§ 10. Integración de algunas expresiones irracionales y trascendentes

En los párrafos anteriores hemos establecido que la integral de cualquier fracción racional es función elemental. En el párrafo presente consideremos *otras clases de funciones integrables en funciones elementales*. Como regla, haciendo cierta sustitución reduciremos la integral de la función considerada a la integral de la fracción racional. En cuanto a dicha sustitución, decimos que ella racionaliza la integral de la función considerada.

1. Integración de algunas expresiones trigonométricas. Nos ponemos de acuerdo que en adelante siempre designaremos cualquier función racional de dos argumentos x e y *) por el símbolo $R(x, y)$.

En este punto demostremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de tipo

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x). \tag{7.63}$$

Demostremos que la integral de esta función se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. En efecto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

así que

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Puesto que la función racional de la función racional es también función racional, entonces la integral del miembro derecho de la última igualdad es integral de la fracción racional.

Siendo universal, la sustitución $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ que racionaliza la integral de la función (7.63), lleva, con frecuencia, a cálculos voluminosos. En relación con esto, señalaremos varios casos particulares en los que se puede racionalizar la integral de la función (7.63) empleando otras sustituciones más simples.

*) La función racional de dos argumentos se define del modo siguiente. Se denomina polinomio de grado n de dos argumentos x e y la expresión de forma $P_n(x, y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n$, donde $a_{00}, a_{10}, a_{01}, \ldots, a_{0n}$ son ciertos números constantes. Se denomina función racional de dos argumentos la expresión de forma $P_n(x, y)/Q_m(x, y)$, donde $P_n(x, y)$ es polinomio arbitrario de dos argumentos de grado n, y $Q_m(x, y)$, polinomio arbitrario de dos argumentos de grado m.

Ante todo, notemos dos propiedades elementales de la función racional de dos argumentos $R(u, v)$:

1°. Si la función racional $R(u, v)$ no cambia su valor al variar el signo de uno de sus argumentos (por ejemplo, u), es decir, si $R(-u, v) = R(u, v)$, entonces, esta función racional puede reducirse a la forma $R(u, v) = R_1(u^2, v)$, donde R_1 es cierta función racional de sus dos argumentos. (Esta función comprende solamente potencias *pares* de u.)

2°. Si, al variar el signo de u, la función $R(u, v)$ también cambia de signo, es decir, $R(-u, v) = -R(u, v)$, entonces, ella se reduce a la forma $R(u, v) = R_2(u^2, v)\,u$. (La propiedad 2° se desprende directamente de la propiedad 1° si la aplicamos a la función $R(u, v)/u$.)

Consideremos ahora el problema de la racionalización de la integral de la función (7.63) para varios casos particulares.

I. Sea que *$R(u, v)$ cambia de signo al variar el signo de u.* Entonces, según la propiedad 2°,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_2(\operatorname{sen}^2 x, \cos x)\operatorname{sen} x\,dx = -\int R_2(1-\cos^2 x, \cos x)\,d(\cos x).$$

De este modo, la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \cos x$.

II. Luego, sea que la función *$R(u, v)$ cambia de signo al variar el signo de v.* Entonces, según la misma propiedad 2°,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx = \int R_3(\operatorname{sen} x, \cos^2 x)\cos x\,dx = \int R_3(\operatorname{sen} x, 1-\operatorname{sen}^2 x)\,d(\operatorname{sen} x),$$

es decir, la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{sen} x$.

III. En fin, sea que la función *$R(u, v)$ no cambia su valor si los signos de u y v varían simultáneamente*, es decir,

$$R(-u, v) = R(u, v). \qquad R(-u,-v) = R(u,v)$$

Demostremos que en este caso la integral de la función (7.63) se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. En efecto, en este caso,

$$R(u, v) = R\left(\frac{u}{v}v, v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right),$$

$$R(-u, -v) = R\left(\frac{u}{v}(-v), -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right).$$

De este modo,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, -v\right) = R_1\left(\frac{u}{v}, v\right).$$

Pero, entonces, según la propiedad 1°,

$$R_1\left(\frac{u}{v}, v\right) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

En definitiva, obtenemos

$$R(u, v) = R_2\left(\frac{u}{v}, v^2\right).$$

De aquí,

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\, dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \int R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}\right) dx = \int R_2\left(t, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2},$$

donde $t = \operatorname{tg} x$, $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la integral $I_1 = \int \dfrac{dx}{1+a\cos x}$, donde $a > 0$, $a \neq 1$. Aplicando la sustitución trigonométrica universal $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, obtenemos

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$I_1 = 2\int \frac{dt}{(a+1)+t^2(1-a)} = \frac{2}{a+1}\int \frac{dt}{1+\dfrac{1-a}{1+a}t^2}.$$

Luego, es necesario considerar dos casos por separado: 1) $0 < a < 1$, 2) $a > 1$. En el caso de que $0 < a < 1$,

$$I_1 = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\left(t\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\right) + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.$$

En el caso de que $a > 1$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{1+t\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}}{1-t\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{1+\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1-\sqrt{\dfrac{a-1}{a+1}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}\right| + C.$$

2) Calcúlese la integral $I_2 = \int \dfrac{\operatorname{sen} x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x + 1}$.

Ya que el integrando cambia de signo al variar el signo de sen x, entonces, según I, hay que hacer la sustitución $t = \cos x$. Como resultado, obtenemos

$$I_2 = -\int \frac{dt}{1-t^2+1} = \int \frac{dt}{t^2-2} =$$

$$= \frac{-1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+\sqrt{2}}{t-\sqrt{2}}\right| + C = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sqrt{2}}\right| + C.$$

3) Calcúlese la integral $I_3 = \int \dfrac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x}\, dx.$

Ya que el integrando conserva el valor si los signos de sen x y cos x varían simultáneamente, entonces, según III, hay que hacer la sustitución $t = \operatorname{tg} x$. Como resultado, obtenemos

$$I_3 = \int \frac{t\,dt}{t^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2)}{(t^2)^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(t^2) + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

2. Integración de irracionalidades fraccionales lineales. En este punto demostraremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de tipo

$$R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right), \tag{7.64}$$

donde a, b, c y d son ciertas constantes, n es cualquier número positivo entero. La función de este tipo se denomina *irracionalidad fraccional lineal*.

Demostremos que si $ad - bc \neq 0$ la sustitución $t = \sqrt[n]{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$ racionaliza la integral de la función (7.64). En efecto,

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{dt^n - b}{a - c\cdot t^n}, \quad dx = \frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt,$$

así que

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx = \int R\left(\frac{dt^n-b}{a-ct^n}, t\right) \frac{(ad-bc)\,nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Ya que la función racional de una función racional es también función racional, entonces, la integral del miembro derecho de la última igualdad es integral de la fracción racional. Por lo tanto, queda demostrado que la integral de la irracionalidad fraccional lineal (7.64) se racionaliza por la sustitución

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$$

EJEMPLO. Calcúlese la integral $I = \int \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\,\dfrac{dx}{1-x}$. Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad t^2 = \frac{1+x}{1-x}, \quad x = \frac{t^2-1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

obtenemos

$$I = 2\int \frac{t^2\,dt}{t^2+1} = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= 2t - 2\operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

3. Integración de diferenciales binomiales. Se denomina *diferencial binomial* la expresión de forma

$$x^m (a + bx^n)^p \, dx,$$

donde a y b son constantes cualesquiera, y los exponentes de las potencias m, n y p, ciertos números racionales. Examinemos el problema de la integrabilidad en funciones elementales de las diferenciales binomiales.

Ante todo, señalemos *tres casos* cuando la integral de una diferencial binomial admite sustitución que racionaliza.

1°. El primer caso corresponde a *p entero*. La diferencial binomial es irracionalidad fraccional lineal de tipo $R(x, \sqrt[r]{x})\, dx$, donde r es el mínimo común múltiplo de los números racionales m y n. Por lo tanto, en este caso, la sustitución $t = \sqrt[r]{x}$ racionaliza la integral de la diferencial binomial.

2°. El segundo caso corresponde al *número entero* $\frac{m+1}{n}$. Haciendo la sustitución $z = x^n$ y poniendo, para abreviar, $q = \frac{m+1}{n} - 1$, tendremos

$$\int x^m (a+bx^n)^p \, dx = \frac{1}{n} \int (a+bz)^p z^q \, dz. \tag{7.65}$$

La función subintegral en el miembro derecho de (7.65) es irracionalidad fraccional lineal de forma $R(z, \sqrt[s]{a+bz})$, donde s es el denominador del número racional p.

De este modo, en el segundo caso la diferencial bonomial se racionaliza por la sustitución

$$t = \sqrt[s]{a+bz} = \sqrt[s]{a+bx^n}.$$

3°. El tercer caso corresponde al *número entero* $\left(\frac{m+1}{n} + p\right)$. La función subintegral en el miembro derecho de (7.65) es irracionalidad lineal fraccional de forma $R\left(z, \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}}\right)$, así que la integral de la diferencial binomial se racionaliza por la sustitución de forma

$$t = \sqrt[s]{\frac{a+bz}{z}} = \sqrt[s]{\frac{a}{x^n}+b}.$$

A mediados del siglo pasado P. L. Chebishov *) demostró que *tres casos anteriormente mencionados agotan todos los casos cuando la diferencial binomial se integra en funciones elementales.*

EJEMPLOS. 1). Calcúlese la integral $I = \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a+bx^2}} = \int x^{-2} \times \times (a+bx^2)^{-1/2}\, dx$. Aquí $m = -2$, $n = 2$, $p = -1/2$, así que $\frac{m+1}{n} + p = -1$ (el tercer caso). Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{\frac{a}{x^2}+b}, \quad x = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{t^2-b}}, \quad dx = -\frac{\sqrt{a}\, t\, dt}{\sqrt{(t^2-b)^3}},$$

tendremos

$$I = \int \left(-\frac{dt}{a}\right) = -\frac{t}{a} + C = -\frac{\sqrt{\frac{a}{x^2}+b}}{a} + C.$$

*) P. L. Chebishov, gran matemático ruso (1821—1894).

2) Calcúlese la integral $I = \int x^5 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$. En este caso $m=5$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, así que $\frac{m+1}{n} = 3$ (el segundo caso). Haciendo la sustitución

$$t = \sqrt{1-x^2}, \quad x = \sqrt{1-t^2}, \quad dx = -\frac{t\, dt}{1-t^2},$$

tendremos

$$I = -\int (1-t^2)^2 \, dt = -\int dt + 2\int t^2 \, dt - \int t^4 \, dt = -t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{t^5}{5} + C =$$
$$= -\sqrt{1-x^2} + \frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} - \frac{\sqrt{(1-x^2)^5}}{5} + C.$$

4. Integración de irracionalidades cuadráticas por sustituciones de Euler. En este punto demostremos la integrabilidad en funciones elementales de cualquier función de forma

$$R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right), \tag{7.66}$$

donde a, b y c son ciertas constantes. La función de este tipo se denomina *irracionalidad cuadrática.* Naturalmente, consideremos que el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + e$ no tiene raíces *iguales* (de lo contrario, la raíz de este trinomio puede sustituirse por una expresión racional).

Demostremos que la integral de la función (7.66) siempre se racionaliza por una de las llamadas *sustituciones de Euler.*

En primer lugar, consideremos el caso cuando el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene raíces *complejas.* En este caso el signo del trinomio cuadrático coincide con el signo de a, y, debido a que el trinomio cuadrático (de que se extrae la raíz cuadrada) es *positivo* por el sentido, entonces, $a > 0$.

De este modo, tenemos derecho hacer la siguiente sustitución:

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}. \tag{7.67}$$

La sustitución (7.67) suele llamarse *primera sustitución de Euler.* Demostremos que esta sustitución racionaliza la integral de la función (7.66) para el caso considerado. Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a}$, obtenemos $bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}\, tx$, así que

$$x = \frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b},$$

$$dx = 2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\, dt.$$

De este modo,

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$
$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right) 2\,\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{(2\sqrt{a}t+b)^2}\,dt.$$

En el miembro derecho bajo el signo de la integral está la fracción racional.

Ahora, consideremos el caso cuando el trinomio cuadrático $ax^2 + bx + c$ tiene raíces *reales* no coincidentes x_1 y x_2.

En este caso $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Demostremos que entonces la integral de la función (7.66) se racionaliza haciendo la sustitución

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}, \tag{7.68}$$

que suele llamarse *segunda sustitución de Euler*. En efecto, elevando al cuadrado la igualdad $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1)$ y reduciendo la igualdad obtenida por $(x - x_1)$, obtenemos $a(x - x_2) = t^2(x - x_1)$, así que

$$x = \frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(x_1-x_2)}{t^2-a}\,t,$$
$$dx = \frac{2a(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$
$$= \int R\left(\frac{-ax_2+x_1t^2}{t^2-a},\ \frac{a(x_1-x_2)\,t}{t^2-a}\right) \frac{2a(x_1-x_2)\,t}{(t^2-a)^2}\,dt.$$

En el miembro derecho bajo el signo de la integral, está la fracción racional.

EJEMPLOS. 1) Calcúlese la integral $I = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$.

Puesto que el trinomio cuadrático x^2+x+1 tiene raíces complejas, hagamos la primera sustitución de Euler

$$t = \sqrt{x^2+x+1} + x.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{x^2+x+1} = t - x$, obtenemos $x^2 + x + 1 = t^2 - 2tx + x^2$ o $x + 1 = t^2 - 2tx$ así que

$$x = \frac{t^2-1}{1+2t},\quad dx = 2\,\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$I = 2\int \frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}\,dt = \int \left[\frac{A}{t} + \frac{B}{1+2t} + \frac{C}{(1+2t)^2}\right] dt.$$

Los coeficientes indeterminados A, B y C se calculan fácilmente: $A = 2$, $B = -3$, $C = -3$. En definitiva, obtenemos

$$I = 2\ln|t| - \frac{3}{2}\ln|1+2t| + \frac{3}{2(1+2t)} + C =$$
$$= 2\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}+x\right| - \frac{3}{2}\ln\left|1+2x+2\sqrt{x^2+x+1}\right| + \frac{3}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x+1})} + C.$$

2) Calcúlese la integral $I = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$. Puesto que el trinomio cuadrático $1-2x-x^2$ tiene raíces reales $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{2}$, hagamos la segunda sustitución de Euler (7.68)

$$t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}}{x+1+\sqrt{2}}.$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad $\sqrt{1-2x-x^2} = t(x+1+\sqrt{2})$, tendremos $(-1)(x+1-\sqrt{2}) = t^2(x+1+\sqrt{2})$, así que

$$x = \frac{-t^2(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}-1}{t^2+1},\quad \sqrt{1-2x-x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{t^2+1}\,t,$$
$$1+\sqrt{1-2x-x^2} = \frac{t^2+2\sqrt{2}t+1}{t^2+1},\quad dx = -\frac{4\sqrt{2}t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

De este modo,

$$I = -4\sqrt{2}\,\frac{t\,dt}{(t^2+1)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}.$$

Obtenemos la integral de la fracción racional que puede calcularse por el lector.

5. Integración de irracionalidades cuadráticas mediante otros procedimientos. Aunque las sustituciones de Euler siempre racionalizan la integral de la función (7.66), ellas suelen llevar a cálculos muy voluminosos y complicados. Por eso, en la práctica se usan con frecuencia otros procedimientos de integración de la función (7.66). Estos procedimientos se examinan en el punto presente.

Introduciendo la designación $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$ y teniendo en cuenta que y^2 es polinomio, podemos representar la función (7.66) en forma de la suma

$$R(x, y) = R_1(x) + R_2(x)/y,$$

15—607

donde $R_1(x)$ y $R_2(x)$ son ciertas funciones racionales de una variable. Ya que la integral de $R_1(x)$ se toma (en funciones elementales), es suficiente calcular la integral de la función $R_2(x)/y$.

Ya sabemos *) que toda fracción racional $R_2(x)$ puede representarse en forma de la suma de un polinomio $P(x)$ y la fracción *racional* propia $R_3(x)$. A su vez, la fracción racional propia $R_3(x)$ puede desarrollarse en la suma de fracciones simples. Tomándolo en consideración, podemos afirmar que el problema de integración de la función $R_2(x)/y$ se reduce al cálculo de las integrales de *tres tipos* siguientes:

I. $\int \frac{P(x)}{y}\,dx$, donde $P(x)$ es polinomio.

II. $\int \frac{B}{(x-A)^{\alpha}y}\,dx$, donde A y B son constantes, α es número natural.

III. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^{\lambda}y}\,dx$, donde M, N, p y q son constantes, λ es número natural con tal que $q-\frac{p^2}{4}>0$.

Detengámonos en el cálculo de las integrales de tipo I, II *y* III *por separado.*

I. Para calcular la *integral de tipo* I, ante todo establecemos la fórmula recurrente para la integral

$$I_m=\int \frac{x^m\,dx}{y}, \text{ donde } m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Para hacerlo, suponiendo $m\geqslant 1$, integremos la siguiente identidad que se verifica por la diferenciación:

$$(x^{m-1}y)'=ma\,\frac{x^m}{y}+\left(m-\frac{1}{2}\right)b\,\frac{x^{m-1}}{x}+(m-1)\,c\,\frac{x^{m-2}}{y}.$$

Integrando esta identidad llegamos a la igualdad

$$x^{m-1}y=maI_m+\left(m-\frac{1}{2}\right)bI_{m-1}+(m-1)\,cI_{m-2}. \tag{7.69}$$

Tomando $m=1$ en la igualdad (7.69), hallamos

$$I_1=\frac{1}{a}\,y-\frac{b}{2a}\,I_0. \tag{7.70}$$

Luego, poniendo $m=2$ en la igualdad (7.69) y empleando el valor ya calculado I_1 (es decir, la fórmula (7.70)), hallamos

$$I_2=\frac{1}{4a^2}\,(2ax-3b)\,y+\frac{1}{8a^2}\,(3b^2-4ac)\,I_0.$$

Luego continuando los razonamientos análogos, llegamos a la siguiente fórmula común:

$$I_m=P_{m-1}(x)\,y+c_mI_0, \tag{7.71}$$

donde $P_{m-1}(x)$ es polinomio de grado $m-1$, y c_m, constante. Si en la integral de tipo I $P(x)$ es polinomio de grado n, entonces la integral de tipo I será igual a la suma de las integrales $I_0, I_1, \ldots, I_n$ con ciertos multiplicadores constantes

*) Véase el § 8.

(coeficientes del polinomio $P(x)$). Por lo tanto, en virtud de la igualdad (7.71), obtenemos definitivamente la siguiente fórmula para la integral de tipo I:

$$\int \frac{P(x)}{y}\,dx=Q_{n-1}(x)\,y+C_0\int \frac{dx}{y}. \tag{7.72}$$

En esta fórmula $Q_{n-1}(x)$ es polinomio de grado $n-1$, y C_0, constante. Para determinar el polinomio $Q_{n-1}(x)$ y la constante C_0 se emplea el *método de coeficientes indeterminados*. El polinomio $Q_{n-1}(x)$ se escribe como polinomio con coeficientes literales

$$Q_{n-1}(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_{n-1}x^{n-1}.$$

Diferenciando la igualdad (7.72) y multiplicando el resultado de diferenciación por y, obtenemos

$$P(x)=Q'_{n-1}(x)\,(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}\,Q_{n-1}(x)\,(2ax+b)+C_0. \tag{7.73}$$

En ambos miembros de la igualdad (7.73) hay polinomios de grado n. Igualando sus coeficientes, obtenemos el sistema de $n+1$ ecuaciones lineales, de las cuales se determinan $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ y C_0. La resolubilidad del sistema obtenido se desprende de la validez de la fórmula (7.72) demostrada anteriormente. Queda por agregar que la integral situada en el miembro derecho de (7.72) se reduce a la integral de tabla por el cambio lineal de la variable $t=x+\frac{b}{2a}$.

Empleando dicho cambio, la integral $\int \frac{dx}{y}$ se reduce, con exactitud de hasta factor constante, a una de las dos integrales siguientes:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2\pm k^2}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2\pm k^2}\right|+C \quad (k=\text{const}>0)$$

ó

$$\int \frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}=\arcsen\frac{t}{k}+C.$$

EJEMPLO. Calcúlese la integral

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx.$$

Para la integral considerada la fórmula (7.72) tiene la forma

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\,dx=(A_0+A_1x+A_2x^2)\,\sqrt{1+2x-x^2}+C_0\int \frac{dx}{1+2x-x^2}. \tag{7.74}$$

Diferenciando esta fórmula y multiplicando el resultado de la diferenciación por $\sqrt{1+2x-x^2}$, obtenemos

$$x^3=(A_1+2A_2x)\,(1+2x-x^2)+(A_0+A_1x+A_2x^2)\,(1-x)+C_0.$$

Igualando los coeficientes de x^3, x^2, x^1, x^0 en los miembros derecho e izquierdo, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} -3A_2&=1,\\ 5A_2-2A_1&=0,\\ 2A_2+3A_1-A_0&=0,\\ A_1+A_0+C_0&=0.\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, hallamos $A_2 = -1/3$, $A_1 = -5/6$, $A_0 = -19/6$, $C_0 = 4$. La integral en el miembro derecho de (7.74) se calcula haciendo la sustitución de la variable $t = x - 1$. Obtenemos

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

En definitiva, tendremos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\, dx = \left(-\frac{19}{6} - \frac{5}{6}x - \frac{1}{3}x^2\right)\sqrt{1+2x-x^2} + 4 \operatorname{arcsen} \frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

II. Pasamos a calcular la *integral de tipo* II. Mostremos que esta integral se reduce a la integral de tipo I haciendo la sustitución $t = \frac{1}{x-A}$. En efecto, puesto que

$$dx = -\frac{dt}{t^2}, \quad ax^2 + bx + c = \frac{(A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}{t^2},$$

obtenemos

$$\int \frac{B}{(x-A)^\alpha y}\, dx = -\int \frac{Bt^{\alpha-1}\, dt}{\sqrt{A^2a + Ab + c)\, t^2 + (2aA + b)\, t + a}}.$$

III. Calculemos, por fin, la *integral de tipo* IIII, ante todo, *para el caso particular de* $p = 0$, $b = 0$, es decir, calculemos la integral

$$K = \int \frac{Mx + N}{(x^2+q)^\lambda \sqrt{ax^2+c}}\, dx.$$

Esta integral se descompone en la suma de dos integrales

$$K_1 = M \int \frac{x\, dx}{(x^2+q)^\lambda \sqrt{ax^2+c}} \quad \text{y} \quad K_2 = N \int \frac{dx}{(x^2+q)^\lambda \sqrt{ax^2+c}}.$$

La primera de estas integrales puede escribirse en la forma

$$K_1 = \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+q)^\lambda \sqrt{ax^2+c}},$$

de la cual se desprende que la función subintegral es irracionalidad *lineal* (no cuadrática) respecto a x^2. En virtud de lo demostrado en el p. 2, la integral K_1 se racionaliza por la sustitución $t = \sqrt{ax^2 + c}$. La integral K_2 puede escribirse en la forma *)

$$K_2 = N \int \frac{\frac{1}{x^{2\lambda-2}} \frac{dx}{x^3}}{\left(1 + q\frac{1}{x^2}\right)^\lambda \sqrt{a + c\frac{1}{x^2}}} = -\frac{N}{2} \int \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\lambda-1} d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left[1 + q\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]^\lambda \sqrt{a + c\frac{1}{x^2}}},$$

*) Consideramos que $x \neq 0$.

de la cual se desprende que la función subintegral es irracionalidad lineal respecto a $1/x^2$. Por lo tanto, la sustitución $r = \sqrt{a + \frac{c}{x^2}}$ racionaliza la integral K_2.

Así pues, para el caso particular cuando los dos trinomios cuadráticos *no tienen términos de primer grado*, la integral de tipo III fue racionalizada.

Consideremos ahora el *caso general* de la integral de tipo III y mostremos que puede reducirse a la integral de forma particular examinada anteriormente. Si los coeficientes de los trinomios cuadráticos satisfacen la relación

$$b = ap, \tag{7.75}$$

entonces para reducir la integral de tipo III a la integral de forma particular anteriormente examinada es suficiente hacer la sustitución $x = t - \frac{p}{q}$. En efecto, obtenemos

$$\int \frac{(Mx+N)\, dx}{(x^2+px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}} = \int \frac{Mt + \left(\frac{Mp}{2} + N\right)}{\left[t^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)\right]^\lambda \sqrt{at^2 + \left(c - \frac{ap^2}{4}\right)}}\, dt.$$

Es más complicado reducir la integral de tipo III a la integral de forma particular anteriormente examinada si los coeficientes de los trinomios cuadráticos *no satisfacen* la relación (7.75). En este caso, primeramente hacemos la sustitución lineal fraccional

$$x = \frac{\mu t + \nu}{1 + t}, \tag{7.76}$$

escogiendo las constantes μ y ν de tal modo que los trinomios cuadráticos *no comprendan términos de primer grado respecto a t*. Mostremos que se puede escoger tales μ y ν. En efecto, al hacer la sustitución (7.76), tendremos

$$x^2 + px + q = \frac{(\mu^2 + p\mu + q)\, t^2 + [2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q]\, t + (\nu^2 + p\nu + q)}{(1+t)^2},$$

$$ax^2 + bx + c = \frac{(a\mu^2 + b\mu + c)\, t^2 + [2\mu\nu a + b(\mu+\nu) + 2c]\, t + (a\nu^2 + b\nu + c)}{(1+t)^2}.$$

De este modo, los coeficientes μ y ν se determinan valiéndose del sistema de ecuaciones

$$2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q = 0, \quad 2\mu\nu a + b(\mu+\nu) + 2c = 0$$

o del sistema de ecuaciones equivalentes

$$\mu + \nu = -\frac{2(c - aq)}{b - ap}, \quad \mu \cdot \nu = \frac{cp - bq}{b - ap}.$$

Por lo tanto, μ y ν son raíces de la ecuación cuadrática

$$z^2 + \frac{2(c - ap)}{b - ap} z + \frac{cp - bq}{b - ap} = 0. \tag{7.77}$$

Queda por demostrar que la ecuación cuadrática (7.77) tiene raíces reales y diferentes. Para esto basta demostrar que el discriminante de esta ecuación es positivo, o sea, basta argumentar la desigualdad

$$(c - aq)^2 > (cp - bq)(b - ap). \tag{7.78}$$

Es fácil convencerse de que la desigualdad (7.78) es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$[2(c+aq)-bp]^2 > (4q-p^2)(4ac-b^2). \qquad (7.79)$$

Puesto que el trinomio cuadrático (x^2+px+q) tiene raíces complejos, entonces $4q-p^2>0$.

A ciencia cierta, la desigualdad (7.79) tiene lugar si $4ac-b^2>0$. Demostremos que esta desigualdad es también válida si $4ac-b^2>0$. En este caso, $q>0$, $ac>0$ y $4\sqrt{acq}>pb$. Por eso, teniendo en cuenta que $\frac{c+aq}{2}\geqslant\sqrt{caq}$, tendremos

$$[2(c+aq)-bp]^2 \geqslant [4\sqrt{qac}-pb]^2=$$
$$=(4q-p^2)(4ac-b^2)+4(p\sqrt{ac}-b\sqrt{q})^2\geqslant(4q-p^2)(4ac-b^2).$$

Esta serie de desigualdades tiene al menos un símbolo de desigualdad estricta $>$ puesto que el primer símbolo $\geqslant$ se convierte en el símbolo $=$ sólo para $c=aq$, pero, si $c=aq$, en virtud de que $b\neq ap$, a ciencia cierta $(p\sqrt{ac}-b\sqrt{q})\neq 0$, y, por eso, el segundo símbolo $\geqslant$ no se convierte en el símbolo $=$. Así pues, hemos demostrado la desigualdad (7.79), es decir, la posibilidad de escoger μ y ν tales que los trinomios cuadráticos obtenidos no comprenden términos de primer grado respecto a t. Haciendo la sustitución (7.76) con dichos μ y ν, reducimos la integral de tipo III a la forma

$$\int\frac{P(t)\,dt}{(t^2+q_1)^{\lambda}\sqrt{a_1t^2+c_1}}, \qquad (7.80)$$

donde a_1, c_1 y q_1 son ciertas constantes, $P(t)$ es polinomio de grado $2\lambda-1$. Al desarrollar*) la fracción $\frac{P(t)}{(t^2+q_1)^{\lambda}}$ en la suma de las fracciones simples, reducimos el problema de calcular la integral (7.80) al de calcular la suma de integrales en la forma

$$\int\frac{M_kt+N_k}{(t^2+q_1)^k\sqrt{a_1t^2+c_1}}\,dt \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ \lambda).$$

Cada una de estas integrales se refiere al tipo particular anteriormente examinado. Por lo tanto hemos demostrado la integrabilidad (en funciones elementales) de las integrales de todos los tres tipos I, II y III. De este modo, aparte de las sustituciones de Euler, hemos demostrado una vez más la integrabilidad de la función (7.66) en funciones elementales.

EJEMPLO. Calcúlese la integral $I=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$. Esta integral se refiere al tipo III. Ya que para ella ha sido infringida la relación (7.75), ante todo debemos hacer la sustitución (7.76). Como resultado de esta última, obtenemos

$$x^2+x+1=\frac{(\mu^2+\mu+1)t^2+[2\mu\nu+(\mu+\nu)+2]t+(\nu^2+\nu+1)}{(1+t)^2},$$
$$x^2-x+1=\frac{(\mu^2-\mu+1)t^2+[2\mu\nu-(\mu+\nu)+2]t+(\nu^2-\nu+1)}{(1+t)^2}$$

*) Cuando $\lambda>1$.

Las constantes μ y ν se hallan valiéndose del sistema de ecuaciones

$$2\mu\nu+(\mu+\nu)+2=0,\quad 2\mu\nu-(\mu+\nu)+2=0.$$

Es fácil convencerse de que *) $\mu=1$, $\nu=-1$. De este modo, la sustitución (7.76) tiene la forma $x=\frac{t-1}{t+1}$ de manera que

$$t=\frac{x+1}{1-x},\quad dx=\frac{2\,dt}{(1+t)^2},\quad x^2+x+1=\frac{3t^2+1}{(1+t)^2},$$
$$x^2-x+1=\frac{t^2+3}{(1+t)^2}.$$

La integral considerada toma a forma

$$I=2\int\frac{(1+t)\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}=I_1+I_2,$$

donde

$$I_2=2\int\frac{t\,dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}},\quad I_2=2\int\frac{dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Para calcular la integral I_1, hagamos la sustitución $u=\sqrt{3t^2+1}$, para la integral I_2, la sustitución $v=\sqrt{3+\frac{1}{t^2}}$. Como resultado, obtenemos

$$I_1=2\int\frac{du}{u^2+8}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{8}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{2(1-x)^2}}+C,$$

$$I_2=-2\int\frac{dv}{3v^2-8}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{v+\sqrt{\frac{8}{3}}}{v-\sqrt{\frac{8}{3}}}\right|+C=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}+\sqrt{\frac{8}{3}}}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}}\sqrt{\frac{8}{3}}}\right|+C.$$

§ 11. Integrales elípticas

Las integrales de irracionalidades cuadráticas lógicamente incluyen las siguientes integrales:

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d}\right)dx, \qquad (7.81)$$

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e}\right)dx \qquad (7.82)$$

cuyas funciones subintegrales comprenden la raíz cuadrada de polinomios de tercer o cuarto grado.

Estas integrales se encuentran con mucha frecuencia en aplicaciones. Notemos inmediatamente que las integrales (7.81) y (7.82), *no son, hablando en general, funciones elementales.*

*) Se podría tomar al contrario: $\mu=-1$, $\nu=1$.

Las dos integrales suelen llamarse *elípticas* si no se expresan mediante funciones elementales, y *seudoelípticas* si se expresan mediante funciones elementales *).

Debido a que las integrales (7.81) y (7.82) tienen importancia en aplicaciones, surge la necesidad de confeccionar tablas y gráficas de las funciones que se determinan por estas integrales. Para los coeficientes a, b, c, d y e, que son arbitrarios, es muy difícil hacer las tablas y las gráficas. Por eso surgió el problema de reducir todas las integrales de tipo (7.81) y (7.82) a ciertos tipos de integrales que comprenden el menor número posible de coeficientes arbitrarios (o como se dice reducir las integrales (7.81) y (7.82) a *la forma canónica*).

Ante todo, notemos que la integral (7.81) se reduce a la integral (7.82). En efecto, el trinomio cúbico tiene, a ciencia cierta, al menos una raíz real x_0, por lo que puede representarse en la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_0)(x^2 + px + q)$.

Haciendo la sustitución $x - x_0 = \pm t^2$, transformamos la integral (7.81) en la (7.82).

De este modo, es suficiente considerar solamente la integral (7.82).

En virtud de los resultados del § 6, el polinomio de cuarto grado puede descomponerse en el producto de dos trinomios cuadráticos con coeficientes reales

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x^2 + px + q)(x^2 + p'x + q').$$

Siempre existe una sustitución lineal o lineal fraccional que elimina los términos lineales de ambos trinomios cuadráticos **). Haciendo la sustitución de este tipo, con exactitud de hasta el sumando que es función elemental, transformemos la integral (2.82) a la forma

$$\int \frac{R(t^2)\,dt}{\sqrt{A(1+mt^2)(1+m't^2)}}, \tag{7.83}$$

donde R es cierta función racional. Luego, se puede mostrar que para cualesquiera combinaciones de valores absolutos y signos de las constantes A, m y m' existe una sustitución que reduce la integral (7.83) a la llamada integral canónica

$$\int \frac{R_1(z^2)\,dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \tag{7.84}$$

en la cual mediante k se denota una constante que satisface la condición $0 < k < 1$.

Toda integral canónica (7.84) puede reducirse a tres integrales normales siguientes con exactitud de hasta un sumando que es función elemental:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int \frac{z^2\,dz}{(1-z^2)(1-k^2z^2)}, \quad \int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (0<k<1). \tag{7.85}$$

Las integrales (7.85) suelen llamarse *integrales elípticas de primer, segundo y tercer género*, respectivamente. Como mostró Liouville ***), cada una de estas integrales es función *no elemental*. Las integrales elípticas de primer y segundo género comprenden solamente un parámetro k que toma valores reales del intervalo $0 < k < 1$, y, además, la integral elíptica de tercer género comprende el parámetro h que puede también tomar valores complejos.

---

*) Joseph Liouville, matemático francés (1809—1882).

**) Las denominaciones de estas integrales fueron dadas por primera vez cuando los matemáticos tropezaron con el problema de rectificar la elipse (véase el ejemplo 3 del p. 6 del § 1 del cap. 2, tomo 2).

***) Se demuestra de modo igual que en el p. 5 del § 10.

Legendre *) simplificó aun más las integrales (7.85) haciendo la sustitución $z = \operatorname{sen}\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$.

Empleando esta sustitución, la primera de las integrales (7.85) se transforma en la forma

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}}. \tag{7.86}$$

Con esta sustitución la segunda de las integrales (7.85) resulta ser igual, con exactitud de hasta factor constante, a la diferencia de la integral (7.86) y la siguiente integral:

$$\int \sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}\,d\varphi. \tag{7.87}$$

La tercera de las integrales (7.85) se reduce a la forma

$$\int \frac{d\varphi}{(1+h\operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}\varphi}}. \tag{7.88}$$

Las integrales (7.86), (7.87) y (7.88) suelen llamarse *integrales elípticas de primer, segundo y tercer género*, respectivamente, *en forma de Legendre*.

En las aplicaciones desempeñan un papel especialmente importante las integrales (7.86) y (7.87). Si consideremos que ambas se anulan para $\varphi = 0$, entonces, obtenemos dos funciones bien determinadas que suelen denotarse por los símbolos $F(k, \varphi)$ y $E(k, \varphi)$. Legendre y otros matemáticos examinaron sus propiedades. Para estas integrales fue establecida una serie de fórmulas y confeccionadas tablas amplias y gráficas.

A la par con las funciones elementales, las funciones E y F fueron introducidas a la familia de las funciones que se usan con frecuencia en el análisis. Aquí vale notar otra vez que el concepto de función elemental es de carácter convencional. Además, debemos, subrayar que los problemas del cálculo integral no se limitan de ninguna manera a estudiar funciones integrables en funciones elementales.

---

*) Adrien Marie Legendre, matemático francés (1752—1833).