+i\operatorname{sen}\alpha,$$

que hoy llamamos de EULER. También en el mismo trabajo demostró EULER que la solución general de la ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes de orden n es una combinación lineal de n de sus ecuaciones particulares, introduciendo él por vez primera los términos «solución particular» y «solución general». Simultáneamente, DANIEL BERNOULLI (1700-1782) resolvió también la ecuación lineal con coeficientes constantes. Su trabajo fue publicado en 1751. También D'ALEMBERT, en 1748, dio un método para obtener la solución en el caso de una raíz múltiple. Por ejemplo, en el caso de una raíz doble a_0 se toma

$$\lim_{a\to a_0}\frac{e^{ax}-e^{a_0x}}{a-a_0}\;[=xe^{a_0x}]$$

Diez años después (1753), publicó EULER un método para la solución de ecuaciones lineales no homogéneas de coeficientes constantes, mediante la reducción sucesiva del orden. La idea del método la había indicado ya en 1741. Sea, por ejemplo, la ecuación

$$ay+b\frac{dy}{dx}+c\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$$

Multiplicamos por e^{mx} e integramos a continuación, poniendo:

$$e^{mx}\left(a_1y+b_1\frac{dy}{dx}\right)=\int^x f(s)e^{ms}\,ds$$

Derivando ambos miembros resulta:

$$e^{mx}ma_1y+e^{mx}\frac{dy}{dx}[mb_1+a_1]+e^{mx}b_1\frac{d^2y}{dx^2}=e^{mx}f(x),$$

de donde resultan a_1, b_1, m. Así, se obtiene ahora:

$$a_1y+b_1\frac{dy}{dx}=e^{-mx}\int^x f(s)e^{ms}\,ds$$

En 1750 publicó D'ALEMBERT otro método para resolver la ecuación no homogénea, observando luego que la solución general es la suma de una solución particular de la no homogénea y la solución general de la homogénea. El método de variación de las constantes no fue presentado en forma sistemática hasta 1777, cuando LAGRANGE lo publicó y lo aplicó a las ecuaciones no homogéneas. Sin embargo, dicho método había sido utilizado ya por D. BERNOULLI (1740) y por EULER (1741).

LAGRANGE mostró también cómo el orden de una ecuación lineal homogénea puede ser rebajado r unidades si se conocen r soluciones particulares.

También en el siglo XVIII se investigó toda una serie de ecuaciones diferenciales especiales, por su aparición en diversos problemas de física matemática. Así, en conexión con el problema de las oscilaciones de una membrana circular tensa, EULER arribó a la ecuación

$$\left(\alpha^2-\frac{\beta^2}{r^2}\right)u+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\frac{d^2u}{dr^2}=0$$

que luego fue denominada ecuación de Bessel. EULER (1766-1784) representó la solución de esta ecuación en forma de una serie infinita, que se diferencia en un factor constante de la función cilíndrica $J_\beta(\alpha r)$. Ya en 1738 D. BERNOULLI había estudiado el caso especial $\beta=0$ al considerar las oscilaciones de una cadena pesada.

En 1778, EULER señaló, en un trabajo, los fundamentos para el estudio de la ecuación diferencial de la serie hipergeométrica. Dicho trabajo no se publicó hasta 1801. En 1785 LEGENDRE (1752-1833), investigando la atracción de un elipsoide sobre un punto exterior, introdujo la ecuación que lleva su nombre, así como sus soluciones, los polinomios de Legendre.

La ecuación de Riccati fue extensamente investigada. En 1722, el propio RICCATI había considerado casos especiales. Para la ecuación

$$b\frac{dy}{dx}=y^2+ax^n$$

D. BERNOULLI y RICCATI habían señalado simultáneamente, en 1724, que si

$$n=-\frac{4k}{2k\pm1},\quad k \text{ entero},\qquad \text{o bien}\qquad n=-2,$$

entonces la ecuación es de variables separables. La ecuación general de Riccati fue estudiada por EULER. Este descubrió que

$$y=u+\frac{1}{z},$$

siendo u una solución particular, conduce a una ecuación lineal. Si se conocen dos soluciones particulares entonces la ecuación es soluble mediante una cuadratura. El teorema sobre el valor constante de la razón doble de cuatro soluciones particulares fue probado mucho más tarde, en 1877, por E. PICARD.

CLAIRAUT y EULER dedicaron considerable esfuerzo al estudio de las condiciones de integrabilidad de expresiones diferenciales. Ya en 1721, NICOLAUS

BERNOULLI (1687-1759) había descubierto el hecho de que el orden de derivación con respecto a varias variables no altera el resultado, lo cual permitió realizar nuevos avances en la teoría del factor integrante. CLAIRAUT, en 1741, formuló la condición de integrabilidad de $Mdx+Ndy$. En 1742 formuló las condiciones de integrabilidad de $Mdx+Ndy+Pdz$ presentando un método para la integración de diferenciales exactas. También EULER dio, en 1770, un método para la integración de la ecuación diferencial exacta

$$Mdx+Ndy+Pdz=0$$

La ecuación $Mdx+Ndy+Pdz=0$, cuando las condiciones de integrabilidad no se cumplen, fue considerada como carente de sentido, quedando en la oscuridad las observaciones importantes que NEWTON había escrito a tal efecto.

El método del factor integrante fue considerablemente profundizado por EULER en 1768 y 1769, quien indicó varias clases de ecuaciones de primer orden que poseen un factor integrante. En 1770 aplicó EULER el método a ecuaciones de orden superior, utilizando una condición obtenida por él en 1766 mediante el cálculo de variaciones, para que

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

sea la derivada de otra función que contiene derivadas de y hasta el orden $n-1$. Esta condición

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}+\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''}+\dots+(-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0$$

fue obtenida también por N. C. DE CONDORCET (1743-1794).

Una de las explicaciones más importantes de la teoría del factor integrante fue el descubrimiento por LAGRANGE, en 1766, de la ecuación adjunta y del hecho de que la ecuación original es adjunta de ésta.

El estudio de las soluciones singulares comienza en 1715 con B. TAYLOR (1685-1731). Al considerar la ecuación

$$4x^3-4x^2=(1+z^2)^2(dx/dz)^2$$

introdujo $x=v/y^2$, $v=1+z^2$, obteniendo

$$y^2-2zyy'+v(y')^2=1 \qquad [*]$$

Derivando esta última ecuación, resulta:

$$2y''(vy'-zy)=0$$

Poniendo $vy'-zy=0$ e introduciendo $y'=zy/v$ en [*] se obtiene $y^2=v$, $x=1$. TAYLOR calificó esta solución como «una cierta solución singular del problema» sin considerarla más detenidamente. Veinte años más tarde, CLAIRAUT encontró, de nuevo por derivación, la solución singular y general de la ecuación

$$y=(x+1)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

y D'ALEMBERT señala el procedimiento general para obtener las de

$$y=x\psi\left(\frac{dy}{dx}\right)+\varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

También EULER dio con toda una serie de ecuaciones diferenciales con soluciones singulares (1736 y siguientes). En el año 1769 señaló lo siguiente: Si una ecuación admite el factor integrante $\mu(x, y)$, entonces la expresión $1/\mu(x, y)=0$ puede proporcionar una solución singular (este hecho había sido observado ya por CONDORCET). En 1768 publicó EULER criterios que permiten diferenciar soluciones singulares de las soluciones particulares de una colección de ecuaciones, comenzando con el caso más sencillo: $dy=dx/Q(x)$. Tales criterios se fundaban en el estudio de las integrales impropias correspondientes. LAGRANGE, en 1776, llevó a cabo una investigación más profunda del carácter de la solución singular, explicando cómo se obtiene, o bien a partir de la ecuación misma, o bien de la solución general por el método de variación de constantes. LAGRANGE presentó también una interpretación geométrica de la solución singular como envolvente de la familia de curvas integrales particulares. Los lugares geométricos de los puntos singulares, así como los casos en que la solución singular es al mismo tiempo solución particular, no fueron considerados por LAGRANGE. Algunos resultados sobre soluciones singulares de ecuaciones de orden superior y la construcción de ecuaciones con soluciones singulares prefijadas se deben también a LAGRANGE (1781, 1801).

El tratamiento de sistemas de ecuaciones ordinarias fue motivado originariamente por el estudio de las ecuaciones fundamentales de la dinámica. D'ALEMBERT llevó a cabo el estudio de sistemas de primero y segundo orden, en 1743 y 1750, aplicando el método de coeficientes indeterminados a los sistemas lineales con coeficientes constantes. D'ALEMBERT eligió los factores de modo que una combinación lineal de las ecuaciones del sistema tomase la forma

$$du+kdt=0,$$

o bien,

$$d^2u+kudt^2=0$$

EULER, en un trabajo de 1750 sobre oscilaciones en un medio elástico, desarrolló otro procedimiento para la integración de sistemas lineales de segundo orden con coeficientes constantes, representando la solución buscada como combinación lineal de funciones trigonométricas. Más adelante, también LAGRANGE y LEXELL se ocuparon del estudio de sistemas.

Los problemas de mecánica celeste, en particular el estudio de los movimientos lunares, motivaron el desarrollo de procedimientos de aproximación para resolver ecuaciones diferenciales. El método de Euler, introducido en 1768, tuvo particular importancia desde el comienzo. Utilizando la ecuación misma, $y'=f(x, y)$, EULER obtenía $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, ... de la solución $y=y(x)$, $y_0=y(x_0)$, y luego $y(x_0+h)$ por medio del desarrollo de Taylor. Del mismo modo, $y(x_0+2h)$, $y(x_0+3h)$, ... Este método fue después aplicado para proporcionar un teorema de existencia. Como era general en el siglo XVIII, no se llevó a cabo estudio alguno sobre la convergencia del proceso. EULER observó que si h es muy pequeña, las series obtenidas en casos particulares convergen rápidamente. Extendió el método a ecuaciones de segundo orden en 1769. Para llegar al mismo objetivo también se utilizaron en gran medida desarrollos en serie. LAGRANGE, en cambio, utilizó, en 1779, desarrollos en fracciones continuas.

Los éxitos de los matemáticos del siglo XVIII en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales fueron de menos importancia, pero en este periodo se echaron los cimientos para los desarrollos ulteriores. La consideración de ecuaciones en derivadas parciales fue motivada en primer lugar por problemas de Física. Más adelante entraron en escena problemas de Geometría diferencial. El trabajo en este terreno comenzó propiamente con el estudio de las ecuaciones de segundo orden.

El punto de partida fue uno de los problemas con más resonancias en el siglo XVIII, el de la cuerda vibrante. Ya GALILEO se había interesado por este problema, pero el primer tratamiento matemático hacia su solución se debe a B. TAYLOR, en 1713-1715.

TAYLOR estableció la existencia de una proporcionalidad inversa entre la aceleración en un punto de la cuerda que vibra transversalmente y el radio de curvatura de la cuerda en el mismo punto. Esto, traducido a la terminología moderna, se puede expresar mediante la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

de las vibraciones pequeñas.

TAYLOR, mediante algunas condiciones muy severas, redujo el problema a dos ecuaciones lineales ordinarias de segundo orden con coeficientes constantes. Dedujo que una cuerda fijada a ambos extremos tiene siempre forma sinusoidal. La ecuación de la cuerda vibrante fue escrita por D'ALEMBERT en 1749 en la forma moderna

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

El fue el primero en presentar la solución en la forma

$$y=f(x+t)+g(x-t),$$

siendo f y g dos funciones arbitrarias.

Su tratamiento de la ecuación no era completo, quedando fuera de su consideración las condiciones iniciales que determinan una solución. Consideró solamente las condiciones $y(0, t)=0$, $y(l, t)=0$ para todo t. Estas le permitían poner

$$y=f(t+x)-f(t-x), \qquad f(z+2l)=f(z)$$

EULER observó, al año siguiente, que la vibración de la cuerda queda completamente determinada si además de las condiciones sobre los extremos fijos se conocen también las condiciones iniciales, posición y velocidad de cada punto de la cuerda en el tiempo $t=0$. Con esto quedó esencialmente acabado el método de las características de D'ALEMBERT. También EULER proporcionó un procedimiento para representar geométricamente la posición de la cuerda en cada momento. Con este estudio de la cuerda vibrante se originó la famosa controversia, de gran importancia por sus consecuencias, sobre la naturaleza de las funciones arbitrarias que aparecen en las soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales.

EULER dio por supuesto que el análisis ordinario puede restringirse a la consideración de funciones «continuas». El concepto de continuidad de EULER tenía otro significado que el moderno, introducido por CAUCHY y BOLZANO en el siglo XIX. EULER consideraba «continua» aquella función que viene definida en todo su dominio de definición mediante una única expresión «analítica», quedando el carácter de «analiticidad» un poco ambiguo. Para EULER, las dos ramas de la hipérbola $xy=1$ representan una curva continua, mientras que la función

$$y=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x\leqslant 0 \end{cases}$$

es discontinua.

La continuidad estribaba para EULER en que por medio de una única expresión «todas las partes de la curva están enlazadas unas con otras íntimamente, de tal modo que no se pueden introducir cambios en ninguna de ellas sin alterar las otras». Así, EULER consideraba como continuas las funciones que poseían la propiedad de las funciones analíticas en sentido moderno de estar determinadas por el conocimiento de una porción pequeña de ellas. Las funciones continuas en sentido moderno eran denominadas por EULER «conexas». Una curva «conexa» trazada al azar era discontinua para EULER, puesto que, según él, era imposible expresarla mediante una única fórmula. Como para EULER el análisis ordinario tenía por objeto el estudio de las funciones «continuas», resultaba que el campo de las ecuaciones en derivadas parciales constituía un dominio enteramente nuevo de las matemáticas, puesto que aquí era necesario considerar funciones discontinuas, como en las posibles condiciones iniciales de las cuerdas vibrantes. Contra tal conclusión se levantó D'ALEMBERT alegando que las funciones que intervienen en la integración de ecuaciones en derivadas parciales han de venir dadas analíticamente. Casi al mismo tiempo obtuvo D. BERNOULLI, en 1755, una nueva solución del problema de la cuerda vibrante. En un principio se apoyó primariamente en consideraciones físicas, estableciendo que el tono producido por una cuerda vibrante está compuesto por el tono fundamental y toda una colección de tonos secundarios. Con esto concluyó que la vibración de una cuerda consiste en las oscilaciones diversas de sus partes que se componen unas con otras en los nodos. La forma de la cuerda en cada momento se obtiene por superposición de las curvas sinusoidales correspondientes a los distintos tonos, cuyos periódos son inversamente proporcionales a los números naturales. Así, en un instante determinado se obtiene

$$y = \alpha \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + \beta \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} + \gamma \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} + \dots$$

Así llegó D. BERNOULLI al principio fundamental de la física matemática de superposición de oscilaciones lineales.

Para un caso particular, EULER había obtenido la solución de la ecuación de la cuerda ya antes que BERNOULLI en forma de una serie trigonométrica. Sin embargo, manifestó sus dudas sobre la posible generalidad de tal solución, ya que, desde su punto de vista, una función prefijada algebraica cualquiera, que no es necesariamente impar ni periódica, no podría ser representada mediante una suma de curvas sinusoidales. D. BERNOULLI se manifestó en contra, expresando su convencimiento de que mediante una elección adecuada de los coeficientes α, β, γ, ..., toda curva puede ser representada mediante una serie trigonométrica. Subrayó que su teoría «abre la posibilidad de reducir movimientos existentes en la Naturaleza, que no parecen estar sometidos a ley alguna, a movimientos simples isócronos, de los que la Naturaleza hace uso en la mayor parte de sus procesos». Más tarde, también otros matemáticos, como LAGRANGE y LAPLACE (1749-1827), tomaron parte en la discusión. En 1781, la Academia de Ciencias de Petersburgo estableció un certamen sobre este problema y concedió el premio a L. ARBOGAST (1759-1803), que se había colocado en la controversia del lado de EULER y en contra de D'ALEMBERT.

Las nociones poco claras sobre el concepto de función, continuidad, analiticidad, etc., hicieron imposible a los matemáticos de aquel tiempo encontrar una solución exacta de su problema, así como de la cuestión de caracterizar la clase de funciones representables mediante una serie trigonométrica. Esto llegaría a ser un problema fundamental en la investigación de muchos matemáticos del siglo XIX.

Las ecuaciones en derivadas parciales aparecieron también relacionadas con diversos problemas físicos, hidrodinámicos (D'ALEMBERT, quien en 1752 aplicó a este campo la teoría de variables complejas, y especialmente EULER, en 1757-1758), de la membrana vibrante (EULER, 1766), de la teoría del potencial (LAPLACE, 1789), etc. Como resultado se llegaron a conocer diversos tipos importantes de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden. Con todo, se estaba entonces bien lejos de la formulación de los problemas generales de la teoría de estas ecuaciones.

Un avance importante en esta dirección constituyó la reducción efectuada por EULER en 1770 de las ecuaciones lineales de segundo orden a ciertas formas canónicas por medio de cambios de variable. Así, por ejemplo, por medio de la sustitución $t = x + ay$, $u = x - ay$, la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

pasa a la forma

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t \partial u} = 0$$

obteniéndose de aquí la integral general

$$z=f(t)+\psi(u)=f(x+ay)+\psi(x-ay)$$

Para la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}+cz=0$$

propuso LAPLACE (1777, 1782) el método llamado de las cascadas, que hace posible, a veces, obtener la integral general por medio de cuadraturas.

Las ecuaciones en derivadas parciales comenzaron a aparecer repetidamente en Geometría. En trabajos de EULER, en 1740, ya empiezan a aparecer ecuaciones sencillas del tipo $f(p, q)=0$. D'ALEMBERT consideró, en 1768, ecuaciones lineales en z, p, q con coeficientes constantes. La ecuación lineal general

$$Pp+Qq=R$$

fue estudiada casi simultáneamente por LAPLACE y LAGRANGE en 1776. LAGRANGE señaló la reducción de la ecuación al sistema

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$$

Unos años después, en 1781 y 1787, el mismo LAGRANGE extendió su procedimiento a ecuaciones lineales con un número arbitrario de variables. En este contexto vino a hacer notar que el arte de resolver una ecuación en derivadas parciales consiste en reducirla a ecuaciones diferenciales ordinarias.

EULER y otros se ocuparon también de la solución de ecuaciones no lineales de primer orden. EULER señaló, en 1770, que una ecuación de tres variables puede reducirse a una lineal de cuatro. Pero los primeros en resolver una ecuación no lineal de segundo orden con dos variables independientes fueron LAGRANGE y P. CHARPIT (en 1784, aunque su trabajo no se publicó hasta 1814). Su método es el conocido como método de Lagrange-Charpit. En el siglo XVIII se hicieron ensayos para extender el método a más de dos variables independientes, pero sin éxito.

Entre 1770 y 1780 LAGRANGE estableció también relaciones entre las diversas expresiones de las soluciones de las ecuaciones de primer orden e introdujo la terminología moderna. La solución que depende de dos constantes arbitrarias

$$z=\psi(x, y, a, b)$$

la llamó completa. Por aplicación del método de variación de las constantes utilizado por él en la solución de las ecuaciones lineales ordinarias homogéneas obtuvo la integral general y una integral singular. LAGRANGE puso $b=\psi(a)$, siendo ψ arbitraria y eliminando el parámetro a entre las ecuaciones

$$z=\psi(x, y, a, \psi(a)), \qquad \frac{\partial z}{\partial a}=0$$

obtuvo la solución general. Eliminando luego los dos parámetros entre

$$z=\psi(x, y, a, b), \quad \frac{\partial z}{\partial a}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial b}=0$$

obtuvo la solución singular. También fue LAGRANGE quien, en vista de que la solución no siempre requiere cuadraturas, introdujo el término «solución» en lugar de «integral».

Hemos visto que, en algunos casos, los resultados analíticos de la teoría de ecuaciones diferenciales encontraron una interpretación geométrica. Así, por ejemplo, la teoría de las soluciones singulares fue relacionada por LAGRANGE con la teoría de envolventes. En conjunto, sin embargo, la teoría de ecuaciones fue interpretada por EULER, D'ALEMBERT y LAGRANGE sobre una base algebraica y analítica. La teoría geométrica fue desarrollada sobre todo en los trabajos de G. MONGE (1746-1818) a partir de 1778. En una serie de artículos, los más importantes de entre ellos escritos entre 1795 y 1807, investigó MONGE la conexión de la teoría de ecuaciones con la teoría de superficies y de curvas alabeadas. El proceso de integración de ecuaciones recibió así una interpretación geométrica extraordinariamente intuitiva. En muchos casos, la búsqueda de integrales se apoyó sobre procesos geométricos para engendrar superficies. MONGE consideró, por ejemplo, superficies cilíndricas, cuyas generatrices son paralelas a las rectas

$$\begin{cases} x=az \\ y=bz \end{cases}$$

Escribió la condición de paralelismo del plano tangente a estas rectas:

$$z-z_1=p(x-x_1)+q(y-y_1)$$

y encontró la ecuación diferencial de las superficies cilíndricas

$$ap+bq=1$$

La integral general de esta ecuación la obtuvo MONGE del siguiente modo. Las ecuaciones de las generatrices de la superficie cilíndrica han de ser de la forma

$$\begin{cases} x=az+\alpha \\ y=bz+\beta \end{cases}$$

siendo α y β constantes para los puntos de una misma generatriz. y variables al pasar de una generatriz a otra. Del hecho de que α y β son simultáneamente constantes o variables concluyó MONGE que deben guardar una cierta relación de dependencia, $\beta=\psi(\alpha)$. Por tanto, la ecuación definitiva de las superficies cilíndricas ha de ser:

$$y-bz=\psi(x-az)$$

Mediante condiciones adicionales, por ejemplo prefijando las curvas directrices, puede determinarse la forma concreta de las funciones, lo que proporciona la ecuación de la superficie cilíndrica que pasa por una curva dada.

La significación geométrica de la ecuación

$$P\cdot dx+Q\cdot dy+R\cdot dz=0 \qquad [**]$$

permitió a MONGE, en 1787, clarificar un problema que, como hemos mencionado anteriormente, permaneció abierto por largo tiempo, a pesar de que ya NEWTON había indicado la orientación correcta. En caso de integrabilidad, la relación [**] determina, por medio de una sola relación, una familia de superficies $f(x, y, z)=c$. Una curva arbitraria que esté sobre una superficie de la familia es ortogonal a cualquier curva de la familia determinada por

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad [***]$$

que la interseque. En general, si la condición de integrabilidad no se satisface, no existe ninguna familia de superficies ortogonal a las curvas del sistema [***]. Aun en este caso, como MONGE puso de manifiesto, la ecuación [**] tiene un sentido geométrico. Imponiendo una dependencia adicional $\psi(x, y, z)=0$ entre las variables [**] puede ser reducida a una ecuación diferencial ordinaria de dos variables. Esta determina entonces una familia uniparamétrica de curvas que yace sobre la superficie $\psi(x, y, z)=0$ y que es ortogonal a las curvas del sistema [***]. La ecuación [**] se llamó después de Pfaff, mientras que S. LIE propuso llamar a la ecuación de la forma

$$F(x, y, z, dx, dy, dz)=0$$

ecuación de Monge, quien había investigado casos especiales de este tipo de ecuaciones.

A MONGE también pertenece la siguiente representación intuitiva de la teoría general de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden. La integral completa

$$f(x, y, z, a, b)=0$$

representa una familia biparamétrica de curvas. Las superficies que pertenecen a una misma familia uniparamétrica que se origina cuando se pone $b=\psi(a)$ las llamó MONGE superficies involutas. Las superficies determinadas por las ecuaciones

$$g(x, y, z, a)=f(x, y, z, a, \psi(a))=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial a}+\psi'(a)\frac{\partial f}{\partial b}=0$$

las envolventes de la familia uniparamétrica constituyen la imagen geométrica de la integral general. De fundamental importancia fue la introducción, propuesta por MONGE, de las curvas de contacto de las envolventes con las involutas para un valor fijo de a. MONGE las llamó características, puesto que determinan las propiedades características de las envolventes de las superficies integrales engendradas por ellas. Las curvas envolventes de la familia de características, determinadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} g=0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial a}=0 \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial a^2}=0 \end{cases}$$

las llamó MONGE bordes de retroceso de la envolvente, puesto que los puntos de esta curva son, en general, puntos de retroceso de la curva en la cual la superficie envolvente corta un plano, que atraviesa su borde sin contener la tangente. En forma vaga MONGE extendió también el estudio de características a ecuaciones de orden superior que aparecieron en el estudio de diversos tipos de superficies. MONGE mismo fue quien introdujo el simbolismo de abreviación usual para las derivadas parciales.

Hacia fines del siglo XVIII la teoría de ecuaciones diferenciales llegó a ser una de las disciplinas matemáticas más importantes, convirtiéndose en instrumento principal en el estudio científico. Fueron estudiados en detalle los diversos tipos de ecuaciones ordinarias integrables por cuadraturas, se elaboraron los primeros procesos de aproximación, se introdujeron toda una serie de conceptos fundamentales tales como el concepto de solución singular y general, y las nociones de integral completa, general y particular de una ecuación en derivadas parciales.

También se construyeron los cimientos para una teoría geométrica completa de las ecuaciones en derivadas parciales. Se estudiaron ciertos tipos de ecuaciones de orden superior. La teoría de ecuaciones se relacionó con el cálculo de variaciones y con la geometría diferencial. También se comenzó a conocer sus relaciones con las funciones de una variable compleja, con las series trigonométricas, con las funciones especiales y con las integrales elípticas. La mayor parte de los resultados hallados hasta la penúltima década del siglo XVIII fueron expuestos magistralmente en la clásica obra de EULER *Institutiones calculi integralis*, en cuatro tomos, publicados los tres primeros entre 1768 y 1770, y el cuarto, en 1794. Esta obra fue como un manual para todos los matemáticos y aún no ha perdido interés. En la primera mitad del siglo XIX fueron introducidas nuevas ideas, parte en relación con problemas de física matemática, parte originadas en la transformación general que experimentó el análisis matemático.

1.3. LA PRIMERA MITAD DEL SIGLO XIX

El primer cuarto del siglo XIX fue, en general, un periodo de transformación en matemáticas. Los fundamentos del análisis en especial experimentaron una renovación drástica. Los conceptos de límite, infinitésimo, continuidad, diferencial, etc., recibieron una formulación exacta en términos aritméticos. La integral definida, que en el siglo XVIII era interpretada en general como un valor particular de una función primitiva, se definió como límite de una suma. Se comenzó a considerar la convergencia de las series infinitas que se introducían, estableciéndose asimismo criterios de convergencia, etc. Se empezó a introducir las restricciones necesarias en las fórmulas y teoremas que se proponían. El concepto de *función* tomó su forma moderna, especialmente con P. LEJEUNE-DIRICHLET (1805-1859), en 1837.

Esta transformación, que tuvo como responsables principales a A. CAUCHY (1789-1857), C. F. GAUSS (1777-1855) y B. BOLZANO (1781-1848), comenzó a convertir el análisis matemático, de una teoría de funciones o clases de funciones particulares, como había sido hasta entonces, en una teoría más abstracta y general. Esto permitió estudiar con más perspectiva y profundidad las dependencias funcionales especiales. Aparecieron en primer plano los problemas de existencia de los objetos introducidos por medio de procesos infinitos; límites de sucesiones, integral definida de una función continua, función primitiva, diversas integrales impropias, ceros de una función continua, etc. Allí donde los matemáticos del siglo XVIII se apoyaban en la intuición física o geométrica (integral como superficie, derivada como velocidad o como inclinación de la tangente, etc.), o bien en la misma marcha de los procesos de cálculo («obvias aproximaciones» a ciertos números) vieron los matemáticos del siglo XIX problemas fundamentales de existencia.

El desarrollo del análisis en la dirección de la teoría de funciones de variable real, en particular la nueva definición de la integral y la teoría de la convergencia de series, prepararon el camino para la construcción de una teoría general de función de una variable compleja, cuyos fundamentos fueron puestos por CAUCHY y GAUSS y cuyo desarrollo se debe sobre todo a B. RIEMANN (1826-1866) y a K. WEIERTRASS (1815-1897). También en otros campos de las matemáticas se operaron cambios igualmente profundos. Así, en álgebra se resolvieron, por vez primera, problemas generales relacionados con la representación de las raíces de ecuaciones mediante radicales. P. RUFFINI (1765-1822) y N. H. ABEL (1802-1829) demostraron la imposibilidad de una solución en forma de radicales en ecuaciones arbitrarias de grado superior al cuarto. Poco más tarde, E. GALOIS (1811-1832) estableció condiciones bajo las cuales ecuaciones de un grado dado pueden ser resueltas por radicales, edificando en conexión con este problema la teoría de grupos que algo más tarde habría de penetrar todo el cuerpo de las matemáticas. P. WANTZELL (1814-1848) demostró que el antiguo problema de la trisección del ángulo por medio de la regla y el compás, así como el de la duplicación del cubo, son insolubles. Una transformación revolucionaria fue provocada por N. I. LOBATCHEVSKI (1792-1856) con el descubrimiento de la geometría no euclídea (1826, publicado en 1829). Algo más tarde, en 1832, J. BOLYAI (1802-1860) publicó resultados análogos. Finalmente, RIEMANN, en 1854, comenzó con las consideraciones que dieron lugar a la geometría «riemanniana».

Las nuevas ideas y métodos en análisis ejercieron un impresionante influjo sobre la teoría de ecuaciones diferenciales. También aquí se suscitó un problema de existencia, el del problema general de existencia de soluciones. La formulación exacta y la primera solución del problema para una clase amplia de casos se debe a CAUCHY.

CAUCHY hizo notar que el papel que desempeñan las integrales que aparecen en Física y Geometría (entre éstas las integrales de ecuaciones diferenciales), muestra que las constantes y las funciones arbitrarias que intervienen en ellas han de ser siempre definidas. Los matemáticos del siglo XVIII habían partido de la creencia infundada de que siempre existían soluciones generales. Empezaban por buscarlas, siendo determinadas al final las constantes y funciones arbtirarias. CAUCHY consideró necesario invertir el proceso y tratar de hallar primero la demostración de la existencia de soluciones particulares, a fin de que la determinación de las constantes o funciones no transcurriese separadamente de la investigación de las integrales. «De esta forma—escribió CAUCHY—, el problema queda completamente determinado y esta circunstancia permite no sólo simplificar soluciones conocidas, sino también atacar nuevos problemas.» De esta forma se originaron los «problemas de Cauchy».

En los años 1820-1830, CAUCHY presentó en sus lecciones una demostración de la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial $y'=f(x, y)$, con las condiciones iniciales $y_0=y(x_0)$, presuponiendo la continuidad de f y $\partial f/\partial y$. En 1835 se publicó un resumen del método. CAUCHY procedía mediante el método de Euler de integración aproximada. La curva integral que se busca es aproximada primero por una línea poligonal cuyos vértices en el intervalo (x_0, x) tienen abscisas $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n=x$, mientras que las ordenadas son

$$y_1=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)$$
$$y_2=y_1+f(x_1, y_1)(x_2-x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Así,

$$y_n=y_0+f(x_0, y_0)(x_1-x_0)+\ldots+f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$

La analogía entre esta suma y la suma que viene a aproximar la integral de una función es obvia. La demostración de existencia se reducía a la demostración de la existencia de una función límite

$$y=\lim_{n\to\infty} y_n,$$

la cual satisface tanto la ecuación diferencial como la condición inicial. Esta demostración fue presentada en forma más detallada, en 1844, por F. MOIGNO (1804-1884), discípulo de CAUCHY, en las notas de sus lecciones. Más adelante, R. LIPSCHITZ (1832-1903) la perfeccionó sustituyendo, en 1876, la continuidad de $\partial f/\partial y$ por la condición que lleva su nombre. Más tarde, G. PEANO (1858-1932) demostró la existencia de al menos una solución de la ecuación

$$y' = f(x, y), \qquad y_0 = y(x_0),$$

bajo la condición de continuidad de $f(x, y)$. Teoremas de existencia con condiciones más débiles fueron demostradas más adelante por O. PERRON (1915).

También a CAUCHY se debe la idea fundamental del método de aproximaciones sucesivas, que en forma más moderna y general fue presentado en 1890 por E. PICARD (1856-1941). Este consiste en la demostración de la convergencia de las soluciones aproximadas determinadas por las fórmulas

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt, \ldots, y_k = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1})\, dt$$

CAUCHY extendió su teorema de existencia a ecuaciones de orden superior, reduciendo éstas a sistemas de ecuaciones de primer orden. Finalmente, dio también un teorema de existencia para la solución de una ecuación diferencial ordinaria y de un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en el campo complejo. Este teorema se basa en la representación de la solución en forma de serie de potencias y en la aplicación de la función mayorante.

El teorema de existencia de Cauchy en el campo complejo permaneció bastante desconocido. K. WEIERTRASS dio una nueva demostración de la existencia de solución del problema de Cauchy para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El problema de existencia de solución de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales fue investigado a fondo por S. KOWALESKAYA (1850-1891), una discípula de WEIERTRASS, que demostró, en 1874, el teorema fundamental de existencia de una única solución analítica de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en forma normal. También S. KOWALESKAYA presentó un ejemplo, sorprendente para sus contemporáneos, de una ecuación que no cumple las hipótesis del teorema y no posee solución analítica alguna.

El problema de Cauchy para clases generales de ecuaciones en derivadas parciales ha ocupado a muchos matemáticos eminentes hasta nuestros días y a este problema se le ha dedicado una literatura muy extensa. Entre los trabajos más importantes se pueden citar los de E. PICARD, en 1890, sobre algunas ecuaciones lineales de tipo elíptico, y los de S. N. BERNSTEIN (1904-1908), sobre la existencia y analiticidad de soluciones de una amplia clase de ecuaciones no lineales de tipo elíptico. Estas investigaciones fueron continuadas después de 1917 por J. LERAY, J. SCHAUDER e I. G. PETROVSKI.

Los teoremas de existencia tuvieron importancia, no sólo desde un punto de vista puramente teórico, en cuanto que justificaron la aplicación de los métodos de la teoría de ecuaciones diferenciales a problemas de física. Los métodos originados en las demostraciones de estos teoremas hicieron posible aproximar la solución con el grado deseado de exactitud, así como medir el error de la aproximación. De este modo, tales teoremas sirvieron de fundamento para los diversos procesos de integración numérica de ecuaciones diferenciales que fueron elaborados a todo lo largo del siglo XIX.

Las herramientas más perfectas del análisis moderno hicieron posible también el desarrollo de una teoría de soluciones singulares. MOIGNO, en **1844**, introdujo un ejemplo dado por CAUCHY de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, cuya solución singular es al mismo tiempo solución particular. A. COURNOT (1801-1877) demostró, en 1841, que la curva del discriminante de una ecuación diferencial no tiene que ser necesariamente una envolvente de la familia de las curvas integrales, sino que puede ser el lugar de sus puntos de retroceso. La teoría moderna de las soluciones singulares fue desarrollada más en particular en diferentes trabajos de G. DARBOUX (1842-1917) en 1870, A. CAYLEY (1821-1895) en 1873, E. PICARD en 1886, G. CHRYSTAL (1851-1911) en 1896.

Otra revolución importante se operó en la primera mitad del siglo XIX en el problema relativo a la integrabilidad de ecuaciones diferenciales mediante cuadraturas. El número del tipo de ecuaciones así solubles se aumentó poco. Por ello se propuso la cuestión, análogamente a lo que había sucedido en álgebra con el problema de la solución de ecuaciones por radicales, sobre la integrabilidad de ecuaciones diferenciales por cuadraturas. Aunque aquí no se obtuvieron resultados tan importantes como los de ABEL y GALOIS en álgebra, se llegó a los primeros resultados. J. LIOUVILLE (1809-1882) demostró, en 1841, apoyándose en cierta clasificación de los números trascendentes, que la ecuación de Riccati sólo es integrable por cuadraturas en los casos señalados ya por D. BERNOULLI. Las investigaciones clásicas de ABEL, LIOUVILLE y CHEBICHEV (1821-1894) sobre la integrabilidad en forma cerrada de diversas funciones irracionales pertenecen también a este mismo dominio de ideas.

En 1837, J. STURM (1803-1855), en conexión con estudios sobre conducción del calor, introdujo el concepto de solución oscilante y demostró el teorema de separación de los ceros de dos soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal homogénea de segundo orden. Los trabajos de STURM y LIOUVILLE pusieron el fundamento para los estudios del problema de contorno que lleva sus nombres y consiste en tratar de resolver la ecuación

$$\frac{d(Ky')}{dx}+Gy=0,$$

donde K y G dependen de x y de un parámetro λ, siendo dados en dos puntos del eje x los valores de ciertas combinaciones lineales de $y(x)$ y de $y'(x)$. Con la solución de este problema de contorno está relacionada la solución de muchas ecuaciones de Física matemática, la teoría de ecuaciones integrales y la posibilidad de desarrollo de funciones en series de sistemas fundamentales de autofunciones.

La formulación exacta de independencia lineal de un sistema de funciones proviene también del siglo XIX. Una condición para la independencia lineal fue dada en 1857 por L. HESSE (1811-1874) y por E. CHRISTOFFEL (1829-1900), en 1858. Esta condición se puede expresar mediante el determinante llamado wronskiano, que H. WRONSKI (1775-1853) había introducido en 1821. En 1866, L. FUCHS (1833-1902) introdujo el término «sistema fundamental».

Un gran número de trabajos fue dedicado también al estudio de ecuaciones especiales lineales de segundo orden con coeficientes variables. F. W. BESSEL

(1784-1846) estudió la ecuación que lleva su nombre y que ya había sido considerada por D. BERNOULLI y EULER. También se investigó la ecuación de la serie hipergeométrica, que había ocupado a EULER y GAUSS, la ecuación de Legendre, la de Lamé (1795-1870), etc., En 1874, A. W. LETNIKOV (1837-1888) aplicó a la integración de una serie de ecuaciones similares, en particular a la ecuación

$$(x-a)(x-b)y''+(c+hx)y'+ky=0,$$

la teoría elaborada por él mismo de las derivaciones con índice general. La ecuación anterior, por una selección adecuada de las constantes, o bien por medio de transformaciones apropiadas, pasa a ser la ecuación de la serie hipergeométrica, la de Legendre, la de los polinomios de Chebichev o la de las funciones de Bessel. Tal teoría remonta sus orígenes a LEIBNIZ y a LIOUVILLE (1832).

En la segunda mitad del siglo XIX inicióse con L. FUCHS (1833-1902) una nueva orientación en la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos, partiendo de los trabajos de CAUCHY y RIEMANN sobre la serie hipergeométrica. Esta nueva orientación, que pronto se transformó en una teoría analítica de ecuaciones diferenciales, se ocupó del estudio de las propiedades generales de las soluciones de ecuaciones diferenciales (no ya lineales) en el campo complejo. En particular se abordaron los problemas de existencia y unicidad, del tipo y situación de puntos singulares de las soluciones, etc. Los trabajos de FUCHS y sus discípulos hicieron posible unificar en una teoría general la investigación de muchos tipos importantes de ecuaciones lineales y prepararon el terreno para la construcción de la teoría de funciones automorfas creada por H. POINCARÉ (1854-1912) y F. KLEIN (1849-1925). Muchos otros matemáticos importantes, entre ellos G. FROBENIUS (1849-1917), E. PICARD, P. PAINLEVÉ (1863-1933), trabajaron también en la teoría analítica de ecuaciones diferenciales.

A partir de la cuarta década del siglo XIX fueron desarrollados métodos simbólicos en la solución de ecuaciones diferenciales y en diferencias finitas. O. HEAVISIDE (1850-1925) creó un potente medio para el cálculo simbólico. De estos trabajos se desarrolló el cálculo de operadores moderno. Entre los resultados más antiguos en la teoría de ecuaciones en derivadas parciales del siglo XIX se cuentan los de J. F. PFAFF (1765-1825). En 1814, PFAFF investigó por extenso la ecuación

$$F_1dx_1+F_2dx_2+\ldots+F_ndx_n=0,$$

donde F_1, F_2, ..., F_n son funciones de x_1, x_2, ..., x_n. Se propuso el problema de integrar esta ecuación con el menor número posible de relaciones entre las variables, es decir, de obtener la superficie integral de mayor dimensión posible. JACOBI designó este problema «problema de Pfaff» y de él se han ocupado muchos matemáticos, en particular R. F. A. CLEBSCH (1833-1936), G. FROBENIUS, S. LIE (1842-1899), E. GOURSAT (1858-1936), etc. Particular importancia tuvieron los métodos de JACOBI, elaborados en conexión con trabajos de mecánica, para la integración de ecuaciones no lineales de primer orden con un gran número de variables. El llamado segundo método de Jacobi fue expuesto por primera vez en sus lecciones y luego en su obra póstuma sobre mecánica (1866). Otro método de amplia divulgación fue creado por CAUCHY (1819): el método de las características, que no se distingue en el fondo del primer método de Jacobi obtenido por éste más tarde. A. M. AMPÈRE (1775-1836), DARBOUX y otros se ocuparon de la elaboración de métodos formales para la integración de ecuaciones de segundo orden.

En la teoría de ecuaciones en derivadas parciales de orden superior, que se desarrolló en conexión íntima con problemas de Física y en particular de teoría de la elasticidad, la primera mitad del siglo XIX trajo muchos resultados especiales importantes en la solución de diversos problemas de contorno. La teoría pronto hizo uso de series trigonométricas, de la teoría de funciones de una variable compleja y del cálculo de variaciones. El punto de partida lo constituyó el trabajo clásico de J. B. FOURIER (1768-1830) sobre la teoría del calor (1822). Para la integración de la ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

con diversas condiciones de contorno desarrolló FOURIER, por primera vez de una forma sistemática, el método de separación de variables y llegó, llevando adelante las ideas de D. BERNOULLI, a la representación de soluciones en serie trigonométrica. Derivó de nuevo las fórmulas ya obtenidas anteriormente por CLAIRAUT y EULER para los coeficientes y señaló que las funciones de una clase muy extensa, entre ellas las que pueden ser definidas sobre diferentes intervalos mediante diversas expresiones analíticas, es decir, aquellas que son «discontinuas» según la terminología de EULER, pueden ser representadas mediante una serie trigonométrica, o sea, pueden ser representadas «analíticamente». Con esto quedó en claro el error de EULER en su concepción de la «continuidad» y quedó justificado en cierto modo el punto de vista de D. BERNOULLI. Sin embargo, al mismo tiempo quedó confirmada la opinión de EULER, combatida por D'ALEMBERT, de que las integrales de las ecuaciones en derivadas parciales pueden ser funciones conexas trazadas con cierta arbitrariedad a mano. Tales funciones pueden ser representadas en un intervalo finito mediante un desarrollo en serie. El trabajo de FOURIER, comenzado ya en 1807, desempeñó un papel de importancia en el problema de una nueva fundamentación del análisis.

Su publicación suscitó inmediatamente la cuestión sobre las condiciones exactas de representabilidad de una función mediante series trigonométricas, cuestión que FOURIER había tratado sólo de manera muy superficial. Las primeras condiciones suficientes fueron dadas por DIRICHLET (1829). La elaboración de la teoría de series trigonométricas tuvo, como es bien sabido, una enorme importancia en la fundamentación y desarrollo de la teoría de una función de variable real, en particular en la teoría de la integral (RIEMANN, STIELTJES, LEBESGUE) y en la teoría de conjuntos (CANTOR).

Tipos especiales de ecuaciones de la Física matemática fueron investigados con éxito también por otros matemáticos, como S. POISSON (1781-1840).

Con todo, el esquema de una teoría general empezó a perfilarse algo más tarde. Estudios eminentes fueron llevados a cabo por M. W. OSTROGRADSKI a partir de 1828, quien llevó adelante trabajos sobre la conducción de calor que aventajaron en algunos puntos a los de FOURIER y POISSON. Desarrollando el método de Fourier propuso OSTROGRADSKI el problema de desarrollar una función en serie de autofunciones de un determinado problema de contorno en forma muy general. Probó la ortogonalidad del sistema de autofunciones y encontró una fórmula para el desarrollo en serie, no entrando, sin embargo, en la cuestión de la convergencia de estas series en el caso general. Más adelante, los problemas de contorno de la Física matemática constituyeron el objeto de investigación de muchos otros matemáticos, entre otros C. NEUMANN (1832-1925), H. A. SCHWARZ (1843-1921), H. POINCARÉ. También los rusos A. M. LYAPUNOV (1857-1918) y sobre todo su discípulo W. A. STEKLOV (1864-1926) prosiguieron con éxito este tipo de investigaciones. En su teoría de la complitud sometió STEKLOV el problema del desarrollo en serie de autofunciones a un profundo y riguroso análisis. Como hemos señalado, el conjunto de problemas en conexión con la Física matemática condujo, al final del siglo XIX y en el siglo XX, a la construcción de la teoría de ecuaciones integrales que unificó muchos de los métodos utilizados antes. Mención especial en esta línea merecen los trabajos de V. VOLTERRA (1860-1940), I. FREDHOLM (1866-1927), D. HILBERT (1862-1943) y E. SCHMIDT (1876-1959).

1.4. LA SEGUNDA MITAD DEL SIGLO XIX Y COMIENZOS DEL SIGLO XX

Dos nuevas direcciones merecen especial atención en este periodo. La primera de ellas relacionada con el desarrollo de la teoría de grupos, la segunda con ciertos problemas de mecánica celeste y astronomía.

Las ideas fundamentales de teoría de grupos, que se abrieron camino primero en álgebra brillantemente, pronto comenzaron a penetrar otros dominios de las matemáticas. Así, F. KLEIN (1849-1925) señaló, en 1872, que el carácter de las diversas formas de geometría: proyectiva, afín, métrica, etc., queda determinado por las propiedades del grupo de transformaciones biunívocas del conjunto de elementos del espacio sobre sí mismo y por las invariantes de este grupo. KLEIN hizo uso del concepto de grupo continuo de transformaciones. Las transformaciones de tal grupo pueden ser determinadas por medio de funciones continuas. Tales transformaciones habían sido introducidas poco antes por S. LIE (1842-1899), quien desde 1873 las había aplicado en varios trabajos sobre ecuaciones diferenciales. Las investigaciones de LIE abarcaron un círculo amplio de problemas de este campo. Una de las finalidades de LIE consistió en la unificación de los métodos diversos y a veces, al parecer, casuales, de reducción de diferentes tipos de ecuaciones diferenciales integrables por cuadraturas. Las transformaciones definidas por medio de la sustitución

$$\begin{cases} x_1 = f(x, y, a) \\ y_1 = g(x, y, a) \end{cases} \qquad [*]$$

constituyen un grupo continuo uniparamétrico si f y g son continuas y si la composición de dos transformaciones de este tipo es equivalente a una del mismo tipo. Si una ecuación diferencial es tal que permanece invariante cuando se efectúa una sustitución [*] para cualquier valor de a, entonces se dice que la ecuación «admite» dicho grupo de transformaciones. A cada grupo continuo uniparamétrico de transformaciones corresponde una transformación llamada infinitesimal, y, recíprocamente, a cada transformación infinitesimal corresponde un cierto grupo. LIE demostró que toda ecuación diferencial ordinaria de primer orden que admite un grupo de transformaciones con una cierta transformación infinitesimal puede ser integrada por cuadraturas. LIE consideró una serie de tipos de ecuaciones con transformaciones dadas. De este modo, clasificó las ecuaciones diferenciales según sus transformaciones infinitesimales. Los estudios de LIE fueron proseguidos en diversas direcciones al fin del siglo XIX y durante el XX, sobre todo en álgebra y topología.

Las nuevas ideas en álgebra fueron aplicadas con éxito, sobre todo al estudio de ecuaciones lineales. E. PICARD, en 1883 y 1887, y E. VESSIOT, en 1892, crearon una teoría de estructura de ecuaciones diferenciales lineales que es análoga a la teoría de Galois. Uno de los resultados logrados por VESSIOT afirma que una ecuación diferencial lineal general de orden superior al primero no es soluble por cuadraturas.

Otro de los desarrollos más importantes en la historia de las ecuaciones diferenciales lo constituye la creación de una «teoría cualitativa» (la expresión procede de POINCARÉ). Hacia los años setenta el problema de la integración de ecuaciones por cuadraturas de funciones elementales había perdido su importancia anterior. Los trabajos de LIE llegaron a cerrar este ciclo de problemas en cierto sentido. La construcción de una teoría suficientemente general en la dirección de solución por cuadraturas resultaba imposible, ya que son relativamente pocas las ecuaciones que admiten una solución de este tipo. Así, no parecía abrirse ningún camino hacia una teoría general ni hacia los procesos numéricos de solución que estaban en la base de los teoremas de existencia de ecuaciones diferenciales. Estos procesos proporcionaban a lo sumo una solución particular para cada problema, solución que es válida para un intervalo finito que corresponde a las condiciones iniciales. Tales procesos no proporcionaban una imagen general del comportamiento global de las curvas integrables. Simultáneamente aparecieron, en diversos campos de mecánica celeste, problemas que requerían el estudio y conocimiento de la naturaleza de las funciones determinadas por las ecuaciones diferenciales en todo su dominio de definición. Ya en NEWTON y LAPLACE aparece, por ejemplo, la cuestión de la estabilidad del sistema solar o de ciertas soluciones especiales del problema de los tres cuerpos. Los métodos antiguos excluían de raíz la posibilidad de averiguar el comportamiento de las soluciones de tales ecuaciones en intervalos de tiempo arbitrariamente grandes. Por ejemplo, los métodos antiguos no proporcionaban ninguna respuesta a la cuestión sobre si la distancia entre los cuerpos permanece siempre acotada o si ciertos elementos del sistema se acercan indefinidamente o se alejan hacia el infinito.

La teoría cualitativa de ecuaciones fue creada simultáneamente por POINCARÉ (1854-1912) y LYAPUNOV (1857-1918). El problema que POINCARÉ se propuso consistía en averiguar el comportamiento de la familia de curvas integrales de la ecuación $y' = f(x, y)$, o bien del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \psi_1(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = \psi_2(x, y) \end{cases}$$

en todo el plano, y en hacerlo sin integrar las ecuaciones, solamente por medio del estudio de las propiedades de las funciones en los segundos miembros. POINCARÉ partió de ciertos estudios de C. BRIOT (1817-1882) y J. BOUQUET (1819-1885) sobre propiedades de las integrales de ecuaciones diferenciales en el entorno de un punto singular y en una serie de artículos, habiendo comenzado en 1878, hizo progresos fundamentales hacia la solución de este problema para ecuaciones de primer orden y en parte también para las de segundo. Dio una clasificación y señaló la significación de los puntos singulares de las curvas integrales, investigó el comportamiento de las curvas en el entorno de las singularidades e introdujo el concepto de ciclo límite (una curva integral cerrada a la cual se acercan en espiral curvas integrales suficientemente próximas). POINCARÉ estudió también el recorrido de las curvas integrales sobre un toro. Estas investigaciones tuvieron en el fondo un carácter topológico y con ello, en parte, estuvo relacionado también el rápido aumento del interés por la topología y también sus éxitos. Estos trabajos fueron proseguidos en 1901, mediante consideraciones de la teoría de conjuntos, por I. BENDIXSON, quien ya antes había descubierto nuevos tipos de puntos singulares. Asimismo, PERRON, en 1922 y 1923, dedicó varios trabajos a este tema. También POINCARÉ se ocupó, al mismo tiempo que LYAPUNOV, del problema general de estabilidad.

Las investigaciones de LYAPUNOV también estuvieron motivadas por problemas concretos de astronomía, especialmente por el problema propuesto por CHEBICHEV sobre la posibilidad de la existencia de figuras de equilibrio de un fluido en rotación diferentes de la elipsoidal.

LYAPUNOV comenzó el estudio de este problema en 1882, pero no dio con la solución completa hasta una serie de artículos publicados entre 1903 y 1918. Otro de los problemas que le ocuparon fue el de la estabilidad del equilibrio y del movimiento de un sistema mecánico determinado por un número finito de parámetros. A este problema se dedicó en su tesis doctoral en 1892 y en algunos trabajos posteriores LYAPUNOV investigó un sistema

$$\frac{dx_k}{dt} = X_k(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n \qquad [*]$$

siendo $X_k(0, 0, \ldots, 0, 0) = 0$ y tales que para valores pequeños de las x_k y para $t \geqslant 0$, $X_k(x_1, \ldots, x_n)$ se puede desarrollar en serie de potencias positivas de las x_k, con coeficientes constantes o dependientes de t. El sistema admite la solución trivial $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Esta solución se llama estable, en sentido de LYAPUNOV, cuando para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada $t \geqslant 0$ se tiene la desigualdad $|x_k(t)| \leq \epsilon$ para otra solución cualquiera, con tal que los valores iniciales $x_k(0)$ sean menores o iguales que δ en valor absoluto.

LYAPUNOV determinó en qué casos el problema de la estabilidad puede ser resuelto por medio de una primera aproximación, es decir, mediante el estudio del sistema que resulta al sustituir X_k por los términos de primer orden del desarrollo en serie. Antes de LYAPUNOV se había investigado sólo esta primera aproximación, lo que había conducido a veces a resultados falsos. LYAPUNOV resolvió el problema de la estabilidad también en una serie de casos «dudosos», en los que la primera aproximación no basta para decidir sobre la estabilidad del sistema original. También resolvió una colección de problemas importantes de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales. El estudio del sistema [*] lo realizó también LYAPUNOV por medio de métodos puramente cualitativos, es decir, sin integrar el sistema.

Los trabajos de LYAPUNOV tuvieron gran importancia en el desarrollo ulterior de la teoría de ecuaciones diferenciales y en sus aplicaciones al estudio de oscilaciones de diferentes sistemas físicos y mecánicos.

Una teoría cualitativa abstracta de los llamados sistemas dinámicos del tipo del sistema [*] fue desarrollada por varios autores, entre ellos G. D. BIRKHOFF (1884-1944). Los problemas más importantes de dicha teoría son el estudio de las soluciones en todo su dominio de existencia y, por otra parte, el estudio de las soluciones en el entorno de los puntos singulares.

1.5. ALGUNAS DIRECCIONES CONTEMPORANEAS

El desarrollo contemporáneo de las ecuaciones diferenciales es demasiado extenso como para tratar de seguir en detalle sus múltiples ramificaciones en las diversas escuelas. Nos limitaremos aquí a indicar unas cuantas direcciones de crecimiento, señalando por separado los relativos a las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales. Para una visión más completa y detallada nos remitimos a unos pocos artículos claves que pueden dar una idea más exacta.

En ecuaciones diferenciales ordinarias, los trabajos de POINCARÉ y LYAPUNOV, que durante bastante tiempo pasaron casi inadvertidos, han atraído la atención de numerosos investigadores por sus relaciones profundas con muy diversos aspectos de la matemática aplicada. Los estudios de BIRKHOFF sobre estabilidad de sistemas físicos y la investigación de estados de equilibrio de los puntos críticos han sido realizados siguiendo los pasos de POINCARÉ y LYAPUNOV en la escuela rusa. La necesidad de extender la teoría se ha hecho notar con la insuficiencia manifiesta de la técnica de linealización, esencialmente incorrecta en muchos casos, como en el estudio de oscilaciones no lineales.

La teoría de control óptimo, desarrollada especialmente por los matemáticos de la escuela rusa, ha hecho también uso de los métodos desarrollados por POINCARÉ y LYAPUNOV.

Los problemas más importantes de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales se han centrado en el estudio de la naturaleza de los puntos críticos, de los ciclos límites, en el comportamiento global y asintótico (estabilidad y teoría asintótica) de las trayectorias en un entorno de los puntos críticos y ciclos límites, en la teoría de la bifurcación y, últimamente, en los temas relacionados con el concepto de estabilidad estructural. La noción de estabilidad estructural fue introducida por ANDRONOV y PONTRYAGIN en 1937. De modo vago se puede decir que un sistema de ecuaciones diferenciales es estructuralmente estable cuando una variación pequeña de las ecuaciones induce un homeomorfismo cercano a la identidad que transforma trayectorias en trayectorias. Así sucede que existe una correspondencia exacta entre los puntos críticos, ciclos límites, etc. ANDRONOV y PONTRYAGIN dieron condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad estructural de un sistema de dimensión 2 definido sobre un cuadrado.

El problema propuesto en un principio y resuelto parcialmente por KAPLAN en 1940 en $\boldsymbol{R}^2$ consistió en tratar de clasificar los sistemas de ecuaciones diferenciales por el comportamiento global de sus trayectorias. PEIXOTO introdujo, en 1959, una métrica en el espacio Σ de sistemas de ecuaciones diferenciales y demostró en algunos casos importantes que el subconjunto S de sistemas estructuralmente estables es denso en Σ. Entonces se trata de clasificar S, lo que proporciona una simplificación del problema. Trabajos ulteriores de SMALE, en 1966, han demostrado que no es cierto en dimensión mayor o igual que 4 que S es denso en Σ, lo que requiere probablemente una sustitución de la noción de estabilidad estructural por otra más débil que permita avanzar en la misma dirección. Los trabajos de PEIXOTO, SMALE y THOM, entre otros, tienen esta orientación.

Muchos otros trabajos actuales en ecuaciones diferenciales ordinarias se realizan en la dirección del análisis numérico y del cálculo efectivo de soluciones en conexión con el uso de los modernos calculadores.

También se presta particular atención a problemas relacionados con las aplicaciones a la teoría de control, tales como las ecuaciones retardadas, y las ecuaciones diferenciales estocásticas.

En lo que se refiere a los avances generales más importantes de la teoría reciente de ecuaciones en derivadas parciales mencionaremos en especial la introducción de nuevos métodos basados en los resultados modernos del análisis funcional, la introducción en ecuaciones diferenciales de la teoría de distribuciones y la teoría de los operadores seudodiferenciales. Para una visión detallada de los avances concretos logrados en los últimos tiempos en ecuaciones lineales puede consultarse el artículo de ROSENBLOOM [1958] y el de HÖRMANDER [1970].

El análisis funcional ha venido a desarrollarse especialmente a partir de la introducción por HILBERT del espacio de funciones que lleva su nombre. La obra clásica de BANACH proporcionó herramientas poderosas que han sido aplicadas luego a los problemas en ecuaciones diferenciales, especialmente lineales, con notable éxito. La consideración de los operadores compactos, con una teoría espectral sencilla, aclara y unifica multitud de problemas clásicos, y ha constituido una guía para un desarrollo de una teoría espectral más general de operadores, con amplias aplicaciones en ecuaciones. El análisis funcional proporciona asimismo desigualdades *a priori*, es decir, desigualdades válidas para toda solución que resultan de la mera hipótesis de existencia de tales soluciones. Las desigualdades *a priori* constituyen un método fundamental para la resolución del problema de unicidad. El éxito de los métodos del análisis funcional en los problemas de ecuaciones lineales en derivadas parciales ha motivado el interés y el desarrollo moderno del análisis funcional no lineal, con vistas a su aplicación a problemas no lineales, mucho más difíciles de atacar.

La teoría de distribuciones tiene su origen remoto en DIRAC, HEAVISIDE y SOBOLEV. Los sistematizadores de la teoría fueron L. SCHWARTZ e I. M. GELFAND con sus obras clásicas, en las que se estudian orgánicamente las aplicaciones a los problemas en ecuaciones en derivadas parciales. La idea más importante en este campo tal vez la constituya la sustitución de la noción de solución como distribución, noción que viene a generalizar la de función, englobándola en una colección de objetos más amplia. De esta generalización resulta, por ejemplo, el reciente teorema debido a MALGRANGE y EHRENPREIS (1953), según el cual todo operador $P(D)$ diferencial lineal de coeficientes constantes admite una solución fundamental E, es decir, una distribución tal que $P(D)E=\delta$, siendo δ la distribución de Dirac.

Muchos de los trabajos modernos en ecuaciones en derivadas parciales están dirigidos a resolver los muchos y muy interesantes problemas abiertos de la teoría.

La teoría de los operadores seudodiferenciales es una prolongación de los trabajos realizados por CALDERÓN y ZYGMUND sobre operadores integrales singulares y sobre las aplicaciones halladas por ellos mismos a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales. Sea

$$L=\sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha D^\alpha$$

un operador diferencial lineal, donde a_α son funciones de $\mathcal{C}_0^\infty$. El polinomio característico del operador diferencial es

$$\sigma(L)(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha(x)\xi^\alpha$$

y se puede escribir

$$Lf(x)=\int e^{2\pi i(x,\xi)}\sigma(L)(x,\xi)\hat{f}(\xi)\,d\xi$$

Un operador seudodiferencial viene a ser de la misma forma, excepto que $\sigma(L)$ se sustituye por sumas de funciones homogéneas.

El estudio de estos operadores señala en ellos propiedades algebraicas que los hace muy aptos para un desarrollo sencillo de muchos problemas en derivadas parciales. En esta dirección se pueden mencionar los trabajos desarrollados por CALDERÓN y ZYGMUND, KOHN y NIRENBERG, HÖRMANDER, FRIEDRICHS, SEELEY, etc.