Propuesta Examen 1

Jesús López Estrada

última revisión Marzo de 2015

Parte. I

1. Resuelve con todo detalle los siguientes problemas, dando -en los casos que corresponda- su dominio de definición:

   align a) Halla el valor de $\int_{-1}^{1} \frac{\cos x}{e^{1/x}+1} b) El problema de Cauchy \operatorname{sen}(2x)y' + \cos(2x)y = 1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{3}$
   $c) La ecuación w'(x) = \alpha w^{3/2} + \beta w \qquad d) y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} + y^2,$ dada la solución particular$y_1(x) = \frac{1}{x}$align

2. Determine cual de las gráficas representa la familia de soluciones para cada una de las siguientes ecuaciones Se muestran las figuras en pantalla desde el cañón

$$a)\ x' = \operatorname{sen} tx \qquad b)\ x' = x^2 - 1 \qquad c)\ x' = 2t + x \tag{1}$$

$$e)\ x' = \frac{x}{t^2 - 1} \tag{2}$$

Parte Aplicada

1. (Esto lleva a una ecuación del tipo $y' = f(x)$) Los modelos matemáticos sobre epidemías han cobrado gran importancia desde principios del siglo XX. Un modelo pionero es el dado por Kermack and McKendrick en 1927:

$$\dot{S}\ (t) = -\beta S(t)I(t) \tag{3}$$

$$\dot{I}\ (t) = \beta S(t)I(t) - \alpha I(t) \tag{4}$$

$$\dot{R}\ (t) = \alpha I(t) \tag{5}$$

   en donde $S(t)$ es el número de individuos susceptibles a enfermarse, $I(t)$ es el número de individuos infectados con capacidad de propagar la enfermedad y $R(t)$ es el número de individuos recuperados y que no contagian a alguien más.

   a) Considerando sólo las primeras dos ecuaciones de este sistema, describe cualitativamente su campo de direcciones. ¿Describe las isoclina $\dot{I}= 0$ y $\dot{S}= 0$?

   b) Considerando solamente las primeras dos ecuaciones, y eliminando la variable independiente (el tiempo), halla una primera integral para las variables de estado I vs S.

   c) Interpreta tus resultados

Parte III. Para casa

1. Muestra que toda solución de la ecuación

$$x' = \frac{x^2 - 1}{2},$$

si no es constante, está dada por

$$\varphi(t) = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t} \quad \text{para alguna} \quad c \neq 0.$$

¿Cuál es el intervalo máximo de definición de estas soluciones? ¿Para qué valor de c se obtiene la solución constante $x(t) \equiv 1$, y para cuál la solución $x(t) \equiv -1$?

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es periódica de periodo $p > 0$, si p es el menor real positivo tal que $f(t + p) = f(t)$, para toda $t \in \mathbb{R}$.

Considera la ecuación diferencial

$$\dot{x} = f(t) \tag{6}$$

con f *continua y periódica de periodo* p.

a) ¿Es natural esperar que las soluciones de (6) sean periódicas? NO

b) Muestra que la ecuación $\dot{x} = \operatorname{sen} t$ tiene soluciones periódicas, mientras que la ecuación $\dot{x} = \operatorname{sen}^2 t$ no.

c) Demuestra que si (6) tiene una solución $\varphi(t)$ periódica entonces todas sus soluciones son periódicas.

d) Si $\varphi(t)$ es una solución de (6) tal que $\varphi(0) = \varphi(p)$ con $p > 0$. Prueba que $\varphi(t)$ es periódica.

Demostración. Tomando $z(t) \equiv \varphi(t + p)$, se tiene que

$$z'(t) = \varphi'(t + p) = f(t + p) = f(t) \tag{7}$$

pues f es periódica y además

$$z(0) = \varphi(0 + p) = \varphi(p) = \varphi(0) \tag{8}$$

la última igualdad por hipótesis. Por tanto, $z(t)$ es solución del problema de Cauchy

$$\dot{x} = f(t), \qquad x(0) = \varphi(0)$$

Luego, por **exixtencia y unicidad** $z(t) \equiv \varphi(t)$; i.e.,

$$\varphi(t + p) = \varphi(t), \quad \text{para toda} t \tag{9}$$

que es lo que se quería demostrar. □

e) Demuestra que $\varphi(t)$ es una solución periódica de periodo $p > 0$ de (6) ssi $\int_0^p f(s)ds = 0$.

f) El promedio $\overline{f}$ de una función periódica $f(t)$ de periodo $p > 0$, se define como

$$\overline{f} = \frac{1}{p}\int_0^p f(s)ds$$

Demuestra que

i) Si $\overline{f} = 0$ entonces las soluciones de (6) son periódicas.

ii) Si $\overline{f} > 0$ entonces las soluciones de (6) tienden a ∞, cuando $t \to \infty$.

iii) Si $\overline{f} < 0$ entonces las soluciones de (6) tienden a $-\infty$, cuando $t \to \infty$.

g) Describe el comportamiento al infinito de las soluciones de las ecuaciones siguientes:

$$\text{i) } y^{'} = sen 2\pi x \qquad \text{ii) } y' = \sqrt{1 - k^2 sen^2 x},\ (0 < k^2 < 1)$$
$$\text{iii) } y' = -\cos^2 x$$

3. (Tractriz) Estando Lienitz en Paris realizando estudios bajo la guía de Huygens, Claude Perrault planteó, en esencia, el siguiente problema: En la esquina sur-poniente de un estanque de agua rectángular se halla un niño cogiendo con una cuerda de longitud a un barquito inicialmente colocado sobre el lado poniente del estanque, después el niño camina sobre el lado sur hacia el oriente manteniendo la cuerda estirada con que sujeta a su juguete ¿Cuál es la curva que describe el barquito?.