"La función tienda y sus propiedades"

Tesis presentada
por

Manuel de Jesús Paniagua Díaz

para obtener el Título
de

Actuario

Director de Tesis: Dr. Héctor Méndez Lango

Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

2006

Reconocimientos

A Dios, por que sin él no soy nada en esta vida.

A mis Papás:

Les doy las gracias por su amor, apoyo, comprensión, enseñanza y en especial por haberme inculcado desde niño el gusto por el aprendizaje, no puedo olvidar esos días en los que mi mamá me ayudó con la carta al amigo en el segundo grado y el apoyo que me dio para decidirme por la Actuaría; o los viajes a la secundaria con mi papá en los que practicábamos el inglés que tanto me sirve hoy día. ¡Este es un logro de los tres!

A mis Hermanos:

Muchas gracias, porque ustedes me han enseñado tantas cosas que me sirvieron para terminar esta tesis: la responsabilidad y el compromiso de Miguel Ángel, la superación y el valor de Doris Lisset y la determinación y el coraje de Mirna. Los quiero hermanos.

A mi Esposa:

Mi amor, contigo he aprendido que el amor lo puede todo; gracias por alentarme, comprenderme, escucharme y en general por apoyarme para la realización de mi tesis y la de mi vida, sin ti no podría haberlo hecho, te amo yo...

A mis Abuelitos:

Gracias por tanto amor y por tan grande ejemplo, son las personas que más admiro en mi vida y me sirven de inspiración.

Al Dr. Héctor Méndez Lango:

Gracias por ser un gran maestro, hiciste que el Cálculo Diferencial fuera para mi como un juego de niños (sobre todo cuando las superficies en $\mathbb{R}^2$ tenían la cara de Garfield) e hiciste que disfrutara de nueva cuenta las matemáticas con la dirección de mi tesis, pero sobre todo gracias por tu paciencia y apoyo.

Agradecimientos

Agradezco la valiosa colaboración de mis sinodales quienes hicieron muy importantes contribuciones para mejorar esta tesis:

Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez

Dr. Jefferson Edwin King Dávalos

Dr. Luis Antonio Rincón Solís

Dr. Guillermo Sienra Loera

Índice

Introducción

1 El orden del caos

> **Las nubes no son esféricas, las montañas no son cónicas, las playas no son semicirculares y ni las copas de los árboles son redondas y suaves, ni la luz viaja en línea recta.**
> **—Benoit Mandelbrot**

¿Qué es exactamente el caos? El nombre se deriva de los sistemas dinámicos en aparente desorden que componen a la **teoría del caos**, pero esta teoría realmente trata de encontrar el orden subyacente en el comportamiento que, a primera vista parece aleatorio.

Durante siglos los matemáticos han estudiado "lo lineal": ecuaciones lineales, funciones lineales, álgebra lineal, etc.. La humanidad ha entendido y magistralmente manejado todas estas áreas; la razón por la que lo han hecho es simple: los sistemas lineales siguen un patrón predecible; sin embargo, nuestro mundo no es lineal, de hecho debe ser categorizado como un mundo no lineal, esto es lo que ha mantenido ocupados a algunos científicos desde el siglo XX y que ha dado paso a la teoría del caos.

El primer experimentador en caos fue un curioso meteorólogo llamado Edward Lorenz. En 1960, él estaba trabajando en un problema de predicción del clima usando una computadora y un modelo de 12 ecuaciones. Un dia de 1961, quería ver de nueva cuenta una determinada secuencia que ya había modelado. Tratando de ahorrar tiempo, tomó de una impresión que tenía (de una modelación anterior) el valor de la secuencia a la mitad y trató de replicar el modelo desde ahí.

Una hora después la secuencia había evolucionado de otra manera y terminó con un resultado completamente diferente.

Eventualmente, descubrió lo que había pasado: la computadora sólo almacenaba números con seis decimales, pero cuando él imprimió el resultado del modelo anterior sólo usó tres decimales para ahorrar papel. De está manera el número que utilizó para iniciar la secuencia fue 0.506 en vez de 0.506127.

Los científicos de esa época se consideraban afortunados cuando trabajaban con tres decimales. La idea general en aquel tiempo era que con esos tres decimales debió obtener resultados muy cercanos a los del modelo anterior, pues pensaban que los decimales 4°, 5° y 6° no influían significativamente en el resultado, Lorenz demostró que estaban equivocados.

El fenómeno que Lorenz encontró es conocido como el efecto mariposa, el nombre es una analogía de la sensibilidad de su descubrimiento, a las condiciones iniciales. *El aleteo de una maripósa en la atmósfera en la costa este de los Estados Unidos puede crear o evitar que se cree un tifón en Indonesia.*

2 Sistemas Dinámicos

La teoría del caos es fascinante, ha creado toda una nueva corriente de pensamiento que está modificando el status quo de las matemáticas hoy en día. Una parte fundamental de esta teoría son los sistemas dinámicos. Estos nacieron con descubrimientos de científicos no tan ligados a las matemáticas como el de Lorenz, pero fueron y están siendo desarrollados por matemáticos.

Cualquiera podría pensar que el punto que usó Lorenz es único, es decir que sólo con el punto 0.506127 y el punto 0.506 las secuencias en su modelo son distintas, pero no es así; de hecho, hizo muchos experimentos con diferentes puntos y el resultado fue similar al que tuvo con el primero. ¿Qué fuerzas dirigen el comportamiento de estos puntos? ¿Cuántos puntos habrán así?, ¿Cuáles serán esos puntos? ¿Habrá otro tipo de comportamiento en algún otro punto?

Esta Tesis tiene como objetivo el analizar el tipo de comportamiento que Lorenz encontró en ese punto y todos los comportamientos posibles en los puntos de un Sistema Dinámico en los números reales. Se verá que existen diferentes tipos de puntos: Periódicos, preperiódicos, aperiódicos y con sombra.

Con este fin, la tesis girará en torno a una función real muy especial. Esta función es muy simple, pero tiene un comportamiento singular. Se llama la *Tienda de Campaña* (nombre que obtiene de manera natural por su gráfica) y su definición es:

Definición 1 *Sea* $I = [0,1]$, $I \subset \mathbb{R}$, *sea* $T : I \to I$, *con la siguiente regla de correspondencia*

$$T(x) = \begin{cases} 2x & si\ x < \frac{1}{2} \\ 2-2x & si\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La Tesis iniciará describiendo las propiedades de esta función y se analizará su comportamiento para después adentrarse en el complejo mundo de los puntos de I. Con la ayuda de la Teoria de la medida y un artículo escrito por Steven MacEachern y Mark Beliner, dicha complejidad será aclarada con un Teorema muy importante.

De esta forma en el **primer capítulo** se darán las primeras definiciones necesarias para entender el sistema dinámico que genera la función T; se definirá la *órbita* de un punto. También se demostrarán dos importantes resultados: el primero es que el conjunto de los puntos con *órbitas periódicas* es numerable y denso en I, el segundo trata sobre uno de los ingredientes de la definición de caos, el concepto de *sensibilidad a las condiciones iniciales*. La sensibilidad explica, de alguna manera, los fenómenos que descubrió Lorenz en el problema que estudiaba. Si bien en esta tesis no se discutirá el modelo de Lorenz, el estudio de la función T permitirá ver lo que puede provocar la presencia de la sensibilidad en un modelo sencillo.

Finalmente, se definirá el concepto de función caótica y se probará que la función T cumple con este concepto.

En el **segundo capítulo** se definirá una órbita mucho más compleja, la *órbita aperiódica*. Se demostrará con la ayuda del *teorema de Baire* que en la función T existe al menos una órbita aperiódica.

En el **tercer capítulo** se hará una breve introducción a la *teoría de la medida*: Se partirá de la definición de *álgebras de conjuntos* y de sus propiedades para dar una primera idea de la *medida*; después se introducirá la *medida exterior* y se demostrarán dos resultados: la *medida exterior* de intervalos reales es la longitud de los mismos y los conjuntos numerables tienen medida exterior cero. También se dará la definición de *medida de Lebesgue* y, finalmente, se demostrará que el conjunto de los *puntos periódicos* en I bajo la función T tiene *medida cero*.

Por último, en el **cuarto capítulo** basándose en un artículo con los resultados obtenidos por MacEachern y Beliner[1], se determinará la importancia de las órbitas aperiódicas en el sistema dinámico generado por la función T. Con tal fin, se definirán los *puntos con sombra*, y también una versión alterna de órbitas a través de la *función itinerario* que, servirán para demostrar el resultado más importante del capítulo: El conjunto de los *puntos con sombra* tiene *medida* 1.

Al finalizar la tesis, se tendrá una muy buena idea de las propiedades dinámicas de la función T.

Capítulo I

La función T y sus propiedades

1 Consideraciones Generales

A lo largo de toda esta tesis:

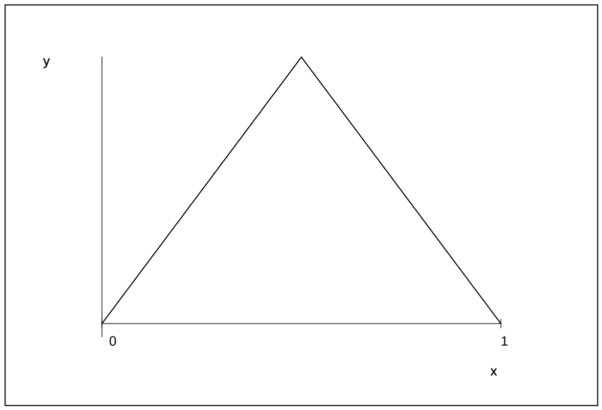
1. I representa el intervalo $[0, 1]$.
2. Todas las funciones tienen el mismo conjunto como Dominio y Contradominio.
3. Todas las funciones serán continuas.
4. Dado un conjunto X y una función $f : X \to X$, f^0 representa la función identidad en X, es decir $f^0(x) = x$ para toda $x \in X$, y además $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ y $f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f$, f compuesta consigo misma n veces.

2 La Función T

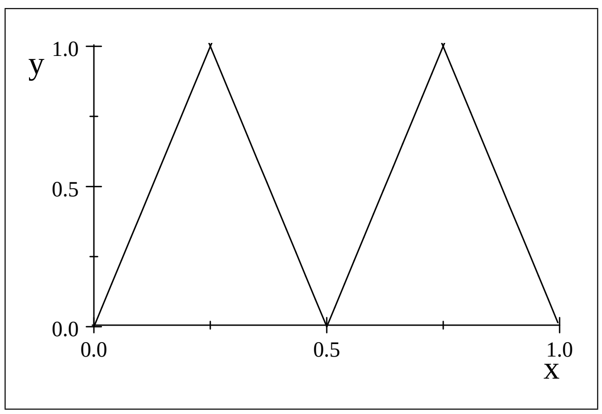
De aquí en adelante $T : [0, 1] \to [0, 1]$ siempre representará a la función *tienda*.

Las gráficas de T, T^2 y T^3 son las siguientes:

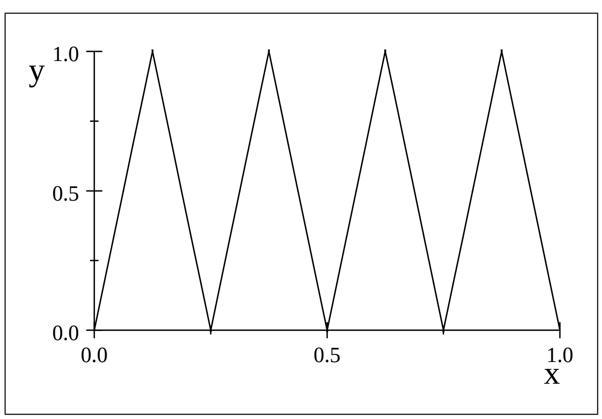
La gráfica de T



La gráfica de T^2



La gráfica de T^3



3 Propiedades básicas de T

1. T es continua en $[0,1]$.

2. T es derivable en x, para toda $x \in [0,1]$, $x \neq \frac{1}{2}$ y $|T'(x)| = 2$.

Con las siguientes definiciones se iniciará el estudio de las características dinámicas de los puntos de T.

Definición 2 *Sea $f : I \longrightarrow I$, sea x_0 un elemento de I, la **órbita** de x_0 bajo f es el siguiente conjunto:*

$$\left\{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \ldots\right\} = \{f^n(x_0) \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

y se denotará por $o(x_0, f)$.

Definición 3 *Sea x_0 un punto en el intervalo $I = [0,1]$. Se denotarán los puntos de la orbita de x_0 de la siguiente manera*

$$x_n = f^n(x_0), \text{ para toda } n \in \mathbb{N}.$$

Definición 4 *Sea $x_0 \in I$. x_0 es un punto fijo si $f(x_0) = x_0$. En este caso $o(x_0, f) = \{x_0\}$.*

Definición 5 *Sea $x_0 \in I$. x_0 es un punto periódico de periodo n si existe $n \in \mathbb{N}$, tal que*

$$f^n(x_0) = x_0,$$

y para cada j, $1 \leq j < n$,

$$f^j(x_0) \neq x_0,$$

en este caso $o(x_0, f) = \{x_0, f^1(x_0), f^2(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0)\}$.

Definición 6 *El conjunto de todos los puntos periódicos de f será denotado así: $Per(f)$.*

Definición 7 *Sea $x_0 \in I$; se dice que $x \in I$ es un punto preperiódico, o tiene órbita preperiódica, si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(x) \in Per(f)$.*

Definición 8 *Sea $x \in I$; se dice que x es asintóticamente periódico, o tiene órbita asintóticamente periódica, si existe $y \in Per(f)$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \left| f^j(x) - f^j(y) \right| = 0.$$

Una vez que se definieron algunos de los distintos tipos de puntos que existen en el intervalo I bajo T, se inicia de manera formal el estudio de los *Sistemas Dinámicos*, sin embargo vale la pena que sean vistos algunos ejemplos de estos puntos antes de empezar.

Ejemplo 9 *El primer ejemplo es de un punto fijo, sea $x = 0$, al aplicar la función se tiene que $T(0) = 0$, lo cual lo hace un punto fijo.*

Ejemplo 10 *Este es un ejemplo de punto periódico, sea $x = \frac{4}{9} \in I$, al aplicar la función se tiene que*

$$\begin{aligned} T\left(\frac{4}{9}\right) &= 2\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{8}{9} \\ T^2\left(\frac{4}{9}\right) &= 2 - 2\left(\frac{8}{9}\right) = \frac{2}{9} \\ T^2\left(\frac{4}{9}\right) &= \frac{4}{9}, \end{aligned}$$

con lo que se concluye que $\frac{4}{9}$ es un punto de período 3.

Ejemplo 11 *En el caso de un punto preperiódico, sea $x = \frac{2}{9}$. Claramente se ve al aplicar una vez la función T que*

$$T\left(\frac{2}{9}\right) = 2\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{4}{9},$$

con lo anterior se repite el caso del ejemplo 10, donde $\frac{4}{9}$ es un punto periódico de período 3.

Una propiedad importante de la función T es que "duplica" distancias y en ciertos casos, la función aplicada a intervalos pequeños dentro de I genera como imagen todo el intervalo I, esta propiedad es demostrada en los lemas siguientes.

Lema 12 *Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $l \in \left\{0, 1, 2, ..., 2^k - 1\right\}$ se tiene que*

$$T^k\left(\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]\right) = I.$$

Además

$$T^k\Big|_{\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]} : \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \longrightarrow I,$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Por inducción sobre k. Sea $k = 1$, $l \in \{0, 1\}$

para $l = 0$, se tiene que

$$T^1\left(\left[\frac{0}{2^1}, \frac{1}{2^1}\right]\right) = I,$$

para $l = 1$, se tiene que

$$T^1\left(\left[\frac{1}{2^1}, \frac{2}{2^1}\right]\right) = I.$$

Estas igualdades son ciertas gracias a la definición de T.

Ambas funciones

$$T^1\Big|_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} \quad : \quad \left[0, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow I$$
$$T^1\Big|_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]} \quad : \quad \left[\frac{1}{2}, 1\right] \longrightarrow I$$

Son continuas y biyectivas y con inversa continua, por lo tanto son homeomorfismos.

Supóngase que la proposición es válida para n,

Será demostrado que es válida para $n + 1$. Sea $l \in \{0, 1, 2, ..., 2^{n+1} - 1\}$, tiene que ser demostrado que

$$T^{n+1}\left(\left[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\right) = I.$$

Puede verse que

$$T^{n+1}\left(\left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\right)=T^{n}\circ T\left(\left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\right).$$

Obsérvese que

$$\left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\subset\left[0,\frac{1}{2}\right]\quad \acute{o}\quad \left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\subset\left[\frac{1}{2},1\right],$$

puesto que de lo contrario se tendría que

$$\frac{l}{2^{n+1}}<\frac{1}{2}=\frac{2^n}{2^{n+1}}<\frac{l+1}{2^{n+1}}$$

con lo que podría concluirse que $l<2n<l+1$ lo cual es una contradicción.

Entonces por lo anterior se tiene que

$$T\left(\left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\right)=\begin{cases}\left[\dfrac{l}{2^{n}},\dfrac{l+1}{2^{n}}\right] & si\quad \left[\dfrac{l}{2^{n+1}},\dfrac{l+1}{2^{n+1}}\right]\subset\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\\[2ex] \left[\dfrac{l'}{2^{n}},\dfrac{l'+1}{2^{n}}\right] & si\quad \left[\dfrac{l}{2^{n+1}},\dfrac{l+1}{2^{n+1}}\right]\subset\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

dado que para el caso donde

$$\left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\subset\left[\frac{1}{2},1\right],$$

se tiene que

$$\begin{aligned}T\left(\left[\frac{l}{2^{n+1}},\frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\right)&=\left[2-\frac{2(l+1)}{2^{n+1}},2-\frac{2l}{2^{n+1}}\right]\\&=\left[\frac{2^{n+1}-l-1}{2^{n}},\frac{2^{n+1}-l}{2^{n}}\right]\\&=\left[\frac{l'}{2^{n}},\frac{l'+1}{2^{n}}\right],\end{aligned}$$

donde

$$l' = 2^{n+1} - l - 1,$$

por lo que

$$T^n \circ T\left(\left[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}\right]\right) = T^n\left(\left[\frac{l^*}{2^n}, \frac{l^*+1}{2^n}\right]\right),$$

donde $l^* = l$ si $l+1 \leq 2^n$ ó $l^* = l'$ si $2^n \leq l$.

La proposición sería valida sólo si

$$l^* \in \{0, 1, 2, ..., 2^n - 1\},$$

pero puede verse que

$$\begin{aligned}
-2^n &\geq -l \\
2^{n+1} - 2^n &\geq 2^{n+1} - l \\
2^{n+1} - 2^n - 1 &\geq 2^{n+1} - l - 1 \\
2^n(2-1) - 1 &\geq 2^{n+1} - l - 1 = l' \\
2^n - 1 &\geq l' = l^*,
\end{aligned}$$

con lo que se concluye que $l^* \in \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$.

Y por hipótesis de inducción

$$T^n\left(\left[\frac{l^*}{2^n}, \frac{l^*+1}{2^n}\right]\right) = I.$$

Como

$$T\Big|_{\left[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}\right]} \quad y \quad T^n\Big|_{\left[\frac{l^*}{2^{n+1}}, \frac{l^*+1}{2^{n+1}}\right]}$$

son homeomorfismos, entonces

$$T^{n+1}\Big|_{\left[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}\right]} : \left[\frac{l}{2^{n+1}}, \frac{l+1}{2^{n+1}}\right] \longrightarrow I,$$

es un homeomorfismo. ■

Lema 13 *Sea* $(a,b) \subset I$, $a < b$. *Entonces existen* $k \in \mathbb{N}$ *y* $l \in \left\{0,1,2,...,2^k - 1\right\}$ *tales que*

$$\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \subset (a,b)$$

Demostración. Para demostrarse, se construirá un intervalo del tipo $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ dentro de (a,b). Como $a < b$, entonces $b - a > 0$. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3}.$$

Este número k existe ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Sea $i = máx\left\{j \mid \frac{j}{2^k} \leq a\right\}$. Si $\frac{i+1}{2^k} \notin (a,b)$ entonces

$$\frac{i}{2^k} \leq a < b \leq \frac{i+1}{2^k}$$

y

$$b - a < \frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3},$$

lo cual es una contradicción; con esto se tiene al límite inferior del intervalo, ahora sólo es necesario encontrar el límite superior.

Para encontrar dicho límite, tómese el punto $\frac{i+2}{2^k}$. Si $\frac{i+2}{2^k} \notin (a,b)$ entonces se tiene que

$$\frac{i}{2^k} \leq a < b \leq \frac{i+2}{2^k}$$

y con ello

$$b - a < \frac{2}{2^k}, \ \frac{b-a}{2} < \frac{1}{2^k}$$

lo cual es una contradicción ya que

$$\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3} < \frac{b-a}{2} < \frac{1}{2^k}.$$

Por lo tanto $\left[\frac{i+1}{2^k}, \frac{i+2}{2^k}\right] \subset (a,b)$. Tomando $l = i+1$ se tiene demostrado el lema. ■

Lema 14 *Sea $(a,b) \subset I$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(a,b) = I$.*

Demostración. Por el Lema 13 existen $k \in \mathbb{N}$ y $l \in \left\{0,1,2,...,2^k - 1\right\}$ tales que

$$\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] \subset (a,b),$$

y por el Lema 12

$$T^k \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] = I,$$

por lo tanto, tomando $n = k$,

$$I = T^n\left(\left[\frac{l}{2^n}, \frac{l+1}{2^n}\right]\right) \subset T^n(a,b) \subset I \text{ por lo que } T^n(a,b) = I.$$

Con lo que termina la demostración. ■

La siguiente definición tiene que ver con el descubrimiento que hizo Lorenz. Se verá que la función T cumple con está condición.

Definición 15 *Se dice que una función $f : I \to I$ es sensible a las condiciones iniciales en I si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in I$ y para todo $\delta > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ y un punto $y \in I$ tales que*

$$|\, x - y| < \delta \text{ y } |\, f^n(x) - f^n(y)| > \varepsilon.$$

Teorema 16 *La función T es sensible a las condiciones iniciales en I.*

Demostración. Sean $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $x \in I$, y $\delta > 0$. Por el Lema 14 existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(x-\delta, x+\delta) = I.$$

Entonces existe $c \in (x-\delta, x+\delta)$ tal que

$$T^n(c) = 0,$$

y existe $d \in (x-\delta, x+\delta)$ tal que

$$T^n(d) = 1.$$

Por lo anterior se tiene que

$$|T^n(c) - T^n(x)| > \frac{1}{3} \quad ó \quad |T^n(d) - T^n(x)| > \frac{1}{3},$$

pues de lo contrario se tendría que

$$|T^n(c) - T^n(x)| \leq \frac{1}{3} \quad y \quad |T^n(d) - T^n(x)| \leq \frac{1}{3},$$

y de esta forma

$$|T^n(c) - T^n(x)| + |T^n(d) - T^n(x)| \geq |T^n(d) - T^n(c)|,$$

por lo que podría concluirse que

$$1 = |\, T^n(d) - T^n(c)| \leq \frac{2}{3},$$

lo cual es una contradicción.

Para finalizar se toma a $y = c$ ó $y = d$, dependiendo de cuál sea la distancia mayor a $\frac{1}{3}$, con lo que se tiene que

$$|\, x - y| < \delta \ y \ |\, f^n(x) - f^n(y)| > \frac{1}{3},$$

lo que prueba la afirmación. ■

Definición 17 *Sea $f : I \to I$. Se dice que f es topológicamente transitiva en I, si para toda pareja de subintervalos abiertos de I, (a,b) y (c,d), $a < b$, $c < d$ existen:*

1. *Un punto $x \in (a,b)$.*

2. *Una $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) \in (c,d)$.*

Proposición 18 *$T : I \to I$ es topológicamente transitiva en I*

Demostración. Sean (a,b) y (c,d) dos intervalos en I, $a<b$, $c<d$. Por el Lema 14, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$T^n(a,b)=I,$$

entonces

$$(c,d)\subset T^n(a,b)=I.$$

Tómese el punto $\frac{(c+d)}{2}$ en (c,d). Como T^n es continua y $T^n(a,b)=I$, entonces existe $x\in(a,b)$ tal que

$$T^n(x)=\frac{(c+d)}{2},$$
$$T^n(x)\in(c,d),$$

por lo tanto T es topológicamente transitiva. ■

Las propiedades que se han visto hasta ahora son parte de la introducción necesaria en la comprensión de un *Sistema Dinámico*. Sin embargo, el análisis de las órbitas de los distintos puntos que componen a I brindará un panorama más amplio. De esta manera el conjunto de los Puntos *Periódicos* es el primero que será estudiado.

Lema 19 *Sea $g:I\to I$, Si para algún intervalo $[a,b]\subset[0,1]$ se tiene $g([a,b])=I$, entonces existe $x\in[a,b]$ tal que*

$$g(x)=x.$$

Demostración. Como $g([a,b])=[0,1]$, entonces existen $x_{0,}\ x_1\in[a,b]$ tales que

$$g(x_0)=1\ y\ g(x_1)=0,$$

con $x_0<x_1$ ó $x_0>x_1$. Supóngase que $x_0<x_1$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq a\leq x_0<x_1\leq b\leq 1,\\ g(x_1) &\leq a\leq x_0<x_1\leq b\leq g(x_0), \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$g(x_1)\leq x_1\ y\ g(x_0)\geq x_0,$$

entonces

$$g(x_1) - x_1 \leq 0 \ y \ g(x_0) - x_0 \geq 1.$$

Se define a $h(x)$ como $h(x) = g(x) - x,\ h : I \to \mathbb{R}$, continua y con

$$h(x_1) \leq 0 \text{ y } h(x_0) \geq 0.$$

Por el *Teorema del valor intermedio* existe $c,\ x_0 \leq c \leq x_1$ tal que

$$h(c) = 0\ ,$$

haciendo que

$$g(c) = c.$$

Como $0 \leq x_0 \leq c \leq x_1 \leq 1,\ c \in I$, y si se toma a $c = x$, se tiene un caso demostrado. El otro caso, $x_0 > x_1$ se puede demostrar de manera similar. ■

Definición 20 *Decimos que $E \subset I$ es denso en I si para todo intervalo $(a, b) \subset I$, $a < b$, existe $c \in E$ tal que $c \in (a, b)$.*

Proposición 21 *El conjunto de los puntos periódicos de T forma un conjunto denso en I.*

Demostración. Sean $a < b,\ (a, b) \subset I$. Por el Lema 14 existe una $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$T^n(a, b) = I.$$

De aquí se sigue que existen α *y* β en (a, b), $\alpha < \beta$ tales que

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= 0 \text{ y } T(\beta) = 1, \\ &\quad ó \\ T(\alpha) &= 1 \text{ y } T(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Entonces $T([\alpha, \beta]) = I$.

Ahora, por el lema 19 se tiene que existe una $x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$ tal que

$$T^n(x) = x.$$

Por lo anterior y por la definición de punto periódico se tiene que hay un punto periódico en el intervalo (a,b), con lo que puede concluirse que el conjunto de puntos periódicos es denso en I. ■

Proposición 22 *El conjunto de los puntos periódicos de T es numerable.*

Demostración. Obsérvese que según el lema 12, para cualquier $k \in \mathbb{N}$ y cualquier intervalo de la forma $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ con $l \in \left\{1, 2, \ldots, 2^{k-1}\right\}$, se tiene que

$$T^k \left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right] = I.$$

Como la pendiente de T^k es 2^k ó -2^k en cada intervalo $\left[\frac{l}{2^{k-1}}, \frac{l+1}{2^k}\right]$, se puede afirmar que la gráfica de T sólo cruza la diagonal $x = y$ una sola vez en cada intervalo $\left[\frac{l}{2^k}, \frac{l+1}{2^k}\right]$ y por lo tanto el conjunto

$$A_k = \left\{x \in [0,1] | \, T^k(x) = x\right\}$$

tiene cardinalidad 2^k.

De lo anterior se tiene que el conjunto de los puntos periódicos puede describirse como:

$$Per(T) = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Dado que cada uno de los A_k tiene cardinalidad finita puede concluirse que la cardinalidad de $Per(T)$ es numerable. ■

La siguiente es la definición de caos según R. L. Devaney.[2]

Definición 23 *Sea $f : I \to I$, $I = [0,1]$. Se dice que f da lugar a un sistema dinámico caótico en I o que f es caótica en I, si cumple lo siguiente:*

1. *El conjunto de sus puntos periódicos es denso en I.*

2. *f tiene sensibilidad a las condiciones iniciales en I.*

3. *f es topológicamente transitiva en I.*

Dado que la función T cumple con las tres características se concluye que es una función caótica en I.

Capítulo II

Órbitas aperiódicas

Después de haberse visto el resultado relativamente sorprendente de que la función T es caótica según Devaney, en este capítulo serán analizadas más características de la función, en particular se verá la presencia de un tipo de puntos cuyas órbitas no son predecibles como las periódicas o preperiódicas y además se demostrará que son muchos los puntos que tienen una órbita de este tipo en I bajo la función T.

Para tal propósito se definirán dichas órbitas y se demostrarán algunos resultados que contribuirán a probar su existencia.

Definición 24 *Sea $f : I \to I$. Se dice que x es un punto aperiódico, o que tiene una órbita aperiódica bajo f, si x no es un punto periódico, preperiódico ni asintóticamente periódico bajo f.*

Definición 25 *Sea $f : I \to I$, sean x y z dos puntos en I. Se dice que z es un punto límite de la órbita de x si existe una subsucesión de $o(x, f)$,*

$$\{f^{n_i}(x) \,|n_1 < n_2 < n_3 \cdots \}$$

tal que $\lim_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = z$.

El conjunto de todos los puntos límite de $o(x, f)$ será llamado el omega conjunto límite de x, y lo denotaremos por $\omega(x, f)$.

Obsérvese que si $x \in I$ es periódico, preperiódico o asintóticamente periódico entonces $w(x, f)$ es finíto.

La proposición siguiente así como el $Teorema$ que le sigue son necesarios para la demostración de la existencia de la órbita aperiódica.

Definición 26 *Se dice que un subconjunto A de I es abierto en I si existe un conjunto abierto de $\mathbb{R}$, dígase B, tal que $A = B \cap I$. En este sentido, por ejemplo, el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ es abierto en $[0, 1]$.*

Más en general, si $A \subset \Omega \subset \mathbb{R}$. Se tiene que A es abierto en $\Omega \subset \mathbb{R}$ si $A = B \cap \Omega$ con un conjunto B abierto de $\mathbb{R}$.

Definición 27 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto y sea $x \in A$. Se conoce como la bola abierta de radio $\varepsilon > 0$ con centro en x al conjunto*

$$\{y \in A \,|(|x - y|) < \varepsilon\},$$

y se denotará $B_\varepsilon(x)$.

Proposición 28 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $\mathbb{R}$ y sea $A \subset \mathbb{R}$, abierto, su imagen inversa $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea $\widehat{x} \in f^{-1}(A)$ como A es un conjunto abierto se tiene que para $y = f(\widehat{x}) \in A$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B_\varepsilon(y) \subset A,$$

como f es una función continua, para ε existe $\delta > 0$ tal que si $|x - \widehat{x}| < \delta$, se tiene entonces que

$$|f(x) - f(\widehat{x})| < \varepsilon.$$

Por lo tanto si $x \in B_\delta(\widehat{x})$, entonces

$$f(x) \in B_\varepsilon(y) \subset \mathbb{R}.$$

Esto implica que

$$B_\delta(\widehat{x}) \subset f^{-1}(A).$$

Con lo que se concluye que $f^{-1}(A)$ es un conjunto abierto. ■

El siguiente teorema es la herramienta principal que ayudará a mostrar la existencia de puntos en I tales que bajo la función T tienen órbita densa, y por tanto son aperiódicos.

Teorema 29 *(Baire) Sea J un subconjunto cerrado no vacío de $\mathbb{R}$. Sea una colección numerable de subconjuntos de J digamos $\{O_1, O_2, \ldots\}$, abiertos y densos en J. Entonces la intersección de todos ellos forma un conjunto distinto del vacío, es decir, $\cap_{n=1}^{\infty} O_n \neq \varnothing$.*

Demostración. Sea $x_1 \in O_1$. Dado que O_1 es un conjunto abierto existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap J \subset O_1$$

Por otro lado, dado que O_2 es un conjunto denso en J, existe $x_2 \in J$ tal que

$$x_2 \in (B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap J) \cap O_2$$

Ahora, dado que $B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_2$ es un conjunto abierto en J, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que

$$B_{\varepsilon_2}(x_2) \cap J \subset B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap O_2$$

Por lo anterior puede tomarse a ε_2 como

$$\varepsilon_2 < \frac{1}{2}\varepsilon_1 \text{ y } \varepsilon_2 < \varepsilon_1 - |x_1 - x_2|$$

De esta forma

$$\overline{B_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset B_{\varepsilon_1}(x_1).$$

Procediendo inductivamente, se obtiene una sucesión de puntos x_n y una sucesión $\overline{B_{\varepsilon_n}}$ de bolas cerradas tales que

$$\overline{B_{\varepsilon_n}(x_n)} \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(x_{n-1}) \ y \ B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset O_n$$

y cuyo radio ε_n tiende a cero.

Sea $\{x_n\} \subset J$ la sucesión de los centros de las bolas. Dado que ε_n tiende a cero puede encontrarse una $N \in \mathbb{N}$, tal que si $n, m \geq N$ se cumple que

$$x_n \in B_{\varepsilon_N}(x_N) \text{ y } x_m \in B_{\varepsilon_N}(x_N).$$

Por lo que

$$|x_m - x_n| < 2\varepsilon_N$$

Ahora, dado que $\{\varepsilon_n\}$ tiende a cero, se tiene que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y dado que $\mathbb{R}$ es un espacio completo, dicha sucesión converge a un punto del mismo $\mathbb{R}$, dígase x, por lo que dado que

$$x_n \in B_{\varepsilon_{N+1}}(x_{N+1}) \cap J \text{ para } n > N,$$

se tiene que

$$x \in \overline{B_{\varepsilon_{N+1}}}(x_{N+1}) \cap J \subset B_{\varepsilon_N}(x_N) \cap J \subset O_N$$

ya que J es cerrado.

Por lo tanto, $x \in O_N$ para toda N, con lo que se concluye que $x \in \cap_{n=1}^{\infty} O_n$ ∎

Teorema 30 *Sea $f : I \to I$ una función continua. Si f es transitiva en I, entonces existe $x \in I$ tal que su órbita forma un conjunto denso en I y por tanto su órbita es aperiódica.*

Demostración. Para demostrar este Teorema se construirá una familia de conjuntos abiertos y densos en el intervalo I. Por el Teorema de Baire, la intersección de todos ellos será no vacía. Se mostrará luego que cada punto en esta intersección tiene una orbita aperiódica. De hecho, la órbita de cada punto en esa intersección formará un conjunto denso en I.

Sean $B_{11} = (0, \frac{1}{2})$ *y* $B_{12} = (\frac{1}{2}, 1)$.

Afirmación 1. La unión infinita $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})$ es un conjunto denso y abierto en el intervalo I.

Obsérvese que f y cada una de sus iteraciones $f^2, f^3, f^4, \ldots$ son funciones continuas. Por la proposición 28, cada una de las imágenes inversas de B_{11} bajo f es un conjunto abierto en I. Adicionalmente se tiene que el conjunto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}),$$

es abierto en I, por ser unión numerable de conjuntos abiertos en I.

Se mostrará ahora que esta unión forma un conjunto denso en I. De acuerdo a la definición 20, si $(a, b) \subset I$ es un intervalo no vacío en I, es suficiente mostrar que

$$(a, b) \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \neq \varnothing;$$

Como f es transitiva en I, existe $k \in \mathbb{N}$ y $x \in (a, b)$ tales que

$$f^k(x) \in B_{11};$$

por lo tanto,

$$(a, b) \cap f^{-k}(B_{11}) \neq \varnothing,$$

y con ello

$$(a, b) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \right) \neq \varnothing.$$

De manera similar a como se ha procedido se puede argumentar que la unión infinita

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12}),$$

forma un conjunto abierto y denso en I.

Ahora considérese el siguiente conjunto:

$$N_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \right) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12}) \right)$$

La meta es demostrar que este conjunto es abierto y denso en I.

Para demostrar que es abierto basta recordar que los conjuntos

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{1i})\right] \text{ para } i \in \{1,2\},$$

son conjuntos abiertos en I, por lo que su intersección será también un conjunto abierto.

Por otro lado para ver que es un conjunto denso tómese un intervalo $(a,b) \subset I$ no vacío en I. Como

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right]$$

es un conjunto abierto en I y el intervalo (a,b) a su vez es también un conjunto abierto, se tiene que

$$(a,b) \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right]$$

forma es igualmente un conjunto abierto en I.

Puesto que el conjunto

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right]$$

es denso en I se tiene que:

$$(a,b) \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right] \neq \varnothing,$$

con lo que existe una

$$x \in (a,b) \ \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right].$$

Ahora por ser

$$(a,b) \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right]$$

un conjunto abierto, se tiene que para x existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$(\beta_{\varepsilon}(x) \cap I) \subset \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11})\right] \cap (a,b).$$

Y por ser

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12})\right]$$

denso en I se puede ver que:

$$(\beta_{\varepsilon}(x) \cap I) \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12})\right] \neq \varnothing.$$

Por lo anterior existe un elemento y tal que

$$y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{12}), \text{ y también, } y \in (a,b) \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{11}) \right],$$

con lo que se demuestra que N_1 forma un conjunto denso y abierto en I.

Para construir N_2 puede procederse de manera análoga. Considérese ahora 4 subintervalos abiertos en el intervalo I. Sean

$$B_{21} = \left(0, \frac{1}{4}\right), \ B_{22} = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \ B_{23} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \ B_{24} = \left(\frac{3}{4}, 1\right).$$

Cada una de las siguientes uniones de conjuntos es un conjunto denso y abierto en el intervalo I :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{21}), \ \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{22}), \ \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{23}), \ \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{24})$$

Defínase N_2 así:

$$N_2 = \bigcap_{k=1}^{4} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{2k}) \right)$$

Nuevamente es inmediato que el conjunto N_2 es abierto y denso en I. Además, si $x \in N_2$, su órbita visita, en distintos momentos, los cuatro intervalos B_{1k}, con $k = 1, 2, 3, 4$.

Para definir N_k, k es un número natural cualquiera, debe seguirse el procedimiento descrito anteriormente.

Sean

$$B_{kl} = \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k} \right), \ l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k.$$

Los conjuntos $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{kl})$ son abiertos y densos en I para cada $l = 1, 2, 3, \ldots, 2^k$. Sea

$$N_k = \bigcap_{l=1}^{2^k} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{2k}) \right).$$

Este conjunto es abierto y denso en I.

Por último, una vez que se ha definido para cada k el conjunto N_k, sea

$$N = \bigcap_{k=1}^{\infty} N_k$$

Por el Teorema de Baire, este conjunto no es vacío.

Afirmación 2. Si $x \in N$, entonces la órbita de x forma un conjunto denso en I.

Tomemos $x \in N$. Sea (a,b) un intervalo no vacío en I. Es suficiente demostrar que $(a,b) \cap o(x,f) \neq \varnothing$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \frac{b-a}{3}$. Es inmediato que existe $l \in \{1,2,3,\ldots,2^k\}$, tal que

$$B_{kl} = \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right) \subset (a,b).$$

Como $x \in N_k$, $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-n}(B_{kl})$. Por tanto existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^j(x) \in \left(\frac{l-1}{2^k}, \frac{l}{2^k}\right) \subset (a,b).$$

Y con ello la afirmación es cierta.

Afirmación 3. Si $x \in N$, entonces $w(x,f) = I$

Sean $x \in N$ y $y \in I$. La idea es construir una subsucesión de la órbita de x que sea convergente a y.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ considerese $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$. El primer elemento de la subsucesión se determina de la siguiente manera: Como $o(x,f)$ es densa en I, existe n_1 tal que

$$|f^{n_1}(x) - y| < \varepsilon_1.$$

Para decidir el segundo elemento de la subsucesión considérese a ε_2. De nueva cuenta recuérdese que la órbita

$$o(x,f) \backslash \{x, f(x), \ldots, f^{n_1}(x)\},$$

es un conjunto denso en I, por lo que existe $n_2 > n_1$ tal que

$$|f^{n_2}(x) - y| < \varepsilon_2.$$

Siguiendo con esta construcción, supóngase que ya se escogió a n_k con las dos propiedades siguientes: $n_k > n_{k-1}$ y

$$|f^{n_k}(x) - y| < \varepsilon_k.$$

Dado que, nuevamente, el conjunto que se obtiene al quitarle a la órbita de x una cantidad finita de puntos es denso en I, es claro que existe n_{k+1} con propiedades similares a las mencionadas: $n_{k+1}>n_k$ y

$$|f^{n_{k+1}}(x) - y| < \varepsilon_{k+1}.$$

Es ahora inmediato que

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = y.$$

Con las afirmaciones anteriores puede concluirse que si $x \in N$, entonces la cardinalidad de $w(x,f)$ es infinita; de hecho, es no numerable, ya que

$$w(x,f) = I.$$

De esta forma, se encontró que si se tiene una función transitiva puede encontrarse una órbita densa y se comprueba que es aperiódica al tener un conjunto de puntos límite infinito. ■

Corolario 31 *Considérese la función $T : I \to I$. Entonces existe un punto $x \in I$, tal que tiene una orbita aperiódica bajo T.*

Demostración. Dado que T es una función transitiva, usando el teorema anterior se tiene que existe un punto $x \in I$, tal que su órbita es densa en I y por tanto aperiódica. ■

Observación 32 *Si $x_o \in I$ es un punto con órbita densa bajo T, entonces la órbita de $x_k = T^k(x_o)$ también es densa, puesto que*

$$o\left(T^k(x_o), T\right) = o(x_o, T) \diagdown \{x_o, x_1, \ldots, x_{k-1}\}.$$

Por lo tanto cada elemento de $o(x_o, T)$ tiene órbita densa en I. Con ello el conjunto de puntos con órbita densa bajo T es un conjunto denso en I. Esta es otra forma de ver que el conjunto de puntos aperiódicos de T también es denso en I.

Capítulo III

Introducción a la medida

Este capítulo será dedicado a revisar los principios de la Teoría de la Medida, que serán aplicados en el último capítulo. La presentación que aquí se hace de la teoria de la medida sigue muy de cerca el trabajo citado por Al Royden.[3]

Se iniciará con la definición de los álgebras de conjuntos que son el punto de partida, para continuar con la definición de medida exterior y luego con la de medida de Lebesgue. Finalmente se demostrará que el conjunto de puntos periódicos de T, aunque es denso en I, tiene medida cero.

1 Álgebras de Conjuntos

Definición 33 *Una colección $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}$ es llamada un álgebra de conjuntos o un álgebra Booleana si cumple las siguientes propiedades:*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.*
2. *Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.*
3. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$.*

En particular, para una colección finita de subconjuntos de $\mathbb{R}$ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{A}$, *puede comprobarse si se toman uniones de dos en dos conjuntos que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}, \text{ al igual que } \bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}.$$

Con lo que se tiene que las propiedades 1 *y* 2 *son válidas para una colección finita de subconjuntos de* $\mathbb{R}$*.*

Ejemplo 34 *La colección de todos los subconjuntos de* $\mathbb{R}$*, que se denotará* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$*, es un álgebra de conjuntos.*

Proposición 35 *Dada cualquier colección* $\mathcal{C}$ *de subconjuntos de* $\mathbb{R}$ *existe un álgebra* $\mathcal{A}$ *de tal manera que es el álgebra más pequeña que contiene a* $\mathcal{C}$*, es decir dada cualquier otro álgebra* $\mathcal{B}$ *que contenga a* $\mathcal{C}$*, se tiene entonces que* $\mathcal{B}$ *contiene a* $\mathcal{A}$*.*

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ la familia de todos los álgebras (de subconjuntos de $\mathbb{R}$) que contienen a $\mathcal{C}$.

Observación. $\mathcal{F} \neq \varnothing$, puesto que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \in \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{A} = \cap \{\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \in \mathcal{F}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}\}$. Obsérvese que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$, pues $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Se propone a $\mathcal{A}$ como el álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$. Es necesario demostrar en primera instancia que en realidad es un álgebra de conjuntos.

Para verlo se tiene que asegurar que cumple con las tres propiedades que definen a una álgebra de conjuntos:

1. Sean $A, B \in \mathcal{A}$. Por definición $A, B \in \mathcal{B}$ para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$. Como $\mathcal{B}$ es álgebra se tiene que $A \cup B \in \mathcal{B}$, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$ por lo que $A \cup B \in \mathcal{A}$.

2. Sea $A \in \mathcal{A}$, entonces $A \in \mathcal{B}$, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{B}$, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, por lo que $A^c \in \mathcal{A}$.

3. Sea $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A, B \in \mathcal{B}$, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{B}$, para todo $\mathcal{B} \in \mathcal{F}$, por lo que $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Sea $\mathcal{B}^*$ un álgebra que contiene a $\mathcal{C}$, de la definición de $\mathcal{A}$ se tiene que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}^*$ por lo que $\mathcal{A}$ es el álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{C}$. ■

Proposición 36 *Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ y $\{A_i\}$ una sucesión de conjuntos en $\mathcal{A}$, existe una sucesión $\{B_i\}$ de conjuntos en $\mathcal{A}$, con $\mathcal{B}_i \neq \varnothing$ y tales que $\mathcal{B}_n \cap \mathcal{B}_m = \varnothing$ si $n \neq m$, que cumplen:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Demostración. Sea $B_1 = A_1$, sea $B_2 = A_2 \backslash A_1$, y para cada número natural $n > 1$ se define

$$B_n = A_n \backslash \left[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}\right] = A_n \cap \left[A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c\right]$$

Algunas observaciones importantes:

1. Para cada $A_i \in \mathcal{A}$, se tiene que $A_i^c \in \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{A}$ un álgebra.

2. También por ser $\mathcal{A}$ un álgebra se tiene que $A_i \cap A_j^c \in \mathcal{A}$.

3. Por las dos anteriores, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $B_n \in \mathcal{A}$ y además $B_n \subseteq A_n$.

Además podemos ver que la colección de conjuntos $\{B_i\}$ cumplen que
$B_m \cap B_n = \varnothing$, si $m \neq n$.

Ésta última afirmación puede comprobarse como sigue. Sean B_n y B_m dos conjuntos donde $m < n$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
(B_m \cap B_n) &\subset (A_m \cap B_n) \text{ y además que } (A_m \cap B_n) = \varnothing \text{ puesto que} \\
(A_m \cap B_n) &= A_m \cap \left[A_n \backslash \left[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}\right]\right] \\
&= A_m \cap \left[A_n \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_m^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c\right] \\
&= \left[(A_m \cap A_n) \cap \cdots \cap (A_m \cap A_m^c) \cap \cdots \cap \left(A_m \cap A_{n-1}^c\right)\right]
\end{aligned}$$

Por lo que $(B_m \cap B_n) = \varnothing$.

Siguiendo con la demostración y dado que $B_i \subset A_i$, para toda $i \in \mathbb{N}$, se tiene entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Ahora falta demostrar que $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Sea $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, entonces x debe pertenecer al menos a uno de los A_i's es decir existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_i$. Supóngase que x está en más de un elemento de $\mathcal{A}$, entonces sea n la menor de las i's tales que $x \in A_i$ entonces $x \in B_n$ puesto que

$$B_n = A_n \cap A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c$$

y $x \notin A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$. Por lo tanto $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ y consecuentemente

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

Finalmente se tiene que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

con lo que termina la demostración. ■

Definición 37 *Un álgebra de conjuntos $\mathcal{A}$ es llamada un $\sigma-$álgebra o un campo de Borel si cada unión numerable de conjuntos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$. Esto es, si $\{A_i\}$ es una sucesión de conjuntos de $\mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ debe estar en $\mathcal{A}$.*

2 Una primera idea de Medida

La medida se usa muy a menudo aunque no siempre es llamada así, por ejemplo la longitud l de un intervalo I, $l(I)$, está definida usualmente como la diferencia de los puntos inicial y final del intervalo, pero bien podría definirse la longitud como una función que asigna un número real a cada intervalo de $\mathbb{R}$, ¿Qué pasaría si se extiende esta idea a conjuntos un poco más complicados?

Se podría definir la "longitud" de un conjunto abierto como la suma de las longitudes de los intervalos abiertos de los que está compuesto, pero aún con esta "extensión" de la definición de longitud, estaría restringida a conjuntos abiertos. Sería mejor contar con una función m, la cual asignará a cada conjunto E en alguna colección $\mathcal{M}$ de conjuntos, un número real positivo $m(E)$ llamado la "*medida*"de E. Idealmente, m debería tener las siguientes propiedades:

1. $m(E)$ está definida para todo E, es decir m está definida para el conjunto potencia de $\mathbb{R}$, $P(\mathbb{R})$.
2. Para un intervalo abierto I, $m(I) = l(I)$.
3. Si $\{E_n\}$ es una sucesión de conjuntos ajenos a pares se tiene que
$$m(\bigcup_n E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$
4. m es invariante bajo traslaciones, esto es, si E es un conjunto para el cual m está definida y si $E + y$ es el conjunto $\{x + y \mid x \in E\}$ entonces $m(E + y) = m(E)$.

Desafortunadamente, es imposible construir una función que cumpla las cuatro propiedades. De hecho no se sabe si existe una función que satisfaga las primeras tres propiedades (*veáse Royden* [3]). En consecuencia debe modificarse una de estas propiedades para poder seguir adelante; como son más útiles las últimas tres propiedades, la primera propiedad se redefine como:

1. $m(E)$ está definida para todos los conjuntos $E \in \mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es un $\sigma-$álgebra (que no es el conjunto potencia de $\mathbb{R}$, $P(\mathbb{R})$).

Adicionalmente si esta *"medida"* cumpliera que :

$$m(\cup E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n$$

Para una sucesión numerable de conjuntos en $\mathcal{A}$, supóngase $\{E_i\}$, ajenos dos a dos, será llamada una *medida aditiva numerable.* La meta entonces es construir una medida aditiva numerable que sea invariante bajo traslaciones y tenga la propiedad de que

$$m(I) = l(I)$$

para cada intervalo I.

3 Medida Exterior

¿Cómo se construye tal medida aditiva numerable? Un camino es valerse de las herramientas conocidas, por ejemplo, considérese cualquier conjunto A de números reales. Para este conjunto existen colecciones numerables $\{I_n\}$ de intervalos abiertos que cubren a A:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Una forma de "medir" al conjunto A, es a través de los intervalos que lo contienen, puede escogerse una colección de intervalos que contienen al conjunto A y obtener la suma de las longitudes de cada uno de los intervalos, si dicha suma fuera finita y fuera única, es decir, que no hubiera otra colección de intervalos cuya suma sea la misma, ésta sería un candidato ideal para la medida aditiva numerable.

Definición 38 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $J = \left\{ \{I_n\} \,\middle|\, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}$ el conjunto de colecciones de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ que cubren a A. La medida exterior m^*A del conjunto A es el ínfimo de todas las sumas de las longitudes de las colecciones de J*

$$m^*(A) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \,|\{I_n\} \in J \right\}$$

Nota: Si para cada colección en J se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) = \infty$, entonces se define $m^*(A) = \infty$.

Inmediatamente se ve que $m^*(\varnothing) = 0$ y que si $A \subset B$, entonces

$$m^*(A) \leq m^*(B).$$

También se tiene que para todo conjunto formado por un solo punto, éste tiene medida exterior cero, $m^*(\{x_0\}) = 0$.

Proposición 39 *La medida exterior de un intervalo I cerrado y acotado es su longitud*

Demostración. Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado. Dado que el intervalo

$$[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon) \text{ para todo } \varepsilon > 0$$

se tiene que

$$m^* [a, b] \leq l(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = b + \varepsilon - a + \varepsilon = b - a + 2\varepsilon$$

por ser $m^* [a, b]$ el ínfimo. Entonces

$$m^* [a, b] \leq b - a + 2\varepsilon$$

para todo $\varepsilon > 0$, por lo que

$$m^* [a, b] \leq b - a.$$

De tal manera sólo resta mostrar que

$$m^* [a, b] \geq b - a.$$

Pero esto es equivalente a mostrar que si $\{I_n\}$ es cualquier colección numerable de intervalos abiertos que cubre a $[a, b]$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq b - a.$$

De acuerdo con el teorema de Heine-Borel, toda cubierta abierta que cubre al intervalo $[a, b]$ contiene una cubierta abierta finita que también cubre a $[a, b]$, sea $\{I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}, \ldots, I_{n_m}\}$ tal cubierta. Ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \geq \sum_{i=1}^{m} l(I_{n_i}).$$

es suficiente demostrar que $\sum_{i=1}^{m} l\left(I_{n_i}\right) \geq (b-a)$.

Como $a \in I_{n_i}$ para alguna i, llámese a $I_{n_i} = (a_1, b_1)$, dado que $a_1 < a < b_1$, si $b_1 < b$, entonces $b_1 \in [a, b]$ y ya que $b_1 \notin (a_1, b_1)$ debe existir un intervalo (a_2, b_2) en la colección $\{I_{n_i}\}$ tal que $b_1 \in (a_2, b_2)$, es decir $(a_2 < b_1 < b_2)$. Con esta forma de escoger intervalos se tiene la sucesión de intervalos

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$$

del conjunto $\{I_{n_i}\}$, tales que $a_i < b_{i-1} < b_i$.

Ya que $\{I_{n_i}\}$ es una cubierta finita, el proceso para escoger los intervalos debe terminar con algún intervalo (a_k, b_k), con $a_k < b < b_k$. De esta forma

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} l(I_{n_i}) &\geq \sum_{i=1}^{k} l(a_i, b_i) = (b_k - a_k) + (b_{k-1} - a_{k-1}) + \ldots + (b_1 - a_1) \\
\sum_{i=1}^{m} l(I_{n_i}) &\geq b_k - (a_k - b_{k-1}) - (a_{k-1} - b_{k-2}) - \ldots - (a_2 - b_1) - a_1
\end{aligned}$$

como $b_{i-1} > a_i$ para toda i, se tiene que $b_{i-1} - a_i > 0$ y $-(a_i - b_{i-1}) > 0$; entonces

$$\sum_{i=1}^{m} l(I_{n_i}) \geq \sum_{i=1}^{k} l(a_i, b_i) > b_k - a_1$$

pero $b_k > b$ y $a_1 < a$, entonces $b_k - a_1 > b - a$ por lo que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} l(I_{n_i}) &> b - a, \\
m^*[a, b] &\geq b - a.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$m^*[a, b] = b - a,$$

y la igualdad queda demostrada. ■

Corolario 40 *Sea I un intervalo acotado y que no es cerrado, entonces $m^*(I) = l(I)$*

Demostración. Supóngase que $I = (a, b)$, con $a < b$, $\varepsilon > 0$ y sean $\alpha, \beta \in (a, b)$ tales que

$$a < \alpha < a + \frac{\varepsilon}{2},\ b - \frac{\varepsilon}{2} < \beta < b \text{ y } \alpha < \beta.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} b - \frac{\varepsilon}{2} &< \beta < b, \\ -a - \frac{\varepsilon}{2} &< -\alpha < -a, \end{aligned}$$

y

$$b - a - \varepsilon < \beta - \alpha < b - a.$$

Entonces $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ y

$$l\,(a, b) - \varepsilon = (b - a) - \varepsilon < l\,([\alpha, \beta]) < l\,(a, b)\,.$$

Por lo tanto

$$l\,(I) - \varepsilon < m^*\,([\alpha, \beta]) \leq m^*(I) \leq m^*(\bar{I}) = m^*([a, b]) = l\,[a, b] = b - a = l\,[I]\,.$$

Y con ello, para toda $\varepsilon > 0$ tenemos

$$l\,(I) - \varepsilon < m^*\,(I) \leq l\,(I)\,.$$

Por lo que

$$m^*\,(I) = l\,(I)\,.$$

Los casos $I = (a, b]$ e $I = [a, b)$ se tratan de manera análoga. ■

Ejemplo 41 *Obsérvese que la medida exterior del intervalo* $[0, \infty)$ *es infinita. Esto es así ya que para toda* $n \in \mathbb{N}$,

$$[0, n] \subset [0, \infty)\,.$$

Entonces $m^*\,([0, n]) \leq m^*\,([0, \infty))\,.$ *Esto implica que para toda* $n \in \mathbb{N}$,

$$n \leq m^*\,([0, \infty])\,.$$

Por tanto $m^*\,([0, \infty)) = \infty$.

Proposición 42 *Sea* $\{A_n\}$ *una colección numerable de conjuntos en* $\mathbb{R}$. *Entonces*

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

Demostración. Si uno de los conjuntos A_n tiene medida exterior infita ó si

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) = \infty,$$

entonces la desigualdad es trivial, es decir,

$$m^*(\cup A_n) \leq \infty.$$

Si $m^*(A_n) < \infty$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) < \infty$, entonces dada $\varepsilon > 0$, existe una colección numerable de intervalos abiertos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$A_n \subset \bigcup_i I_{n,i}$$

y tales que

$$\sum_i l(I_{n,i}) < m^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$$

La colección

$$\{I_{n,i}\}_{n,i} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{I_{n,i}\}_i$$

es numerable, pues es la unión numerable de colecciones numerables y cubre a la unión de los A_n.

$$\bigcup_n A_n \subset \bigcup_n \left(\bigcup_i I_{n,i}\right)$$

Por lo que

$$m^*(\cup A_n) \leq \sum_{n,i} l(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i l(I_{n,i}) < \sum_{n=1}^{\infty} (m^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n})$$

$$m^*(UA_n) < \sum_{n=1}^{\infty} (m^*(A_n) + \varepsilon 2^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$

$$m^*(\cup A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n) + \varepsilon.$$

Y por tanto,

$$m^*(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

■

Corolario 43 *Si A es numerable, $m^*(A) = 0$*

Demostración. *Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$,*

$$m^*(A) = m^*(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_i) = 0,$$

con lo que termina la demostración. ■

Corolario 44 *El conjunto $[0,1]$ es no numerable.*

Demostración. *Como $m^*[0,1] = 1 > 0$, el corolario 43 anterior implica que el intervalo $[0,1]$ es un conjunto no numerable.* ■

4 Conjuntos medibles y medida de Lebesgue

Aunque la medida exterior tiene la ventaja que está definida para todos los conjuntos, tiene la desventaja de que no es numerablemente aditiva *ver (Royden* [3]). Sin embargo si ésta se restringe a una apropiada familia de conjuntos se convierte en una medida numerablemente aditiva.

Definición 45 *Un conjunto E es medible si para cada conjunto A se tiene que*

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Como

$$A \subseteq (A \cap E) \cup (A \cap E^c) = A \cap (E \cup E^c) = A,$$

entonces

$$m^* (A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

En realidad tenemos que E es medible si y sólo si para cada A tenemos

$$m^* (A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Esta definición es simétrica por lo que E^c es medible siempre que E lo sea. Claramente el conjunto $\varnothing$ y el conjunto de los reales $\mathbb{R}$ son medibles.

Lema 46 *Sea $A \subset \mathbb{R}$ cualquier conjunto y sea $E_1, E_2, \ldots, E_n$ una colección finita de conjuntos medibles ajenos; entonces se tiene que*

$$m^* \left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right] \right) = \sum_{i=1}^{n} m^* \left(A \cap E_i \right).$$

Demostración. Se hará esta demostración por inducción sobre n.

Para $n = 1$ la proposición es válida, pues

$$m^* \left(A \cap E_1 \right) = m^* \left(A \cap E_1 \right).$$

Asúmase entonces que esta proposición es válida para $n - 1$ conjuntos E_i. Dado que los E_i son conjuntos ajenos, se tiene que

$$\left(A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right] \right) \cap E_n = \left(A \cap E_n \right).$$

Y además,

$$A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right] \cap (E_n)^c = A \cap \left[\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i \right].$$

De lo anterior y dado que E_n es medible, puede verse que para n se tendría que

$$\begin{aligned} m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]\right) &= m^*\left(A\cap E_n\right)+m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i\right]\right)\\ &= m^*\left(A\cap E_n\right)+\sum_{i=1}^{n-1}m^*\left(A\cap E_i\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$m^*\left(A\cap\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right]\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*\left(A\cap E_i\right).$$

Puesto que la proposición era válida para $n-1$. ■

Corolario 47 *Si A y B son dos conjuntos medibles y ajenos, $A\cap B=\varnothing$, entonces $m^*\left(A\cup B\right)=m^*\left(A\right)+m^*\left(B\right)$.*

Demostración. Para esta demostración se usará el Lema 46, con $A=\mathbb{R}$. Sean B,C dos conjuntos medibles ajenos, entonces

$$m^*\left(\mathbb{R}\cap\left(B\cup C\right)\right)=m^*\left(\mathbb{R}\cap B\right)+m^*\left(\mathbb{R}\cap C\right).$$

Entonces

$$m^*\left(B\cup C\right)=m^*\left(B\right)+m^*\left(C\right)$$

■

Definición 48 *Si E es un conjunto medible, definimos la medida de Lebesque de E, $m\left(E\right)$, como la medida exterior de E.*

Proposición 49 *Si E es un conjunto formado por un solo punto, $E=\{p\}$, entonces E es medible y $m\left(E\right)=0$.*

Demostración. Dado el conjunto E, se sabe que

$$A\cap E\subset E,$$

y por la definición 38

$$m^*\left(A\cap E\right)\leq m^*\left(E\right)=0;$$

tomando $A \cap E^c \subset A$, se tiene

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E),$$

con lo que se tiene que no sólo el conjunto E es medible sino que su medida de Lebesgue es cero. ∎

Es importante notar que la función m no es más que la misma medida exterior restringida a la familia de conjuntos medibles $\mathcal{M}$. Hay dos propiedades importantes de la medida de Lebesgue que serán mencionadas en el teorema y la proposición siguientes.

Teorema 50 *Sea m la medida de Lebesgue. Si A y B son dos conjuntos medibles que cumplen que $A \subset B$, entonces $m(A) \leq m(B)$.*

Demostración. Sean A y B dos conjuntos medibles, por ser medibles se tiene que $m(A) = m^*(A)$ y $m(B) = m^*(B)$. Por la definición 38, se tiene que

$$m(A) = m^*(A) \leq m^*(B) = m(B),$$

por lo que $m(A) \leq m(B)$ ∎

Proposición 51 *Sea m la medida de Lebesgue y A, B dos conjuntos medibles; entonces $(A \cup B)$ es medible.*

Demostración. Para que $(A \cup B)$ sea medible tendría que cumplirse para cualquier conjunto E la igualdad

$$m^*(E) = m^*(E \cap (A \cup B)) + m^*(E \cap (A \cup B)^c).$$

Por ser B medible se tiene que

$$m^*(E \cap A^c) = m^*(B \cap (E \cap A^c)) + m^*(B^c \cap (E \cap A^c));$$

por otro lado se tiene que

$$E \cap (A \cup B) = (E \cap A) \cup (E \cap A^c \cap B).$$

Si se obtiene la medida exterior del conjunto $E \cap (A \cup B)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
m^*[E \cap (A \cup B)] &\leq m^*[(E \cap A)] + m^*[(E \cap A^c \cap B)] \\
m^*[E \cap (A \cup B)] + m^*(E \cap (A \cup B)^c) &\leq m^*[(E \cap A)] + m^*[(E \cap A^c \cap B)] \\
&\quad + m^*(E \cap (A \cup B)^c).
\end{aligned}$$

Por ser A medible puede verse que

$$m^*[E \cap (A \cup B)] + m^*(E \cap (A \cup B)^c) \leq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) = m^*(E)$$

de tal forma que

$$m^*(E) \geq m^*[E \cap (A \cup B)] + m^*(E \cap (A \cup B)^c),$$

con lo que termina la demostración. ■

Corolario 52 *Si $\{E_n\}$ es una colección de conjuntos medibles, entonces $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible.*

Demostración. Por la proposición 36, se sabe que existe una colección de conjuntos $\{A_n\}$ tales que

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$,

2. Si $n \neq m$, entonces $A_n \neq A_m$

   Además cada A_n es de la forma

$$\begin{aligned}
A_n &= E_n \cap \left[E_1^c \cap E_2^c \cap \ldots \cap E_{n-1}^c\right] \\
&= E_n^c \cup [E_1 \cup E_1 \cup \ldots \cup E_{n-1}]^c
\end{aligned}$$

   De la proposición 51 y utilizando inducción matemática, tenemos que la unión finita de conjuntos medibles es un conjunto medible. De aqui se sigue que cada

A_n es un conjunto medible.

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$.

Como $G_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es medible, se tiene que

$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap G_n) + m^*(A \cap G_n^c) \\ &\geq m^*(A \cap G_n) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right) \end{aligned}$$

ya que $G_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

Por otro lado, $G_n \cap A_n = A_n$ y $G_n \cap A_n^c = G_{n-1}$. Como A_n es medible, se tiene que

$$\begin{aligned} m^*(A \cap G_n) &= m^*(A \cap G_n \cap A_n) + m^*(A \cap G_n \cap A_n^c) \\ &= m^*(A \cap A_n) + m^*(A \cap G_{n-1}). \end{aligned}$$

Aplicando este razonamiento varias veces se tiene que:

$$\begin{aligned} m^*(A \cap G_n) &= m^*(A \cap A_n) + m^*(A \cap A_{n-1}) + \ldots + m^*(A \cap A_1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap A_i). \end{aligned}$$

Así, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap A_i) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right).$$

Entonces

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap A_i) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right).$$

Por la proposición 42,

$$m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap A_i).$$

Por lo tanto,

$$m^*(A) \geq m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)\right) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c\right).$$

Y con ello se concluye que

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$$

es medible.

■

Observación 53 *El corolario anterior, junto con las observaciones que fueron vistas después de la definición 45, dicen que la colección de conjuntos medibles en* $\mathbb{R}$ *forman un* $\sigma-$*álgebra.*

Proposición 54 *Sea* m *la medida de Lebesgue y sean* $\{E_n\}$ *una sucesión de conjuntos medibles. Entonces*

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Demostración. Por el corolario 52, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es medible por lo que puede verse que

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right),$$

y por la proposición 42

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n),$$

con lo que queda demostrada la proposición. ■

Proposición 55 *Si* m *es la medida de Lebesgue, entonces* $m(\varnothing) = 0$.

Demostración. Sea $A = \{p\}$, como $\varnothing \subset A$, entonces

$$m(\varnothing) = m^*(\varnothing) \leq m^*(A) = 0.$$

Entonces $m(\varnothing) = 0$ ■

Teorema 56 *Sea $A \subset \mathbb{R}$, cualquier conjunto, si la medida exterior de A es igual a cero $m^*(A) = 0$, se tiene que A es un conjunto medible y además $m(A) = 0$.*

Demostración. Dado $A \subset \mathbb{R}$; tiene que demostrarse que para cualquier otro conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se tiene que

$$m^*(E) \geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c).$$

Dado que $(E \cap A) \subset A$ y además $(E \cap A^c) \subset E$, puede afirmarse que

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(A) + m^*(E).$$

Pero como $m^*(A) = 0$, se tiene

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^c) \leq m^*(E).$$

Con lo que se demuestra que A es medible. Por definición de la medida de Lebesgue se tiene que, $m(A) = 0$ ■

Teorema 57 *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$ dos conjuntos medibles, tales que $A \cap B = \varnothing$. Entonces*

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

Demostración. Por la proposición 51, se tiene que $A \cup B$ es medible. Junto con la proposición 47 tenemos que

$$m(A \cup B) = m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B) = m(A) + m(B),$$

por lo que $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. ■

Definición 58 *La colección $\mathbb{B}$ de conjuntos de Borel es el σ-álgebra más pequeño que contiene a todos los conjuntos abiertos en $\mathbb{R}$.*

Este σ-álgebra más pequeño existe de acuerdo a la proposición 35. Adicionalmente la colección de conjuntos de Borel es además el σ-álgebra más pequeño que contiene a todos los conjuntos cerrados y también a todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$.

El Siguiente resultado es muy importante. El lector interesado puede encontrar su demostración en el libro *Real analysis Royden,* [3].

Teorema 59 *Cada conjunto de Borel es un conjunto medible. En particular cada conjunto abierto y cada conjunto cerrado es un conjunto medible.*

Corolario 60 *La medida de Lebesgue de* $I = [0,1]$ *es su longitud.*

Demostración. $m([0,1]) = m^*([0,1]) = l[0,1] = 1.$ ■

Corolario 61 *Sea* $I = [0,1]$ *y sea* $T : I \to I$ *la tienda. El conjunto de los puntos periódicos* $Per(T)$ *tiene medida cero,* $m(Per(T)) = 0$.

Demostración. La proposición 22 del capítulo 1 implica que el conjunto $Per(T)$ es numerable. Además, este conjunto es la unión de conjuntos cerrados. Por el Teorema 59, $Per(T)$ es medible. Con lo anterior y de acuerdo al Corolario 52 se tiene que

$$m(Per(T)) = m^*(Per(T)) = 0.$$

■

Capítulo IV

Órbitas con sombra

En el estudio de la función T existe un grupo de puntos que tienen un comportamiento muy peculiar. Al estudiar las *órbitas* de estos puntos puede conocerse más acerca del comportamiento del *Sistema Dinámico* generado por la función. Los puntos a los que se hace referencia son aquellos que tiene *órbitas con sombra*. Esto quiere decir que dado cualquiera de estos puntos, x por ejemplo, se puede encontrar otro punto y de tal forma que las *órbitas* de ambos *puntos* están muy cercanas, de hecho su diferencia tiende a cero cuando el número de iteraciones tiende a infinito, pero nunca son iguales a lo largo de la trayectoria.

El objetivo en este capítulo es cerrar el ciclo de entendimiento del *Sistema Dinámico* que genera la función T. Hasta ahora, el lector tiene una comprensión del *sistema*, al saber que tiene *puntos* con comportamiento predecible pues sus *órbitas* son *periódicas*, *preperiódicas* o *asintóticamente periódicas* y que existen *puntos* más complejos pues tienen *órbitas aperiódicas*. También sabe que el conjunto de los *puntos periódicos* es pequeño pues tiene *medida* es 0; en este capítulo se verá además que los *puntos preperiódicos* o *asintoticamente periódicos* tienen también medida 0, lo que deja como única posibilidad de que los puntos con *órbitas aperiódicas* sean muchos pues por ser el complemento tiene *medida* 1 lo cual implicaría que el sistema es muy complejo al tener tantos puntos impredecibles, sin embargo se concluirá en esta parte de la Tesis que aún cuando el conjunto de los *puntos aperiódicos* es muy grande puede ser clasificado entre los *puntos aperiódicos* con y sin sombra, y de hecho se verá que el sistema no es tan complejo pues los puntos con sombra tienen medida 1.

Iniciaremos pues con la definición de puntos sombra.

Definición 62 *Sea* $f : I \to I$*,* $I = [0,1]$*,* f *una función continua, sea* $x \in I$*. Se dice que* $y \in [0,1]$ *es un punto sombra de* x*, si cumple que*

$$| f^n(x) - f^n(y) | > 0 \text{ para toda } n \in \mathbb{N}$$

pero,

$$\lim_{n\to\infty} | f^n(x) - f^n(y) | = 0$$

La meta inmediata es definir y construir las herramientas necesarias para demostrar que el conjunto de los puntos que bajo la función T tienen una sombra tiene *medida* 1, para lo cual es necesario definir la *función itinerario*.

Definición 63 *Sea* $T : I \to I$*,* $I = [0,1]$*, sea* $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$*, con la condición inicial* $x_0 = x$ *y para todo* $n \in \mathbb{N}$*,* $x_n = T^n(x)$*. Se define la sucesión* $t_x = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ *donde*

$$t_i = \begin{cases} 0 & si \ x_i < \frac{1}{2} \\ \\ 1 & si \ x_i \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

La sucesión t_x es conocida como el **itinerario** de la órbita de x_0, es decir, el itinerario de $\{x_n\}$.

Para tratar de entender mejor esta definición se obtendrán los itinerarios de los puntos: $x = 0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$, los cuales servirán de ejemplo.

Ejemplo 64 *Sea* $x = 0$*. Al aplicar la función* T *se tiene que para toda* $n \in \mathbb{N}$*,* $T^n(x) = 0$*. El itinerario es:* $t_x = (0, 0, 0, \ldots)$

Ejemplo 65 *Sea* $x = 1$*. Al aplicar la función* T *se tiene que* $T(1) = 0$*, y cualquier otra iteración el resultado es el mismo, por lo que su itinerario es:* $t_x = (1, 0, 0, \ldots)$

Ejemplo 66 *Sea $x=\frac{1}{4}$. Al aplicar la función T se tiene que*

$$\begin{aligned} T\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{2}, \\ T^2\left(\frac{1}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

y cualquier otra iteración de T se comporta como en el segundo ejemplo, por lo que el itinerario es $t_x=(0,1,1,0,0,\ldots)$

Ejemplo 67 *Sean $n\in\mathbb{N}$, $x=\frac{1}{2^n}$, entonces*

$$T\left(x\right)=\frac{1}{2^{n-1}},T^2\left(x\right)=\frac{1}{2^{n-2}},\ldots,T^{n-1}\left(x\right)=\frac{1}{2},T^n\left(x\right)=1,T^{n+1}\left(x\right)=0$$

por tanto,

$$t_x=(0,0,\ldots,0,1,1,0,0,\ldots)$$

donde la cantidad de ceros al inicio de t_x es $n-1$. Obsérvese que si $x\in\left[0,\frac{1}{2^n}\right]$, entonces t_x tiene al principio al menos $n-1$ ceros.

Ejemplo 68 *Sea $x=\frac{1}{3}$. Al aplicar la función T se tiene que $T\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$, $T^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$, $T^3\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ y así también para cualquier otra iteración de T, por lo que el itinerario es $t_x=(0,1,1,1,1,\ldots)$*

Definición 69 *Sea $T:I\to I$, $I=[0,1]$ y sea t_x la función itinerario. Se define al conjunto*

$$\Pi=\left\{t=(t_0,t_1,t_2,\ldots)\mid t_i\in\{0,1\}\,,\ \text{existe } x\in I \text{ con } t=t_x\right\}.$$

Se denotará a la función itinerario como $\varphi:[0,1]\to\Pi$, es decir $\varphi\left(x\right)=t_x$.

Nota 70 *Si la órbita de*

$$x,o\left(x,T\right)=\left\{x,T(x),T^2(x),T^3(x),\ldots\right\},$$

da lugar a la sucesión $t_x=\left(t_0,t_1,t_2,\ldots\right)$, entonces la órbita de

$$T(x),o(T(x),T)=\left\{T(x),T^2(x),T^3(x),\ldots\right\},$$

da lugar a la sucesion $t_{T(x)}=\{t_1,t_2,t_3,\ldots\}$

Una vez que se han definido los itinerarios definiremos ahora a una función muy útil para el propósito de este capítulo, la función corrimiento.

Definición 71 *Sea $T : I \to I$, $I = [0, 1]$ y sea φ la función itinerario, se define a la función $\sigma : \Pi \to \Pi$, con regla de correspondencia:*

$$\sigma(t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, \ldots) = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$$

Obsérvese que:

$$\sigma(\varphi(x)) = \sigma(t_x) = t_{T(x)} = \varphi(T(x)),$$

Para toda $x \in I$.

Es decir el diagrama

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{I} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi"'] & \boldsymbol{I} \arrow[d, "\varphi"] \\ \Pi \arrow[r, "\sigma"'] & \Pi \end{tikzcd}$$

conmuta.

Note que si $t_x \in \Pi,$ entonces $\sigma(t_x) \in \Pi$ ya que $\sigma(t_x)$ es el itinerario de $T(x)$. La función $\sigma : \Pi \to \Pi$ será llamada la función corrimiento.

Observación 72 *La siguiente sucesión de 0's y 1's no pertenece a* Π

$$(0, 1, 0, 0, 0, 0, ...)$$

con $0 = t_0,\ 1 = t_1,$ *y* $0 = t_n$ *para toda* $n \geq 2.$

Demostración. Puesto que $t_n = 0$, para toda $n \geq 2$, se tiene entonces que $T^n(x) < \frac{1}{2}$, pero

$$T^n(x) = T^{n-2} \circ T^2(x).$$

Como $t_2 = 0$, se tiene que

$$T^2(x) < \frac{1}{2}.$$

Como $t_n = 0$ para toda $n \geq 2$. Para toda $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$T^m\left(T^2(x)\right) < \frac{1}{2}.$$

Dado que

$$T^m\left(T^2(x)\right) = 2^m T^2(x)$$

se tiene que para toda $m \in \mathbb{N}$

$$2^m T^2(x) < \frac{1}{2},$$

y por lo tanto,

$$0 \leq T^2(x) < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Entonces

$$T^2(x) = 0.$$

En consecuencia, para toda $n \geq 2$, $T^n(x) = 0$, como $t_1 = 1$, $T(x) \geq \frac{1}{2}$, entonces

$$T(x) = 1.$$

Pero el único punto que bajo T se transforma en 1 es $\frac{1}{2}$. Esto último implica que $t_0 = 1$, pero $t_0 = 0$ por hipótesis, con lo que se tiene una contradicción. Por tanto no existe $x \in [0,1]$ tal que su itinerario sea

$$(0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots)$$

con lo que se tiene demostrada la observación. ■

Nota 73 *Como* $(0, 1, 0, 0, 0, 0, ...)$ *no es elemento de* Π, *entonces no existe* $t_x \in \Pi$ *tal que*

$$\sigma(t_x) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, \ldots),$$

por lo que los siguientes itinerarios no pertenecen a Π

$$(1,0,1,0,0,0,\ldots),$$
$$(0,0,1,0,0,0,\ldots).$$

Y así para toda $j \in \mathbb{N}$*.*

$$\sigma^j(t_x) \neq (0,1,0,0,0,0,\ldots).$$

Es decir, las sucesiones de ceros y unos de la forma:

$$(t_0,t_1,t_2,0,1,0,0,\ldots)$$

no pertenecen a Π.

Las definiciones, lemas y la proposición siguientes serán usadas para mostrar que la función itinerario describe a los puntos de I en una biyección.

Definición 74 *Sean* $x,y \in [0,1]$ *; se dice que* $\frac{1}{2}$ *separa a* x *de* y *si*

$$x < \frac{1}{2} < y, \text{ o bien si } \ y < \frac{1}{2} < x.$$

Lema 75 *Sean* $x,y \in [0,1]$ *y* $\frac{1}{2}$ *no separa a* x *de* y*, entonces*

$$\mid T(x) - T(y) \mid = 2 \mid x - y \mid$$

Demostración. Sean $x,y \in [0,1]$. Dado que se tienen dos opciones, esta demostración será hecha por casos:

Caso 1. $x,y \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, entonces

$$\begin{aligned} T(x) &= 2x \\ T(y) &= 2y \end{aligned}$$

por lo que

$$\mid T(x) - T(y) \mid = \mid 2x - 2y \mid = \mid 2(x-y) \mid = 2 \mid x - y \mid$$

Caso 2. $x, y \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, entonces

$$\begin{aligned} T(x) &= 2-2x \\ T(y) &= 2-2y \end{aligned}$$

por lo que

$$\mid T(x)-T(y) \mid = \mid (2-2x)-(2-2y) \mid = \mid 2-2x-2+2y \mid = \mid 2y-2x \mid = 2 \mid x-y \mid$$

con lo que termina la demostración. ■

Lema 76 *Sea $I=[0,1]$, $T: I \to I$, sean x_0, y_0 dos puntos en el intervalo I. Sean $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ sus órbitas bajo T. Si para toda $n \geq 0$, $\frac{1}{2}$ no separa a x_n de y_n, entonces $x_0 = y_0$.*

Demostración. Sean $I_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $I_2 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}$ no separa a x_n de y_n, estos dos puntos están en I_1 o ambos están en I_2. Por el lema 75 se tiene que

$$\begin{aligned} |T(x_0)-T(y_0)| &= 2|x_0-y_0| \\ \left|T^2(x_0)-T^2(y_0)\right| &= 2|T(x_0)-T(y_0)| \\ &\vdots \\ |T^n(x_0)-T^n(y_0)| &= 2\left|T^{n-1}(x_0)-T^{n-1}(y_0)\right|, \end{aligned}$$

y así

$$|T^n(x_0)-T^n(y_0)| = 2^n|x_0-y_0|.$$

Como $T^n(x_0) \in I$ y $T^n(y_0) \in I$ para toda $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$|T^n(x_0)-T^n(y_0)| \leq 1,$$

por lo que

$$2^n|x_0-y_0| \leq 1,$$

y entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$0 \leq |x_0-y_0| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Por lo tanto

$$|x_0 - y_0| = 0,$$

con lo que se tiene que $x_0 = y_0$. ■

Lema 77 *Sea $[c,d]$ un intervalo cerrado en I. Entonces existen dos intervalos $[\alpha,\beta] \subset [0,\frac{1}{2}]$, $[\eta,\theta] \subset [\frac{1}{2},1]$ tales que*

$$\begin{aligned} T[\alpha,\beta] &= [c,d] \\ T\,[\eta,\theta] &= [c,d] \end{aligned}$$

y las funciones $T\left|_{[\alpha,\beta]}\right. : [\alpha,\beta] \to [c,d]$ y $T\left|_{[\eta,\theta]}\right. : [\eta,\theta] \to [c,d]$ son funciones biyectivas.

Demostración. Tómese $[\alpha,\beta] = \left[\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right] \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$; aplicando T a este intervalo se tiene que

$$T\left[\frac{c}{2},\frac{d}{2}\right] = [c,d].$$

Para el otro intervalo se toma a $[\eta,\theta] = \left[\frac{2-c}{2},\frac{2-d}{2}\right] \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$; aplicando T a este intervalo se tiene que

$$\begin{aligned} T\left[\frac{2-d}{2},\frac{2-c}{2}\right] &= \left[2-2(\frac{2-c}{2}),2-2(\frac{2-d}{2})\right] \\ &= [2-2+c,2-2+d] \\ &= [c,d]\,. \end{aligned}$$

Claramente ambas funciones $T\left|_{[\frac{c}{2},\frac{d}{2}]}\right.$ y $T\left|_{[\frac{2-c}{2},\frac{2-d}{2}]}\right.$ son biyectivas. ■

A continuación se verán algunas propiedades de $\varphi : [0,1] \to \Pi$.

Proposición 78 *φ es una función biyectiva.*

Demostración.

1. Sean x,y dos puntos del intervalo $[0,1]$, tales que $t_x = t_y$. Se tiene que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2}$ no separa a x_n de y_n. Por el lema 75 se tiene

$$x = y$$

2. De la definición de Π, se tiene que la función φ es suprayectiva.

■

Hasta ahora se han visto la definición de la función $\varphi : [0,1] \to \Pi$, algunas de sus propiedades, y algunos ejemplos. Ahora veremos cómo a través de la función φ se puede describir la órbita de puntos x en $[0,1]$ y hasta conocer exactamente de qué punto se trata, el siguiente ejemplo muestra cómo hacerlo.

Ejemplo 79 *Sea $t_x = (0,0,1,1,0,0,1,1,\ldots)$ un itenerario periódico de Π. ¿Cuál es el punto $x \in [0,1]$ que genera dicho itinerario?*

Supóngase que el primer punto de la órbita es x_0. Por definición de φ, $x_0 < \frac{1}{2}$, entonces

$$\begin{array}{rclr} T(x_0) & = & 2x_0 = x_1, & \text{con } T(x_0) < \dfrac{1}{2} \\ T^2(x_0) & = & 4x_0, & \text{con } T^2(x_0) \geq \dfrac{1}{2} \\ T^3(x_0) & = & 2-2\left(4x_0\right), & \text{con } T^3(x_0) \geq \dfrac{1}{2} \\ T^4(x_0) & = & 2-2\left(2-8x_0\right) & \text{con } T^4(x_0) < \dfrac{1}{2}. \end{array}$$

Suponiendo que la órbita de x_0 fuera de periódo 4, se tendría la igualdad

$$2-2\left(2-8x_0\right) = x_0.$$

Es decir:

$$T^4(x_0) = -2+16x_0 = x_0,$$

por lo que

$$x_0 = \frac{2}{15}.$$

La órbita de $\frac{2}{15}$ es $\left\{\frac{2}{15}, \frac{4}{15}, \frac{8}{15}, \frac{14}{15}\right\}$; por tanto, su itinerario es

$$\left(0,0,1,1,0,0,1,1,\ldots\right).$$

Como φ es inyectiva, entonces $x = \frac{2}{15}$ es el punto que genera el itinerario t_x.

Definición 80 *Sea $x \in I$, con órbita $o(x,T)$ e itinerario t_x. Se define a I_{t_i} como el intervalo*

$$I_{t_i} = \begin{cases} I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right] & si\ t_i = 0 \\ \\ I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right] & si\ t_i = 1 \end{cases}$$

Proposición 81 *Si la orbita de x, es periódica, entonces existe $j \in \mathbb{N}$, tal que $\sigma^j(t_x) = t_x$.*

Demostración. Sea x un punto periódico de periodo n. Entonces

$$o(x,T) = \{x = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_0, x_1, \ldots\}$$

Por tanto,

$$t_n = t_0,\ t_{n+1} = t_1, \ldots$$

es decir, para toda $i \geq 0$, se tiene que:

$$t_{n+i} = t_i.$$

Ahora, si $t_x = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, t_0, t_1, \ldots)$, se sigue que

$$\sigma^n(t_x) = (t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{2n-1}, \ldots,) = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, \ldots,) = t_x.$$

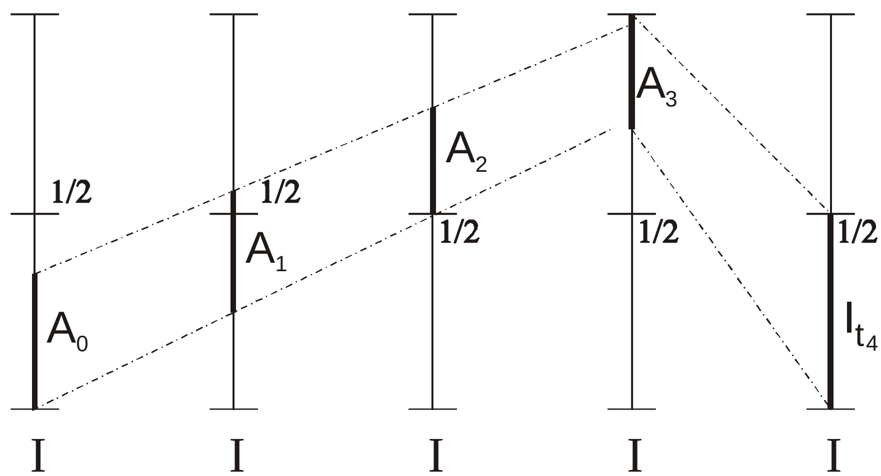
Finalmente $\sigma^n(t_x) = t_x$. ■

Una vez que se obtienen resultados como el anterior la pregunta obligada es si será posible determinar qué un punto es periódico a partir de su itinerario. Antes de demostrar tal proposición, se intentará ejemplificar con un razonamiento que sí es posible; para esto se tomarán el mismo punto periódico del ejemplo anterior

Ejemplo 82 *Sea $x = \frac{2}{15}$. Como fue visto su itinerario es:*

$$t_x = (0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, \ldots)$$

A través de este itinerario puede comprobarse que se trata de un punto periódico; esto se hará construyendo intervalos partiendo del intervalo que define la entrada t_3 (justo antes de que el itinerario se repita) y usando el *lema* 77, con el que veremos que es posible construir intervalos hacia atras de tal foma que el intervalo que define a t_0 coincide con el intervalo inicial; por lo que aplicando el Teorema del valor intermedio encontraremos a nuestro punto periódico, gráficamente se vería así:



Tómese pues la quinta entrada del itinerario; es decir, $t_4 = 0 = t_0$. Por definición se tiene que $I_{t_4} = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, usando el *lema* 77 puede verse que existe un intervalo cerrado A_3 en I que cumple con lo siguiente

$$A_3 \subset I_{t_3} = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ y además } T(A_3) = I_{t_0}.$$

Usando el mismo razonamiento puede verse que existe otro intervalo cerrado A_2 que cumple

$$A_2 \subset I_{t_2} = \left[\frac{1}{2}, 1\right], T(A_2) = A_3.$$

De igual forma existe el intervalo cerrado A_1 y que cumple

$$A_1 \subset I_{t_1} = \left[0, \frac{1}{2}\right], T(A_1) = A_2.$$

Finalmente existe un intervalo cerrado A_0 que cumple

$$A_0 \subset I_{t_0} = \left[0, \frac{1}{2}\right], T(A_0) = A_1$$

Lo que se ha hecho hasta ahora es construir los intervalos cerrados

$$A_0, A_1, A_2, A_3,$$

de tal suerte que

$$T^4(A_0) = T^3(A_1) = T^2(A_2) = T(A_3) = I_{t_0} \text{ y además } A_0 \subset I_{t_4} = I_{t_0}.$$

Usando el teorema del valor intermedio con la función $T^4 : A_0 \to I_{t_0}$, se tiene que existe un punto $x \in A_0$, de tal suerte que $T^4(x) = x$. Ahora, sólo falta comprobar que es de periodo 4.

No puede ser de periodo 2 puesto que x y $T^2(x)$ están en intervalos diferentes, es decir $A_0 \neq A_2$, tampoco es un punto fijo puesto que $t_3 \neq t_2$, por lo tanto es un punto de periodo 4.

Proposición 83 *Sea $t_x = \varphi(x)$ un itinerario en Π. Si existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma^j(t_x) = (t_x)$, entonces $x \in Per(T)$*

Demostración. Por la definición 71, tenemos que para toda $x \in I$,

$$\sigma(\varphi(x)) = \varphi(T(x)).$$

Entonces para toda $k \in \mathbb{N}$,

$$\sigma^k \circ (\varphi(x)) = \varphi \circ (T^k(x)).$$

Si $\sigma^j(t_x) = t_x$, entonces

$$\varphi \circ T^j(x) = \sigma^j \circ \varphi(x) = \varphi(x).$$

Como φ es inyectiva, tenemos que $T^j(x) = x$, $x \in Per(T)$ ■

Proposición 84 *Sea $T : I \to I$, $I = [0,1]$, sea z un punto de I, $z > 0$, si z es un punto asintóticamente periódico de T entonces z es un punto periódico o preperiódico de T.*

Demostración. Sea x un punto periódico con período $k \in \mathbb{N}$. Se define a δ como

$$\delta = \min \left\{ \left| T^j(x) - \frac{1}{2} \right| : \ 0 \leq j \leq k-1 \right\}.$$

Obsérvese que $\delta > 0$, puesto que $T^j(x) \neq \frac{1}{2}$ para toda $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ por ser x periódico y no preperiódico.

Supóngase que z es un punto asintóticamente periódico a x. Por definición se tiene que

$$\lim_{m \to \infty} |T^m(x) - T^m(z)| = 0.$$

De lo anterior se sigue que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > n_0$, entonces

$$|T^n(x) - T^n(z)| < \delta$$

por lo que

$$\{T^n(x), T^n(z)\} \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

ó

$$\{T^n(x), T^n(z)\} \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

Esto se comprueba fácilmente, pues si

$$T^n(x) \leq \frac{1}{2} \leq T^n(z),$$

se tiene entonces que

$$0 \leq \left| T^n(x) - \frac{1}{2} \right| \leq |T^n(x) - T^n(z)| < \delta,$$

pero por la definición de δ esto es imposible.

Con lo anterior tenemos que $\frac{1}{2}$ no separa a x de z, por lo que podemos concluir los itinerarios a partir de n_0 son iguales

$$t_{T^{n_0+1}(x)} = t_{T^{n_0+1}(z)},$$

por la proposición 78 tenemos que

$$T^{n_0+1}(x) = T^{n_0+1}(z),$$

pero como $T^{n_0+1}(x)$ es preperiódico o periódico (en caso de que $K = n_0 + 1$) podemos afirmar entonces que $T^{n_0+1}(z)$ es preperiódico o periódico, con lo que podemos concluir que z es periódico o preperiódico. ■

Proposición 85 *Sea x un punto cualquiera de I, afirmamos que las imágenes inversas de x bajo T son a lo más dos;*

$$\#T^{-1}(x) \leq 2$$

Demostración. Obsérvese que:

$$T\Big|_{\left[0,\frac{1}{2}\right]} : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to [0,1]$$

$$T\Big|_{\left[\frac{1}{2},1\right]} : \left[\frac{1}{2}, 1\right] \to [0,1]$$

son homeomorfismos por lo que para toda x sólo existe una $y \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ y una $\widetilde{y} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tal que $T(\widetilde{y}) = x$. ■

Proposición 86 *El conjunto de los puntos preperiódicos de T es numerable.*

Demostración. Sea $p \in Per(T)$. El conjunto de los puntos preperiódicos de p puede definirse como $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, donde

$$\begin{aligned}
A_1 &= \left\{x \,\middle|\, x \in T^{-1}(p)\right\} \\
A_2 &= \left\{x \,\middle|\, x \in T^{-1}(A_1)\right\} \\
&\vdots \\
An &= \left\{x \,\middle|\, x \in T^{-1}(A_{n-1})\right\}.
\end{aligned}$$

Por la proposición anterior se tiene

$$\begin{aligned}
\#A_1 &\leq 2 \\
\#A_2 &\leq 2^2 \\
&\vdots \\
\#A_n &\leq 2^n.
\end{aligned}$$

Dado que la cardinalidad de cada A_i es finita para toda $i \in \mathbb{N}$, tenemos que el conjunto A de los puntos preperiódicos de p es numerable.

Por otro lado el conjunto de todos los puntos preperiódicos de T puede escribirse como

$$PrePer(T) = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{p_i},$$

donde A_{p_i} es el conjunto de puntos prepreriódicos de un punto p_i periódico. Esta unión es numerable dado que el conjunto de los puntos periódicos de T, $Per(T)$ es numerable según la proposición 22 del *Capítulo* 1. Esto implica que el conjunto de los puntos preperiódicos de T es numerable. ■

Corolario 87 *El conjunto de los puntos preperiódicos bajo T tiene medida cero.*

Demostración. La demostración es simple pues por la Proposición 86 los puntos preperiódicos forman un conjunto numerable, por lo que se tiene, de acuerdo a los resultados del Capítulo 3 que su medida es cero. ■

Proposición 88 *Sea $I = [0,1]$, $T : I \to I$, el siguiente conjunto es numerable:*

$$\mathbb{A} = \{x \text{ es un punto periódico, preperiódico o asintóticamente periódico}\}$$

Demostración. De acuerdo a la proposición 22 del *Capítulo* 1, el conjunto de los puntos periódicos es numerable y de acuerdo a las proposiciones 84 y 86 de este capítulo cualquier punto asintóticamente periódico es un punto preperiódico y el conjunto de los puntos preperiódicos es numerable. Asi, el conjunto $\mathbb{A}$, que es la unión del conjunto de puntos periódicos con el de los puntos preperiódicos, es numerable. ■

Para cumplir con las metas de este capítulo restaría solamente demostrar que el conjunto de los puntos con sombra es muy grande, para lo cual se usará el siguiente teorema.

Teorema 89 *El conjunto de puntos con sombra tiene medida 1.*

Demostración. Para demostrar este teorema serán usados los siguientes conjuntos:

Sea A el conjunto de puntos que tienen sombra,

$$A = \{x \in I \mid \text{existe } y \in I, \text{ con } y \text{ punto sombra de } x\}$$

Sea B el conjunto de puntos que tienen arbitrariamente largas pero no infinitamente largas cadenas de ceros en sus itinerarios, es decir que los puntos no pueden pasar por el cero nunca.

Sea C el conjunto de puntos para los cuales la sucesión $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene a $\frac{1}{2}$ como punto límite.

Vamos a demostrar que $A = B = C$.

Lo primero que se hará es demostrar que el conjunto B es igual al conjunto C ($B = C$).

i) $\boxed{B \subseteq C}$

Sea $x \in B$. Por definición se tiene que x tiene en su itinerario cadenas arbitrariamente largas de ceros pero no infinitamente largas. Tómese una de ellas, digamos de longitud j ($j \in \mathbb{N}$) y supóngase que dicha cadena empieza en la $(k+1)-\acute{e}sima$ coordenada:

$$\varphi(x) = t_x = (\ldots, \overset{k}{1}, \underbrace{\overset{k+1}{0}, \overset{k+2}{0}, \overset{k+3}{0}, \overset{k+4}{0}, \ldots\ldots, \overset{k+(j-1)}{0}, \overset{k+j}{0}}_{j-lugares}, \overset{k+(j+1)}{1}, \ldots)$$

Por definición de itinerario se tiene que

$$\begin{aligned} T^k(x) &\geq \frac{1}{2}, \\ T^{k+1}(x) &< \ldots < T^{k+j}(x) < \frac{1}{2}, \\ T^{k+(j+1)}(x) &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que:

$$\begin{aligned}
T^{k+1}(x) &= 2-2T^{k}(x)\\
T^{k+2}(x) &= T(T^{k+1}(x)) = 2T^{k+1}(x) = 2^2-2^2T^{k}(x)\\
T^{k+3}(x) &= T(T^{k+2}(x)) = 2T^{k+2}(x) = 2^3-2^3T^{k}(x)\\
&\vdots\\
T^{k+j}(x) &= T(T^{k+(j-1)}(x)) = 2T^{k+(j-1)}(x) = 2^j-2^jT^{k}(x)\\
T^{k+(j+1)}(x) &= T(T^{k+j}(x)) = 2T^{k+j}(x) = 2^{j+1}-2^{j+1}T^{k}(x)
\end{aligned}$$

Considérese el punto $T^{k+j}(x)$. Para empezar tenemos que $T^{k+j}(x) < \frac{1}{2}$, pero además se tiene que

$$T^{k+j}(x) = 2^j - 2^jT^k(x)$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
2^j - 2^jT^k(x) &< \frac{1}{2},\\
2^jT^k(x) &> 2^j - \frac{1}{2},\\
2^jT^k(x) &> \frac{2^{j+1}-1}{2},\\
T^k(x) &> \frac{2^{j+1}-1}{2^{j+1}} = 1-\frac{1}{2^{j+1}}.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$1-\frac{1}{2^{j+1}} < T^k(x) < 1$$

Obsérvese ahora que en la iteración anterior a ésta es (es decir, la $k-1$) existen dos posibilidades:

$$T^{k-1}(x) < \tfrac{1}{2}$$

$$ó$$

$$T^{k-1}(x) \geq \tfrac{1}{2}.$$

Si $T^{k-1}(x) < \frac{1}{2}$ se tiene que

$$T^{k-1}(x) \in \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{j+2}}, \frac{1}{2}\right],$$

puesto que
$$T^k(x) \in T\left(\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{j+2}}, \frac{1}{2}\right]\right) = \left[1 - \frac{1}{2^{j+1}}, 1\right].$$
Ahora, si $T^{k-1}(x) \geq \frac{1}{2}$ se tiene que
$$T^{k-1}(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{j+2}}\right],$$
dado que
$$T^k(x) \in \left[2 - 2\left(\frac{1}{2}\right), 2 - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{j+2}}\right)\right] = \left[1 - \frac{1}{2^{j+1}}, 1\right]$$
Por lo que se puede concluir que
$$\left|T^{k-1}(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2^{j+2}}$$
Acaba de demostrarse que, en general para cualquier cadena de ceros de longitud j, que empieza en la iteración $k+1$ se tiene que $T^k(x)$ está muy cercana a 1 y que $T^{k-1}(x)$ está muy cercana a $\frac{1}{2}$:
$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2^{j+1}} &< T^k(x) < 1 \\ 0 &< \left|T^{k-1}(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2^{j+2}}. \end{aligned}$$
Ahora para demostrar que $B \subseteq C$, cada $\varepsilon_1 > 0$, existe una cadena lo suficientemente larga de ceros de longitud j que empieza en k_1 y que cumple lo siguiente;
$$\left|T^{k_1-1}(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^{j+2}} < \varepsilon_1.$$
Dicha cadena existe puesto que $x \in B$.

Ahora, si $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_1}{2}$, puede encontrarse una nueva cadena de ceros que empiece en k_2 de tal forma que $k_2 > k_1$ y que cumpla que
$$\left|T^{k_2-1}(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon_2.$$

Siguiendo esta construcción, si $\varepsilon_n = \frac{\varepsilon_{n-1}}{2}$, existe una cadena de ceros que asegura que

$$\left|T^{k_n-1}(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon_n.$$

De esta forma, se ha creado una subsucesión de puntos de $\{T(x)\}_{n=1}^{\infty} = o(x, T)$ que cumplen que

$$\lim_{i\to\infty} \left|T^{k_i-1}(x) - \frac{1}{2}\right| = 0$$

Con lo que se demuestra que $B \subset C$.

ii) $\boxed{C \subseteq B}$:

Sea $x \in C$. Por definición de C, existe una subsucesión de $o(x, T)$, $\{x_{n_i}\}$, tal que

$$\lim_{i\to\infty} x_{n_i} = \frac{1}{2}$$

Se va a mostrar que el itinerario de x tiene una cadena de al menos 100 ceros.

Como

$$\lim_{i\to\infty} |T^{n_i}(x)| = \frac{1}{2}$$

existe $n_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|T^{n_i}(x) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2^{102}}.$$

Dado que T duplica distancias (puesto que $\frac{1}{2}$ no separa a los $T^{n_i}(x)$ por ser este su punto límite), se tiene que

$$\left|T^{n_i+1}(x) - 1\right| < \frac{1}{2^{101}}$$

y

$$\left|T^{n_i+2}(x) - 0\right| < \frac{1}{2^{100}}.$$

Por lo tanto

$$T^{n_i+2}(x) < T\left(T^{n_i+2}(x)\right) < \ldots < T^{99}\left(T^{n_i+2}(x)\right) < \frac{2^{99}}{2^{100}} = \frac{1}{2}$$

Es decir, al menos 100 elementos de la sucesión $\{T^n(x)\}$ están en $\left[0, \frac{1}{2}\right)$. El itinerario tiene una cadena de al menos 100 ceros.

Claramente, este procedimiento puede generalizarse para que dado $n_0 \in \mathbb{N}$, se pueda encontrar en el itinerario de x cadenas de ceros de longitud al menos n_0, por lo tanto $C \subseteq B$ y por tanto $B = C$.

Obsérvese que si el itinerario de x tiene una cadena con una infinidad de ceros, entonces existe una $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $k > N$ se tiene que $T^k(x) = 0$, y con ello $\frac{1}{2}$ no puede ser punto límite de $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

No perdiendo de vista el objetivo de demostrar que el conjunto de puntos con sombra tiene medida 1, deben demostrarse algunas propiedades adicionales de los conjuntos recién definidos. La siguiente proposición será usada con tal fin.

Demostraremos que el conjunto B tiene medida uno o, equivalentemente, que B^c tiene medida cero.

Se iniciará la demostración con una pequeña observación sobre los elementos de B^c. Tómese $x \in B^c$. Por estar en el complemento de B, x debe cumplir con alguna de las siguientes afirmaciones:

1. t_x no tiene ceros, Es decir $t_x = (1, 1, 1, 1, \ldots)$; por lo tanto la órbita es un solo punto. De hecho x es punto fijo de T.

2. t_x tiene una cadena de ceros infinita:

$$(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{n_0-1}, 0, 0, 0, \ldots)$$

Para esta cadena de ceros existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, $t_n = 0$. Como se vió antes, la única posibilidad es que $T^{n_0}(x) = 0$, con lo que se tiene que x es preperiódico.

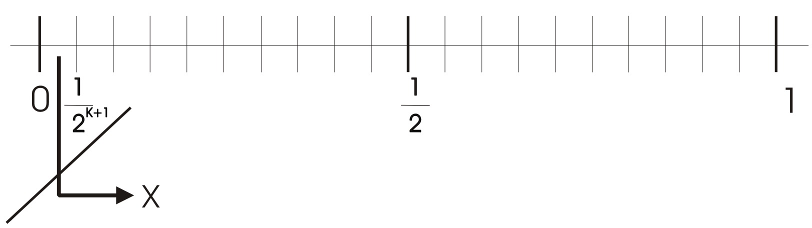
3. La última posibilidad para $x \in B^c$ es que t_x tenga cadenas de ceros pero con longitud finita cada una de ellas. En cuyo caso puede definirse para cada $k \in \mathbb{N}$ el siguiente conjunto:

$$\begin{aligned} D_k &= \{x \in [0,1] \,|\, t_x = (t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots) \\ &\qquad \textit{tiene cadenas de ceros de longitud a lo más } k\}. \end{aligned}$$

También se define a D como
$$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$$
Una vez definidas las tres únicas posibilidades que tiene x, es inmediato ver que si se demuestra que el conjunto de puntos que cumple cada una de ellas tiene medida cero, el conjunto B^c también será de medida cero.

Las dos primeras son inmediatas puesto que se trata de un solo punto y de un subconjunto del conjunto de los puntos preperiódicos que ya demostramos que tiene medida cero. El tercer caso es el interesante y se probará que es de medida cero de la siguiente forma:

Sea $k \in \mathbb{N}$ y $x \in D_k$; partimos al intervalo $[0,1]$ en intervalos de longitud $\frac{1}{2^{k+1}}$ considerando los puntos $\left\{0, \frac{1}{2^{k+1}}, \frac{2}{2^{k+1}}, \ldots, 1\right\}$ tal y como lo ejemplifica la figura siguiente:



Si $x \in \left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right)$, tendría en su itinerario una cadena de ceros con longitud mayor a k, dado que al aplicar la función $k+1$ veces se tendría que el primer *uno* aparecería en el itinerario en el lugar $k+1$:
$$\underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} \xrightarrow{T} \frac{1}{2^{k}} \xrightarrow{T} \frac{1}{2^{k-1}} \xrightarrow{T} \cdots \xrightarrow{T} \frac{1}{2}}_{T^k}$$

Es decir, si $x < \frac{1}{2^{k+1}}$, entonces para toda $0 \leq j \leq k$, $T^j(x) \leq T^k(x) < \frac{1}{2}$.

Y con ello el itinerario de x tiene al menos $k+1$ ceros al inicio. Por tanto, $x \notin D_k$.

Además, T^{k+1} transforma el intervalo $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$ en I de manera biyectiva.

De igual forma es fácil ver que $D_k \subset \left[\frac{1}{2^{k+1}}, 1\right]$ y con esto se sabe que

$$m\left(D_k\right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Ahora, como $x \notin \left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right)$ entonces x debe estar en alguno de los intervalos restantes. Supóngase entonces que $x \in \left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$. Por el Lema 12 (del *capítulo* 1), se tiene que al aplicar $k+1$ veces la función T a este intervalo el resultado, es el intervalo I :

$$T^{k+1}\left(\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]\right) = I.$$

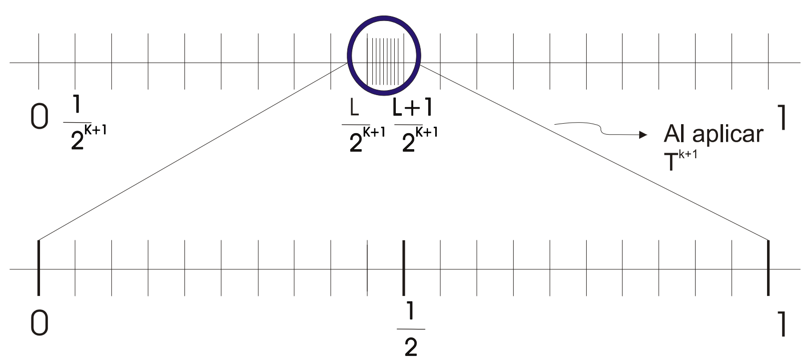
Y en ese caso exisitirá un subintervalo de $\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right]$ de la forma

$$\left[\frac{m}{\left(2^{k+1}\right)^2}, \frac{m+1}{\left(2^{k+1}\right)^2}\right) \text{ ó } \left(\frac{m}{\left(2^{k+1}\right)^2}, \frac{m+1}{\left(2^{k+1}\right)^2}\right]$$

tal que si x pertenece a él, se tiene

$$T^{k+1}\left(x\right) \in \left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Gráficamente puede verse así:



Como este razonamiento es válido para todos los intervalos de la forma

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right],$$

en cada uno de estos intervalosde de igual forma puede encontrarse ese subintervalo tal que al aplicarle la función T, $k+1$ veces se convierta en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2^{k+1}}\right)$, pero ya se había visto que x no puede estar en ese subintervalo ya que si se aplica la función T^{k+1}, el itinerario de x tendría una cadena de ceros de longitud mayor a k.

Nótese que para encontrar este pequeño intervalo se tuvo que partir al original en 2^{k+1} subintervalos. Como la longitud del original era de $\frac{1}{2^{k+1}}$, la longitud de cada uno de estos nuevos intervalos es

$$\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{2^{k+1}} = \frac{1}{(2^{k+1})^2}$$

De esta forma la longitud del intervalo donde puede estar x es

$$\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{\left(2^{k+1}\right)^2} = \frac{1}{2^{k+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right).$$

Como esto pasa para todos los intervalos de la forma

$$\left[\frac{l}{2^{k+1}}, \frac{l+1}{2^{k+1}}\right],$$

hay que eliminar de la medida de D_k la medida de los $2^k - 1$ intervalos en donde se puede encontrar a ese subintervalo. De modo que la longitud de la unión de esos subintervalos donde está contenido D_k es

$$\frac{1}{2^{k+1}}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\left(2^{k+1} - 1\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)\left(\frac{2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}\right) = \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)^2.$$

Consecuentemente la medida de D_k está acotada así:

$$m(D_k) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)^2.$$

Se puede seguir "partiendo" a cada intervalo

$$\left[\frac{l}{\left(2^{k+1}\right)^2}, \frac{l+1}{\left(2^{k+1}\right)^2}\right],$$

en 2^{k+1} subintervalos para encontrar en cada uno de ellos el pequeño subintervalo donde x no puede estar. Siguiendo este procedimiento se obtiene que

$$m(D_k) \leq \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)^n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Con lo que se concluye que la medida de D_k es cero:

$$m(D_k) = 0.$$

Como $D_k = \overset{\infty}{\underset{k=1}{\cup}} D_k$, entonces $m(D) = 0$. Por tanto, $m(B)^c = 0$ y $m(B) = 1$.

Recuérdese que se está tratando de demostrar que el conjunto de los puntos con sombra es de medida 1, para lo cual se está usando la definición de los conjuntos A, B y C. Siguiendo con esta idea se demostrará ahora que el conjunto A está contenido en C. Recuérdese que el conjunto C está formado por los puntos para los cuales la sucesión $\{T^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene a $\frac{1}{2}$ como punto límite.

Proposición. Sea $x \in A$ un punto con sombra. Entonces $x \in C$.

Demostración. Tómese $x \in A$, sea $y \in I$ un punto sombra de x. Por ser y punto sombra se cumple que

$$|T^n(x) - T^n(y)| > 0,$$

para toda $n \in \mathbb{N}$, y además

$$\lim_{n\to\infty} |T^n(x) - T^n(y)| = 0$$

Supóngase que $\frac{1}{2}$ nunca separa a $T^n(x)$ de $T^n(y)$; entonces por el *lema* 75 se tiene que

$$x = y,$$

lo cual es una contradicción pues y es un punto sombra de x. Entonces debe existir $n_1 \in \mathbb{N}$, talque

$$\begin{array}{rcl} T^{n_1}(x) & < & \frac{1}{2} < T^{n_1}(y) \\ & & ó \\ T^{n_1}(y) & < & \frac{1}{2} < T^{n_1}(x) \end{array}$$

Siguiendo esta idea, si ahora se supone que para toda $n > n_1$, $\frac{1}{2}$ no separa a $T^n(x)$ de $T^n(y)$, se tiene exactamente la misma conclusión:

$$T^{n_1}(x) = T^{n_1}(y),$$

con lo que se obtiene una contradicción nuevamente, pues y es punto sombra de x. Así, existe un $n_2 > n_1$ tal que

$$\begin{array}{rcl} T^{n_2}(x) & < & \frac{1}{2} < T^{n_2}(y) \\ & ó & \\ T^{n_2}(y) & < & \frac{1}{2} < T^{n_2}(x) \end{array}$$

Siguiendo con este razonamiento puede encontrarse una sucesión de elementos de la órbita de x,

$$\{T^{n_1}(x), T^{n_2}(x), T^{n_3}(x), \ldots, T^{n_j}(x), \ldots\}$$

Donde para toda $j \in \mathbb{N}$, cumple que

$$\begin{array}{rcl} T^{n_j}(x) & < & \frac{1}{2} < T^{n_j}(y), \\ & ó & \\ T^{n_j}(y) & < & \frac{1}{2} < T^{n_j}(x). \end{array}$$

De esta forma

$$\left|T^{n_j}(x) - \frac{1}{2}\right| < \left|T^{n_j}(x) - T^{n_j}(y)\right|$$

y como $\lim_{n\to\infty} |T^n(x) - T^n(y)| = 0$, se concluye que:

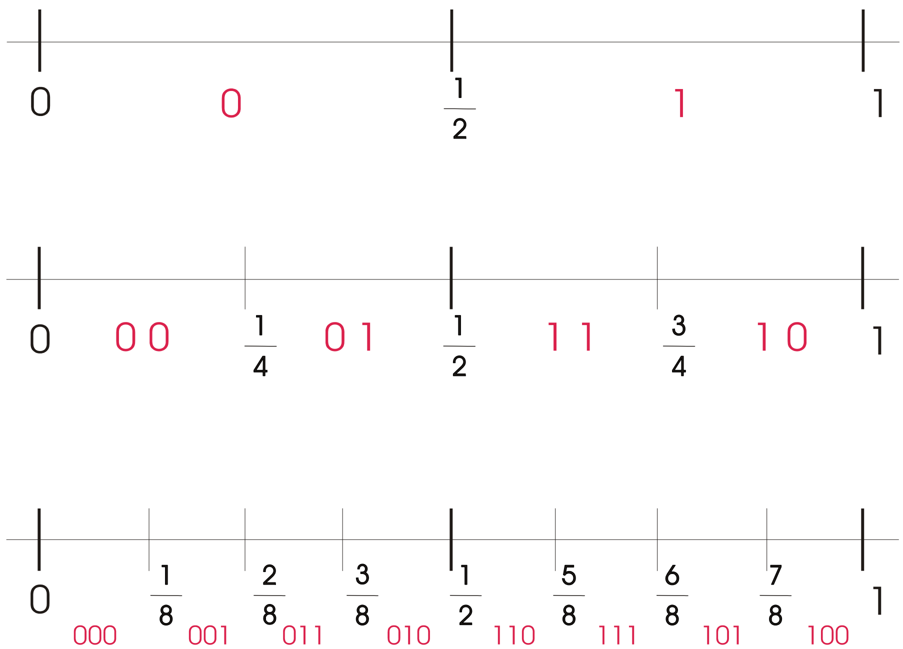
$$\lim_{n_j\to\infty} \left|T^{n_j}(x) - \frac{1}{2}\right| = 0$$

con lo que queda demostrada la proposición.

Finalmente se tratará de demostrar que B está contenido en A, con lo que se cerraría el ciclo y se vería que $A = B = C$. Para entender mejor la razón por la cual se da esta contención tiene que verse que es posible saber cómo es el itinerario de los puntos de acuerdo al intervalo donde estos se encuentren en un principio.

Se verá un ejemplo antes de demostrar que B está contenido en A. Si $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, la primera entrada del itinerario de x claramente es 0. Ahora si $x \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, se tiene que también claramente la primera entrada del itinerario es 0 y también se sabe que la segunda es 1 dado que $T(x) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. De esta forma mientras más pequeño es el intervalo más información se tiene de dónde se encuentra x y cómo es su itinerario.

Gráficamente puede verse de la siguiente forma:



Para la demostración de la contención $B \subset A$ serán necesarias las siguientes definiciones de itinerarios conocidos como $m - segmentos$.

Definiición. Sea $x \in I$ y sea t_x el itinerario de x. Se define al $m - segmento$ R_m como

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \\ R_2 &= 11 \\ R_3 &= 110 \\ R_4 &= 1100 \\ &\vdots \\ R_m &= \underbrace{110\ldots0}_{\text{de longitud m}}. \end{aligned}$$

Es importante notar que cuando x tiene este segmento dentro de su itinerario, su órbita ha estado cerca de $\frac{1}{2}$ por el "lado derecho", puesto que las dos primeras entradas son iguales a 1 y las $m-2$ restantes son iguales a 0.

De la misma manera podemos definir otro $m-segmento$ como sigue. Sea $x \in I$, y sea t_x el itinerario de x, se define al segmento L_m como

$$\begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 &= 01 \\ L_3 &= 010 \\ L_4 &= 0100 \\ &\vdots \\ L_m &= \underbrace{010\ldots0}_{\text{de longitud m}} . \end{aligned}$$

Igual que el anterior, x tiene este segmento dentro de su itinerario y su órbita ha estado cerca de $\frac{1}{2}$ ahora por el "lado izquierdo".

Con esta herramienta a la mano puede verse que el conjunto B está contenido en el conjunto A.

Sea $x \in B$. Se sabe que existen cadenas de ceros muy largas en el itinerario de x, t_x. Cada una de esas cadenas es de alguno de los siguientes tipos: L_i ó R_i. De esta forma el itinerario de x tiene $m-2$ ceros consecutivos. Un posible itinerario es:

$$t_x = \{t_{x_1}, t_{x_2}, t_{x_3}, \ldots, t_{x_k}, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots\} .$$

Ahora, sea $y \in I$, con la condición de que tenga un itinerario de la siguiente forma

$$t_y = \{s_{y_1}, s_{y_2}, s_{y_3}, \ldots, s_{y_k}, 1, 1, 0, 0, \ldots, 0, 1, \ldots\}$$

La idea es proponer un punto $y \in [0,1]$ tal que cada vez que en el itinerario de x aparezca la cadena L_m, el itinerario de y tenga en esa posición la cadena R_m y viceversa: Si en t_x se presenta R_m, entonces t_y tendrá L_m en la misma posición.

Sea $y \in I$ tal que el itinerario de y sea igual al itinerario de x fuera de esas cadenas, y en cada cadena de m_j ceros se cambiará L_{m_j} por R_{m_j} o R_{m_j} por L_{m_j} según sea el caso.

Sea $m_1 < m_2 < m_2 < \ldots$ una sucesión creciente de números naturales tales que para cada m_i el itinerario de x tiene una cadena de ceros de longitud exactamente m_i. Cada una de estas cadenas es del tipo L_m o R_m.

Es importante notar que el itinerario de y así construído es casi idéntico al de x y también es importante ver que en la posición inmediata anterior a cada cadena de la forma $1, 0, 0, \ldots, 0, 1$ cuando t_x tiene un 0, t_y tiene un 1 (digamos que esto sucede en la coordenada k del itinerario de x). Este es el momento de máxima separación entre las órbitas de x y y, pero como hay m_j ceros consecutivos después de esta posición se tiene que:

$$x_k \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m_j}}, \frac{1}{2}\right)$$

y

$$y_k \in \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{m_j}}\right].$$

De aquí que

$$|x_k - y_k| < \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{m-1}},$$

Se puede hacer esto para cualquier m_i de la sucesión antes mencionada, puesto que

$x \in B$. Con esto se acaba de construir un punto sombra para x, pues

$$\lim_{j\to\infty} \left|T^j(x) - T^j(y)\right| = 0, \text{ y para toda } j \in \mathbb{N},\ T^j(x) \neq T^j(y)$$

con lo que se tiene que $x \in A$. ■

Es así como se ha llegado al final de esta tesis, en la que se ha intentado mostrar algunas de las propiedades de las funciones que forman a los sistemas dinámicos por medio de una muy función sencilla: la tienda.

También se intentó mostrar algunas revisar el comportamiento de los distintos puntos del dominio de la función y al hacerlo, se encontró en el teorema final de este último capítulo un fenómeno sorprendente: La existencia de puntos llamados sombras que van de la mano con ciertas órbitas aperiódicas, a pesar de la naturaleza de la función (duplicar las distancias con cada iteración) ¿No les parece esto extraordinario?

Bibliografía

[1] MacEachern, S.N. and L.M. Berliner (1993). Aperiodic Chaotic Orbits, American Mathematical Monthly 100, 237-241

[2] Devaney, R., L., "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems", *Addison-Wesley*, 1989.

[3] Royden, H., L., "Real Analysis", 3rd Edition, Prentice Hall, 1988