Introducción

El tema de este trabajo es la transitividad topológica.

De acuerdo con R. Devaney, una de las tres características que debe tener un sistema dinámico generado a partir de la iteración de una función f para ser caótico, es que f debe ser topológicamente transitiva. Esto es, si $f : X \to X$, para cualesquiera dos conjuntos abiertos U y V no vacios en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Intuitivamente, la transitividad se puede pensar como una revoltura de puntos conforme iteramos f. Es decir, si una función es transitiva, podemos asegurar que hay puntos dentro de cualquier región, que van a dar a cualquier otra región del espacio, por lejos o cerca que esté, bajo alguna iteración de f.

Las otras dos características necesarias para nombrar a un sistema dinámico como caótico, son la sensibilidad a condiciones iniciales y la densidad del conjunto de puntos periódicos. Todos estos conceptos serán explicados en la primera sección del capítulo uno.

El objetivo de este escrito es descubrir cuáles son los subconjuntos compactos de R que admiten funciones topológicamente transitivas (o simplemente transitivas). Para nuestra sorpresa, salvo homeomorfismos, únicamente existen tres distintos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ aptos para este tipo de funciones: los conjuntos finitos, los conjuntos que son la unión finita de intervalos compactos y el conjunto de Cantor.

Este trabajo está dirigido a estudiantes de licenciatura con nociones básicas de topología y cálculo, interesados en los sistemas dinámicos discretos.

La mayor parte de los temas abarcados en esta tesis proviene de tres artículos:

1. Vellekoop M., Berglund R. *On Intervals, Transitivity = Chaos.* The American Mathematical Monthly. vol 101 (1994) pp.353-355.
2. Nagar A., Kannan V., Sesha Sai S.P. *Properties Of Topologically Transitive Maps.* Real Analysis Exchange. vol 27(1) (2001-2002) pp.325-334.
3. Nagar A., Kannan V. *Spaces Admitting Topologically Transitive Maps.* Topology Proceedings. vol 26 (2001-2002) pp.297-306.

Los contenidos de cada capítulo son:

Capítulo uno: además de introducir los conceptos básicos de la teoría de los sistemas dinámicos, demostramos un resultado que establece que en intervalos, la transitividad implica caos. Se analiza una función caótica en el intervalo [0,1] conocida como la función *tienda* y se presentan seis equivalencias de la transitividad. También formalizaremos la relación de la transitividad con la presencia de órbitas densas. Para finalizar el capítulo, se expone una herramienta que es de gran utilidad en la construcción de ejemplos de funciones transitivas: la conjugación topológica.

En el segundo capítulo examinamos dos ejemplos más de funciones transitivas en otros subconjuntos compactos: un conjunto finito y la unión finita de intervalos compactos, para esto se usa el ejemplo visto en el capítulo anterior.

En el capítulo tres se presenta una herramienta útil en los sistemas dinámicos llamada dinámica simbólica. Nosotros la utilizaremos para analizar la dinámica de una función transitiva en un conjunto de Cantor que construiremos a partir de una función definida en toda la recta real. El teorema central de la tesis es el teorema 3.3 que cierra este capítulo, pues es el que establece cuáles son los tres tipos de subconjuntos compactos de los reales que admiten funciones transitivas.

Salimos de la restricción de subconjuntos compactos y dedicamos el capítulo cuatro a funciones transitivas en toda la recta real. Presentamos algunas propiedades topológicas que son consecuencia de la transitividad en $\mathbb{R}$ y un ejemplo de una función transitiva en toda la recta real. Este penúltimo capítulo cierra mostrando una función transitiva en un intervalo abierto.

En el quinto capítulo se expone una función transitiva en la unión numerable de conjuntos de Cantor y otra en la unión de intervalos no compactos. Para concluir, se da una idea (a grandes razgos) de cómo se puede generalizar el resultado de los subconjuntos compactos de la recta real que admiten funciones transitivas a subconjuntos localmente compactos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción a los sistemas dinámicos y la transitividad topológica

El tema central de este trabajo es una característica que presentan algunos sistemas dinámicos llamada transitividad topológica (que para abreviar llamaremos simplemente transitividad).

Comenzaremos este capítulo introduciendo las definiciones y conceptos básicos de la teoría de sistemas dinámicos.

Como sucede con muchos otros conceptos, existen diferentes propiedades que son equivalentes a la transitividad. En el teorema 1.2, presentaremos algunas de ellas, que serán utilizadas en el capítulo cuatro.

Para terminar analizaremos un primer ejemplo de una función transitiva en el intervalo $[0,1]$.

1.1. Primeras definiciones

Un espacio métrico (X,d) y una función f definida en él mismo dan origen a un sistema dinámico.

Definición 1.1 *Para $n \in \mathbb{N}$ definimos la n-ésima iteración de f, que denotamos* *por f^n, como la composición de f con ella misma n veces, es decir,*

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \ veces}$$

Definición 1.2 *Sea $x \in X$. La órbita de x bajo f, que denotaremos por $o(x, f)$, es el conjunto:*

$$\{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$$

es decir, el conjunto formado por todas las iteraciones de f evaluada en x.

Un punto $x \in X$ es un punto fijo de f si $f(x) = x$. Decimos que x es punto periódico de f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$.

Denotamos al conjunto de puntos periodicos de f como:

$$Per(f) = \{x \in X \mid f^n(x) = x \text{ para alguna } n \in \mathbb{N}\}$$

Definición 1.3 *Sea $U \subset X$. Se define la imagen inversa de U de la siguiente manera:*

$$f^{-n}(U) = \{x \in X \mid f^n(x) \in U \ \textit{para alguna} \ n \in \mathbb{N}\}$$

Esto es, los puntos $x \in X$ tales que $f^n(x) \in U$.

Definición 1.4 *Sea $Y \subset X$. Si para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ existe $y \in Y$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$, entonces decimos que Y es denso en X.*

Definición 1.5 *Se dice que $A \subset X$ es invariante bajo f si $f(A) \subset A$.*

Definición 1.6 *Decimos que el sistema dinámico originado por las iteraciones de f es sensible a condiciones iniciales si existe $\beta > 0$ tal que para $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $k \in \mathbb{N}$ y $y \in X$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$ y $d(f^k(x), f^k(y)) \geq \beta$.*

Ahora definiremos la transitividad topológica.

Definición 1.7 *f es topologicamente transitiva (o transitiva) si para cualesquiera dos conjuntos abiertos, U y V, no vacíos contenidos en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Ante la necesidad de nombrar a los sistemas dinámicos que presentan un determinado comportamiento, aparentemente desordenado, nace el término caótico. Existe más de una definición de sistema dinámico caótico. Nosotros estaremos trabajando con la propuesta por R. Devaney que se presenta a continuación.

Definición 1.8 *Un sistema dinámico es caótico si:*

1) el conjunto de puntos periódicos de f es denso en X.

2) La función f es transitiva en X.

3) La función f es sensible a condiciones iniciales.

De la misma manera, la definición de transitividad no es única. A continuación presentaremos seis equivalencias de ésta. A nosotros nos simplificará el trabajo cuando analicemos ciertas funciones en las que no es sencillo comprobar si son transitivas a partir de la definición.

Teorema 1.1 *Sea X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ continua. Son equivalentes:*

i) f es transitiva en X.

ii) Si $W \subset X$ es un conjunto abierto no vacío, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(W)$ es denso en X.

iii) Para cada par U, V de conjuntos abiertos en X, no vacios, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$.

iv) Si $W \subset X$ es un conjunto abierto, no vacío, entonces $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$ es denso en X.

v) Cualquier subconjunto propio de X que es cerrado e invariante bajo f, tiene interior vacío.

vi) Si U es un subconjunto abierto de X y $f^{-1}(U) \subset U$ entonces $U = \emptyset$ o U es denso en X.

Demostración:

Las equivalencias que demostraremos directamente son las siguientes:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, bend left] & ii \arrow[r, bend left] \arrow[rrr, bend right] & iii \arrow[r, bend left] & iv \arrow[lll, bend left] & v \arrow[r, bend left] & vi \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

Es fácil ver, sin embargo, que con ellas queda demostrado el teorema.

i) $\Rightarrow$ *ii*) Supongamos que $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(W)$ no es denso en X. Entonces existe $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x_0) \cap (\cup_{n=1}^{\infty} f^n(W)) = \emptyset$.

Como $B_\delta(x_0)$ es un conjunto abierto, por *i*) tenemos que existe $k \in N$ tal que $f^k(W) \cap B_\delta(x_0) \neq \emptyset$ que es una contradicción pues $B_\delta(x_0)$ no contiene puntos de $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(W)$.

ii) $\Rightarrow$ *iii*) Sean U y V dos conjuntos abiertos distintos del vacío en X. Entonces por *ii*) sabemos que $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(V)$ es denso en X.

Como U es un abierto en X, tenemos que $U \cap \cup_{n=1}^{\infty} f^n(V) \neq \emptyset$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^k(V) \neq \emptyset$, y por lo tanto existe $x \in V$ tal que $f^k(x) \in U$.

Por lo tanto $V \cap f^{-k}(U) \neq \emptyset$.

iii) $\Rightarrow$ *iv*) Sea $W \subset X$ un abierto no vacío. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Debemos probar que existe $y \in \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$ tal que $d(x, y) < \varepsilon$.

Sea $U = B_\delta(x)$. Como W es un conjunto abierto en X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap f^{-k}(W) \neq \emptyset$ y entonces $U \cap \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W) \neq \emptyset$.

Por lo tanto $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(W)$ es denso en X.

iv) $\Rightarrow$ *i*) Sea $V \subset X$ un conjunto abierto. Entonces por *iv*) se tiene que $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V)$ es denso en X.

Sea U un abierto en X. Entonces existe un punto de $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(V)$ contenido en U, es decir, existe $y \in U$ tal que $f^k(y) \in V$ para alguna $k \in \mathbb{N}$.

Como $y \in U$, $f^k(y) \in f^k(U)$.

Por lo tanto $V \cap f^k(U) \neq \emptyset$.

$ii) \Rightarrow v)$ Sea V un conjunto, denotaremos $intV$ al interior de V. Supongamos que existe un subconjunto, Y, propio, cerrado e invariante con interior distinto del vacío. Entonces existe $y \in intY$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(y) \subset Y$.

Como $B_\varepsilon(y)$ es un abierto, por $ii)$ sabemos que $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(B_\varepsilon(y))$ es denso en X. Por lo tanto $\overline{\cup_{n=0}^{\infty} f^n(B_\varepsilon(y))} = X$.

Dado que Y es invariante bajo f, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n(B_\varepsilon(y)) \subset Y$, y con ello $\cup_{n=1}^{\infty} f^n(B_\varepsilon(y)) \subset Y$.

Como además Y es cerrado tenemos que $\overline{\cup_{n=1}^{\infty} f^n(B_\varepsilon(y))} = X \subset Y$. Por lo tanto $X = Y$ que es una contradicción pues Y es subconjunto propio de X.

$v) \Rightarrow vi)$ Sea U un subconjunto abierto no vacío en X, tal que $f^{-1}(U) \subset U$. Debemos probar que U es denso.

Observación 1. $U^c = X - U$ es cerrado.

Observación 2. $U^c \subset f^{-1}(U^c)$ pues si esto no sucediera existiría $x \in U^c$ tal que $x \notin f^{-1}(U^c)$ y entonces $x \in f^{-1}(U)$ y por lo tanto $x \in U$, pero esto no puede ser ya que $x \in U^c$.

Como $f(U^c) \subset U^c$, entonces U^c es cerrado, invariante y propio, entonces $int\ U^c = \emptyset$ por lo tanto U es denso.

$vi) \Rightarrow iii)$ Sean U y V conjuntos abiertos no vacios en X. Como f es continua, entonces $f^{-1}(U)$ es un conjunto abierto en X. Entonces $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un conjunto abierto no vacío. Y

$$f^{-1}(\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U)) \subset \ \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n-1}(U) \subset \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U),$$

entonces por $vi)$ es denso.

Entonces $\cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto existe $k \in N$ tal que $f^{-k}(U) \cap V \neq \emptyset$. ■

1.2. En intervalos, transitividad implica caos

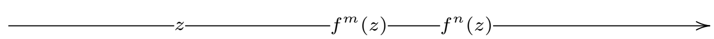
En 1994 M. Vellekoop y R. Berglund demostraron que si X es un intervalo y f una función continua, entonces la transitividad de f implica que el conjunto de puntos periódicos es denso en X. Dos años antes J.Banks et al, probaron que en un espacio métrico V, sin puntos aislados, las condiciones $i)$ y $ii)$ de la definición de sistema dinámico caótico implican que se cumple la condición $iii)$.

Por tanto, en intervalos, la transitividad implica caos.

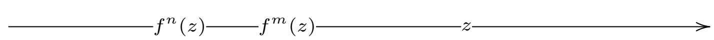
Este resultado es de gran utilidad pues simplifica determinar cuándo un sistema dinámico es caótico, para funciones definidas en intervalos.

A continuación presentaremos la demostración del teorema de Vellerkoop y Berglund, para luego, por el teorema de Banks, concluir que en intervalos, la transitividad implica caos. Para ello presentamos los siguientes dos lemas que serán necesarios para demostrar el teorema 1.2.

Lema 1.1 *Supongamos que I es un intervalo, no necesariamente acotado, y $f : I \to I$ una función continua. Si $J \subset I$ es un intervalo que no contiene puntos periódicos de f y $\{z, f^m(z), f^n(z)\} \subset J$, con $0 < m < n$, entonces $z < f^m(z) < f^n(z)$ (Caso 1), o bien $z > f^m(z) > f^n(z)$ (Caso 2).*



Caso 1



Caso 2

Demostración:

Primer caso.

Sean $z \in J$, $J \subset I$ y $0 < m < n$ en N tales que $\{z, f^m(z), f^n(z)\} \subset J$ y $J \cap Per(f) = \emptyset$.

Demostraremos que si

$$z < f^m(z),$$

entonces

$$z < f^m(z) < f^n(z).$$

Supongamos que $f^n(z) < f^m(z)$ Sea

$$g(x) = f^m(x).$$

Demostraremos por inducción sobre k que

$$z < g(z) < g^{k+1}(z) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

Por hipótesis $z < g(z)$ de donde $g(z) - z > 0$.

Para $k = 1$ debemos probar que $g(z) < g^2(z)$. Supongamos que $g^2(z) < g(z)$, entonces $g(g(z)) - g(z) < 0$.

Sea $h_1(x) = g(x) - x$. Entonces $h_1(z) > 0$ y $h_1(g(z)) < 0$. Por el teorema del valor intermedio, existe $p \in (z, g(z))$ tal que $h_1(p) = 0$, es decir, $g(p) = p$.

$$\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}\, h_1(z)=g(z)-z \,\rule[0.5ex]{12em}{0.4pt}\, 0 \,\rule[0.5ex]{2em}{0.4pt}\, h_1(g(z))=(g(z))-g(z) \,\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}\!\!\longrightarrow$$

Esto implica que $f^m(p) = p$, es decir, $p \in \mathrm{Per}(f)$ que es una contradicción pues $\{z, g(z)\} \subset J$.

Por lo tanto $g(z) < g^2(z)$.

Supongámoslo válido para $k-1$, así tenemos que $z < g(z) < g^k(z)$ y entonces $g^k(z) - z > 0$

Demostraremos que se cumple para k, es decir, $z < g(z) < g^{k+1}(z)$. Supongamos que $g^{k+1}(z) < g(z)$, entonces $g^k(g(z)) - g(z) < 0$

Sea $h_2(x) = g^k(x) - x$. Entonces $h_2(z) > 0$ y $h_2(g(z)) < 0$.

$$h_2(g(z))=g^k(g(z))-g(z) \,\rule[0.5ex]{6em}{0.4pt}\, 0 \,\rule[0.5ex]{4em}{0.4pt}\, h_2(z)=(g^k(z))-z \,\rule[0.5ex]{12em}{0.4pt}\!\!\longrightarrow$$

Por el teorema del valor intermedio, existe $q \in (z, g(z))$ tal que $h_2(q) = 0$, es decir, $g^k(q) = q$ que implica que $f^{mk}(q) = q$, es decir $q \in \mathrm{Per}(f)$ que es una contadicción pues $\{z, g(z)\} \subset J$.

Por lo tanto $g(z) < g^{k+1}(z)$.

Y por lo anterior se cumple la desigualdad $z < g(z) < g^{k+1}(z)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

En particular $z < g^k(z)$ para $k = n - m$, de donde

$$z < f^{(n-m)m}(z).$$

Ahora sea $g(x) = f^{n-m}(x)$. Probaremos por inducción que

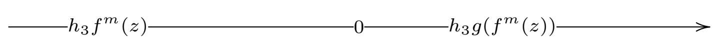
$$g^{k+1}(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z).$$

Por hipótesis $f^n(z) = g(f^m(z)) < f^m(z)$ y entonces $g(f^m(z)) - f^m(z) < 0$.

Para $k = 1$ debemos ver que $g^2(f^m(z)) < g(f^m(z))$. Supongamos que $g(f^m(z)) < g^2(f^m(z))$, entonces $g(g(f^m(z))) - g(f^m(z)) > 0$.

Sea $h_3(x) = g(x) - x$.

Así tenemos que $h_3(f^m(z)) < 0$ y $h_3(g(f^m(z)) > 0$.



Entonces por el teorema del valor intermedio existe $r \in (g(f^m(z)), f^m(z))$ tal que $h_3(r) = 0$, es decir, $g(r) = r$ que implica que $f^{n-m}(r) = r$ y entonces $r \in \mathrm{Per}(f)$ pero esto es una contradicción.

Por lo tanto $g^2(f^m(z)) < g(f^m(z))$.

Supongámoslo válido para $k - 1$, entonces $g^k(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z)$ y así $g^k(f^m(z)) - f^m(z) < 0$.

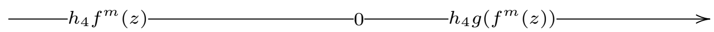
Por demostrar que se cumple para k.

Supongamos que $g(f^m(z)) < g^{k+1}(f^m(z))$ entonces

$$g(g(f^m(z))) - g(f^m(z)) > 0.$$

Sea $h_4(x) = g^k(x) - x$.

Entonces $h_4(g(f^m(z)) > 0$ y $h_4(f^m(z)) < 0$.



Y entonces por el teorema del valor intermedio existe $s \in (g(f^m(z)), f^m(z))$ tal que $h_4(s) = 0$, es decir, $g^k(s) = s$ que implica que $f^{(n-m)k}(s) = s$ y entonces $s \in$Per(f) pero esto es una contradicción.

Por lo tanto $g^{k+1}(f^m(z)) < g(f^m(z))$.

Y se cumple $g^{k+1}(f^m(z)) < g(f^m(z)) < f^m(z)$ para toda $k \geqslant 1$.

En particular sucede para $k = m - 1$.

Sustituyendo este valor de k tenemos: $f^m(z) > g^m(f^m(z)) = f^{(n-m)m}(f^m(z))$, de donde $f^{(n-m)m}(f^m(z)) - f^m(z) < 0$. Por hipótesis $f^{(n-m)m}(z) - z > 0$.

Sea $h_5(x) = f^{(n-m)m}(x) - x$.

Entonces $h_5(z) > 0$ y $h_5(f^m(z)) < 0$, entonces por el teorema del valor intermedio existe $t \in (z, f^m(z))$ tal que $h_5(t) = 0$, es decir, $f^{(n-m)m}(t) = t$ y entonces $t \in$Per(f) pero esto es una contradicción.

Por lo tanto $f^m(z) < f^n(z)$ y como $z < f^m(z)$ tenemos que $z < f^m(z) < f^n(z)$.

Análogamente se prueba que si

$$f^m(z) < z,$$

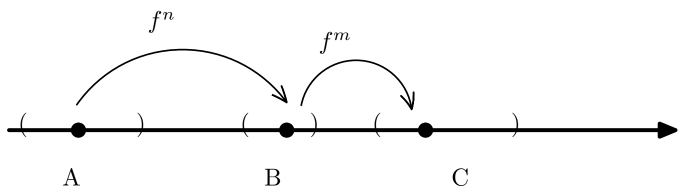
entonces

$$f^n(z) < f^m(z) < z$$

con $0 < m < n$. ■

Un segundo Lema que necesitamos para la demostración del teorema es el siguiente:

Lema 1.2 *Sean A, B y C, tres abiertos, no vacíos, contenidos en I. Y sea $f : I \to I$ una función continua y transitiva. Entonces existe $a \in A$ y $m, n \in \mathbb{N}$ tales que $f^n(a) \in B$ y $f^m(f^n(a)) \in C$.*



DEMOSTRACIÓN:

Como f es continua y C es abierto, $f^{-s}(C)$ es también un abierto para toda $s \in N$.

Como f es transitiva existe $m \in N$ tal que $f^{-m}(C) \cap B \neq \emptyset$, y tambien $f^{-m}(C) \cap B$ es un abierto contenido en B.

Existe $n \in N$ tal que $f^n(A) \cap (f^{-m}(C) \cap B) \neq \emptyset$, es decir, existe un punto $a \in A$, que cumple $f^n(a) \in B$ y $f^n(a) \in f^{-m}(c)$ lo que implica que $f^m(f^n(a)) \in C$.

■

Teorema 1.2 *Sea I un intervalo, no necesariamente acotado, y $f : I \to I$ una función continua y transitiva. Entonces los puntos periódicos de f son densos en I.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea J un intervalo no vacío en I. Sean A, B *y* C tres abiertos contenidos en J tales que $C \subset A$ y $A \cap B = \emptyset$, por el lema anterior existen $n,\ m \in N$ y $a \in A$ tales que $f^n(a) \in B$ y $f^m(f^n(a)) \in C$. Ésto, junto con el Lema 1,1 conduce a una contradicción. Por lo tanto los puntos periódicos de f son densos.

Como la transitividad topológica y la densidad de puntos periódicos implican sensibilidad a condiciones iniciales, para probar la proposición basta con demostrar que los puntos periódicos son densos.

Dado que $f : I \to I$ es transitiva y el conjunto de puntos periódicos es denso en I, podemos concluir que f es caótica.

■

1.3. Relación entre transitividad y presencia de órbitas densas

Intuitivamente es claro que debería existir alguna relación entre la transitividad topológica y la existencia de órbitas densas, sin embargo, para formalizar este hecho debemos introducir un nuevo concepto: los espacios de Baire.

Definición 1.9 *Decimos que X es un espacio de Baire si dada cualquier colección numerable $\{A_n\}$ de subconjuntos cerrados de X, cada uno con interior vacío en X entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ tiene interior vacío en X. Equivalentemente, si $\{B_n\}$ es una colección numerable de conjuntos abiertos, cada uno de ellos denso en X, su intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$ también es un conjunto denso en X.*

Teorema 1.3 *Sea $f : X \to X$ una función transitiva en un espacio métrico, completo y separable, entonces existe $x \in X$ tal que su órbita es densa en X.*

DEMOSTRACIÓN:

Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una colección infinita numerable de bolas abiertas de tamaño $\frac{1}{n}$ que cubre X.

Consideremos la colección de todas estas bolas. Como esta es la unión de conjuntos numerables, debe ser numerable. Llamaremos $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ a esta colección.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $G_k = \cup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(U_k)$ es abierto y denso en X.

Demostraremos que algún punto de la órbita de y pasa tan cerca cómo se desee de cualquier punto arbitrario de X.

Por el teorema de Baire, $\cap_{k=1}^{\infty} G_k$ es denso en X. Entonces existe $y \in X$ tal que $y \in G_k$ para toda $k \in \mathbb{N}$.

Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Existe U_{k_0} tal que $x \in U_{k_0}$ y el radio de $U_{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces existe $f^m(y)$, para alguna $m \in \mathbb{N}$, tal que $f^m(y) \in U_{k_0}$. Entonces $|x - f^m(y)| < \varepsilon$.

■

Observemos que, en realidad, basta que el espacio donde esté definida f sea compacto para que sean válidos los argumentos de la demostración y podamos garantizar la presencia de órbitas densas.

A continuación veremos que si agregamos la hipótesis de que todo punto de X sea punto de acumulación de X, también se cumple el inverso.

Teorema 1.4 *Sea X un espacio compacto tal que todo punto es punto de acumulación y $f : X \to X$ continua. Si existe $x \in X$ tal que su órbita bajo f es densa en X, entonces f es transitiva.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $x \in X$ tal que su órbita es densa.

Dado que la órbita de x bajo f es densa si le quitamos un número finito de puntos sigue siendo densa, es decir, $o(x, f) - \{x, f(x), ...f^n(x)\}$ es denso en X.

Sean U y V dos abiertos en X distintos del vacío. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$, tal que $f^m(x) \in U$ Como la órbita de $f^m(x)$ es densa en X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(f^m(x)) \in V$.

Por lo tanto $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$

Entonces existe $k \in N$, $n < k$, tal que $f^k(x) \in U$. Por lo tanto

$$f^{k-n}(V) \cap U \neq \emptyset.$$

■

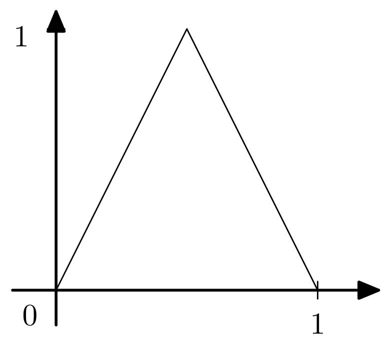
1.4. Ejemplo de una función caótica definida en el intervalo $[0, 1]$

Sea $t : [0, 1] \to [0, 1]$. Definimos la función llamada tienda, como sigue:

$$t(x) = \begin{cases} 2x & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Nótese que el intervalo $[0, 1]$ es un subconjunto compacto de los reales, esto no parece tener importancia por el momento pero más adelante será útil.

Como $t : I \to I$ es continua, por el teorema 1.2, basta con probar que es transitiva para concluir que es caótica.



Proposición 1.1 *La función* $t : [0,1] \to [0,1]$ *es caótica en* $[0,1]$.

Sean U y V dos abiertos en $[0,1]$ distintos del vacío. En particular, sea $U = (a,b)$ con $a, b \in (0,1)$ entonces la longitud de U es igual a $b - a$.

Observemos que t^m, con $m \in \mathbb{N}$, manda a cada intervalo de la forma $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$ con $k = 0, ..., 2m - 1$ suprayectivamente en el $[0,1]$.

Como la longitud de cada uno de los intevalos de la forma $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$ es $\frac{1}{2^m}$, existe $m \in N$ tal que $2(\frac{1}{2^m}) = \frac{1}{2^{m-1}} \leq (b-a)$. Entonces (a,b) contiene de menos a uno de los intervalos $[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]$, de forma que $t^m([\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}]) = [0,1]$. Y por lo tanto $t^m(a,b) = [0,1]$.

Por lo tanto $t^m(a,b) \cap V \neq \emptyset$ y entonces $t^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto t es transitiva. ■

Observación. Dado cualquier subintervalo $J \subset [0,1]$ existe $m \in N$ tal que $t^m(J) = [0,1]$.

Sea $J \subset [0,1]$ y $n \in N$ tal que $2(\frac{1}{2})^n \leq$ *long* J. Entonces J contiene un intervalo de forma $[\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]$ con $m < 2^n$.

Entonces $t^n([\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]) = [0,1]$ y por lo tanto $t^n(J) = [0,1]$.

Además para toda $s > n$ se tiene $t^s([\frac{m-1}{2^n}, \frac{m}{2^n}]) = t^{s-n}([0,1]) = [0,1]$ lo que implica que $t^s(J) = [0,1]$.

1.5. Conjugación topológica

Esta herramienta es muy útil en la construcción de funciones a partir de otras que preserven comportamientos equivalentes. En particular, nos permitirá crear más funciones topológicamente transitivas en base a las que ya conocemos.

Definición 1.10 *Se dice que dos funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son conjugadas topológicas si existe una función $h : X \to Y$ biyectiva, continua y con inversa continua, es decir, un homeomorfismo que hace que el siguiente diagrama conmute. Es decir, que para toda $x \in X$, se tenga que $h(f(x)) = g(h(x))$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Así tenemos que $h \circ f = g \circ h$ o equivalentemente $g = h \circ f \circ h^{-1}$.

Proposición 1.2 *La transitividad se preserva bajo conjugación topológica. Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ conjugadas topológicas. Si f es transitiva, entonces g también lo es.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean U' y V' dos abiertos no vacíos en Y. Debemos probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(U') \cap V' \neq \emptyset$.

Por la continuidad de h tenemos que $h^{-1}(U')$ y $h^{-1}(V')$ son dos abiertos no vacíos en X.

Dado que f es transitiva existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(h^{-1}(U')) \cap h^{-1}(V') \neq \emptyset$, esto es, existe $x \in X$ tal que $x \in h^{-1}(V') \cap f^n(h^{-1}(U'))$. Entonces $h(x) \in h(h^{-1}(V')) \cap h(f^n(h^{-1}(U'))) = V' \cap g^n(U')$. Por lo tanto $V' \cap g^n(U') \neq \emptyset$, y g es transitiva. ■

Ejemplo

Sean $t : [0,1] \to [0,1]$ la función tienda definida anteriormente y $L : [0,1] \to [0,1]$ definida por $L(x) = 4x(1-x)$.

Demostraremos que estas dos funciones son topológicamente equivalentes, es decir, existe un homeomorfismo $h : [0,1] \to [0,1]$ tal que satisface $L \circ h = h \circ g$.

Esta función L forma parte del conjunto de funciones de la forma $L_\mu(x) = \mu x(1-x)$, con $\mu \in R^+$ llamado "familia logística".

Sea $h : [0,1] \to [0,1]$ dada por $h(x) = sen^2(\frac{\pi x}{2})$. Notemos que h es continua biyectiva y con inversa continua.

Sea $x \in [0,1]$, observemos las siguientes composiciones:

- $L \circ h(x) = L(sen^2(\frac{\pi x}{2})) = 4sen^2(\frac{\pi x}{2})(1-sen^2(\frac{\pi x}{2})) = 4sen^2(\frac{\pi x}{2})\cos^2(\frac{\pi x}{2}) = (2sen(\frac{\pi x}{2})\cos(\frac{\pi x}{2}))^2 = sen^2(\pi x)$
- Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$ entonces $h \circ t(x) = h(2x) = sen^2(\frac{\pi(2x)}{2}) = sen^2(\pi x)$. Ahora, si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ entonces $h \circ t(x) = h(2-2x) = sen^2(\frac{\pi(2-2x)}{2}) = sen^2(\pi - \pi x) = sen^2(\pi x)$.

Por lo tanto L y h son conjugadas topológicas.■

Concluimos entonces que L es transitiva en [0,1].

De hecho, la conjugación topológica entre t y L nos permite también asegurar que el conjunto de puntos periódicos de L es denso y que la función es sensible a condiciones iniciales. Es decir, L es caótica en [0,1].

Como siempre existe un homeomorfismo entre cualesquiera dos intervalos cerrados podemos concluir que dado que en todo intervalo cerrado $[a,b]$ existe una función $\varphi : [a,b] \to [a,b]$ que es transitiva.

Aun más, esta herramienta nos permite crear una infinidad de funciones transitivas en un conjunto X con sólo encontrar una función transitiva en un conjunto homeomorfo.

Además nos da la posibilidad de formar grupos de funciones con comportamientos equivalentes sin la necesidad de analizar, a profundidad, cada una de ellas.

Continuaremos con más ejemplos de funciones transitivas en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Más ejemplos de funciones transitivas en subconjuntos compactos de la recta real.

Concluimos el capítulo anterior demostrando que todo intervalo compacto, $[a,b]$, admite una función transitiva. Para ello introdujimos la conjugación topológica.

En este capítulo, analizaremos dos ejemplos más de funciones transitivas definidas en otros subconjuntos compactos de los reales.

2.1. Una función transitiva en un conjunto finito

Iniciaremos con una función que suele ser conocida como la permutación cíclica.

Sea $X = \{1, 2, \ldots, m\}$ para alguna $m \in \mathbb{N}$.

Sea $f : X \to X$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x = 1, \ldots, m-1 \\ 1 & \text{si } x = m \end{cases}$$

La dinámica de f puede representarse así:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[r, bend left] & \cdots \arrow[r, bend left] & m-1 \arrow[r, bend left] & m \arrow[lllll, bend left] \end{tikzcd}$$

Observemos que cualquier punto de X, bajo iteraciones de f, tiene como imagen a todos los demás puntos de X. Esto es, para toda $x \in X$ la órbita de x bajo f es X. Por lo tanto, si $a, b \in X$, existe $n \in \mathbb{N},\ n \leq m$ tal que

$$f^n(a) = b.$$

Teorema 2.1 *f es transitiva en $X = \{1, 2, \cdots, m\}$.*

Demostración:

Recordemos que un abierto en X está determinado por la intersección de un abierto $A \subset R$ con X.

Sean U y V dos abiertos no vacíos en X. Entonces existen $u \in U$ y $v \in V$. Como ya vimos, esto implica que existe $n \in \mathbb{N}$ $(n \leq m)$ tal que $f^n(u) = v$.

Esto implica que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto f es transitiva. $\blacksquare$

En resumen, todo conjunto finito admite una función transitiva.

2.2. Función transitiva en la unión finita de intervalos compactos

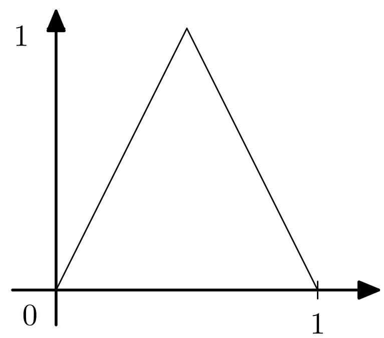
Sea $X = [0,1] \cup [2,3] \cup \cdots \cup [2n, 2n+1]$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, es decir, X es la unión finita de intervalos cerrados.

Mostraremos que existe una función $f : X \to X$ tal que es transitiva.

- Comenzaremos con el caso $n = 0$.

Tenemos entonces que $X = [0,1]$, como ya vimos en el capitulo 1, la función definida como

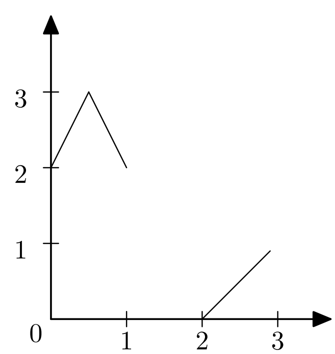
$$t(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2 - 2x, & \text{si } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$



es transitiva en $[0,1]$.

- Para $n = 1$ se tiene que $X = [0,1] \cup [2,3]$. Definimos f de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} t(x) + 2, & \text{si } x \in [0,1], \\ x - 2, & \text{si } x \in [2,3]. \end{cases}$$



Dado un intervalo $J \subset [0,1]$ observemos que para todo $x \in J$ se tiene que $f^2(x) = t(x)$. Como ya vimos, en el capítulo 1, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t^m(J) = [0,1]$ y por lo tanto $f^{2m}(J) = [0,1]$ y $f^{2m+1}(J) = [2,3]$.

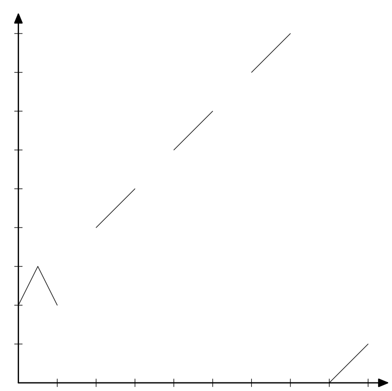
Además si tenemos un intervalo $J' \subset [2,3]$, $f(J') \subset [0,1]$. Por un razonamiento análogo existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $f^{2s+1}(I') = [0,1]$ y $f^{2s+2}(I') = [2,3]$

Por lo tanto para cualesquiera dos intervalos A, B abiertos no vacíos en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(A) \cap B \neq \emptyset$.

Por lo tanto f es transitiva. ■

- Análogamente para $n = k$, con $k \geq 1$, definimos f como:

$$f(x) = \begin{cases} t(x) + 2, & \text{si } x \in [0,1], \\ x + 2, & \text{si } x \in [2,3], \\ \vdots & \vdots \\ x + 2, & \text{si } x \in [2k-2, 2k-1], \\ x - 2k, & \text{si } x \in [2k, 2k+1]. \end{cases}$$



Con argumentos análogos a los del caso $n = 1$ se puede ver que cualquier intervalo en X crece bajo iteraciones de f hasta cubrir cada uno de los intervalos que conforman a X. Por tanto, se puede afirmar que f es transitiva. ■

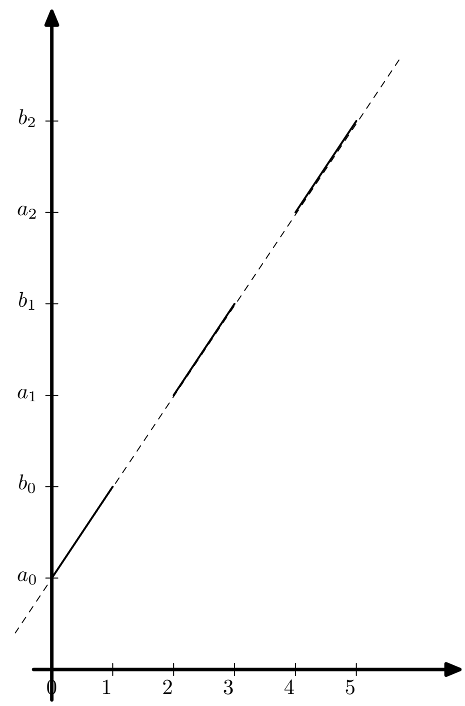
Observemos que si Y es la unión finita de intervalos compactos y ajenos, digamos

$$Y = [a_1, b_1] \cup \cdots \cup [a_k, b_k]$$

existe h, un homeomorfismo de

$$X = [0,1] \cup \cdots \cup [2(k-1), 2(k-1)+1]$$

en Y. Simplemente, para cada par de intervalos observemos que $h_n : [2n, 2{+}1] \to [a_n, b_n]$ dado por $h_n(x) = a_n(2n + 1 - x) + b_n(x - 2n)$ nos permite pasar de uno a otro. Además debemos notar que la colección de las funciones h_n puede extenderse a un homeomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:



Esto hace posible definir una función transitiva en Y. ■

Por tanto, se tiene que todo compacto formado por una cantidad finita de intervalos cerrados admite una función transitiva.

Capítulo 3

Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ que admiten funciones transitivas

En este capítulo analizaremos otros ejemplos de funciones transitivas en distintos subconjuntos compactos de los reales. En el transcurso desarrollaremos otra herramienta más llamada dinámica simbólica que nos servirá, principalmente, para analizar la dinámica de la función definida en un conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor es importante pues es muy utilizado en la teoría de los sistemas dinámicos.

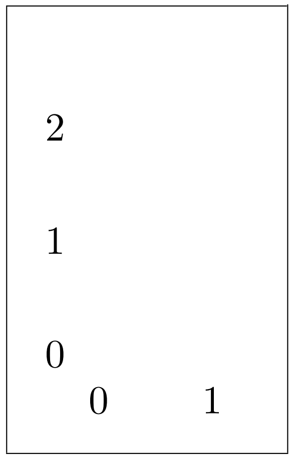
Concluiremos con un teorema muy importante que establece cuáles son los únicos tres subconjuntos compactos (salvo homeomorfismos) de $\mathbb{R}$ que admiten funciones transitivas.

3.1. Una función transitiva en el conjunto de Cantor

En esta sección construiremos una función transitiva en el conjunto de Cantor. Utilizaremos la dinámica de una función definida en los reales para recordar cómo está definido dicho conjunto y proponer una función transitiva en él.

Sea $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x) = \begin{cases} 3x, & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 3x, & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$



Observemos que $T(x)$ tiene solamente dos puntos fijos, uno en la zona donde $x \leq \frac{1}{2}$ que es el 0 y otro en la zona donde $\frac{1}{2} \leq x$, el $\frac{3}{4}$. Comenzaremos a analizar su dinámica por pedazos:

Sea $x < 0$. Entonces

$$T(x) = 3x < 0, T^2(x) = 3^2 x < 0, \cdots, T^n(x) = 3^n x < 0, ...$$

Notemos que $\{T^n(x)\}$ forma una sucesión decreciente tal que

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x) = -\infty.$$

Sea $x > 1$. Entonces $3 < 3x$ y por lo tanto $T(x) = 3 - 3x < 0$. De aquí se sigue , cómo en el caso anterior,que

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x) = -\infty.$$

Desde el punto de vista dinámico el comportamiento de estos puntos no es interesante, pues el destino de todos ellos, bajo iteraciones de T es $-\infty$ cuando n tiende a infinito.

Nuestra meta será analizar la dinámica de los puntos cuya órbita es acotada. Por lo que acabamos de ver, este conjunto debe estar contenido en el intervalo $[0, 1]$.

Nótese que el valor máximo de la función T ocurre dentro del intervalo $[0, 1]$ y es mayor a uno. Como la función es continua, esto implica que algunos puntos salen del intervalo al aplicarles T.

Observemos que $T(\frac{1}{3}) = 1$ y $T(\frac{2}{3}) = 1$.

Como $T([0, \frac{1}{2}]) = [0, \frac{3}{2}]$ y para toda $x \in [0, \frac{1}{2}]$ se tiene que $T(x) = 3x$, entonces:

1. $T|_{[0,\frac{1}{3}]} : [0, \frac{1}{3}] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo.
2. Si $x \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$ entonces $T(x) > 1$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
3. Si $[a, b] \subset [0, \frac{1}{3}]$ entonces $T([a, b]) = [3a, 3b]$, es decir,$T|_{[0,\frac{1}{3}]}$ transforma intervalos de longitud L en intervalos de longitud $3L$.

De manera análoga, como $T([\frac{1}{2}, 1]) = [0, \frac{3}{2}]$ y para toda $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $T(x) = 3 - 3x$ entonces:

1. $T|_{[\frac{2}{3},1]} : [\frac{2}{3}, 1] \to [0, 1]$ es un homeomorfismo.
2. Si $x \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ entonces $T(x) > 1$ y $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.
3. Si $[a, b] \subset [\frac{2}{3}, 1]$ entonces $T([a, b]) = [3-3a, 3-3b]$, es decir, $T|_{[\frac{2}{3},1]}$ también transforma intervalos de longitud L en intervalos de longitud $3L$.

Por lo tanto si $x \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ entonces $T(x) > 1$, y con ello $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.

Observemos que $[0, 1]- (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ está formado por dos intervalos cerrados, uno a la izquierda, $[0, \frac{1}{3}]$, que llamaremos I_0 y otro a la derecha, $[\frac{2}{3}, 1]$ que llamaremos I_1.

Sea $C_1 = I_0 \cup I_1$. Observemos que $T[I_0] = T[I_1] = [0, 1]$. Entonces si x tiene órbita acotada, $x \in C_1$, es decir, el conjunto de puntos cuya órbita es acotada está contenido en C_1.

Observación 1: Denotaremos la longitud de un intervalo J como $longJ$. Si $J \subset [0, 1]$ es un intervalo de longitud L, entonces $T^{-1}(J)$ está formado por dos intervalos J_0 y J_1, tales que $J_0 \subset I_0$, $J_1 \subset I_1$ y

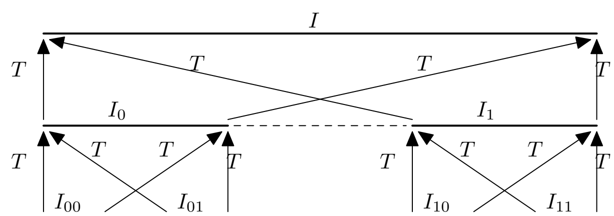
$$longJ_0 = longJ_1 = \frac{1}{3}longJ.$$

En particular, si tomamos $J = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ podemos concluir que existen puntos en J_0 y puntos en J_1 que no tienen órbita acotada.

Puesto que $T(I_0) = [0,1]$ existen puntos en I_0 que salen del intervalo a la segunda iteración de T y por ello para esos puntos $\lim_{n\to\infty} T^n(x) = -\infty$.

Así, I_0 queda dividido en dos intervalos que llamaremos I_{00} y I_{01} tales que $T(I_{00}) = I_0$ y $T(I_{01}) = I_{1.}$

De manera análoga existen dos intervalos I_{10} y I_{11} en I_1 tales que $T(I_{10}) = I_0$ y $T(I_{11}) = I_{1.}$



Es decir, $I_{00} = I_0 \cap T^{-1}(I_0)$

$$I_{01} = I_0 \cap T^{-1}(I_1)$$

$$I_{10} = I_1 \cap T^{-1}(I_0)$$

$$I_{11} = I_1 \cap T^{-1}(I_1).$$

Notemos también que cada uno de estos cuatro intervalos tiene longitud $(\frac{1}{3})^2$.

Sea

$$C_2 = \cup_{i_1 i_2 \in \{0,1\}} I_{i_1 i_2}.$$

Observemos que C_2 es cerrado y que $C_2 \subset C_1$. Además C_2 contiene al conjunto de puntos cuya órbita es acotada.

Como en cada uno de los cuatro intervalos, $I_{i_1 i_2}$, sucede que $T(I_{i_1 i_2}) = I_{i_2}$ entonces $T^2(I_{i_1 i_2}) = [0,1]$ y por lo tanto habrá puntos que, a la siguiente iteración, escapen del intervalo $[0,1]$. Quitando estos puntos de cada intervalo $I_{i_1 i_2}$ se da lugar a dos intervalos $I_{i_1 i_2 i_3}$ de longitud $(\frac{1}{3})^3$.

Estos 2^3 intervalos cerrados $I_{i_1 i_2 i_3}$ con $i_1 i_2 i_3 \in \{0,1\}$ son tales que

$$I_{i_1 i_2 i_3} = I_{i_1} \cap T^{-1}(I_{i_2}) \cap T^{-2}(I_{i_3}).$$

Llamemos C_3 a la unión de todos ellos.

Tenemos entonces que el conjunto de puntos con órbita acotada está contenido en $C_3 \subset C_2 \subset C_1 \subset [0,1]$.

Siguiendo este proceso, en el $n-$ésimo paso tenemos 2^n intervalos cerrados

$$I_{i_1 i_2 \ldots i_n},\ i_j \in \{0,1\},$$

$1 \leq j \leq n$, cada uno de ellos de longitud $(\frac{1}{3})^n$ tales que:

$i) I_{i_1 i_2 \ldots i_n} = I_{i_1} \cap T^{-1}(I_{i_2}) \cap \ldots \cap T^{-n}(I_{i_n})$

$ii)$ $T^n|_{I_{i_1 i_2 \ldots i_n}} : I_{i_1 i_2 \ldots i_n} \to [0,1]$ es un homeomorfismo.

$iii)$

$$\begin{array}{c} T(I_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = I_{i_2 \ldots i_n} \\ T(I_{i_2 \ldots i_n}) = I_{i_3 \ldots i_n} \\ \vdots \\ T(I_{i_{n-1} i_n}) = I_{i_n} \end{array}$$

$iv)$ Si C_n es la unión de estos 2^n intervalos, entonces el conjunto de puntos cuya órbita es acotada está contenido en $C_n \subset C_{n-1} \subset \cdots \subset C_1 \subset [0,1]$

Observemos que de $iii)$ se sigue que para toda $n \geq 2$ se tiene que $T(C_n) = C_{n-1}$ y $T(C_1) = [0,1]$.

Sea C:

$$C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Este conjunto es conocido como el conjunto de Cantor.

Se dice que un conjunto A es perfecto si todos sus puntos son puntos de acumulación de A.

Topológicamente, un conjunto de Cantor es caracterizado por ser un conjunto métrico, cerrado, totalmente disconexo y perfecto. Se prueba que cualesquiera dos subconjutos con estas características son homeomorfos. [**?**, 6]

Como $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$, y cada C_n es subconjunto de $[0,1]$, se tiene que si $c \in C$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $t^n(x) \in [0,1]$ y con ello la órbita de x bajo T está acotada.

Si $x \notin C$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin C_n$. Esto implica que $t^n(x) \notin [0,1]$ y, por tanto, la órbita de x bajo T no está acotada.

Concluimos entonces que $C = \{x \in \mathbb{R} \mid o(x, T) \text{ está acotada}\}$

A continuación demostraremos que C cumple con ser cerrado, totalmente disconexo y perfecto.

Teorema 3.1 *El conjunto C, definido anteriormente, es un conjunto de Cantor.*

DEMOSTRACIÓN:

- C es cerrado.

  Recordemos que $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$, donde cada C_n es un conjunto cerrado. Así C es la intersección de intervalos cerrados anidados y por lo tanto es cerrado.

- C es totalmente disconexo. En $\mathbb{R}$ esto es que C no contenga ningún intervalo.

  Si $[x, y] \subset C$ entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ $[x, y] \subset C_n$. Entonces $[x, y]$ está contenido en un intervalo de longitud $|\frac{1}{3}|^n$. De donde $|x - y| \leq |\frac{1}{3}|^n$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Por tanto $x = y$.

- C es perfecto, es decir, todos sus puntos son puntos de acumulación de C, o equivalentemente, no tiene puntos aislados.

  Sea $p \in C$. Veremos que p no es punto aislado.

  Observemos que cada C_n esta formado por pequeños intervalos de tamaño $(\frac{1}{3})^n$. Como $p \in C$, entonces $p \in C_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$, esto implica que existe $q_n \in C_n$ *orilla* de uno de los intervalos que conforman a C_n tal que está en el mismo intervalo que p, y con ello $d(p, q_n) \leq (\frac{1}{3})^n$. La coleción $\{q_n\}$ forma una sucesión que converge a p. Por lo tanto p no es un punto aislado.

■

3.2. Introducción a la dinámica simbólica

La siguiente meta es analizar la dinámica de los puntos del conjunto de Cantor bajo la función T, en particular la transitividad. Para ello utilizaremos otra herramienta: la dinámica simbólica, ésta nos permitirá simplificar y comprender la dinámica de dicha función.

Definición 3.1 *Se define* $\sum_2$ *como el espacio de sucesiones formadas por ceros y unos. Es decir,*

$$\sum\nolimits_2 = \{\hat{s} = (s_0 s_1 ...) \mid s_j = 0 \text{ o } 1 \text{ para toda } j \geq 0\}.$$

Definimos la distancia entre dos puntos ŝ y t̂ en $\sum_2$ como:

$$d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Como para cada i, $|s_i - t_i|$ es cero o uno, esta serie está acotada por la serie geométrica

$$d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

y por lo tanto converge.

Proposición 3.1 *d es una métrica en* $\sum_2$.

Demostración:

i) $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) \geq 0$ para todas $\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}} \in \sum_2$ pues $|s_i - t_i| \geq 0$ para toda i. Además $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) = 0$ si y sólo si $|s_i - t_i| = 0$, como esto significa que ŝ coincide con t̂ en todas sus entradas entonces $\hat{\mathrm{s}} = \hat{\mathrm{t}}$.

ii) $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) = d(\hat{\mathrm{t}}, \hat{\mathrm{s}})$ es claro pues $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$ para toda $i \geq 0$.

iii) $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{r}}) + d(\hat{\mathrm{r}}, \hat{\mathrm{t}}) \geq d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}})$ se sigue del hecho de que para toda $i \geq 0$ se tiene $|s_i - r_i| + |r_i - t_i| \geq |s_i - t_i|$.

■

Lema 3.1 *Sean* $\hat{t}, \hat{s} \in \sum_2$, $n \in \mathbb{N}$ *y supongamos que* $s_i = t_i$ *para* $i = 0, ..., n$. *Entonces* $d(\hat{s}, \hat{t}) \leq \frac{1}{2^n}$

DEMOSTRACIÓN:

Si $t_i = s_i$ para $i \leq n$, tenemos que

$$d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

y por lo tanto $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) \leq \frac{1}{2^n}$.

■

Lema 3.2 *Si $d(\hat{s}, \hat{t}) < \frac{1}{2^n}$, entonces $s_i = t_i$ para $i \leq n$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) < \frac{1}{2^n}$. Si $s_j \neq t_j$ para alguna $j \leq n$, entonces

$$\begin{aligned} d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) &= \sum_{i=0}^{j-1} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} + \frac{|s_j - t_j|}{2^j} + \sum_{i=j+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \\ &\leq \frac{1}{2^j} \end{aligned}$$

Como $j \leq n$, $2^j \leq 2^n$ y entonces $\frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$. Por lo tanto $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{j}}) \geq \frac{1}{2^n}$ y esto es una contradicción.

■

La importancia de estas dos proposiciones es que nos permiten decidir cuándo dos sucesiones, $\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}} \in \sum_2$, están cerca una de la otra.

Decimos que dos sucesiones son cercanas si, dado $n \in N$ sus primeros n dígitos coinciden.

Definición 3.2 *Se define la función corrimiento $\sigma : \sum_2 \to \sum_2$ de la siguiente manera:*

$$\sigma(\hat{s}) = \sigma(s_0 s_1 s_2 ...) = (s_1 s_2 ...).$$

Observemos que esta función es dos a uno, esto es, cada punto en $\sum_2$ proviene de dos puntos distintos.

Proposición 3.2 *$\sigma : \sum_2 \to \sum_2$ es continua (con la métrica definida anteriormente).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\varepsilon > 0$ y $\hat{\mathrm{s}} = (s_1 s_2 ...) \in \sum_2$. Tomemos n tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$.

Sea $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Sea $t \in \sum_2$ tal que $d(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{t}}) < \delta$. Entonces por la proposición anterior $s_i = t_i$ para $0 \leq i \leq n+1$, esto implica que $\sigma(\hat{\mathrm{s}})$ y $\sigma(\hat{\mathrm{t}})$ coinciden en las primeras n entradas.

Por lo tanto $d[\sigma(\hat{\mathrm{s}}), \sigma(\hat{\mathrm{t}})] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. ■

A continuación examinaremos brevemente la dinámica de la función σ.

Los puntos periódicos de σ corresponden a sucesiones que se repiten periódicamente.

Por ejemplo,

$$\hat{\mathrm{s}} = (s_0 s_1 ... s_n s_0 s_1 ... s_n ...) = \overline{s_0 s_1 ... s_n}$$

es un punto periódico.

Los puntos fijos de σ, por su parte, corresponden a sucesiones con un solo valor en todas sus entradas como: $\bar{0} = 00...$ o $\bar{1} = 11...$

Proposición 3.3 *Los puntos periódicos de σ forman un subconjunto denso de $\sum_2$.*

DEMOSTRACIÓN:

Debemos ver que hay puntos periódicos arbitrariamente cerca de todo punto en $\sum_2$, para eso basta con dar una sucesión de puntos periódicos τ_n tal que converge a un punto arbitrario $\hat{\mathrm{s}} = (s_0 s_1 ...) \in \sum_2$.

Sean

$$\tau_0 = \overline{s_0},$$

$$\tau_1 = \overline{s_0, s_1},$$

$$\vdots$$

$$\tau_n = \overline{s_0 s_1 ... s_n},$$

$$\vdots$$

Por una proposición vista anteriomente sabemos que $d(\tau_n, s) \leq \frac{1}{2^n}$ y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} d(\tau_n, \hat{s}) = 0$. ■

Proposición 3.4 *La función $\sigma : \sum_2 \to \sum_2$ es transitiva en $\sum_2$.*

Recordemos que la propiedad de tener órbitas densas hace que σ sea topológicamente transitiva.

Consideremos $\hat{\mathrm{s}}^* = (0\ 1\ \ 00\,01\,10\,11\ \ 000\,001...)$ formada por todos las posibles combinaciones de ceros y unos en bloques de todos los tamaños comenzando por un solo elemento, luego de dos elementos, etc.

Observemos que dada cualquier sucesión arbitraria, $\hat{\mathrm{t}}$, siempre podemos aplicar σ un determinado número de veces a $\hat{\mathrm{s}}^*$ de manera que ambas coincidan en tantas entradas como se desee ya que $\hat{\mathrm{s}}^{ast}$ esta formada por todas las posibles combinaciones de ceros y unos de bloques de todos los tamaños, es decir, podemos hacer que $d(\hat{\mathrm{s}}^*, \hat{\mathrm{t}}) \leq \frac{1}{2^n}$ para toda $n \in N$.

Por lo tanto la órbita de $\hat{\mathrm{s}}^*$ bajo σ forma un subconjunto denso en $\sum_2$.

■

Regresemos a la función que originalmente queríamos analizar: $T(x)$.

Sea $x \in K$; como K está contenido en $I_0 \cup I_1$ la órbita de x también está contenida en $I_0 \cup I_1$.

Intentaremos describir el comportamiento de $T(x)$ observando en cuál intervalo, I_0 o I_1, cae cada iteración de x.

Definición 3.3 *Sea $x \in K$. Decimos que el itinerario de x es la sucesión $s(x) = (s_0 s_1 ...)$ donde $s_j = 0$ si $T^j(x) \in I_0$ o $s_j = 1$ si $T^j \in I_1$. De esta forma $s(x)$ es un punto en $\sum_2$ y $s : K \to \sum_2$.*

Teorema 3.2 *$s : K \to \sum_2$ es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN:

$i)$ s es inyectiva.

Sean $x, y \in K$ dos puntos distintos y supongamos $s(x) = s(y)$, esto implica que $T^n(x)$ y $T^n(y)$ caen siempre al mismo lado del punto $\frac{1}{2}$ para toda $n \in N$.

Esto implica que la función T es monótona en cada intervalo de la forma $[T^n(x), T^n(y)]$ o $[T^n(y), T^n(x)]$ y por lo tanto todos los puntos del intervalo $[x, y]$ permanecen en $I_0 \cup I_1$ y esto es una contradicción con el hecho de que K es totalmente disconexo.

$ii)$ s es suprayectiva.

Sea $\hat{r} = (r_0 r_1 ...) \in \sum_2$ debemos encontrar $x \in K$ tal que $s(x) = r$.

Definimos $I_{r_0 r_1 ... r_n} = \{x \in I \ | x \in I_{r_0}, T(x) \in I_{r_1}, ..., T^n(x) \in I_{r_n}\}$

Puesto que $I_{r_0}, I_{r_1}, ..., I_{r_n}$ son intervalos cerrados y se tiene que

$$I_{r_0 r_1 ... r_n} = (I_{r_0 ... r_{n-1}} \cap T^{-n}(I_{r_n})) \subset I_{r_0 ... r_{n-1}}$$

podemos afirmar que $I_{r_0 r_1 ... r_n}$ forma una sucesión de intervalos cerrados anidados.

Por inducción probaremos que $I_{r_0 r_1 ... r_n}$ es no vacío.

Para $n = 1$ es claro que tanto I_0 como I_1 son distintos del vacío.

Por hipótesis de inducción tenemos que se cumple para $n = k$.

Sea $n = k + 1$. Entonces se tiene que

$$I_{r_0 r_1 ... r_k r_{k+1}} = I_{r_0} \cap T^{-1}(r_1 ... r_{k+1})$$

Por la hipótesis de inducción $I_{r_1 ... r_k r_{k+1}}$ es no vacío.

Como la preimagen de cualquier subconjunto en K está formada por dos subconjuntos, uno en I_0 y otro en I_1. Es inmediato que $I_{r_0} \cap T^{-1}(I_{r_1 \ldots r_k r_{k+1}}) \neq \emptyset$.

iii) Continuidad de $s : K \to \sum_2$.

Sea $x \in K$ y $s(x) = (r_0 r_1 ...)$ sea $\varepsilon > 0$ y $n \in N$ tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$

Consideremos todos los subintervalos cerrrados $I_{t_0 t_1 \ldots t_n}$. Observemos que todos estos subintervalos, 2^{n+1} subintervalos, son ajenos y K está contenido en la unión de todos ellos. Uno de éstos es el que contiene a x: $I_{r_0 r_1 \ldots r_n}$.

Sea $\delta = \frac{1}{3^n}$. Si $y \in K$ y $|x - y| < \delta$, entonces y está en $I_{r_0 r_1 \ldots r_n}$ y así $s(x)$ y $s(y)$ coinciden en las primeras $n + 1$ entradas. Por lo tanto

$$d[s(x), s(y)] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

y s es continua.

iv) Continuidad de $s^{-1} : \sum_2 \to K$.

Sea $\varepsilon > 0$. Debemos demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $\hat{\mathrm{r}}, \hat{\mathrm{p}} \in \sum_2$ y $0 < d(\hat{\mathrm{r}}, \hat{\mathrm{p}}) < \delta$ entonces $|s^{-1}(\hat{\mathrm{r}}) - s^{-1}(\hat{\mathrm{p}})| < \varepsilon$.

Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$.

Si $\delta = \frac{1}{2^{n_0}}$ y $d(\hat{\mathrm{r}}, \hat{\mathrm{p}}) < \delta$ entonces $\hat{\mathrm{r}} = (r_0 r_1 ...)$ y $\hat{\mathrm{p}} = (p_0 p_1 ...)$ coinciden, de menos, en las primeras $n_0 + 1$ entradas.

Esto implica que tanto x como y estan en $I_{r_0 r_1 \ldots r_{n_0}}$, es decir:

$x \in I_{r_0}, T(x) \in I_{r_1}, ..., T^n(x) \in I_{r_{n_0}}$ y también

$y \in I_{r_0}, T(y) \in I_{r_1}, ..., T^n(y) \in I_{r_{n_0}}$

Como la longitud de $I_{r_{n_0}}$ es $\frac{1}{3^{n_0+1}}$ y $T^n(x), T^n(y)$ son elementos de $I_{r_{n_0}}$ entonces $|x - y| < \frac{1}{3^{n_0+1}} < \frac{1}{3^{n_0}} < \varepsilon$.

Por lo tanto s^{-1} es continua.

Por lo tanto $\sigma : K \to \sum_2$ es un homeomorfísmo. ■

Corolario 3.1 *$\sigma : \sum_2 \to \sum_2$ y $T|_k : K \cap [0,1] \to K \cap [0,1]$ son conjugadas topológicas, es decir, $\sigma \circ s = T \circ s$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $x \in C$.

Entonces $x \in I_{t_0}, T(x) \in I_{t_1}, T^2(x) \in I_{t_2}...$ de donde se sigue que $s(x) = (t_0 t_1 t_2 ...)$. Y $\sigma(s(x)) = (t_1 t_2 ...)$.

Por otro lado, si aplicamos T a x tendremos que $T(x) \in t_1, T^2(x) \in t_2, ...,$ y entonces $s(T(x)) = (t_1 t_2 ...).)$

Por lo tanto, T y σ son conjugadas topológicas. ■

Por lo tanto en cualquier subconjunto cerrado, perfecto y totalmente disconexo (es decir homeomorfo al conjunto de Cantor) existe una función transitiva.

3.3. Subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ que admiten funciones transitivas

Para la demostración del teorema siguiente vamos a necesitar el lema que se demuestra a continuación:

Lema 3.3 *Si X es un espacio de métrico compacto, entonces X es un espacio de Baire.*

DEMOSTRACIÓN:

Debemos probar que dada una familia numerable $\{A_n\}$ de subconjuntos cerrados de X con interiores vacios, su unión también tiene interior vacío.

Sea U_0 un conjunto abierto no vacío de X y $\{A_n\}$ una familia numerable de subconjuntos cerrados de X con interiores vacíos.

Demostraremos que U_0 no está contenido en $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Consideremos A_1. Como por hipótesis U_0 no está contenido en A_1, existe un punto $y \in U_0$ tal que $y \notin A_1$. Dado que A_1 es cerrado, podemos elegir U_1 vecindad de y tal que

$$\bar{U_1} \cap A_1 = \emptyset$$

$$\bar{U_1} \subset U_0$$

Repitiendo el procedimiento, tenemos que dado un abierto no vacío U_{n-1} que no está contenido a A_n, se puede elegir

$$\bar{U_n} \cap A_n = \emptyset$$
$$\bar{U_n} \subset U_{n-1}$$

Observemos que la familia $\overline{\{U_n\}}$ es una sucesión encajada de subconjuntos no vacíos de X. De donde X tiene la propiedad de la intersección finita [3], esto implica que

$$\cap_{n=1}^{\infty} U_n \neq \emptyset.$$

Por lo tanto $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ no contiene a ningún abierto no vacío. Y entonces X es un espacio de Baire. ■

El teorema que presentamos ahora establece cuáles son los únicos tres tipos de subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$ que admiten funciones transitivas.

Teorema 3.3 *Sea X un subconjunto compacto de la recta real. Si X admite funciones transitivas entonces es alguno de los siguientes conjuntos:*

1. *Unión finita de intervalos compactos.*
2. *Conjunto finito.*
3. *Conjunto de Cantor.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $f : X \to X$ una función transitiva.

Observación 1. f no puede mandar un intervalo a un punto.

Supongamos que existe un intervalo $J \subset X$ tal que $f(J) = \{x_0\}$. Dado que f es transitiva, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(J) \cap J \neq \emptyset$. Como $f^k(J)$ es un punto entonces $f^k(J) \subset J$.

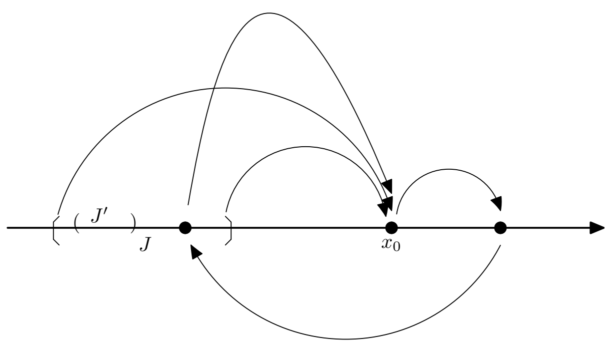
Así $f^{k+1}(J) = f^k(f(J)) = f^k(x_0)$.

También se tiene que

$$f^{k+1}(J) = f(f^k(J)) \subset f(J) = \{x_0\}$$

y entonces $f^k(x_0) = x_0$, es decir, x_0 es punto periódico (y por lo tanto su órbita es finita).

Sea J' un abierto en $J - \{o(x_0, f)\}$. Entonces $J' \cap f^n(J) = \emptyset$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y esto es una contradicción con la transitividad.



Por lo tanto la imagen de cualquier intervalo, bajo f, es un intervalo.

Observación 2. Si $J = \{y\}$ es un abierto, entonces y es un punto aislado, y por la transitividad $f^n(y) \cap \{y\} \neq \emptyset$ de dónde se podemos concluir que su órbita bajo f es finita y con ello X es un conjunto finito.

Siempre que exista un punto aislado en X, X resultará ser un conjunto finito. Por eso de aquí en adelante supondremos que ningún punto de X es punto aislado y que todos los intervalos tienen interior no vacío.

Dado que f manda intervalos en intervalos, si Y es la unión de todos los intervalos contenidos en X entonces $f(Y) \subset Y$.

Observación 3. La función $f|_Y$ (f restringida a Y) es transitiva.

Sean U, V dos abiertos no vacíos en Y. Entonces existe $u \in U$ y $\epsilon > 0$ tal que el intervalo $(u - \epsilon, u + \epsilon) \subset U$.

Al intersectar un intervalo con interior no vacío con la unión de todos los intervalos con interior no vacío se tiene $(u - \epsilon, u + \epsilon) \cap Y \neq \emptyset$ y dicha intersección está contenida en U.

Entonces existe un intervalo $J \subset Y$ tal que

$$(u - \epsilon, u + \epsilon) \cap J \subset (u - \epsilon, u + \epsilon) \cap Y$$

Y por tanto existe un intervalo L que precisamente es $(u-\epsilon, u+\epsilon) \cap J$ tal que su interior es no vacío y $L \subset Y \subset X$.

Observemos que el interior de L es un intervalo distinto del vacío e $int(L) \subset Y \subset X$. Por lo tanto $int(L)$ es un abierto no vacío en X.

Siguiendo la misma argumentación se puede ver que también existe un intervalo M con interior no vacío en X contenido en $V \subset Y$.

Como sabemos que la función es transitiva en X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(L) \cap M \neq \emptyset$. Como $L \subset U$ y $M \subset V$ entonces

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Este hecho será importante para probar la afimación 3.1

Definición 3.4 *$B_0 \subset B$ es componente de B si B_0 es conexa y máxima. Esto es, si A es conexo y $B_0 \subset A \subset B$ entonces $A = B_{0.}$*

Observación 4.- Sea C una componente de X, es inmediato que $C \subset \bar{C}$ pero además como $\bar{C}$ es conexa se tiene $\bar{C} \subset C$. Por lo tanto C es cerrada.

Afirmación 3.1 *El conjunto Y tiene sólo un número finito de componentes.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean J_1 y J_2 dos componentes de Y. Entonces existe $x_1 \in J_1$, como $x_1 \in Y$ existe un intervalo K (con interior no vacío) tal que $x_1 \in K \subset J_1$.

De la misma manera, existe x_2 y un intervalo M tal que $x_2 \in M \subset J_2$.

Por ser transitiva existe n_0 tal que

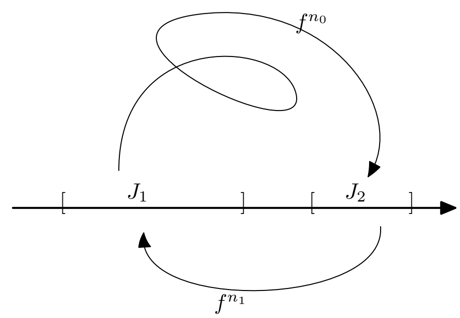
$$f^{n_0}(K) \cap M \neq \emptyset.$$

Lo que implica que

$$f^{n_0}(J_1) \cap J_2 \neq \emptyset.$$

Como $f^{n_0}(J_1)$ es conexo entonces $f^{n_0}(J_1) \cap J_2 \neq \emptyset$ es conexo.

Del hecho de que J_2 es componente se sigue que $f^{n_0}(J_1) \subset J_2$.



Con un argumento análogo se ve que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{n_1}(J_2) \subset J_1$

Entonces $f^{n_0+n_1}(J_1) \subset J_1$ y $J_1 \cup f(J_1) \cup ... \cup f^{n_0+n_1-1}(J_1) \subset Y$.

Si J es una componente de Y, entonces existe $k \in \{0, \cdots, n_0 + n_1 - 1\}$ tal que $f^k(J_1) \cap J \neq \emptyset$. Más aún, $f^k(J_1) \subset J$. Entonces existe una cantidad finita de componentes de Y.

Por lo tanto Y es la unión de un número finito de componentes.

Como Y es la unión de componentes que por definición son cerradas, Y es cerrada en X.

Además dado que $f(Y) \subset Y$, $f^n(Y) \subset Y$ para toda $n \in \mathbb{N}$

Observemos que dado un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, el conjunto Y puede o no ser vacío. Analizaremos cada caso por separado.

Afirmación 3.2 *Sea $Y \neq \emptyset$. Entonces Y es denso en X.*

Sea $x_0 \in X$ y $\delta > 0$ entonces $B_\delta(x_0) \cap X$ es abierto en X.

Sea C una componente, dado que $Y \neq \emptyset$ el interior de C es distinto del vacío y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(C) \cap (B_\delta(x_0) \cap X) \neq \emptyset$.

Como $f^m(C) \subset f^n(Y) \subset Y$ para alguna $n \in \mathbb{N}$ tenemos $Y \cap (B_\delta(x_0) \cap X) \neq \emptyset$.

Por lo tanto Y es denso en X.

Afirmación 3.3 *La cerradura de Y está contenida en Y.*

Observemos que $Y = J_1 \cup \cdots \cup J_k$, de donde:

$$\bar{Y} = \overline{J_1 \cup \cdots \cup J_k},$$

como cada J_i es cerrado,

$$\bar{Y} = \bar{J_1} \cup \cdots \cup \bar{J_n} = J_1 \cup \cdots \cup J_n = Y$$

Juntando las afirmaciones se tiene:

- El conjunto Y es denso en X
- $\bar{Y} = Y$

De donde $Y = X$.

Esto significa que cuando la unión de intervalos con interior no vacío es distinta del vacío, entonces X es la unión finita de compontes, esto es, conexos y cerrados. Por lo tanto X es un conjunto finito de intervalos compactos en $\mathbb{R}$.

Veamos ahora el otro caso.

Afirmación 3.4 *Sea $Y = \emptyset$. Entonces no existe ningún intervalo no degenerado, y por lo tanto X, es totalmente disconexo.*

Afirmación 3.5 *X es no numerable.*

Por el lema 3.3, se tiene que X es espacio de Baire. Supongamos que X es numerable, entonces lo podemos escribir como $X = \{x_1, x_2, ...\}$. Notemos que $X \subset \mathbb{R}$ es un espacio Hausdorff compacto y por el lema anterior es un espacio de Baire.

Sea $B_i = \{x_i\}$ el cerrado formado por x_i.

Entonces X se puede escribir como $X = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$.

Si el interior de B_i es vacío para toda i, entonces el interior de X es vacío y esto es una contradicción.

Entonces debe existir $x_{i_0} \in X$ tal que el interior de x_{i_0} es distinto del vacío. Como $x_{i_0} \subset int\{x_{i_0}\}$ entonces x_{i_0} es abierto y por la observación 2, X es finito.

Entonces si X es numerable, entonces es un conjunto finito.

Tenemos finalmente queda el caso donde X es no numerable y disconexo. Debes notar que X no tiene puntos aislados, pues de lo contrario sería un conjunto finito, además es métrico y compacto. Por un teorema de Haussdorf [6] X es homeomorfo al conjunto de Cantor.

En resumen, se tiene que si X es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ que admite funciones transitivas, entonces X es la unión finita de intervalos compactos, un conjunto finito o un conjunto de Cantor.

■

Este teorema es importante por muchas razones. Para empezar, da pie a algunos corolarios, que nos pueden ahorrar trabajo cuando queremos verificar si una función es transitiva, por ejemplo, podemos ver que ninguna función puede ser transitiva en los naturales.

Dado que el teorema establece que son sólo tres tipos de subconjuntos compactos los que admiten este tipo de funciones, usando la herramienta de la conjugación topológica podemos crear una infinidad de funciones transitivas a partir de homeomorfismos.

Ahora procede preguntarnos si existen más subconjuntos no compactos de los reales que admiten funciones transitivas. La respuesta es que sí. En el siguiente capítulo analizaremos algunos ejemplos.

Capítulo 4

Funciones transitivas en toda la recta real

Las funciones transitivas pueden definirse en muchos conjuntos, en los capítulos anteriores habiamos puesto la restricción de que estos conjuntos fueran compactos. Ahora mostraremos la existencia de este tipo de funciones en conjuntos no compactos.

En particular, dedicaremos este capítulo a funciones transitivas en toda la recta real. En la primera sección presentaremos un ejemplo de una función que es transitiva en todo $\mathbb{R}$. En la siguiente sección analizaremos propiedades que tienen las funciones transitivas en los reales.

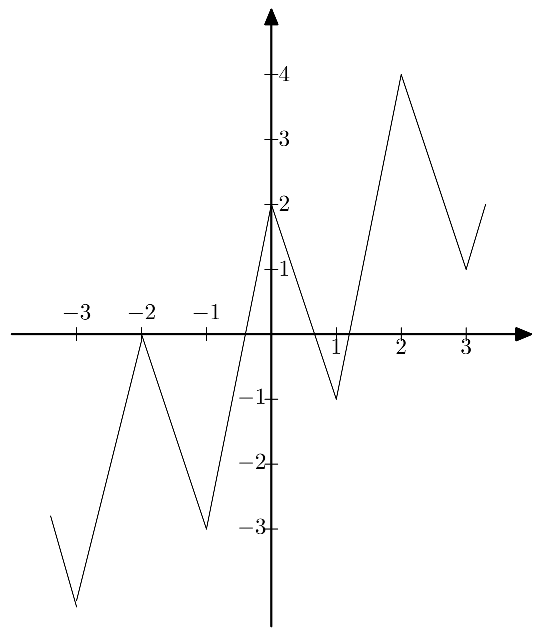
4.1. Una función transitiva de los reales en los reales.

Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para todo $z \in \mathbb{Z}$ como:

$$f(z) = \begin{cases} z+2 & \text{para } z \text{ par} \\ z-2 & \text{para } z \text{ impar} \end{cases}$$

Y de manera lineal y continua en cada intervalo $[z, z+1]$.

Observación 1.- Es inmediato que f restringida a los enteros es biyectiva.

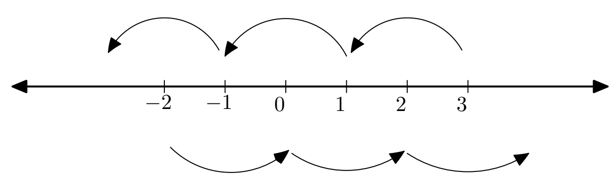


Observación 2.- Si z es par

$$\lim_{n\to\infty} f^n(z) = \lim_{n\to\infty}(z+2n) = \infty$$

y si z es impar

$$\lim_{n\to\infty} f^n(z) = \lim_{n\to\infty}(z-2n) = -\infty$$



Observación 3.- La pendiente en $[z, z+1]$ es:

para z par $\quad \frac{z-2-(z-1)}{z-(z+1)} = -3$

para z impar $\frac{z+3-(z-2)}{z-(z+1)} = 5$

Teorema 4.1 *La función f es transitiva en $\mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Paso 1) Para toda $z \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tenemos:

i) $f^{n-1}([z, z+1]) \subset f^n([z, z+1])$,

ii) $\cup_{n=0}^{\infty} f^n([z, z+1]) = \mathbb{R}$.

Como $f([z, z+1]) = [z-1, z+2]$ si z es par y $f([z, z+1]) = [z-2, z+3]$ si z es impar, es claro que para todo $z \in \mathbb{Z}$, $[z, z+1] \subset f([z, z+1])$.

Además notamos que $f([z, z+1]) = [u, v]$ con u impar y v par.

Así $f^2([z, z+1]) = [u-2, v+2]$

$f^3([z, z+1]) = [u-2-2, v+2+2]$

...

$f^n([z, z+1]) = [u-2(n-1), v+2(n-1)]$.

De aquí se concluyen de manera inmediata las dos afirmaciones.

Paso 2) Demostraremos ahora que f es transitiva

Sea $x \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen $a < b$ tales que $(a, b) \subset B_\varepsilon(x)$ y $(a, b) \subset [z, z+1]$ para algún $z \in \mathbb{Z}$.

Afirmación 4.1 *Existe $n_0 \in N$ tal que $f^{n_0}(B_\varepsilon(x))$ contiene un entero.*

Dado $(a, b) \subset [z, z+1]$ tenemos que *long* $f(a, b) \geq 3$ *long* (a, b).

Supongamos que $f^k(a, b) \cap Z = \emptyset$ para toda $k \in \{0, ..., n\}$. Entonces sucede que

$$long f^n(a, b) \geq 3^n(b-a).$$

Como a partir de alguna n se tiene que $3^n(b-a) > 1$, no puede suceder que la intersección de $f^n(a, b)$ con $\mathbb{Z}$ sea siempre vacía.

Afirmación 4.2 *Existe* $n_1 \geq n_0$ *tal que* $[z, z+1] \subset f^{n_1}(B_\varepsilon(x))$ *para alguna* $z \in Z$.

Sabemos que $f^{n_0}(B_\varepsilon(x))$ contiene un intervalo de la forma $[w, b)$, o bien $(a, w]$ con $w \in Z$.

Supongamos que tenemos $[w, b) \subset f^{n_0}(B_\varepsilon(x))$, entonces

$$long\ f([w, b)) \geq 3(b - w).$$

Si para toda $k \in \{0, ..., n\}$ $\quad f^k([w, b))$ no contiene dos enteros consecutivos entonces

$$long\ f^n([w, b)) \geq 3^n(b - w),$$

pero $3^n(b-w) \geq 1$ a partir de cierta n. Por lo tanto en algún momento $f^n(B_\varepsilon(x))$ contiene a dos enteros consecutivos.

Por el inciso *ii)* del paso 1 podemos concluir que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(A) \cap B \neq \emptyset$ para cualesquiera dos abiertos A y B en $\mathbb{R}$. ■

Ahora analizaremos algunas características de la funciones transitivas en los reales.

4.2. Propiedades topológicas de funciones transitivas definidas de reales en reales.

A lo largo de toda esta sección supondremos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

Definición 4.1 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Decimos que* $x \in R$ *es punto crítico de* f *si para toda vecindad de* x, $V(x)$, *existen* y *y* z, *distintos, en* $V(x)$ *tales que* $f(x) = f(z)$.

Sea $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es punto crítico de } f\}$.

Observación 4.1 *Cuando* f *es derivable, la definición de punto crítico que acabamos de presentar es equivalente que el valor de la derivada sea* 0.

Demostración:

Consideremos una función f clase C^1 en el intervalo (a,b) y $x_0 \in (a,b)$ punto crítico. Entonces para toda vecindad de x_0, $V(x_0)$, existen $y, z \in V(x_0)$ tales que $f(y) = f(z)$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset (a,b)$. Entonces existen $y_\varepsilon, z_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$, distintos, tales que $f(y_\varepsilon) - f(z_\varepsilon) = 0$.

Entonces, $\frac{f(y_\varepsilon)-f(z_\varepsilon)}{y_\varepsilon - z_\varepsilon} = 0$ y por el teorema del valor intermedio existe $w_\varepsilon \in B_\varepsilon(x_0)$ tal que

$$f'(w_\varepsilon) = \frac{f(y_\varepsilon) - f(z_\varepsilon)}{y_\varepsilon - z_\varepsilon} = 0.$$

Tomando una sucesión de $\{\varepsilon_n\}$ cada vez más pequeñas y siguiendo el mismo razonamiento, podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ que converga a x_0 tal que $f'(x_n) = 0$ y con ello $f'(x_0) = 0$. ■

Afirmación 4.3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y transitiva. Entonces f tiene rango denso y conexo, y por lo tanto f es suprayectiva.*

Puesto que $\mathbb{R}$ es conexo, $f(\mathbb{R})$ es conexo.

Supongamos que el rango no es denso, entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq y$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Como ya vimos que es conexo

$$f(\mathbb{R}) \subset (-\infty, y) \text{ o } f(\mathbb{R}) \subset (y, \infty).$$

Supongamos que ocurre lo primero.

Sea U cualquier abierto en (y, ∞) y V un abierto en $(-\infty, y)$, entonces para toda $n \in N$ tenemos que $f^n(U) \cap V = \emptyset$ y esto es una contradicción con la transitividad.

Por lo tanto el rango de f es todo $\mathbb{R}$.

Y entonces f es suprayectiva.

Definición 4.2 *Decimos que y es un valor crítico si $f(x) = y$, con x punto crítico de f.*

Afirmación 4.4 *El conjunto de los puntos críticos de f, C, es un conjunto cerrado.*

Demostraremos que si x está en la cerradura de C, entonces toda vecindad $V(x)$ de x es vecindad de un punto crítico. Esto implica que C es cerrado.

Sea $x \in \bar{C}$, entonces $x \in C$ o bien x es punto de acumulación de C.

En el primer caso es inmediato que x un punto crítico.

En el segundo caso tenemos que para toda $V(x)$ existe $x' \in V(x)$ tal que $x' \in C$, esto implica que para toda $V(x')$ existen y y z distintos tales que $f(x) = f(z)$. Como $x' \in V(x)$ basta con tomar cualquier $V(x') \subset V(x)$ para encontrar que $x \in C$, y con ello C es cerrado.

Afirmación 4.5 *Todo máximo o mínimo local es punto crítico, pero el inverso no se cumple necesariamente.*

Sea x_0 un máximo local de f, entonces existe $\varepsilon^* > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in (x_0 - \varepsilon^*, x_0 + \varepsilon^*)$.

Debemos demostrar que x_0 es punto crítico, esto es, que dado $0 < \varepsilon$ existen x_1,$x_2 \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$.

Sea $\varepsilon_1 = min\{\varepsilon, \varepsilon^*\}$

Sea $x_1 = x_0 - \frac{\varepsilon_1}{2}$ y $x_2 = x_0 + \frac{\varepsilon_1}{2}$. Si sucede que $f(x_1) = f(x_2)$ terminamos. Si no pasa supongamos, sin pérdida de generalidad, que $f(x_1) < f(x_2)$

Entonces $f(x_2) \in (f(x_1), f(x_0))$. Por el teorema del valor intermedio existe $c \in (x_1, x_0)$ tal que $f(c) = f(x_2)$.

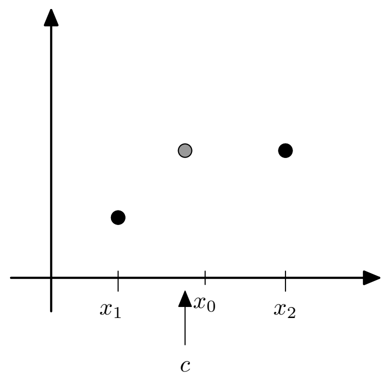
Por lo tanto x_0 es punto crítico.

Ahora veremos que es posible que una función tenga un punto crítico y que este no sea máximo ni mínimo local, es decir que el inverso de la firmación no se cumple.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

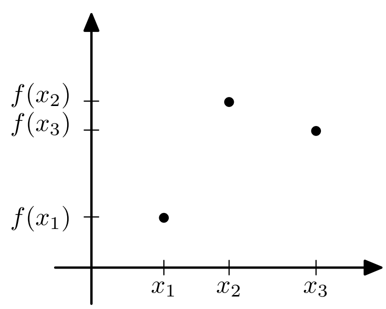
$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen(\frac{1}{x}) & x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

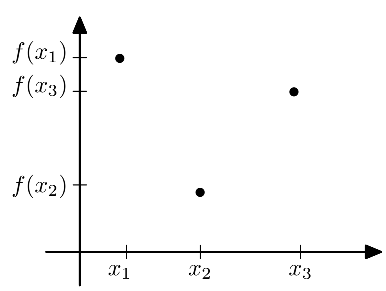
Es fácil verificar que el 0 es un punto crítico sin embargo, es claro que no es máximo ni mínimo local.



Afirmación 4.6 *Si no hay puntos críticos de f en un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces f es estrictamente monótona en ese intervalo.*

Supongamos que f no tiene puntos críticos en $[a, b]$ y que no es estrictamente monótona en este intervalo, es decir, existen $x_1 < x_2 < x_3 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) < f(x_2)$ y $f(x_2) > f(x_3)$ o $f(x_1) > f(x_2)$ y $f(x_2) < f(x_3)$.





Supongamos que se cumple $f(x_1) < f(x_2)$ y $f(x_2) > f(x_3)$.

Sea $c \in [x_1, x_3]$ tal que para toda $x \in [x_1, x_3]$, $f(x) \leq f(c)$. $f(C)$ es el valor máximo; éste existe por la continuidad de f.

Como $f(c) \geq f(x_2)$, entonces $c \neq x_1$ y $c \neq x_3$. Entonces $c \in (x_1, x_2)$, por lo tanto c es un punto crítico de f en (x_1, x_2) lo que nos lleva a una contradicción.

Un razonamiento análogo prueba que también en el caso donde $f(x_1) > f(x_2)$ y $f(x_2) < f(x_3)$ existe un punto crítico.

Por lo tanto si f no tiene puntos criticos en $[a, b]$ entonces f es estrictamente monótona en este intervalo.

Afirmación 4.7 *Si C es un conjunto acotado, entonces hay un rayo $(-\infty, a]$ o $[b, \infty)$, o ambos, donde f es monótona.*

Si C está acotado inferiormente, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < c$ para toda $c \in C$ y entonces el intervalo $(-\infty, a]$ no tiene puntos críticos. Por la observación anterior esto implica que f es estrictamente monótona en ese intervalo.

Si C está acotado superiormente, por un argumento análogo, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que f es estrictamente monótona en el intervalo $[b, \infty)$.

Si C está acotado por arriba y por abajo por los dos argumentos anteriores f es estrictamente monótona en los intervalos $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$.

Afirmación 4.8 *Si f es transitiva en $\mathbb{R}$ entonces no admite un conjunto invariante acotado con interior distinto del vacío.*

Supongamos que existe un conjunto invariante A acotado con interior distinto del vacío. Entonces existe $x \in intA$ y existe una vecindad abierta de x tal que $V(x) \subset intA$.

Por la transitividad de f se tiene que $\cup_{n=0}^{\infty} f^n(V(x))$ es denso en $\mathbb{R}$. Y por ser invariante $\cup_{n=0}^{\infty} f^n(V(x)) \subset A$ pero esto es una contradicción pues A está acotado.

Teorema 4.2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y supongamos que el conjunto*

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ es punto crítico } \}$$

es acotado. Entonces existen p y q con $p < q$ tales que $[p, q]$ o su complemento o alguno de los rayos $(-\infty, p]$ o $[q, \infty)$ es un conjunto invariante.

Esto implica que el conjunto de puntos críticos en una función transitiva no es acotado.

Demostración:

Sean $x < y$ puntos fijos sin puntos críticos entre ellos. Entonces f es monótona en el intervalo $[x, y]$.

Afirmación 4.9 *El intervalo $[x, y]$ es invariante, es decir, $f[x, y] \subset [x, y]$.*

Es claro que $f(x)$ y $f(y)$ están contenidos en $[x, y]$.

Sea $z \in (x, y)$ como f es monótona

$$x = f(x) \leq f(z) \leq f(y) = y$$

y por lo tanto $f[x, y] \subset [x, y]$.

Dado que el conjunto de puntos críticos es acotado, el conjunto de puntos fijos también lo es. Además por la continuidad de f, $f(C)$ es acotado.

Llamemos $F = \{x \in R \mid x \text{ es punto fijo}\}$

Como los tres conjuntos son acotados, existen $c < d$ tales que $\{C \cup f(C) \cup F\} \subset [c, d]$.

Tenemos así tres casos:

a) $x < f(x)$ para alguna $x > d$, entonces como f es monótona fuera de C tenemos que $y < f(y)$ para toda $y > d$ y por lo tanto $[d, -\infty)$ es invariante.

b) $f(x) < x$ para alguna $x < c$, entonces análogamente $(-\infty, c]$ es invariante.

c) Si no sucede a) ni b) entonces $x < f(x)$ para toda $x < c$ y $f(x) < x$ para toda $x > d$.

Subcasos:

$i)$ f creciente (monótona) en $(-\infty, c]$ y $[d, \infty)$.

Afirmación 4.10 $[c, d]$ *es invariante*

Sea $a = \inf C$ y $b = \sup C$. Entonces $f[a, b]$ está contenido en cualquier intervalo que contenga a $f(C)$.

Sea x tal que $c \leq x \leq a$ entonces como f es monótona fuera de C y creciente en $(-\infty, c]$, es creciente también en $[c, a]$ y entonces

$$f(c) \leq f(x) \leq f(a).$$

Observemos que $f(a) \in [c, d]$ pues $f(a) \in f(C) \subset [c, d]$. Además $c \leq f(c)$ pues $x < f(x)$ para todo $x < c$. Por la continuidad de f y la ausencia de puntos críticos de f en (c, a) concluimos que

$$f[c, a] \subset [c, d].$$

Ahora, sea x tal que $b \leq x \leq d$ entonces como f es monótona fuera de C y creciente en $[d, \infty)$, es creciente también en $[b, d]$ y así

$$f(b) \leq f(x) \leq f(d).$$

De igual forma vemos que $f(b) \subset [c, d]$ y $f(d) \leq d$ y por lo tanto $f[b, d] \subset [c, d]$.

Juntando todas las conclusiones tenemos:

$$\{f[c, a] \cup f[a, b] \cup f[b, d]\} = f[c, d] \subset [c, d].$$

Por lo tanto $[c, d]$ es invariante.

ii) Un rayo creciente y el otro decreciente.

Notemos que esto implica que f no es suprayectiva.

Supongamos que f es creciente en $(-\infty, c]$ y decreciente en $[d, \infty)$, entonces f está acotada por arriba, de hecho $\sup\{f(x) \mid x \in R\} = \sup\{f(x) \mid x \in [c, d]\}$.

Por lo tanto rango de f es invariante, en este caso$[d, \infty)$.

Ahora bien, si f es decreciente en $(-\infty, c]$ y creciente en $[d, \infty)$ tenemos que f está acotada por abajo y el rayo invariante es $(-\infty, c]$.

iii) f decreciente en ambos rayos.

Si

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \neq -\infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) \neq \infty \quad \text{o ambos}$$

entonces f no es suprayectiva y el rango es invariante.

Si los límites son -∞ y ∞ respectivamente, entonces existe $x_0 > d$ tal que $f(x_0) < c$, pues f es decreciente y el límite cuando x tiende a ∞ es $-\infty$. Usando f^2 se prueba que el intevalo $[f(x_0), x_0]$ es invariante.

En resumen, siempre existe un intervalo de la forma $[p,q]$, $(-\infty,p]$ o $[q,\infty$, para alguna $p,q\in\mathbb{R}$, tal que es invariante. ■

Proposición 4.1 *Sean a y b puntos críticos de f con $a<b$, entonces el valor máximo de f en $[a,b]$ es valor crítico.*

Demostración:

Analizaremos los tres casos posibles::

i) Si $f(a)$ es el valor máximo, como a es punto crítico $f(a)$ es valor crítico.

*ii)*Si $f(b)$ es el valor máximo, análogamente, $f(b)$ es valor crítico.

iii) Si no pasan *i)* ni *ii)*, sea $c\in(a,b)$ tal que $f(c)\geq f(t)$ para toda $t\in[a,b]$, entonces c es un máximo local y por la tercera observación c es punto crítico y $f(c)$ es valor crítico.

Por lo tanto el valor máximo de $f[a,b]$ es punto crítico. ■

Proposición 4.2 *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ suprayectiva. Si el conjunto de puntos críticos, C, no está acotado entonces $f(C)$ tampoco está acotado.*

Demostración:

Supongamos que $f(C)$ está acotado. Entonces $f(C)\subset[m,M]$ para alguna $m,M\in R$

Sea $A=\cup\{[a,b]\ |a,b\in C$ y $a<b\}$ entonces $f(A)=\cup\{f[a,b]\ |a,b\in C$ y $a<b\}$ y $f(A)\subset[m,M]$. Por su parte, C puede no ser acotado, no ser acotado por arriba, no ser acotado por abajo, o sí ser acotado. Analizemos cada caso:

1) C no está acotado.

Entonces el conjunto A es todo $\mathbb{R}$ y entonces $f(R)\subset[m,M]$ que es una contradicción con la suprayectividad de f.

2) C no está acotado superiormente.

Sea $a=\text{ínf}\, C$ entonces $A=[a,\infty)$ y f es monótona en A^c.

Entonces el rango de f está contenido en $(-\infty,f(a)]\cup[m,M]$ si f es creciente en A^c o en $[m,M]\cup[f(a),\infty)$ si f es decreciente y por lo tanto f no es suprayectiva.

3)C no está acotado inferiormente.

Por un argumento análogo tendríamos que f no es suprayectiva, que es una contradicción.

Por lo tanto $f(C)$ no está acotado siempre que C no está acotado. $\blacksquare$

Lema 4.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y transitiva, entonces $f^{-1}(x)$ tiene interior vacío para toda $x \in \mathbb{R}$.*

Si el interior de $f^{-1}(x)$ no fuera vacío entonces existiría $y \in int(f^{-1}(x))$ y $\varepsilon > 0$ tal que el intervalo abierto $U = (y - \varepsilon, y + \varepsilon) \subset int(f^{-1}(x))$. Esto no puede suceder como ya fue argumentado en la observacion 1 del teorema 3.3. $\blacksquare$

Corolario 4.1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transitiva en $\mathbb{R}$. Sea $A \subset \mathbb{R}$ con $intA \neq \emptyset$ y $n \in N$. Entonces $intf^n(A) \neq \emptyset$.*

Demostración:

Sea W un intervalo abierto contenido en A. Entonces $f^n(W)$ es conexo.

Afirmación 4.11 *Para cada $n \in \mathbb{N}, f^n(W)$ no es un punto.*

Haremos la demostración por inducción sobre n.

Para $n = 1$

Si $f^1(W) = \{x\}$ entonces tenemos una contradicción pues f no podría ser transitiva.

Por lo tanto $f^1(W)$ no es un punto.

Supongamos ahora que $f^k(W)$ no es un punto

Demostraremos que $f^{k+1}(W)$ no es un punto.

Supongamos que $f^{k+1}(W) = \{y\}$

Como $f^k(W)$ es conexo y no es un punto, $f^k(W)$ es un intervalo con interior distinto del vacío. Pero entonces, como $f^k(f(W)) = y$, se tiene que $f(W) \subset f^{-1}(y)$ y esto es una contradicción con el lema anterior.

Por lo tanto $f^n(W)$ no es un punto. ■

Recordemos que si $B \subset \mathbb{R}$. Decimos que el conjunto $B_0 \subset B$ es componente de B si B_0 es conexo y máximo. Esto es, si A es conexo y $B_0 \subset A \subset B$, entonces $A = B_{0.}$

Teorema 4.3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transitiva y continua. $A \subset \mathbb{R}$, un conjunto invariante bajo f con interior distinto del vacío. Entonces A^c consta a lo más de un elemento.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea V un intervalo abierto contenido en A.

Demostraremos que $B = \cup_{n=0}^{\infty} f^n(V)$ omite a lo más un número real.

Supongamos existen dos puntos a, b en B^c tales que $a < b$.

Como f es transitiva existe $n \in N$ tal que $f^n(V) \cap (a, b) \neq \emptyset$

Por el corolario anterior $f^n(V)$ también tiene interior distinto del vacío y es conexo. Entonces $f^n(V) \cap (a, b)$ tiene interior no vacío y $f^n(V) \subset (a, b)$. Entonces B tiene una componente acotada no trivial B_0 y evidentemente $f^n(V) \subset B_0$.

De nuevo por la transitividad de f tenemos que existe $m \in N$ tal que $f^m(B_0) \cap B_0 \neq \emptyset$. Como $f^m(B_0)$ es conexa y B_0 componente, entonces está contenida en B.

Ahora veremos que $f^m(B_0) \subset B_0$.

Supongamos que $f^m(B_0) \not\subset B_0$. Entonces existe y tal que $y \in f^m(B_0)$ y $y \notin B_0$.

Como $f^m(B_0)$ y B_0 son conexos que se intersectan $B_0 \cup f^m(B_0)$ es conexo. Y entonces $B_0 \cup f^m(B_0) \subset B$, pero esto es una contradicción pues B_0 es componente.

Pero entonces $\cup_{k=0}^{\infty} f^k(B_0) = \cup_{k=0}^{m} f^k(B_0) \subset \cup_{k=0}^{m} \overline{f^k(B_0)}$ es un invariante con interior no vacío que no es denso en $\mathbb{R}$. Como el $intB_0$ es un abierto tenemos una contradicción con la transitividad.

Por lo tanto no pueden existir dos elementos que no pertenezcan a B. ■

Corolario 4.2 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Existe a lo más un $x \in \mathbb{R}$ tal que su orbita inversa, $B_x = \{y \in R \mid f^n(y) = x$ para alguna $n \in N\}$, no es densa en $\mathbb{R}$.*

Demostración:

Sea x tal que B_x no es densa.

Sea $V = (\bar{B_x})^c$, V es un invariante con interior no vacío y por el teorema anterior V^c está formado a lo más por un elemento, de forma que $B_x = \{x\}$.

Para ver que es único, supongamos que existen x y y con $x < y$ tales que $B_x = \{x\}$ y $B_y = \{y\}$. Entonces $f(x) = x$ y $f(y) = y$.

Afirmación 4.12 *El intervalo $[x, y]$ es invariante bajo f.*

Supongamos que existe $t \in [x, y]$ tal que $f(t) < x$. Entonces por el teorema del valor intermedio existe $c \in (t, y]$ tal que $f(c) = x$, pero esto es una contradicción pues $B_x = \{x\}$. Análogamente no puede existir $t \in [x, y]$ tal que $f(t) > y$.

Por lo tanto $[x, y]$ es invariante. Y esto es una contadicción con la transitividad de f en $\mathbb{R}$. ■

Corolario 4.3 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces el conjunto de todos los puntos precríticos es denso.*

Un punto es precrítico si en alguna iteración se convierte en un punto crítico. Del corolario anterior sabemos que del conjunto de todos los puntos críticos a lo más uno tiene órbita inversa no densa. Por lo tanto el conjunto de puntos precríticos es denso. ■

Corolario 4.4 *Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y J un intervalo abierto no vacío. Entonces existe $m \in N$ tal que f^m no es 1 a 1 en J.*

Se sigue del corolario anterior que J tiene un punto precrítico y tal que $f^m(y)$ es punto crítico para alguna $m \in N$ entonces f^{m+1} no es 1 a 1 en J.

Para terminar con esta sección, hagamos un recuento de las características que vimos que tiene una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $\mathbb{R}$. En las observaciones:$1, 6, 10, 11$ y 12 además se supone que f es transitiva.

1. La función f es suprayectiva.

2. El conjunto de los puntos críticos de f es un conjunto cerrado.

3. Todo máximo y mínimo local es punto crítico.

4. La función f es estrictamente monótona en los intervalos donde no hay puntos críticos de f.

5. Cuando el conjunto de puntos críticos de f es acotado existe un rayo en el que f es monótona.

6. La función f no admite un conjunto invariante acotado con interior distinto del vacío.

7. Si el conjunto de puntos críticos de f está acotado entonces existe un intervalo (no degenerado) o un rayo invariante.

8. El valor máximo de f en un intervalo cuyos extremos son puntos críticos, es un valor crítico.

9. Si el conjunto de puntos críticos de f, C, no está acotado, su imagen, $f(C)$, tampoco.

10. La preimagen de cualquier punto $x \in \mathbb{R}$ tiene interior vacío. Lo mismo sucede para la n-ésima preimagen de todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Si $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto invariante bajo f con interior distinto del vacío, entonces A^c consta a lo más de un sólo elemento.

12. Existe a lo más un punto de $\mathbb{R}$ tal que su órbita inversa no es densa en $\mathbb{R}$. De donde el conjunto de puntos precríticos es denso en $\mathbb{R}$.

En la siguiente sección analizaremos otro ejemplo más de función transitiva.

4.3. Una función transitiva definida en un conjunto abierto.

Para esto utilizaremos la función de los reales en los reales que ya presentamos y la conjugación topológica.

Sea $h : \mathbb{R} \to (0,1)$ definida como $h(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$, observemos que h es un homeomorfismo.

Sea $g : (0,1) \to (0,1)$ dada por $g = h \bullet f \bullet h^{-1}$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como en la primera sección de este capítulo. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Como f es transitiva, por la proposición 1.2, tenemos que g también lo es. Más aun, podemos concluir que en todo intervalo abierto (a,b) existe una función transitiva.

Finalmente, construiremos una función transitiva en el intervalo $[0,1)$ utilizando las funciones f, g y h que acabamos de ver.

Observemos que para toda $x \in \mathbb{R}$ sucede que $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$.

De donde $h^{-1}(t) - 2 \leq f \circ h^{-1}(t) \leq h^{-1}(t) + 2$.

Como h es creciente, $h(h^{-1}(t) - 2) \leq g(t) \leq h(h^{-1}(t) + 2)$.

Sea $c \in \mathbb{R}$. Entonces dado que

$$\lim_{t \to 0} h(h^{-1}(t) + c) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{\pi} \arctan[\tan \pi(t - \frac{1}{2}) + c] + c = 0,$$

tenemos que

$$\lim_{t \to 0} g(t) = 0$$

Sea $G : [0,1) \to [0,1)$ definida como:

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{para toda } x \in (0,1) \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esta función es continua. Con los mismos argumentos que pueban la transitividad de g, se prueba fácilmente que G es transitiva en $[0,1)$.

De manera análoga podemos construir una función transitiva en el intervalo $(0,1]$. Es inmediato que todo intervalo de la forma $(a,b]$ también admite una función transitiva.

En resumen, tenemos ahora funciones transitivas también en los reales, intervalos abiertos (a, b) y cerrados por un extremo y abiertos por el otro, ya sea $[a, b)$ o $(a, b]$.

En el capítulo siguiente veremos otros ejemplos más.

Capítulo 5

Funciones transitivas en subconjuntos localmente compactos

En este cápitulo veremos más ejemplos de funciones transitivas en otros dos subconjuntos de la recta real: la unión numerable de conjuntos de Cantor y una unión finita de intervalos no compactos.

Estos ejemplos son un poco más elaborados que los anteriores pero es fácil comprobar que las funciones presentadas son transitivas.

Hacemos una breve introducción a los subconjuntos localmente compactos para cerrar con la mención de un teorema que establecerá cuáles son los subconjuntos localmente compactos de los reales que admiten funciones transitivas.

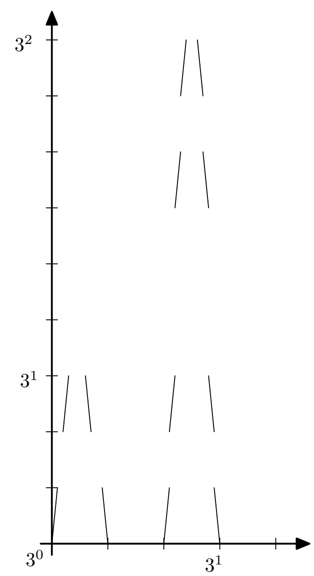
5.1. Una función transitiva en la unión numerable de conjuntos de Cantor.

En esta sección construiremos una función transitiva en un conjunto formado por la unión numerable de conjuntos de Cantor.

Primero analizaremos una función definida en una unión numerable de conjuntos de Cantor contenidos en los intervalos de la forma $[2n, 2n+1]$ para toda $n \in \mathbb{N}$, que no es transitiva. Haciendo algunas modificaciones en su dominio, crearemos una que sí lo sea.

Sean $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y K el conjunto de Cantor. Sea $X = K + 2N_0$, definimos $f : X \to X$ para cada $n \in N_0$ como:

$$f(x) = \begin{cases} 3^{n+2}(x - 2n) & \text{si } x \in [2n, 2n + \frac{1}{3}] \\ 3^{n+2}(2n + 1 - x) & \text{si } x \in [2n + \frac{2}{3}, 2n + 1] \end{cases}$$



Llamemos $K_n = [2n, 2n + 1] \cap X$ para toda $n \in N_0$.

Analicemos las imágenes de los primeros K_n:

- Para $n = 0$ se tiene $f(K_0) = K_0 \cup K_1$;
- Para $n = 1$ tenemos $f(K_1) = K_0 \cup K_1 \cup K_3 \cup K_4 = f(K_0) \cup K_3 \cup K_4$;
- Para $n = 2$ tenemos $f(K_2) = K_0 \cup K_1 \cup K_3 \cup K_4 \cup K_9 \cup K_{10} \cup K_{12} \cup K_{13} = f(K_1) \cup K_9 \cup K_{10} \cup K_{12} \cup K_{13}$.

Observemos que esta función no es suprayectiva y K_2 no está contenido en la imagen de X bajo f. Por lo tanto, f no puede ser transitiva.

Sea K_n en X. Observemos que $f(K_n) \subset [0, 3^{n+1}]$.

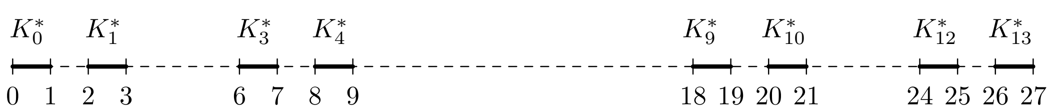
Por definición, K_n es un conjunto de Cantor contenido en el intervalo $[2n, 2n+1]$, por ello K_n no contiene al subintervalo $(2n+\frac{1}{3}, 2n+\frac{2}{3})$. Dado que su imagen es también un conjunto de Cantor, $f(K_n)$ no contiene al subintervalo $(3^n, 2(3^n))$.

Con base en X y f, construiremos un espacio que sea la unión numerable de conjuntos de Cantor y una función transitiva en él.

Sea $X^* = X - \cup_{n=0}^{\infty}(3^n, 2(3^n))$ y llamemos f^* a la restricción de f a X^*. Entonces $f^* : X^* \to X^*$ y para cada $n \in N_0$:

$$f^*(x) = \begin{cases} 3^{n+2}(x-2n) & \text{si } x \in [2n, 2n+\frac{1}{3}] \cap X^* \\ 3^{n+2}(2n+1-x) & \text{si } x \in [2n+\frac{2}{3}, 2n+1] \cap X^* \end{cases}$$

y $K_n^* = [2n, 2n+1] \cap X^*$ para toda $n \in N_0$.



Observemos que en la definición de X^* todos los K_n contenidos en algún intervalo de la forma $(3^m, 2(3^m))$ para alguna $m \in \mathbb{N}$ son eliminados.

En particular, nótese que $K_2^* \subset (3, 2(3))$ de donde K_2^* es removido. Se tiene entonces que:

- $f^*(K_0) = K_0^* \cup K_1^*$
- $f^*(K_1) = K_0^* \cup K_1^* \cup K_2^* \cup K_3^* \cup K_4^* = f^*(K_0^*) \cup K_3^* \cup K_4^*$

De esta forma todos los K_n que no están en $f(X)$ y evitaban que f fuera suprayectiva, son expulsados del dominio. Entonces, $f^* : X^* \to X^*$ es suprayectiva.

Veamos ahora, las imágenes de los K_n^*

$$\begin{aligned} f^*(K_n^*) &= [0, 3^{n+1}] \cap X^* \\ &= ([0,1] \cap X^*) \cup ([1,2] \cap X^*) \cup \cdots \cup ([2n, 2n+1] \cap X^*) \cup \cdots \cup ([3^{n+1}-1, 3^{n+1}] \cap X^*) \\ &= K_1^* \cap K_2^* \cap \cdots \cap K_n^* \cap \cdots \cap K_{\frac{3^{n+1}-1}{2}}. \end{aligned}$$

Observemos que cada $K_n^* \subset X^*$ sucede que $K_0^* \cup K^*_{\frac{3^{n+1}-1}{2}} \subset f^*(K_n^*)$

Entonces para todo $K_n^* \subset X^*$ se tiene que

$$\cup_{n=0}^{\infty} f^*(K_n^*) = X^*.$$

Teorema 5.1 *La función $f^* : X^* \to X^*$ definida anteriormente es transitiva.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean U, V dos subconjuntos abiertos de X^* distintos del vacío. Probaremos que existe n_0 tal que $K_m \subset f^{n_0}(U)$ para alguna $m \in \mathbb{N}$.

Como U es un abierto de X^*, $U = (a,b) \cap X^*$. Si (a,b) contiene a algún K_m^* entonces terminamos este primer paso.

Consideremos ahora la imagen de U, $f^*(U)$. Si este conjunto contiene a algún K_m^* entonces acabamos.

Observaciones acerca de la función f:

1) Si $z \in X^* \cap \mathbb{Z}$, entonces $f^*(z) = 0$.

2) Si $x \in K_n^*$ es una *orilla* del conjunto de Cantor, entonces $f^*(x)$ es una *orilla* de algún conjunto de Cantor K_m^*.

Además las *orillas* de la forma

$$x = 2n + \frac{a}{3^k}$$

bajo f^* van a una *orilla* de la forma

$$f^*(x) = 2m + (\frac{b}{3^k})3^{n+2} = 2m + \frac{b}{3^{k-n-2}}$$

Por lo tanto, en alguna iteración de f^* la *orilla* x va a dar a un entero.

Ahora, si $(a,b) \cap X^* \neq \emptyset$, entonces $(a,b) \cap X^*$ contiene alguna *orilla* de algún K_n^*. Por lo tanto existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $0 \in f^j((a,b) \cap X^*)$. Además, por la definición de f^*, este conjunto $f^j((a,b) \cap X^*)$ contiene un conjunto de la forma $[0,c) \cap X^*$ con $c > 0$.

Por lo tanto existe $l \leq j$ tal que $K_0^* \subset f^{*l}((a,b) \cap X^*)$.

De aquí que

$$\cup_{n=0}^{\infty} f^{n*}((a,b) \cap X^*) = X^*$$

y por lo tanto f^* es transitiva en X^*. ■

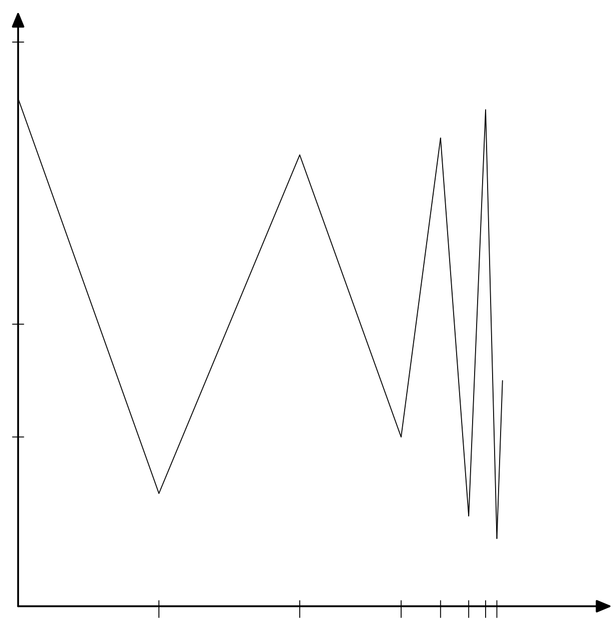
5.2. Una función transitiva en una unión de intervalos no compactos

Construiremos en esta sección una función transitiva en la unión de dos intervalos no compactos: $(0,1] \cup (2,3)$. Comenzaremos por elaborar una función transitiva del intervalo $[0,1)$ al $(0,1)$.

Sea $g : [0,1) \to (0,1)$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} -\frac{14}{5}x + \frac{9}{10} & \text{si } x \in (0, \frac{1}{4}] \\ -\frac{12}{5}x - \frac{2}{5} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{2k+2} & \text{si } x = \frac{2k}{2k+1},\ 1 \leq k \\ \frac{2k+1}{2k+2} & \text{si } x = \frac{2k-1}{2k},\ 1 < k \end{cases}$$

Para toda $k > 1$. Y de forma lineal entre cada $\frac{2k-1}{2k}$ y $\frac{2k}{2k+1}$y entre cada $\frac{2k}{2k+1}$ y $\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}$.



Observación 5.1 *El valor absoluto de todas las pendientes es mayor a 2.*

Demostración:

Calculando explícitamente los valores absolutos de las pendientes para los primeros intervalos tenemos:

En $(0, \frac{1}{4}]$ el valor absoluto $\frac{14}{5}$.

En $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ el valor absoluto $\frac{12}{5}$.

En $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ el valor absoluto de 3.

Para los siguientes intervalitos observemos que la menor diferencia en dos puntos de la forma $\frac{2k-1}{2k}$ y $\frac{2k}{2k+1}$ o $\frac{2k-1}{2k}$ y $\frac{2(k+1)}{2(k+1)+1}$ es $\frac{1}{12}$ y la diferencia más pequeña entre las imágenes consecutivas de dos de ellos es $\frac{1}{2}$.

De donde podemos concluir que el valor absoluto de todas las pendientes es mayor a seis. ■

La función g alcanza sus máximos locales en los puntos de la forma $x = \frac{2k-1}{2k}$. Además g manda el punto $\frac{2k-1}{2k}$ al punto $\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}$. De hecho,

$$lim_{n\to\infty} g^n(\frac{2k-1}{2k}) = 1.$$

Observación 5.2 *Sea $(a,b) \subset (0,1)$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $g^n(a,b)$ contiene a un punto fijo y un punto de la forma $\frac{2k-1}{2k}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos que (a,b) es un subintervalo tal que no contiene puntos de la forma $\frac{2k-1}{2k}$, ni fijos.

Primero probaremos que en alguna iteración la imagen de (a,b) bajo g^n contiene un punto de la forma $\frac{2k-1}{2k}$.

Si $g(a,b)$ contiene a alguno de ellos, no tenemos que hacer nada más. Supongamos que no lo contiene.

Por la primera observación tenemos que la longitud de $g(a,b)$ es mayor que λ veces la longitud de (a,b), con $\lambda > 1$, como sucede siempre que $g^n(a,b)$ no contenga un punto de la forma $\frac{2k-1}{2k}$, existe n_0 tal que $\frac{3}{4} < \lambda^{n_0}(b-a)$y entonces $g^{n_0+1}(a,b)$ contiene, forzosamente, a un punto $\frac{2k-1}{2k}$.

Con un razonamiento análogo se prueba que también existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{4} < \lambda^{n_1}(b-a)$ y entonces $g^{n_1+1}(a,b)$ contiene a un punto fijo. ■

Teorema 5.2 *La función $g : [0,1) \to (0,1)$ es transitiva.*

DEMOSTRACIÓN:

Sean U, V dos subconjuntos abiertos no vacíos en $(0,1]$.

Por las observaciones anteriores se sabe que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{n_0}(U)$ contiene a un punto fijo p y a uno de la forma $\frac{2k-1}{2k}$ que denotaremos por b_k. Para simplificar la notación llamemos U' a $g^{n_0}(U)$.

Esto implica que, para toda $n > n_0$, $p \in g^n(U')$.

Se tiene además, por la observación 2, que:

$$b_k \xrightarrow{g} g(b_k) = b_{k+1} \xrightarrow{g} g(b_{k+1}) = b_{k+2} \xrightarrow{g} g(b_{k+2}) = b_{k+3} \xrightarrow{g} \cdots$$

Y también que:

$$lim_{n\to\infty} g^n(b_k) = lim_{n\to\infty} b_{k+n} = 1.$$

Entonces para toda $n > n_0$,

$$[p, b_{k+n}] \subset g^n(U)$$

Como la imagen $g^n(U)$ es conexa, entre $b_{k+(n-1)}$ y b_{k+n} está contenido el punto $\frac{2(k+n-1)}{2(k+n-1)+1}$ y su respectiva imagen, que es $\frac{1}{2(k+n-1)}$.

Dado que ya vimos que el punto $\frac{1}{2(k+n-1)}$ está contenido en $g^n(U)$ para toda $n > n_0$, entonces podemos asegurar que también $\frac{1}{2(k+n-1)} \in g^n(U')$ para toda $n > n_0$.

Como $g^n(U)$ contiene a los puntos b_{k+n} y $\frac{1}{2(k+n-1)}$ y se tiene que

$$lim_{n\to\infty} b_{k+n} = 1 \text{ y } lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(k+n-1)} = 0$$

entonces existe un $m^* \in \mathbb{N}$ tal que

$$g^{m^*}(U) \cap V \neq \emptyset$$

Por lo tanto g es transitiva. ■

Ahora, utilizando el ejemplo que acabamos de analizar vamos a inventar una función transitiva en la unión de intervalos no compactos. Éste será nuestro último ejemplo.

Sea $X = [0, 1) \cup (2, 3)$ y $f : X \to X$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{14}{5}x + \frac{29}{10} & \text{si } x \in (0, \frac{1}{4}] \\ -\frac{12}{5}x - \frac{12}{5} & \text{si } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ 2 + \frac{1}{2k+2} & \text{si } x = \frac{2k}{2k+1},\ 1 \leq k \\ 2 + \frac{2k+1}{2k+2} & \text{si } x = \frac{2k-1}{2k},\ 1 < k \\ x - 2 & \text{si } x \in (2, 3) \end{cases}$$

Y de forma lineal entre cada $\frac{2k-1}{2k}$ y $\frac{2k}{2k+1}$y entre cada $\frac{2k}{2k+1}$ y $\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}$.

Primero notemos que esta función, aunque no es suprayectiva, nos permite mandar conjuntos abiertos de un intervalo al otro. Usaremos un razonamiento análogo al de la sección 2.2 del segundo capítulo para comprobar que f es transitiva.

Consideremos un conjunto abierto U en X, entonces puede suceder que: $U \subset (0, 1)$, $U \subset (2, 3)$ o que U contenga a un abierto U' tal que $U' \subset (0, 1)$.

Tanto para el primero como para el tercer caso se tiene que $f^{2n} = g^n$. En el caso restante lo que sabemos es que $f^{2n+1} = g^n$.

Sea V un conjunto abierto no vacío en X. Entonces,

- Si $V \cap (0, 1) \neq \emptyset$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{2n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ o $f^{2n_0+1}(U) \cap V \neq \emptyset$.
- Si $V \cap (2, 3) \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en $(0, 1)$ y entonces existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{2n_1}(U) \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$ y con ello existe $x \in f^{2n_1}(U) \cap f^{-1}(V)$, pero entonces $f(x) \in f^{2n_1+1}(U) \cap V$.

Y en ambos casos concluimos que la función f es transitiva. ■

5.3. Comentarios finales

El teorema 3.3 , demuestra cuáles son los únicos tres tipos de espacios compactos que admiten funciones transitivas. En esta última sección comentaremos un resultado semejante para espacios localmente compactos.

Comenzaremos con una pequeña introducción a los espacios localmente compactos.

Definición 5.1 *Sean $M \subset \mathbb{R}$ y $p \in M$. Se dice que M es localmente compacto en el punto p, si existe un conjunto abierto de M, U, tal que $p \in U$ y la cerradura de U en M, $Cl_M(U)$, es compacta.*

Decimos que M es localmente compacto si es localmente compacto en cada punto $p \in M$.

Definición 5.2 *Sea $M \subset \mathbb{R}$. Sea $A \subset M$. Decimos que A es abierto de M si existe B abierto de $\mathbb{R}$ tal que $A = B \cap M$*

El siguiente teorema establece que todo espacio compacto es localmente compacto y esto implica que todas las afirmaciones hechas en la demostración del teorema 3.3 seguirán siendo válidas en este nuevo caso.

Teorema 5.3 *Todo espacio compacto es localmente compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $M \subset \mathbb{R}$ un espacio compacto.

Observemos que M es abierto de M, ya que $M = M \cap \mathbb{R}$. Como M es compacto, $M = \overline{M}$.

Sea $x \in M$; entonces x está contenido en un abierto M cuya cerradura es compacta.

Por lo tanto, M es localmente compacto en x para toda $x \in M$ y así M es localmente compacto. ∎

Ejemplos:

Subconjuntos localmente compactos:

- Todo conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}$.

  Sea $a_s \in A$. Sea $U = (a_{s-1}, a_{s+1}) \cap A$ es un abierto que contiene a a_s. Denotaremos a la cerradura de U en $\mathbb{R}$ por $Cl_{\mathbb{R}}$. Es claro que $Cl_{\mathbb{R}}(U) = \{a_s\}$ y por lo tanto A es localmente compacto. ∎

- El conjunto $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$

  Sea $\{\frac{1}{n_0}\} \in A$. Sea $U = (\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0-1}) \cap A$ es un abierto en A tal que contiene a $\frac{1}{n_0}$. La cerradura de U en A es $\{\frac{1}{n_0}\}$, que claramente es compacto. Por lo tanto A es localmente compacto. ■

- El conjunto $B = \{\frac{1}{n} | n \in N \cup \{0\}\}$.

  Sabemos ya que B es compacto. Por lo tanto B es localmente compacto. ■

- El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$.

  Sea $x \in \mathbb{R}$, entonces $x \in (x-1, x+1)$. Observese que la cerradura de este abierto es un conjunto compacto. Por lo tanto $\mathbb{R}$ es localmente compacto en todos sus puntos. ■

- La unión finita de intervalos de la forma $(a, b]$.

  Sea x un punto contenido en la unión de intervalos de la forma $(a, b]$, entonces x está en un abierto de la forma $(x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}) \cap (a, b]$ cuya cerradura es un intervalo cerrado y acotado. Por lo tanto es localmente compacto. ■

Subconjuntos que no son localmente compactos:

- El conjunto de los números racionales.

  Consideremos $0 \in \mathbb{Q}$. Sea $U = (-\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}) \cap \mathbb{Q}$, es claro que $U \subset Cl_{\mathbb{Q}}(U) \subset \mathbb{Q}$.

  Sea $t \in (0, \frac{1}{n_0}), t \notin \mathbb{Q}$. Fijémonos en la cubierta abierta de $Cl_{\mathbb{Q}}(U)$ dada por:

  $$\{A_n = [(-\infty, t - \frac{1}{n}) \cup (t + \frac{1}{n}, \infty)] \cap \mathbb{Q} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

  Observemos que cada subcolección finita de $\{A_n\}$ deja de cubrir un conjunto de la forma $(t - \frac{1}{k}, t + \frac{1}{k}) \cap \mathbb{Q}$. Por lo tanto $Cl_{\mathbb{Q}}(U)$ no es compacto y con ello $\mathbb{Q}$ no es localmente compacto. ■

- $M = [0, 1] \cap Q$.

  La no compacidad local de M puede ser demostrada con argumentos análogos a los usados en el ejemplo anterior.

  Únicamente se debe elegir otro punto $q \in M$, un conjunto abierto $U \subset M$ tal que $Cl_{\mathbb{Q}} \subset M$ y un punto t en una vecindad $V(q)$ de q tal que $V(q) \cap \mathbb{Q} \subset U$ y $t \notin M$.

Con esto contruimos una cubierta

$$\{B_n = [[0, t - \frac{1}{n}) \cup (t + \frac{1}{n}, 1]] \cap \mathbb{Q}\}$$

que permite ver que $Cl_{\mathbb{Q}}(U)$ no es compacta. Así, M no es localmente compacto. ■

- $M = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

  Sea $x \in M$ y $U \subset M$ un conjunto abierto en M tal que $x \in U$.

  Tomemos un punto p en una vecindad de x tal que $V(x) \cap \mathbb{Q} \subset U$

  Fijémonos en la cubierta dada por:

  $$C_n = ((-\infty, p - \frac{1}{n}) \cup (p + \frac{1}{n}, \infty)) \cap M$$

  De la misma manera se ve que la cerradura de U en $\mathbb{Q}$ no es compacta. Por lo tanto M no es localmente compacto. ■

Reformulemos ahora el teorema 3.3

Teorema 5.4 *Sea X un subconjunto localmente compacto de la recta real. Si X admite funciones transitivas entonces es alguno de los siguientes tipos de conjuntos:*

1. *Conjunto finito*
2. *Unión finita de intervalos compactos*
3. *Conjunto de Cantor*
4. *Unión finita de intervalos no compactos*
5. *Unión numerable de conjuntos de Cantor*

Notemos que ya hemos presentado ejemplos de funciones transitivas definidas en todos los subconjuntos localmente compactos aquí mencionados.

La demostración del teorema 3.3 es parte fundamental de la demostración de este último teorema. Lo que falta puede ser consultado directamente en él artículo [3] de la bibliografía.

Decidimos sólo proporcionar la referencia de dónde puede obtenerse la demostración completa y no presentarla pues los argumentos necesarios van más allá del tipo de argumentos que hasta ahora hemos manejado. **Bibliografía**

1. Vellekoop M., Berglund R. *On Intervals, Transitivity = Chaos.* The American Mathematical Monthly. vol 101 (1994) pp.353-355.

2. Nagar A., Kannan V., Sesha Sai S.P. *Properties Of Topologically Transitive Maps.* Real Analysis Exchange. vol 27(1) (2001-2002) pp.325-334.

3. Nagar A., Kannan V. *Spaces Admitting Topologically Transitive Maps.* Topology Proceedings. vol 26 (2001-2002) pp.297-306.

4. Devaney R., *An introduction to chaotic dynamical systems.* Segunda Edición. Addison-Wesley Publishing Company. USA 1989. pp. 17-24, 39-52.

5. Block L., Coppel W., *Dynamics in one dimension.* Springer Verlag. 1992 pp. 127-129.

6. Hocking J., Young G. *Topology.* Dover Publications. New York. 1961. pp. 71-77, 97-101.

7. Munkres J., *Topología.* Segunda edición. Pearson-Prentice Hall. 2003. pp. 186-203, 335-336.