# Introducción

Gran parte de la forma en la que hoy estudiamos los sistemas dinámicos se lo debemos al matemático y físico francés Henry Poincaré quien revolucionó el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales, utilizando ramas como la geometría y la topología. Todo esto con el fin de conocer propiedades *globales, o cualitativas,* de las soluciones de estos sistemas.

El siguiente fragmento puede darnos una idea del pensamiento que sostenía Poincaré acerca de lo que hoy llamamos caos.

> *Una causa muy pequeña que escapa a nuestra percepción determina efectos considerables que no pueden escapársele a nuestra vista, y entonces decimos que el efecto se debe al azar.*
>
> *Henri Poincaré: Ciencia y Método.*

Hoy en día denominamos *caos* precisamente a todos aquellos sistemas que presentan comportamientos difíciles de determinar con cambios irregulares. Por tanto los sistemas dinámicos son una herramienta importante, ya que nos ayudan a conocer dicho comportamiento.

Podemos decir también que los sistemas dinámicos han tomado gran importancia, debido a que se encuentran inmersos en diferentes áreas como son: la Economía, la Astronomía y la Biología, por mencionar algunas, e incluso la Literatura ha tomado parte de este fenómeno. Un claro ejemplo de esto se encuentra en el cuento titulado *"El sonido del trueno"* de Ray Bradbury en el cuál describe cómo un hombre que regresa al pasado para cazar a un dinosaurio pisa sin darse cuenta a una mariposa y al regresar a su época todo lo encuentra totalmente cambiado. Este efecto, es conocido como un fenómeno de *sensibilidad a las condiciones iniciales.*

**¿Que tiene que ver el Caos y la Linealidad?**

A primera vista uno diría que no tienen nada que ver. Debido a que las transformaciones lineales poseen propiedades que las caracterizan y que de alguna forma hacen que podamos definir su comportamiento. Lo cual no sucede con las tranformaciones caóticas, ya que estas presentan comportamientos irregulares.

Así es que por esta razón uno no esperaría encontrar transformaciones lineales que pudieran ser caóticas, sin embargo no es así. En el artículo de David S. Bennet, titulado *"Chaos and Linearity"*, muestra un ejemplo de una transformación lineal que es caótica, ¡para sorpresa de todos! Y ésa es precisamente la motivación de esta tesis, desarrrollar en forma amplia y detallada dos ejemplos de transformaciones lineales caóticas que acontinuación presentaremos:

(1) En este primer ejemplo consideraremos el espacio de las sucesiones que son cuadrado sumables y $T$ es la transformación lineal dada por

$$T : l_2 \to l_2$$

$$T(x_0, x_1, x_2, ...) = 2(x_1, x_2, x_3, ...).$$

(2) En el segundo ejemplo consideraremos el espacio $H(\mathbb{C})$ que es el conjunto de las funciones enteras, y aquí la transformación a considerar es la que a cada función le asigna su derivada.

$$D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$$
$$D(f) = f'$$

A continuación daremos una breve explicación de lo que veremos en cada capítulo:

En el capítulo 1 vamos a definir qué entendemos por órbita y puntos periódicos. Después daremos la definición de caos de Devaney, que es la que utilizaremos en la demostración de nuestros ejemplos.

**Definición 0.0.1.** Sea $X$ un espacio mtrico. Decimos que $f : X \to X$ es caótica en $X$ si:

(a) El conjunto de puntos periódicos bajo $f$ es denso en $X$.

(b) Existe $x \in X$, tal que su órbita es densa en $X$.

(c) $f$ es sensible a las condiciones iniciales en $X$.

Se sabe que,si $X$ es un conjunto perfecto, la tercera condición en esta definición es una consecuencia de las dos anteriores. Una demostración de este hecho puede encontrarse en el artículo de J. Banks et al. titulado *"On Devaney's Definition of Chaos"* .

Ahora como el objetivo de este capítulo es demostrar que las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ no son caóticas, utilizaremos el hecho de que todo subespacio vectorial en $\mathbb{R}^n$ es cerrado y que si $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una transformación lineal que tiene una colección densa de puntos periódicos. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = I$ ( Identidad en $\mathbb{R}^n$).

Obsérvese que este resultado, el de la densidad de puntos periódicos implica que alguna iteración de la transformación es la identidad, es un poco más general, ya que todo espacio vectorial $X$ sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Recordaremos también en este capítulo propiedades importantes de $\mathbb{R}^n$, como son: ser un espacio métrico completo y separable.

Probaremos en el capítulo 1 que las transformaciones lineales en espacios de dimensión finita no son caóticas, sin embargo si el espacio es de dimensión infinita podemos encontrar al menos dos ejemplos de transformaciones lineales que sean caóticas. Así es que el capítulo 2 nos servirá para presentar al espacio de las sucesiones cuadrado sumables el cual denotaremos como $l_2$. Este espacio resulta ser precisamente un espacio de dimensión infinita. Demostraremos que

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k.$$

define un producto interior, en $l_2$ y su norma está dada de la siguiente manera:

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Probaremos además que $l_2$ es un espacio métrico completo y separable. Y finalmente demostraremos que su dimensión es infinita.

Una de las condiciones que debe de cumplir un operador caótico es que posea un vector universal i.e., un vector cuya órbita sea densa. Esto no siempre resulta fácil de encontrar. Así es que, el capítulo 3 nos servirá para demostrar un teorema de existencia de vectores universales. ¡No uno, sino una colección densa de vectores universales! Para esto nos será útil demostrar primero el *Teorema de Baire*.

Después de todo lo anterior, estamos preparados para presentar en el capítulo 4 un ejemplo de una transformación lineal caótica en un espacio de dimensión infinita. El espacio como es de imaginarse será el de las sucesiones cuadrado sumables, $l_2$, y la función la siguiente:

$$T : l_2 \rightarrow l_2$$
$$T(x_0, x_1, x_2, ...) = 2(x_1, x_2, x_3, ...)$$

Veremos, entre otras propiedades, que $T$ es una transformación lineal y es continua.

Además encontraremos una forma de caracterizar a los puntos periódicos de $T$, es decir, daremos una regla para encontrar puntos periódicos de $T$ de cualquier periodo. Todo esto con la finalidad de demostrar que el conjunto de puntos periódicos bajo $T$ es denso en $l_2$. Para demostrar que existe un vector cuya órbita es densa en $l_2$, demostraremos que $T$ cumple con las condiciones del teorema de existencia de vectores universales del capítulo 3. Finalmente para demostrar la última condición, para que un operador sea caótico, demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 0.0.1.** *Sea $H$ un espacio métrico, completo y separable. Y sea $L : H \longrightarrow H$ una transformación lineal. Si $L$ tiene un vector universal entonces $L$ es sensible a las condiciones iniciales.*

Finalmente en el capítulo 5, veremos otro ejemplo de un operador lineal caótico. El espacio será el de las funciones enteras definidas en $\mathbb{C}$ y el operador es el siguiente:

$$D : H(\mathbb{C}) \rightarrow H(\mathbb{C})$$
$$D(f) = f'$$

Empezaremos en la primera sección por demostrar que $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, el espacio de las funciones continuas de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es un espacio métrico completo y separable. Para ello demostraremos primero que $\rho$ definida de la siguiente manera es una métrica para dicho espacio:

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$$

donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$\rho_n(f,g) = sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\}.$$

Luego veremos un lema importante que relaciona a $\rho$ con $\rho_n$ y que será útil para demostrar que $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ es un espacio métrico, completo y separable. Esta será la base para demostrar también que $H(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{C})$ es un espacio métrico, completo y separable.

Finalizamos esa sección demostrando que la dimensión de $H(\mathbb{C})$ es infinita.

Las dos siguientes secciones nos servirán para demostrar propiedades importantes del operador $D$ y el operador $I$ que resulta ser una función inversa para $D$ y que está definido como:

$$\begin{aligned} &I : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}) \\ &(I(f))(z) = I(f(z)) = \int_0^z f(\xi)d\xi \end{aligned}$$

La última sección la dedicaremos para demostrar que $D$ es un operador caótico, demostrando que el conjunto de puntos periódicos bajo $D$ es denso en $H(\mathbb{C})$ y que existe un vector cuya órbita es densa en $H(\mathbb{C})$. Con este resultado finaliza la tesis.

# Índice general

# Capítulo 1

# LA DINÁMICA DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES EN $\mathbb{R}^n$

La finalidad de este primer capítulo, es demostrar que las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ no son caóticas.

Para demostrar lo anterior, primero daremos una introducción rápida a los conceptos básicos de sistemas dinámicos, para presentar después la definición de caos. Recordaremos además algunas propiedades importantes de $\mathbb{R}^n$.

## 1.1. Órbitas, puntos periódicos y caos.

Sea $(X, d)$ un espacio métrico, donde $d$ representa la métrica en $X$. Sea $f : X \to X$ una función continua. Definimos $f^0$ como la identidad en $X$, $f^0(x) = x$ para toda $x \in X$, $f^1 = f$ y, si $n > 1$, $f^n = f \circ f^{n-1}$. A las funciones $f^n$ las llamamos las iteraciones de $f$.

Por ejemplo si $f(x) = x^2$, las iteraciones de $f$ son las siguientes:

$$\begin{aligned}
f^2(x) &= f(f(x)) = f(x^2) = x^{2^2} \\
f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x^{2^2}) = x^{2^3} \\
&\vdots \\
f^n(x) &= x^{2^n}.
\end{aligned}$$

Conocer el comportamiento que tiene cada punto bajo un proceso iterativo es precisamente el objeto de estudio de los sistemas dinámicos discretos. Es decir nos interesa saber a donde va cada punto y que ruta sigue para llegar allí. Para conocer este comportamiento haremos uso de las siguientes definiciones.

**Definición 1.1.1.** Sea $x \in X$, definimos *la órbita de $x$ bajo $f$* como el siguiente conjunto $\{f^n(x) : n \geqslant 0\} = \{x, f(x), f^2(x), ...\}$.

Notación: $O(x, f)$ denotará la órbita de $x$ bajo $f$.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) = 2x + 3$. Entonces la órbita para $x = 3$ bajo $f$ es: $O(3, f) = \{3, 9, 21, 45, \ldots\}$.

**Definición 1.1.2.** Sea $x \in X$. Decimos que $x$ es un *punto periódico* de $f$ si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, al número $m = min\{n \in \mathbb{N} : f^n(x) = x\}$ le llamamos el periodo de $x$. Para el caso en el que $n = 1$, diremos que $x$ es un *punto fijo* de $f$.

**Definición 1.1.3.** Decimos que una función $f$ *es caótica* según Devaney si cumple con las siguientes condiciones:

(a) El conjunto de puntos periódicos bajo $f$ es denso en $X$, es decir, para toda $\varepsilon > 0$ y para toda $x \in X$ existe $y \in X$, $y$ punto periódico bajo $f$, tal que $y \in B_\varepsilon(x)$.

(b) $X$ contiene un *vector universal* para $f$, es decir, existe un $x \in X$ tal que la $O(x, f)$ es densa en $X$.

(c) $f$ es *sensible a las condiciones iniciales* en $X$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que para toda $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $y \in B_\varepsilon(x)$ y $n \geq 1$ tales que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.

En el artículo de J. Banks et al. titulado *"On Devaney's Definition of Chaos"* se demuestra que la última condición es resultado de las dos primeras [1], si $X$ es un conjunto perfecto. Así es que para demostrar que una función es caótica nos bastará con demostrar las dos primeras condiciones.

## 1.2. Propiedades de $\mathbb{R}^n$

Los espacios en los que vamos a trabajar de aquí en adelante serán espacios vectoriales sobre un campo $K$, los cuales son completos con respecto a la norma inducida por su producto interior. A este tipo de espacios se les denomina *Espacios de Hilbert*.

**Definición 1.2.1.** Un *espacio métrico* es una pareja $(X, d)$ dónde $X$ es un conjunto y $d$ es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, llamada métrica, la cual satisface las siguientes condiciones para toda $x, y, z \in X$ se tiene que:

(i) $d(x, y) \geq 0$,

(ii) $d(x, y) = 0$ si y sólamente si $x = y$,

(iii) $d(x, y) = d(y, x)$,

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

(1) $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales.

Es claro, si recordamos como definimos la suma, $+$, y el producto por un escalar, $*$ :

$+ \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$

$* \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\alpha * (x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

Entonces $(\mathbb{R}^n, +, *)$ forma un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

(2) $(\mathbb{R}^n, d)$ es un espacio métrico.

Sean $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Definimos el *producto interior* de $x$ con $y$ como:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

La métrica inducida por el producto interior estará dada de la siguiente manera:

$$d(x, y) = \|x - y\|, \ \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Es fácil ver que $d$ cumple con las condiciones para ser métrica.

(3) $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo.

*Demostración.* Para demostrar que $\mathbb{R}^n$ es completo con respecto a la métrica anterior. Hay que demostrar que toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, converge a un elemento de $\mathbb{R}^n$.

Para eso sea $\{x^{(p)}\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ donde

$$x^{(p)} = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, ..., x_n^{(p)}) \in \mathbb{R}^n, \ x_i^{(p)} \in \mathbb{R}, \ p = 1, \ldots$$

Veremos que existe $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lim_{p \to \infty} (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, ..., x_n^{(p)}) = (x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.2.1}$$

Como $\{x^{(p)}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$ se cumple que:

Dada $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q > N$ entonces $\left\|x^{(p)} - x^{(q)}\right\| < \varepsilon$ pero

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| \leq \left\|x^{(p)} - x^{(q)}\right\|, \text{ para toda } i = 1, ..., n.$$

Entonces si $p, q > N$,

$$|x_i^{(p)} - x_i^{(q)}| < \varepsilon,$$

es decir, $\{x_i^{(p)}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Ahora, utilizando la completez de $\mathbb{R}$, tenemos que

$$\lim_{p \to \infty} x_i^{(p)} = x_i, \text{ con } x_i \in \mathbb{R}.$$

Es decir, para $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} > 0$ existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que si $p > N_i$, $1 \leq i \leq n$, entonces

$$|x_i^{(p)} - x_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}. \tag{1.2.2}$$

Utilizando lo anterior, calculemos lo siguiente:

Sea $N = max\{N_1, N_2, ..., N_n\}$, si $p > N$

$$\begin{aligned}\left\|(x_1^{(p)}, ..., x_n^{(p)}) - (x_1, ..., x_n)\right\|^2 &= \left\|(x_1^{(p)} - x_1, ..., x_n^{(p)} - x_n)\right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i^{(p)} - x_i)^2 \\ &< n\frac{\varepsilon^2}{n} \\ &< \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Con esto mostramos que $\{x^{(p)}\}$ es una sucesión de Cauchy que converge a $(x_1, x_2, ..., x_n)$, donde $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Por lo tanto $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo. $\square$

(4) $\mathbb{R}^n$ es un *espacio separable,* es decir, existe $X \subset \mathbb{R}^n$ denso y numerable.

*Demostración.* Consideremos $X = \mathbb{Q}^n$. Es fácil ver que es denso, usando el hecho de que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Para ver que $\mathbb{Q}^n$ es numerable, utilizaremos el hecho de que $\mathbb{Q}$ lo es. Como $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \cup_{q \in \mathbb{Q}}\{(q, t) : t \in \mathbb{Q}\}$, entonces $\mathbb{Q}^2$ es numerable. Siguiendo este camino, se puede mostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}^n$ es numerable. $\square$

## 1.3. Las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ no son caóticas.

Nuestro objetivo es demostrar que las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ no son caóticas. Sin embargo podemos extender este resultado a los espacios de dimensión finita, ya que cualquier espacio de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ para alguna $n$.

**Teorema 1.3.1.** *Todo espacio vectorial $X$ sobre $\mathbb{R}$, de dimensión finita es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

*Demostración.* Como $X$ es de dimensión finita, existe una colección $\beta = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ llamada *base* que es linealmente independiente y genera a $X$.

Se define

$$h : X \to \mathbb{R}^n \quad \text{primero para la base como:}$$
$$h(x_i) = e_i \quad para \quad toda \quad 1 \leq i \leq n,$$

y se extiende linealmente para cada $x \in X$, de la siguiente manera, si

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

con

$\alpha_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$h(x) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Definida así, $h : X \to \mathbb{R}^n$ es claramente lineal.

Ahora demostremos que $h$ es isomorfismo

(a) $h$ es inyectiva

Si $x \neq y$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ y $y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i$ existe $\alpha_j \neq \beta_j$ entonces $h(x) \neq h(y)$.

(b) $h$ es suprayectiva

Sea $w = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$, considere $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ entonces $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = h(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n)$.

□

Ahora probaremos la siguiente proposición que nos ayudará a demostrar que las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ no son caóticas.

**Proposición 1.3.2.** *Cualquier subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^n$.

*Demostración.* Sea $Y$ un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Demostraremos que $Y$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$, es decir, que $Y$ contiene a todos sus puntos de acumulación.

Como $Y$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ podemos formar una base ortonormal de él, utilizando el proceso de Gram-Schmidt.

Sea

$$\mathcal{B} = \{b_j : j = 1, \ldots, k\}$$

una base ortonormal de $Y$. Sea $p$ un punto de acumulación de $Y$, entonces existe $\{y_i\} \subset Y$ tal que

$$\lim_{i \to \infty} y_i = p,$$

en otras palabras $\{y_i\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$, es decir para toda $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $i, l \geq N$ tenemos que

$$\|y_i - y_l\| < \varepsilon.$$

Como $y_i \in Y$ y $\mathcal{B}$ es base de $Y$ entonces

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} b_j, \quad \alpha_{ji} \in \mathbb{R}.$$

Observemos ahora que

$$\begin{aligned} \|y_i - y_l\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} b_j - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{jl} b_j \right\| \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ji} - \alpha_{jl}) b_j \right\| \\ &= \sqrt{\left\langle \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ji} - \alpha_{jl}) b_j, \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ji} - \alpha_{jl}) b_j \right\rangle}. \end{aligned}$$

Usando el hecho de que $\mathcal{B}$ es una base ortonormal tenemos que: $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ y $\langle b_i, b_j \rangle = 1$ para $i = j$, además utilizando las propiedades del producto interior, podemos reducir la expresión anterior como sigue:

$$\|y_i - y_l\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ji} - \alpha_{jl})^2} \quad < \varepsilon.$$

De lo anterior podemos concluir que, para cada $j$ fija, $\{\alpha_{ji}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$, es decir, existe $\alpha_j \in \mathbb{R}$ tal que el

$$\lim_{i \to \infty} \alpha_{ji} = \alpha_j.$$

Sólo nos queda por demostrar que

$$\lim_{i\to\infty} y_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j \in Y.$$

Sea $\varepsilon > 0$, como $\{\alpha_{ji}\}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}$ entonces para cada $j$ escogemos $n_j$ tal que si $i \geq n_j$ entonces $\mid \alpha_{ji} - \alpha_j \mid < \frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}$ . Sea $N = max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, si $i \geq N$ entonces

$$\begin{aligned}
\left\| y_i - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j \right\| &= \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ji} b_j - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j \right\| \\
&= \left\| \sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ji} b_j - \alpha_j b_j) \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\alpha_{ji} - \alpha_j)^2} \\
&< \sqrt{\sum_{j=1}^{k} (\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}})^2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces como $\lim_{i\to\infty} y_i = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j$ y también $\lim_{i\to\infty} y_i = p$.

Por la unicidad del limite tenemos que $p = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j \in Y$.

Por lo tanto $Y$ contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, es cerrado.

□

**Teorema 1.3.3.** *Sea $T\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Supongamos que $T$ tiene una colección densa de puntos periódicos. Entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = I$ ( Identidad en $\mathbb{R}^n$).*

*Demostración.* Sea $P = \{p \in \mathbb{R}^n : T^m(p) = p$ para alguna $m \in \mathbb{N}\}$.

Demostraremos primero que $P$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

(1) $0 \in P$.

Ya que $T(0) = 0$, es decir, 0 es un punto de periodo 1.

(2) Si $a, b \in P$ entonces $a + b \in P$.

Como $a, b \in P$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ respectivamente tales que $T^n(a) = a$ y $T^m(b) = b$

Considere $k = nm$, entonces

$$T^k(a + b) = T^k(a) + T^k(b) = T^{nm}(a) + T^{nm}(b) = a + b.$$

(3) Si $a \in P$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha a \in P$.

Como $a \in P$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(a) = a$, entonces

$$T^n(\alpha a) = \alpha T^n(a) = \alpha a.$$

Por lo tanto $P$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, entonces por la proposición anterior tenemos que $P$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ y además denso por hipótesis, por lo tanto , $P = \overline{P} = \mathbb{R}^n$. Con lo cuál concluimos que todo punto $x \in \mathbb{R}^n$, es un punto periódico bajo $T$.

Falta demostrar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m = I$.

Para eso, consideremos una base, $\mathcal{B} = \{b_i : i = 1, ..., n\}$, para $\mathbb{R}^n$. Como cada $b_i \in P$, por lo anterior, existen $m_i \in \mathbb{N}, i = 1...n$ tales que $T^{m_i}(b_i) = b_i$. Sea $m$ el mínimo común múltiplo del conjunto $\{m_i : i = 1...n\}$, entonces para cada $b_i$ tenemos que

$$T^m(b_i) = T^{m_i(\frac{m}{m_i})}(b_i) = b_i.$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i.$$

aplicando

$$\begin{aligned} T^m(x) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T^m(b_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i \\ &= x. \end{aligned}$$

Como $x$ fue arbitrario entonces $T^m = I$. $\square$

**Corolario 1.3.4.** *Una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en sí misma no puede ser caótica.*

*Demostración.* Supongamos que sí es catica, entonces se cumple que el conjunto de puntos periódicos de T es denso en $\mathbb{R}^n$. Por (1.3.3) tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Esto implica que cada órbita es finita, $O(x, T) = \{x, T(x), T^2(x), ..., T^{m-1}(x)\}$, para todo punto en $\mathbb{R}^n$. Lo que nos dice que $T$ no tiene ningún vector universal, lo cuál es una contradicción, ya que $T$ es caótico.

Por lo tanto ninguna transformación lineal en $\mathbb{R}^n$ puede ser caótica.

□

# Capítulo 2

# PRESENTANDO A $l_2$

Nuestra meta, es mostrar una transformación lineal que sea caótica. Dedicaremos los capítulos $2, 3,$ y 4 a este objetivo. El primer paso es considerar un espacio vectorial que no tenga dimensión finita donde tal transformación puede estar definida. Este espacio es precisamente el de las sucesiones que son cuadrado sumables, a este espacio lo denotaremos como $l_2$.

En este capítulo veremos propiedades importantes de $l_2$. De hecho nuestro interés es mostrar que es un espacio métrico, completo y separable. Además demostraremos que $l_2$ tiene dimesión infinita.

$$l_2 = \{\{x_i\} : x_i \quad i = 0, 1, 2, ..., \sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

Note que la sucesión $\{x_i\}$ puede escribirse también como un vector con una cantidad infinita de coordenadas, es decir,

$$x = (x_0, x_1, ..., x_k, ...)$$

## 2.1. Propiedades de $l_2$

**Proposición 2.1.1.** $l_2$ *es un espacio vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *con las operaciones suma, + , y producto por un escalar, * , definidas de la siguiente manera:*

$+ : l_2 \times l_2 \longrightarrow l_2$
$(x_0, x_1, ..., x_k, ...) + (y_0, y_1, ..., y_k, ...) = (x_0 + y_0, x_1 + y_1, ..., x_k + y_k, ...)$

$* : \mathbb{R} \times l_2 \longrightarrow l_2$
$\alpha * (x_0, x_1, ..., x_k, ...) = (\alpha x_0, \alpha x_1, ..., \alpha x_k, ...),\ \alpha \in \mathbb{R}.$

Para ver que la operación suma está bien definida, hay que demostrar lo siguiente:

$(x_0 + y_0, x_1 + y_1, ..., x_k + y_k, ...) \in l_2$, es decir, que la siguiente serie $\sum_{k=0}^{\infty}(x_k + y_k)^2$ converge.

Para ello basta con demostrar que la siguiente serie $\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$ converge.

*Demostración.* Sean $x, y \in l_2$ y $n \in \mathbb{N}$ utilizando la desigualdad de Hölder (ver [2] página 61 ) para el caso cuando $p = q = 2$ tenemos que:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

es decir,

$$\left(\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k|\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{n} x_k^2 \sum_{k=0}^{n} y_k^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k^2$$

entonces, pasando al limite obtenemos que

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k|\right)^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \sum_{k=0}^{\infty} y_k^2.$$

Notemos que tanto $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2$, como $\sum_{k=0}^{\infty} y_k^2$ convergen y además la raíz es una función continua.

Por lo tanto $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k|$ está acotada y converge.

Por último, la convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} |x_k y_k|$ implica la convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k$, esto debido a que $x_k y_k \leq |x_k y_k|$.

$\square$

Es inmediato que si $x, y \in l_2$ entonces $x + y \in l_2$ ya que

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

y cada uno de ellos es una sucesión convergente.

A continuación definimos para $l_2$ un producto interior y una norma.

**Proposición 2.1.2.** *Sea* $\langle , \rangle : l_2 \times l_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función dada por,*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k. \tag{2.1.1}$$

*Entonces* $\langle x, y\rangle$ *define un producto interior, en* $l_2$.

*Demostración.* Para ver que ( 2.1.1) define un producto interior hay que verificar las siguientes propiedades:

(a) $\langle x, x\rangle \geq 0$ para toda $x \in l_2$.

Sea $x \in l_2$. Basta con observar que $x_k^2 \geq 0$ para toda k.

(b) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = (0, 0, ...)$.

Sea $x \in l_2$. Supongamos $\langle x, x\rangle = 0$, es decir $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = 0$, pero esto pasa si y sólamente si $x_k^2 = 0$ para toda $k$, es decir, si y sólo si $x = (0, 0, \ldots)$

(c) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ .

Sean $x, y \in l_2$, como

$$\sum_{k=0}^{N} x_k y_k = \sum_{k=0}^{N} y_k x_k,$$

es claro al pasar al límite que:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x_k = \langle y, x\rangle .$$

(d) $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$ .

Observe lo siguiente:

Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n$ fija y sean $x, y, z \in l_2$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} x_k(y_k + z_k) &= \sum_{k=0}^{n}(x_k y_k + x_k z_k)\\ &= \sum_{k=0}^{n} x_k y_k + \sum_{k=0}^{n} x_k z_k\end{aligned}$$

pasando al limite en ambos lados de la desigualdad tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k(y_k + z_k) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k y_k + \sum_{k=0}^{\infty} x_k z_k,$$

en efecto,

$$\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle .$$

Con las cuatro propiedades que hemos demostrado, podemos concluir que, $\langle , \rangle$ define un producto interior en $l_2$.

Observe que no hace falta demostrar que nuestra función, $\langle , \rangle$, está bien definida, pues ya se hizo al verificar que la suma de dos elementos en $l_2$ está en $l_2$.

Con esto hemos demostrado que nuestra función sí es un producto interior.

$\square$

**Proposición 2.1.3.** *Sea* $\| \quad \| : l_2 \times l_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *la función definida así*

$$\textit{Si} \quad x, y \in l_2, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle} .$$

*Entonces* $\| \quad \|$ *define una norma en* $l_2$.

*Demostración.* Hay que demostrar las siguientes propiedades:

(1) $\|x\| \geq 0$ para toda $x \in l_2$.

Es claro, ya que $x_k^2 \geq 0$ para toda $k$.

(2) $\|x\| = 0$ si y solo si $x = (x_0, x_1, ...) = (0, 0, ...) = 0$.

Supongamos que $\|x\| = 0$, es decir, $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 = 0$, pero esto pasa si y sólamente si $x_k^2 = 0$ para toda $k$, si y sólamente si $x = (0, 0, \ldots)$.

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n$ fija, observe lo siguiente:

$$\sum_{k=0}^{n} (\alpha x_k)^2 = \alpha^2 \sum_{k=0}^{n} x_k^2,$$

pasando al limite tenemos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x_k)^2 = \alpha^2 \sum_{k=0}^{\infty} x_k^2,$$

entonces

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha x_k)^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2},$$

es decir,

$\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n$ fija entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (x_k + y_k)^2 &= \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + \sum_{k=0}^{n} 2x_k y_k + \sum_{k=0}^{n} y_k^2 \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k^2} + \sum_{k=0}^{n} y_k^2 \\
&= \left( \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k^2} \right)^2,
\end{aligned}$$

entonces

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n}(x_k+y_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} x_k^2} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n} y_k^2},$$

haciendo $n \longrightarrow \infty$ tenemos que el lado izquierdo converge y además:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

$\square$

## 2.2. $l_2$ es un espacio vectorial completo y separable.

Una de las propiedades más importantes que posee $l_2$, es que es un espacio completo y separable.

**Proposición 2.2.1.** *$l_2$ es un espacio completo.*

*Demostración.* Sea $\{x^{(n)}\}$ una sucesión de Cauchy en $l_2$, donde

$$x^{(n)} = (x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...).$$

Observe lo siguiente:

Como $\{x^{(n)}\}$ es de Cauchy, dada $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q > N$ entonces $\left\|x^{(p)} - x^{(q)}\right\| < \varepsilon$, es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_k^{(p)} - x_k^{(q)})^2 < \varepsilon^2. \tag{2.2.1}$$

De lo anterior podemos concluir que cada $\{x_k^{(n)}\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$ ya que

$$|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}| \leq \left\|x_k^{(p)} - x_k^{(q)}\right\|, \quad \text{para toda k,} \quad \text{si} \quad p, q > N.$$

Ahora haciendo uso del hecho de que $\mathbb{R}$ es completo, tenemos que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k.$$

Tomemos entonces a

$$x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ...) \quad \text{con} \quad x_k = \lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} \quad \text{para toda} \quad k \geq 0.$$

Ahora sí demostremos que $l_2$ es completo, para eso veremos lo siguiente:

(1) $\lim_{n\to\infty} \left\| x^{(n)} - x \right\| = 0$, y

(2) $x \in l_2$.

(1) $\lim_{n\to\infty} \left\| x^{(n)} - x \right\| = 0$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, q > N$ entonces

$$\left\| x^{(n)} - x^{(q)} \right\| < \varepsilon,$$

tomando $M \in \mathbb{N}$, con $M$ fija se cumple

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(q)})^2} \leq \left\| x^{(n)} - x^{(q)} \right\|,$$

entonces

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{M} (x_k^{(n)} - x_k^{(q)})^2} < \varepsilon.$$

Si tomamos ahora a $n$ fija y hacemos $q \longrightarrow \infty$ por ser $\{x_k^{(q)}\}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}$, obtenemos lo siguiente:

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{M} (x_k^{(n)} - x_k)^2} \leq \varepsilon.$$

Observemos ahora que $M$ fue arbitraria, es decir se cumple para toda $M$. Por lo tanto se sigue que:

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2} \leq \varepsilon, \tag{2.2.2}$$

y como $\varepsilon$ fue arbitraria, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^{(n)} - x \right\| = 0.$$

$\square$

(2) $x \in l_2$.

*Demostración.* Para ver que $x \in l_2$, hay que demostrar:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \quad \textit{converge}$$

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} x_k^2 &= [(x_k - x_k^{(n)}) + x_k^{(n)}]^2 \\ &\leq 2[(x_k - x_k^{(n)})^2 + (x_k^{(n)})^2], \end{aligned}$$

ya que para $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

entonces

$$2ab \leq a^2 + b^2.$$

luego sumando $a^2+b^2$ a ambos lados de la desigualdad, obtenemos la relación buscada.
Entonces para $M \in \mathbb{N}$, con $M$ fija, tenemos que

$$\sum_{k=0}^{M} x_k^2 \leq 2[\sum_{k=0}^{M} (x_k - x_k^{(n)})^2 + \sum_{k=0}^{M} (x_k^{(n)})^2],$$

como $M$ fue arbitraria, hacemos tender $M \to \infty$ entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 \leq \quad 2[\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^{(n)})^2 + \sum_{k=0}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2],$$

lo cuál demuestra que $x \in l_2$, ya que $\{x^{(n)}\} \in l_2$ y la siguiente serie $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k^{(n)} - x_k)^2$ converge, pues ya se demostró en (2.2.2). $\square$

$\square$

**Proposición 2.2.2.** *$l_2$ es separable*

*Demostración.* Para demostrar que $l_2$ es separable hay que mostrar, que existe $X \subset l_2$, donde $X$ es denso y numerable.

Para ello construyamos a nuestro conjunto de la siguiente manera: Sea $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ donde

$$X_i = \{(x_0, x_1, \dots, x_k, \dots) \in l_2 : x_0, x_1, ...x_{i-1} \in \mathbb{Q}, \quad y \quad x_j = 0 \quad si \quad j \geq i.\}$$

Probaremos primero que $X$ es denso y después que es numerable.

(1) $X$ es denso.

Sean $\varepsilon > 0$, y $x \in l_2$ donde $x = (x_0, x_1, x_2, ..., x_k, ...)$. Como $\sum_{k=j}^{\infty} x_k^2$ converge, existe $j$ lo suficientemente grande tal que $\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Utilizando el hecho de que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, tenemos que para cada $x_k$, $0 \leq k \leq j-1$, existe $q_k \in \mathbb{Q}$ tal que

$$|x_k - q_k| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2j}},$$

entonces

$$\sum_{k=0}^{j-1} |x_k - q_k|^2 < j(\frac{\varepsilon}{2j}) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora sí demostremos que $X$ es denso en $l_2$, para ello proponemos a $v = (q_0, q_1, q_2, ..., q_{j-1}, 0, 0, 0...) \in X$

Entonces

$$\begin{aligned} \|v - x\|^2 &= \sum_{k=0}^{j-1} |x_k - q_k|^2 + \sum_{k=j}^{\infty} x_k^2 \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que $X$ es denso en $l_2$.

(2) $X$ es numerable.

Observe lo siguiente:

$$f_1 : \mathbb{Q} \to X_1$$
$$\text{con} \quad f(q_1) = (q_1, 0, 0, ...) \quad \text{es biyectiva}$$

es decir, $X_1$ es numerable.

$$f_2 : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to X_2$$

$$\text{con} \quad f(q_1, q_2) = (q_1, q_2, 0, 0, ...) \quad \text{es biyectiva}$$

es decir, $X_2$ es numerable.

Así continuando con este proceso podemos concluir que cada conjunto $X_i$ es un conjunto numerable, luego entonces $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i$ también es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos numerables.

□

## 2.3. $l_2$ un espacio de dimensión infinita.

**Definición 2.3.1.** Sea $(X, +, *)$ un espacio vectorial sobre $K$. Una colección de vectores $\{X_\alpha\}$ contenidos en $X$ se llama linealmente independiente $(l.i.)$ sobre $K$, si toda subcolección finita $x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, ..., x_{\alpha(n)}$ es linealmente independiente sobre $K$.

**Definición 2.3.2.** Decimos que un espacio vectorial $(X, +, *)$ tiene dimensión infinita sobre $K$, si para toda $n \in \mathbb{N}$, es posible hallar $n$ vectores en $X$ que son linealmente independientes sobre $K$.

**Proposición 2.3.1.** *$l_2$ es un espacio de dimensión infinita.*

*Demostración.* Considere el siguiente conjunto:

$$X = \{e_i : 0 \leq i\}, \text{dónde}$$

$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ , es decir todas las coordenadas de $e_i$ son cero salvo la coordenada i-ésima que es 1.

Sea $n \in \mathbb{N}$, tomemos ahora el siguiente subconjunto de $X$.

$$E = \{e_0, e_1, ..., e_n\} \subset X.$$

Observemos ahora que cualquier combinación lineal de $E$ es linealmente independiente, ya que si

$$\alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n = (0, 0, ...),$$

es decir,

$$(0, ..., 0, \alpha_1, 0, ..., 0, \alpha_2, 0, ..., 0, \alpha_n, 0, ...) = (0, 0, ...),$$

entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Como $n$ fue arbitraria, concluimos que $l_2$ tiene dimensión infinita. $\square$

# Capítulo 3

# EXISTENCIA DE VECTORES UNIVERSALES

Una de las propiedades que se deben de cumplir, para saber si una transformación lineal es caótica, es que el espacio posea un elemento cuya órbita sea densa, esto es a lo que llamamos tener un *vector universal.*

Como esta propiedad no siempre resulta tan fácil de demostrar, probaremos un teorema que demuestra la existencia de vectores universales, no uno, si no un conjunto denso.

Para lograr la densidad de este conjunto de vectores universales, nos sera de gran ayuda el Teorema de Baire.

## 3.1. El Teorema de Baire.

**Teorema 3.1.1.** *Suponga que $S$ es un espacio métrico completo. Entonces la intersección numerable de conjuntos abiertos y densos en $S$ es denso en $S$*

*Demostración.* Sea $D = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} D_i$ donde cada $D_i$ es un conjunto abierto y denso.

Mostraremos que $D$ es denso.

Para eso, sean $x \in S$ y $\varepsilon > 0$. Por ser $D_1$ denso, existe

$$p_1 \in D_1 \bigcap B_\varepsilon(x).$$

Ahora considere $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\overline{B_{\varepsilon_1}}(p_1) \subset B_\varepsilon(x) \bigcap D_1$

Como $D_2$ es denso también, existe $p_2 \in D_2 \bigcap B_{\varepsilon_1}(p_1)$ y por ser abierto existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $B_{\varepsilon_2}(p_2) \subset D_2 \bigcap B_{\varepsilon_1}(p_1)$.

De hecho podemos encontrar $\varepsilon_2$ de tal manera que cumpla la siguiente condición:

$$\overline{B_{\varepsilon_2}}(p_2) \subset B_{\varepsilon_1}(p_1) \bigcap D_2 \quad \text{y} \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}$$

Siguiendo esta idea, podemos encontrar una sucesión de puntos $p_n$ de tal manera que:

(1) $p_n \in D_n \bigcap B_{\varepsilon_{n-1}}(p_{n-1})$ y

(2) $\overline{B_{\varepsilon_n}}(p_n) \subset B_{\varepsilon_{n-1}}(p_{n-1}) \bigcap D_n$ , $\varepsilon_n < \frac{1}{n}$.

Con esto hemos construido una sucesión de puntos, $\{p_n\}$, la cual es de Cauchy. Ya que para $n, m \geq N$ tenemos que $p_n \in B_N$ y $p_m \in B_N$, entonces $|p_n - p_m| < 2\varepsilon_N < \frac{2}{N}$.

Ahora utilizando la completez de $S$, tenemos que existe $p \in S$ tal que $p_n \longrightarrow p$. Observe que dada $N \in \mathbb{N}$, $p_n \in \overline{B_{\varepsilon_N}}(p_N)$ para toda $n \geq N$, entonces $p \in \overline{B_{\varepsilon_N}}(p_N)$.

Pero $\overline{B_{\varepsilon_N}}(p_N) \subset D_N$ lo cual implica que $p \in D_N$ para toda $N$.

Además como $p \in \overline{B_{\varepsilon_1}}(p_1) \subset B_\varepsilon(x)$, entonces $p \in B_\varepsilon(x)$. Por lo tanto $p \in B_\varepsilon(x) \bigcap \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} D_N\right)$.

Y como $x \in S$ y $\varepsilon > 0$ fueron arbitrarias, concluimos que la intersección:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} D_n \quad \text{es densa en S.}$$

$\square$

## 3.2. Teorema de existencia de vectores universales.

Antes de enunciar nuestro famoso teorema de existencia de vectores universales, tenemos que ver a continuación una proposición y un lema que nos servirá en dicha demostración.

La idea de esto, es construir al conjunto de vectores universales como una intersección numerable de conjuntos abiertos y densos, para poder hacer uso del teorema de Baire y con ello poder concluir la existencia de un conjunto denso de vectores universales.

**Proposición 3.2.1.** *Sea $H$ un espacio métrico, completo y separable. Sea $L : H \to H$ una función continua. Sea $X = \{x_i : i = 1, 2, 3, ...\}$, $X \subset H$, denso y numerable. Sean $i, n \in \mathbb{N}$. Considere el siguiente conjunto:*

$$W_{i,n} = \{y \in H : T^k(y) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i) \quad \textit{para alguna } k, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

*Entonces*

*(1)* $W_{i,n} = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i))$,

*(2)* $W_{i,n}$ *es abierto.*

*Demostración.* (1) Primero demostraremos la contención de ida. Sea $y \in W_{i,n}$, es decir, existe $k \geq 0$ tal que

$$L^k(y) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i).$$

Esto implica que $y \in L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i))$ es decir,

$$W_{i,n} \subset \bigcup_{k=0}^{\infty} L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i).$$

Ahora la contención de regreso. Sea $y \in \bigcup_{k=0}^{\infty} L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i))$ entonces

$$y \in L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i)) \quad \text{para alguna } k$$

es decir,

$$L^k(y) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i).$$

Entonces

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i)) \subset W_{i,n}$$

Finalmente hemos demostrado que $W_{i,n} = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i))$.

(2) Sean $i, n \in \mathbb{N}$ con $i, n$ fijos.

Como $L^k$ es continua y $B_{\frac{1}{n}}(x_i)$ es un conjunto abierto, entonces $L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i))$ es abierto. Pero además la unión arbitraria de abiertos es abierto, por lo tanto tenemos que:

$$W_{i,n} = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^{-k}(B_{\frac{1}{n}}(x_i)) \quad \text{es un conjunto abierto.}$$

□

Recordemos que dada $L : H \to H$, decimos que $x \in H$ es un vector universal de $L$ si la órbita de $x$ bajo $L$ es densa en $H$.

**Lema 3.2.2.** *Sea $L : H \longrightarrow H$ una transformación lineal continua, sobre un espacio métrico, completo y separable, $H$. El conjunto de todos los vectores universales de $L$ en $H$ es una intersección numerable de conjuntos abiertos en $H$.*

*Demostración.* Como $H$ es separable existe $X \subset H$, denso y numerable. Sea $X = \{x_i : i = 1, 2, 3, ...\}$.

Sea

$$D = \{v \in H : O(v, L) \text{ es densa en } H\}.$$

Es decir $D$ es el conjunto de vectores universales de $H$.

Para cada $i, n \in \mathbb{N}$, sea

$$W_{i,n} = \{y \in H : L^k(y) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i) \quad \text{para alguna} \quad k = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

Por la proposición anterior sabemos que cada $W_{i,n}$ es un conjunto abierto. Demostraremos entonces que:

$$D = \bigcap_{i,n \in \mathbb{N}} W_{i,n}.$$

Probemos entonces la ida. Sean $i, n \in \mathbb{N}$ fijos. Sea $v \in D$.

Como $O(v, L)$ es densa, existe $k \geq 0$, $L^k(v) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i)$ entonces

$$v \in W_{i,n}$$

Y por lo tanto $v \in \bigcap_{i,n \in \mathbb{N}} W_{i,n}$.

Ahora el regreso. Observemos primero lo siguiente:

Sean $x \in H$ y $\varepsilon > 0$. Como $X$ es denso en $H$, existe $x_j \in X$ tal que $x_j \in B_\varepsilon(x)$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$B_{\frac{1}{N}}(x_j) \subset B_\varepsilon(x) \tag{3.2.1}$$

Ahora sí, sea $v \in \bigcap_{i,n\in\mathbb{N}} W_{i,n}$, es decir $v \in W_{i,n}$ para toda pareja $i, n$, en particular $v \in W_{j,N}$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $L^k(v) \in B_{\frac{1}{N}}(x_j)$, pero por ( 3.2.1) tenemos que $L^k(v) \in B_\varepsilon(x)$.

Por tanto, $O(v, L)$ es densa en $H$. $\square$

**Teorema 3.2.3.** *Sea $L : H \to H$ una transformación lineal continua sobre un espacio métrico completo y separable, $H$. Supongamos además que existe un subconjunto denso y numerable $X \subset H$, y una inversa derecha $S$ para $L$, $L \circ S =$ identidad en $H$, de tal forma que $\|L^n(x)\| \longrightarrow 0$ y $\|S^n(x)\| \longrightarrow 0$ para toda $x \in X$ cuando $n \to \infty$.*

*Entonces $H$ posee vectores universales para $L$.*

*Demostración.* Hemos visto ya que

$$D = \bigcap_{i,n\in\mathbb{N}} W_{i,n}$$

y que cada

$$W_{i,n} = \{y \in H : L^k(y) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i) \quad \text{para alguna k}, \quad k = 0, 1, 2, 3, ...\}$$

es un conjunto abierto, así es que si nosotros probamos también que cada $W_{i,n}$ es denso entonces por el teorema de Baire concluiremos que $H$ posee vectores universales para $L$, de hecho un conjunto denso, $D$.

Sean $\delta > 0$ y $z \in H$. Mostraremos que para toda pareja $(i, n)$, existe $y \in W_{i,n}$ tal que $y \in B_\delta(z)$.

Como $X$ es denso existen $x_0, z_0 \in X$ tales que

$$\|z - z_0\| < \frac{\delta}{2} \quad y \quad \|x_i - x_0\| < \frac{1}{2n}$$

Por otro lado sabemos que

$$\|L^n(x)\| \longrightarrow 0 \quad y \quad \|S^n(x)\| \to 0 \quad \text{para toda} \quad x \in X$$

en particular para $x_0$ y $z_0$. Así es que podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de tal forma que $\left\|S^N(x_0)\right\| < \frac{\delta}{2}$ y $\left\|L^N(z_0)\right\| < \frac{1}{2n}$.

Ahora sí veremos la densidad de $W_{i,n}$

Proponemos $y = S^N x_0 + z_0$. Entonces

$$\begin{aligned}\|y - z\| &= \left\|S^N x_0 + z_0 - z\right\| \\ &\leq \left\|S^N x_0\right\| + \|z - z_0\| \\ &< \delta.\end{aligned}$$

Con esto hemos probado que $y \in B_\delta(z)$

Ahora sólo nos falta probar que $y \in W_{i,n}$, es decir, existe $k \geq 0$ tal que $L^k(y) \in B_{\frac{1}{n}}(x_i)$. Para eso utilizaremos el hecho de que $T \circ S$ es la identidad en $H$. Entonces sea $k = N$

$$\begin{aligned}\left\|L^N(y) - x_i\right\| &= \left\|L^N(S^N x_0 + z_0) - x_i\right\| \\ &= \left\|L^N(S^N(x_0)) - x_i + L^N(z_0)\right\| \\ &\leq \|x_0 - x_i\| + \left\|L^N(z_0)\right\| \\ &< \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

$\square$

Un ejemplo de una transformación lineal que tenga un conjunto denso de vectores universales lo presentaremos en el siguiente capítulo.

# Capítulo 4

# UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL CAÓTICA EN $l_2$

En el capítulo 1 hemos demostrado ya, que las transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$ no son caóticas. Es decir, en espacios de dimensión finita ser lineal y caótica son dos situaciones ajenas. Sin embargo si el espacio vectorial donde trabajamos no es de dimensión finita, podría suceder lo contrario. Para demostrarlo en este capítulo daremos un ejemplo de ello.

## 4.1. Una transformación lineal caótica en $l_2$.

El espacio en el cual estará definida nuestra transformación será $l_2$, el espacio de las sucesiones que son cuadrado sumables. Veremos al final de este capítulo que este espacio vectorial es de dimensión infinita.

**Definición 4.1.1.** Definimos la función $T : l_2 \to l_2$ como sigue:

$$T(x_0, x_1, \ldots) = 2(x_1, x_2, \ldots)$$

para $x = (x_0, x_1, \ldots) \in l_2$.

Note que la transformación lo que hace es tomar una sucesión y recorrerla hacia la izquierda para luego multiplicarla por dos. Entonces dada $x \in l_2$

$$
\begin{aligned}
&T(x) = 2(x_1, x_2, ..., \ldots)\\
&T^2(x) = 2^2(x_2, x_3, ..., \ldots)\\
&\vdots\\
&T^m(x) = 2^m(x_m, x_{m+1}, ..., ).
\end{aligned}
$$

Obsérvese también que si $\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2$ converge entonces $\sum_{i=0}^{\infty}(2x_i)^2$ también converge, esto implica que $T(x) \in l_2$ si $x \in l_2$.

### 4.1.1. Propiedades de T

(1) Es claro que $T$ es lineal.

(2) $T$ es continua.

Para probar que $T$ es continua demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.1.** *Sea $H$ un espacio vectorial normado. Sea $L : H \longrightarrow H$ una transformación lineal. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

*(a) $L$ es continua.*

*(b) $L$ es continua en $0$.*

*(c) $L$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $\|L(x)\| \leq M \|x\|$ para toda $x \in H$.*

*Demostración.* Para demostrar lo anterior probaremos las siguientes implicaciones: $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (a)$.

$(a \Rightarrow b)$ : Es claro.

$(b \Rightarrow c)$ : Como $L$ es continua en 0, dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$. Entonces

$$\|L(x) - L(0)\| < \varepsilon,$$

pero $L$ es lineal, es decir, $L(0) = 0$. Entonces

$$\|L(x)\| < \varepsilon$$

Ahora, sea $x \neq 0$

Observe que el punto, $\frac{\delta x}{2\|x\|}$, cumple con la desigualdad

$$\left\|\frac{\delta x}{2\|x\|}\right\| = \frac{\delta\|x\|}{2\|x\|} = \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Demostremos ahora que $L$ es acotada. Sea $x \in H$, con $x \neq 0$, entonces

$$\|L(x)\| = \left\|L(\frac{\delta x}{2\|x\|})\right\| (\frac{2}{\delta}\|x\|) \leq \varepsilon \left(\frac{2}{\delta}\|x\|\right).$$

Si hacemos $M = \frac{2\varepsilon}{\delta}$ obtenemos el resultado deseado es decir

$$\|L(x)\| \leq M\|x\|,$$

Para todo $x \in H$.

$(c \Rightarrow a)$ : Como $L$ es acotada, existe $M > 0$ tal que $\|L(x)\| \leq M\|x\|$. Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in H$. Demostraremos que $L$ es continua en $x$.
Proponemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$.
Si $y \in H$ es tal que $\|y - x\| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned}\|L(x) - L(y)\| &= \|L(y - x)\| \\ &< M\|y - x\| \\ &< M\delta \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.1.2.** *$T$ es continua.*

*Demostración.* Por el teorema anterior sabemos que basta con probar que $T$ es acotada.

Sea $x \in l_2$ donde $x = (x_0, x_1, ...)$ entonces

$$\begin{aligned}\|T(x_0, x_1, ...)\| &= \|2(x_1, x_2, ...)\| \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty}(2x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\left(\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2\|x\|\end{aligned}$$

por lo tanto
$$\|T(x)\| \leq 2 \|x\|.$$

□

(3) Sea $S : l_2 \to l_2$, donde $S(x_0, x_1, ...) = \frac{1}{2}(0, x_0, x_1, ...)$. Entonces $S$ es una inversa derecha de $T$.

Ya que
$$T \circ S(x) = T(\frac{1}{2}(0, x_0, x_1, ...)) = (x_0, x_1, ...) = x.$$

## 4.2. Caracterización de los puntos periódicos bajo $T$.

Empecemos ahora por caracterizar a los puntos periódicos de $T$.

Por ejemplo si queremos encontrar los puntos periódicos de periodo 2 bajo $T$, entonces se debe cumplir que:
$$T^2(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (x_0, x_1, x_2, \ldots).$$

Pero, por otro lado
$$T^2(x_0, x_1, x_2, \ldots) = 2^2(x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

Entonces igualando y despejando ambas ecuaciones obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{x_0}{2^2}, \qquad & x_3 &= \frac{x_1}{2^2} \\
x_4 &= \frac{x_0}{2^4}, \qquad & x_5 &= \frac{x_1}{2^4} \\
&\vdots \\
x_{2n} &= \frac{x_0}{2^{2n}}, \qquad & x_{2n+1} &= \frac{x_1}{2^{2n}}
\end{aligned}$$

es decir,
$$x = (x_0, x_1, \frac{x_0}{2^2}, \frac{x_1}{2^2}, \ldots, \frac{x_0}{2^{2n}}, \frac{x_1}{2^{2n}}, \ldots)$$

Observe, que lo realizado hasta el momento fue encontrar cómo deben ser los términos de un punto periódico de periodo dos.

Note que el punto $x$ así encontrado está en $l_2$, ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 &= x_0^2 + x_1^2 + \frac{x_0^2}{2^2} + \frac{x_1^2}{2^2} + \frac{x_0^2}{2^4} + \frac{x_1^2}{2^4} + \cdots \\
&= (x_0^2 + x_1^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\
&= (x_0^2 + x_1^2)[\frac{1}{1-\frac{1}{4}}] \\
&= \frac{4}{3}(x_0^2 + x_1^2).
\end{aligned}$$

La serie anterior converge. Por lo tanto concluimos que $x$ es un punto periódico de periodo 2 bajo $T$.

Análogamente podemos ver que un punto periódico de periodo tres tiene la siguiente forma:

$$x = (x_0, x_1, x_2, \frac{x_0}{2^3}, \frac{x_1}{2^3}, \frac{x_2}{2^3}, \ldots, \frac{x_0}{2^{3n}}, \frac{x_1}{2^{3n}}, \frac{x_2}{2^{3n}}, \ldots)$$

Continuado con este proceso podemos encontrar puntos periódicos de cualquier periodo, por ejemplo de periodo m:

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, \frac{x_0}{2^m}, \frac{x_1}{2^m}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^m}, \ldots, \frac{x_0}{2^{mn}}, \frac{x_1}{2^{mn}}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^{mn}}, \ldots).$$

La siguiente proposición resume las observaciones anteriores sobre puntos periódicos.

**Proposición 4.2.1.** *Sean $m \in \mathbb{N}$ y $(x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^m$. Sea $x^{[m]} \in l_2$ dado por*

$$x^{[m]} = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, \frac{x_0}{2^m}, \frac{x_1}{2^m}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^m}, \ldots, \frac{x_0}{2^{mn}}, \frac{x_1}{2^{mn}}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^{mn}}, \ldots)$$

*entonces*

*$x^{[m]}$ es un punto periódico de periodo $m$ bajo $T$.*

*Demostración.* Es claro que $x^{[m]} \in l_2$, ya que

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2 = (x_0^2 + \cdots + x_{m-1}^2) \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{2m}})^i.$$

y la serie $\sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2^{2m}})^i$ converge a $\frac{2^{2m}}{2^{2m}-1}$ .

Ahora procedamos a demostrar que $x^{[m]}$ es un punto periódico de periodo $m$.

Para eso calculemos lo siguiente:

$$T^m(x^{[m]}) = 2^m \left(\frac{x_0}{2^m}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^m}, \ldots, \frac{x_0}{2^{m(n+1)}}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^{m(n+1)}}, \ldots\right),$$

$$T^m(x^{[m]}) = \left(x_0, \ldots, x_{m-1}, \frac{x_0}{2^m}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^m}, \ldots, \frac{x_0}{2^{mn}}, \frac{x_1}{2^{mn}}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^{mn}}, \ldots\right).$$

Es decir, $T^m(x^{[m]}) = x^{[m]}$

Por lo tanto $x^{[m]}$ es un punto periódico de periodo $m$.

□

## 4.3. T es caótica.

En esta sección veremos que $T$ cumple con las tres condiciones propuestas por Devaney para que un operador $T$ sea caótico.

### 4.3.1. Densidad en el conjunto de puntos periódicos.

Denotaremos por $P$ al conjunto de puntos periódicos bajo $T$.

**Teorema 4.3.1.** *$P$ es denso en $l_2$*

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $x \in l_2$ donde $x = (x_0, x_1, ..., x_m, ...)$.

Por la proposición (4.2.1) de la sección anterior tenemos que:

$$x^{[m]} = (x_0, x_1, \ldots, x_{m-1}, \frac{x_0}{2^m}, \frac{x_1}{2^m}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^m}, \ldots, \frac{x_0}{2^{mn}}, \frac{x_1}{2^{mn}}, \ldots, \frac{x_{m-1}}{2^{mn}}, \ldots),$$

es un punto periódico de periodo $m$ bajo $T$.

Ahora calculemos su norma al cuadrado

$$\begin{aligned}\left\|x^{[m]}\right\|^2 &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} x_j^2\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2m}}\right)^k\right) \\ &\leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} x_j^2\right)\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2^{2m}}}\right) \\ &= \|x\|^2\left(\frac{2^{2m}}{2^{2m}-1}\right).\end{aligned}$$

Es decir,

$$\left\|x^{[m]}\right\|^2 \leq \frac{2^{2m}}{2^{2m}-1}\left\|x\right\|^2. \tag{4.3.1}$$

Ahora definamos la siguiente función:

$$R : l_2 \to l_2$$

tal que

$$R(x_0, x_1, ...) = (x_1, x_2, ...).$$

Observe que

$$\left\|R^m(x^{[m]})\right\|^2 = \left\|\frac{1}{2^m}T^m(x^{[m]})\right\|^2.$$

Utilizando que $x^{[m]}$ es un punto periódico de periodo $m$ tenemos que

$$\left\|R^m(x^{[m]})\right\|^2 = \frac{1}{2^{2m}}\left\|x^{[m]}\right\|^2,$$

y por ( 4.3.1)

$$\left\|R^m(x^{[m]})\right\|^2 \leq \frac{\left\|x\right\|^2}{2^{2m}-1},$$

$$\left\|R^m(x^{[m]})\right\| \leq \sqrt{\frac{\left\|x\right\|^2}{2^{2m}-1}}.$$

Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ lo suficientemente grande de tal forma que

$$\left\|R^N(x^{[N]})\right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

y

$$\left\|R^N(x)\right\| = (\sum_{k=N}^{\infty} x_k^2)^{\frac{1}{2}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado

$$\left\|x - x^{[N]}\right\| = \left\|R^N(x - x^{[N]})\right\|,$$

dado que $x_k^{[N]} = x_k$ para $k = 0, 1, 2, ..., N-1$.

Pero
$$\left\|R^N(x-x^{[N]})\right\| \leq \left\|R^N x\right\| + \left\|R^N x^{[N]}\right\|.$$
Por lo tanto
$$\left\|x-x^{[N]}\right\| < \varepsilon.$$
Es decir, $x^{[N]} \in B_\varepsilon(x)$, y es un punto periódico de periodo $N$.

Con esto hemos probado que $P$ es denso en $l_2$. □

### 4.3.2. Transitividad (vectores universales).

En el capítulo anterior demostramos el siguiente teorema :

**Teorema 4.3.2.** *Sea $T : H \to H$ una transformación lineal continua sobre un espacio métrico, completo y separable $H$. Supongamos además que existe un subconjunto denso $X \subset H$, y una inversa derecha $S$ para $T$ tal que $T \circ S =$ identidad en $H$, de tal forma que $\|T^n(x)\| \longrightarrow 0$ y $\|S^n(x)\| \longrightarrow 0$ para toda $x \in X$. Entonces $H$ posee vectores universales para $T$.*

Así es que para demostrar que $l_2$ posee un vector universal aplicaremos el teorema anterior.

Hemos probado ya, que $T : l_2 \to l_2$ con $T(x_0, x_1, ...) = 2(x_1, x_2, ...)$ es una transformación lineal y continua en un espacio métrico, completo y separable, $l_2$. Y que $S : l_2 \longrightarrow l_2$ con $S(x_0, x_1, ...) = \frac{1}{2}(0, x_0, x_1, ...)$ es una inversa derecha de T.

Recordemos además que:
$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_i,$$
donde
$$X_i = \{(x_0, x_1, ..., x_k, ...) : x_0, x_1, ..., x_{i-1} \in \mathbb{Q} \quad y \quad x_j = 0 \quad si \quad j \geq i\},$$
es un subconjunto de $l_2$, que es denso y numerable.

Ahora sólo nos resta por demostrar que
$$\|T^n(x_0, x_1, ..., x_k, ...)\| \to 0$$
y
$$\|S^n(x_0, x_1, ..., x_k, ...)\| \to 0$$
para toda $x \in X$.

Entonces sea $(x_0, x_1, ..., x_k, ...) \in X$, es decir existe $j \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_0, x_1, ..., x_{j-1}, 0, ...) \in X_j \quad \text{con} \quad x_0, x_1, ..., x_{j-1} \in \mathbb{Q}.$$

Observe que :

(1) $\|T^n(x_0, x_1, ..., x_{j-1}, ...)\| \to 0$

Tomemos $n = j$. Entonces

$$\begin{aligned} T^n(x_0, x_1, ..., x_k, ...) &= 2^n(x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+k}, ...) \\ &= 2^n(0, ..., 0, ..), \end{aligned}$$

entonces

$$\|T^n(x_0, x_1, ..., x_k, ...)\| = 2^n \|(0, ..., 0, ...)\| = 0.$$

Ahora haciendo $n \to \infty$ tenemos el resultado deseado.

(2) $\|S^n(x_0, x_1, ..., x_k, ...)\| \to 0$

Tomemos $n = j$. Como

$$S^n(x_0, x_1, x_2, ...) = (\frac{1}{2})^n(0, ..,0, x_0, x_1, ...).$$

Entonces

$$\|S^n(x_0, x_1, ..., x_k, ...)\| = (\frac{1}{2})^n \|(x_0, x_1, ...)\|.$$

Observe que

$$\|(x_0, x_1, ...)\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} x_i^2} < \infty.$$

Haciendo $n \to \infty$

$$\frac{\|(x_0, x_1, ...)\|}{2^n} \to 0$$

Es decir

$$\|S^n(x_0, x_1, ..., x_{j-1}, ...)\| \to 0 \quad \text{para toda} \quad x \in X.$$

Recordemos que en el capítulo 1 mencionamos que para demostrar que una transformación fuera caótica bastaba con demostrar que se cumpliera que el conjunto de puntos periódicos fuera denso y tuviera un vector cuya órbita fuera densa. Así es que podemos concluir en este momento que $T : l_2 \longrightarrow l_2$ con $T(x_0, x_1, ...) = 2(x_1, x_2, ...)$ es una transformación lineal caótica. Sin embargo no está por demás demostrar la última condición que propone Devaney.

### 4.3.3. Sensibilidad a las condiciones iniciales.

Para demostrar que $T$ es sensible a las condiciones iniciales demostraremos el siguiente teorema:

**Teorema 4.3.3.** *Sea $H$ un espacio métrico, completo y separable. Y sea $T : H \longrightarrow H$ una transformación lineal. Si $T$ tiene un vector universal.*

*Entonces $T$ es sensible a las condiciones iniciales.*

*Demostración.* Sea $v$ el vector cuya órbita es densa en $H$. Proponemos $\delta = 1$, sean $\varepsilon > 0$ y $x \in H$, proponemos $\delta = 1$.

Como la $O(v, T)$ es densa en $H$, sucede lo siguiente:

(1) Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(v) \in B_\varepsilon(0)$, entonces proponemos a $y = x + T^N(v)$.

(2) La $O(v, T)$ no es acotada, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|T^n(T^N(v))\right\| > 1$.

Calculemos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned}\|T^n(y) - T^n(x)\| &= \left\|T^n(x + T^N(v)) - T^n(x)\right\| \\ &= \left\|T^n(x) + T^nT^N(v) - T^n(x)\right\| \\ &= \left\|T^nT^N(v)\right\| \\ &> 1 = \delta.\end{aligned}$$

Por lo tanto $T$ es sensible a las condiciones iniciales.

□

# Capítulo 5

# CAOS EN EL ESPACIO DE LAS FUNCIONES ENTERAS

El propósito de este capítulo es demostrar que en el espacio de las funciones enteras, $H(\mathbb{C})$, existe un operador que es caótico.

Recordemos que una función entera, es aquella que es analítica en todo el plano complejo.

## 5.1. $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, el espacio de las funciones continuas.

### 5.1.1. Espacios métricos

En esta sección veremos algunas métricas en el espacio de los complejos.

**Proposición 5.1.1.** *Sea* $(\mathbb{C}, d)$ *dónde* $d(s,t) = |s-t|$. *Entonces* $(\mathbb{C}, d)$ *es un espacio métrico completo.*

**Proposición 5.1.2.** *Si* $(\mathbb{C}, d)$ *es un espacio métrico entonces*

$$\mu(s,t) = \frac{d(s,t)}{1 + d(s,t)}$$

*también es una métrica en* $\mathbb{C}$.

*Demostración.* Es claro que las condiciones $(i), (ii)$ y $(iii)$ de la definición (1.2.1) se cumplen debido a que $d(s,t)$ es una métrica.

Así es que sólo nos resta por demostrar que:

$$\mu(s,t) \leq \mu(s,u) + \mu(u,t)$$

Para demostrar lo anterior observemos lo siguiente:

Sea $f(x) = \frac{x}{1+x}$ con $x > 0$ entonces $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$ para toda $x$, es decir, $f$ es creciente. Como

$$d(s,t) \leq d(s,u) + d(u,t),$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{d(s,t)}{1+d(s,t)} &\leq \frac{d(s,u)+d(u,t)}{1+d(s,u)+d(u,t)} \\ &= \frac{d(s,u)}{1+d(s,u)+d(u,t)} + \frac{d(u,t)}{1+d(s,u)+d(u,t)} \\ &\leq \frac{d(s,u)}{1+d(s,u)} + \frac{d(u,t)}{1+d(u,t)}\end{aligned}$$

es decir

$$\mu(s,t) \leq \mu(s,u) + \mu(u,t).$$

$\square$

Notación: $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ denota el conjunto de las funciones continuas que van de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Obsérvese que dada $z \in \mathbb{C}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z \in \overline{B_n}(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\}$. Por tanto $\mathbb{C}$ se puede expresar como una unión numerable de conjuntos compactos, $\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_n}(0)$.

**Definición 5.1.1.** Sean $f, g$ dos funciones en $\mathcal{C}(\mathbb{C})$. Definimos

$$\rho_n(f,g) = sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\}.$$

La función $\rho_n : \mathcal{C}(\mathbb{C}) \times \mathcal{C}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ cumple las siguientes propiedades:

Sean $f, g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$,

(1) $\rho_n(f,g) \geq 0$ para toda $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$.

Es claro ya que $|f(z) - g(z)| \geq 0$ para toda $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ y toda $z \in \overline{B_n}(0)$.

(2) Si $\rho_n(f,g) = 0$ entonces $f(z) = g(z)$ para toda $z \in \overline{B_n}(0)$.

Es claro ya que $0 \leq |f(z) - g(z)| \leq sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\}$ y como $\rho_n(f, g) = 0$ tenemos que $|f(z) - g(z)| = 0$ para toda $z \in \overline{B_n}(0)$, que es lo mismo que decir $f(z) = g(z)$ para toda $z \in \overline{B_n}(0)$.

(3) $\rho_n(f, g) = \rho_n(g, f)$.

Esta igualdad es inmediata.

(4) $\rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g)$.

Observe lo siguiente: Como para $z \in \overline{B_n}(0)$

$$|f(z) - h(z)| \leq sup\{|f(z) - h(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\} = \rho_n(f, h)$$

y

$$|h(z) - g(z)| \leq sup\{|h(z) - g(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\} = \rho_n(h, g)$$

tenemos que

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| &\leq |f(z) - h(z)| + |h(z) - g(z)| \\ &\leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g), \end{aligned}$$

para toda $f, g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$.

Entonces

$$sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\} \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g).$$

Es decir,

$$\rho_n(f, g) \leq \rho_n(f, h) + \rho_n(h, g).$$

**Definición 5.1.2.** Sean $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$. Definimos

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}.$$

**Proposición 5.1.3.** $(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$ *es un espacio métrico.*

*Demostración.* Note que $\rho(f, g)$ está bien definida, ya que

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} < 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{converge.}$$

(1) $\rho(f, g) \geq 0$ para toda $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$.

Es claro ya que $\rho_n(f,g) \geq 0$

(2) $\rho(f,g) = 0$ si y sólamente si $f = g$ en $\mathbb{C}$.

Es también claro, ya que esta condición implica que para toda $n \in \mathbb{N}$ $\rho_n(f,g) = 0$.

(3) $\rho(f,g) = \rho(g,f)$

Ya que $\rho_n(f,g) = \rho_n(g,f)$ entonces $f = g$ en $\overline{B_n}(0)$ para toda $n$ y entonces en $\mathbb{C}$.

(4) $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$

Hemos visto ya que $\rho_n(f,g) \leq \rho_n(f,h) + \rho_n(h,g)$, así es que utilizando la misma función en la demostración de la proposición ( 5.1.2) podemos llegar a la siguiente desigualdad:

$$\frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)} + \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}.$$

Considere ahora $M \in \mathbb{N}$ con $M$ fija entonces

$$\sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \leq \sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,h)}{1+\rho_n(f,h)} + \sum_{n=1}^{M} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(h,g)}{1+\rho_n(h,g)}.$$

Haciendo tender $M \longrightarrow \infty$ obtenemos el resultado deseado.

□

Además de ser $\rho$ una métrica, cumple con otras propiedades importantes que veremos en el siguiente lema.

**Lema 5.1.4.** *Sean* $f, g, \varphi, \gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ *y* $c \in \mathbb{C}$, *entonces*

*(i)* $\rho(f,g) = \rho(f-g,0)$.

*(ii)* $\rho(f+g,0) \leq \rho(f,0) + \rho(g,0)$.

*(iii)* $\rho(cf,cg) \leq max\{|c|\rho(f,g), \rho(f,g)\}$.

*(iv) Si para toda* $\varepsilon > 0$, $\rho(f,\varphi) < \varepsilon$ *y* $\rho(g,\gamma) < \varepsilon$, *entonces* $\rho(f+g,\varphi+\gamma) < 2\varepsilon$.

*Demostración.* (i) $\rho(f,g) = \rho(f-g,0)$.

Ya que

$$\begin{aligned}\rho_n(f-g,0) &= sup\{|(f-g)(z)-0| : z \in \overline{B_n}(0)\}\\ &= sup\{|f(z)-g(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\}\\ &= \rho_n(f,g).\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{\rho_n(f-g,0)}{1+\rho_n(f-g,0)} = \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}.$$

(ii) $\rho(f+g,0) \leq \rho(f,0)+\rho(g,0)$.

Observemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}\rho_n(f+g,0) &= sup\{|(f+g)(z)-0| : z \in \overline{B_n}(0)\}\\ &= sup\{|(f(z)-0)+(g(z)-0)| : z \in \overline{B_n}(0)\}\\ &\leq sup\{|f(z)-0| : z \in \overline{B_n}(0)\} + sup\{|g(z)-0| : z \in \overline{B_n}(0)\}\\ &\leq \rho_n(f,0)+\rho_n(g,0).\end{aligned}$$

Ahora como siempre usamos que $\frac{x}{1+x}$ es creciente para tener que

$$\frac{\rho_n(f+g,0)}{1+\rho_n(f+g,0)} \leq \frac{\rho_n(f,0)}{1+\rho_n(f,0)} + \frac{\rho_n(g,0)}{1+\rho_n(g,0)}.$$

(iii) $\rho(cf,cg) \leq max\{|c|\rho(f,g),\rho(f,g)\}$. Consideremos primero los siguientes dos casos:

Caso($|c| \geq 1$) entonces

$$\frac{\rho_n(cf,cg)}{1+\rho_n(cf,cg)} = \frac{|c|\rho_n(f,g)}{1+|c|\rho_n(f,g)} \leq \frac{|c|\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} = \frac{|c|\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)}$$

Caso($|c| < 1$) Sucede que

$$|c|\rho_n(f,g) < \rho_n(f,g)$$

Observemos que la función $g(t) = \frac{t}{1+t}$ es creciente entonces aplicándola a ambos lados de la desigualdad anterior obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\rho_n(cf, cg)}{1 + \rho_n(cf, cg)} < \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$$

Por lo tanto, en el primer caso tenemos que

$$\rho(cf, cg) \leq |c|\rho(f, g),$$

y en el segundo

$$\rho(cf, cg) \leq \rho(f, g).$$

Concluimos entonces que $\rho(cf, cg) \leq max\{|c|\rho(f, g), \rho(f, g)\}$.

(iv) Si para toda $\varepsilon > 0$, $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$ y $\rho(g, \gamma) < \varepsilon$, entonces $\rho(f+g, \varphi+\gamma) < 2\varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ como

$$\rho(f, \varphi) < \varepsilon \quad y \quad \rho(g, \gamma) < \varepsilon$$

entonces

$$\begin{aligned}
\rho(f + g, \varphi + \gamma) &= \rho((f + g) - (\varphi + \gamma), 0) \\
&= \rho((f - \varphi) + (g - \gamma), 0) \\
&\leq \rho(f - \varphi, 0) + \rho(g - \gamma, 0) \\
&= \rho(f, \varphi) + \rho(g, \gamma) \\
&< \varepsilon + \varepsilon \\
&= 2\varepsilon
\end{aligned}$$

□

### 5.1.2. Un lema importante

**Proposición 5.1.5.** *Sean $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ y $1 \leq n \leq p$. Entonces*

$$\rho_n(f, g) \leq \rho_p(f, g).$$

*Demostración.* Sea $z \in \overline{B_n}(0)$, observe que $\overline{B_n}(0) \subset \overline{B_p}(0)$ por lo que,

$$|f(z) - g(z)| \leq sup\{|f(u) - g(u)| : u \in \overline{B_p}(0)\}.$$

Es decir,

$$|f(z) - g(z)| \leq \rho_p(f, g) \quad \text{para toda} \quad z \in \overline{B_n}(0).$$

Mostrando que $\rho_p(f, g)$ es una cota superior de los valores $|f(z) - g(z)|$. Por lo tanto

$$\rho_n(f, g) \leq \rho_p(f, g)$$

□

**Lema 5.1.6.** *Dada $\varepsilon > 0$ existen $\delta > 0$ y $p \in \mathbb{N}$ tal que para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ se cumple lo siguiente: Si*

$$\rho_p(f, g) = sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_p}(0)\} < \delta,$$

*entonces*

$$\rho(f, g) < \varepsilon.$$

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $p \in \mathbb{N}$ fijo tal que $\sum_{n=p+1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n < \frac{1}{2}\varepsilon$.

Proponemos $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon$

Observe que para $0 \leq t \leq \delta$ tenemos que

$$\frac{t}{1+t} < \delta.$$

Haciendo uso de la proposición anterior, de que $\frac{x}{1+x}$ es creciente y del hecho de que $\rho_p(f, g) < \delta$ tenemos que

$$\frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)} \leq \frac{\rho_p(f, g)}{1 + \rho_p(f, g)} < \frac{1}{4}\varepsilon, \quad 1 \leq n \leq p.$$

Calculemos entonces

$$\begin{aligned}
\rho(f,g) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \\
&= \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} \\
&< \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon + \sum_{n=p+1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&< \left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\varepsilon \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto $\rho(f,g) < \varepsilon$. □

**Lema 5.1.7.** *Dada $\delta > 0$ y $\overline{B_p}(0)$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada par de funciones $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ se cumple lo siguiente: Si*

$$\rho(f,g) < \varepsilon$$

*entonces*

$$\rho_p(f,g) = sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_p}(0)\} < \delta.$$

*Demostración.* Sean $\delta > 0$ y $\overline{B_p}(0)$.

Proponemos $\varepsilon = \frac{\delta}{2^p + 2^p\delta}$

Luego

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} \le \rho(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f,g)}{1+\rho_n(f,g)} < \varepsilon.$$

Por tanto

$$\left(\frac{1}{2}\right)^p \frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < \varepsilon.$$

Despejando

$$\frac{\rho_p(f,g)}{1+\rho_p(f,g)} < 2^p\varepsilon.$$

Sea $\varphi(x) = \frac{x}{1-x}$ la inversa de $\frac{x}{1+x}$, como $\varphi$ es creciente si $x \in [0,1)$. Aplicando $\varphi$ en ambos lados de la desigualdad anterior se tiene que:

$$\rho_p(f,g) < \frac{2^p\varepsilon}{1-2^p\varepsilon} = \frac{\frac{\delta}{1+\delta}}{1-\frac{\delta}{1+\delta}} = \delta.$$

Sustituyendo el valor de $\varepsilon$ se obtiene el resultado deseado. $\square$

**Proposición 5.1.8.** *Sea* $\{f_n\}$ *una sucesión en* $(\mathcal{C}(\mathbb{C}),\rho)$. *Entonces* $\{f_n\}$ *converge a* $f$ *si y sólamente si converge uniformemente sobre todo compacto contenido en* $\mathbb{C}$.

*Demostración.* $\Rightarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ y $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Sea $M > 0$ tal que $K \subset \overline{B_M}(0)$. Por el lema (5.1.7) existe $\delta > 0$ tal que para todo par $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ si

$$\rho(f,g) < \delta$$

entonces

$$sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_M}(0)\} < \varepsilon.$$

Como $f_n \longrightarrow f$ entonces para $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(f_n, f) < \delta$ para toda $n \geq N$.

En consecuencia, para toda $n \geq N$ se tiene que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{y para toda} \quad z \in \overline{B_M}(0).$$

Luego $f_n \to f$ uniformemente en $\overline{B_M}(0)$ en particular en $K$.

$\Leftarrow$) Sea $\varepsilon > 0$ por el lema (5.1.6) existen $\delta > 0$ y $\overline{B_M}(0)$ tal que para $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ si

$$sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_M}(0)\} < \delta$$

Entonces

$$\rho(f,g) < \varepsilon.$$

Como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en $\overline{B_M}(0)$ tenemos que dada $\delta > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \delta \quad \text{y para toda} \quad z \in \overline{B_M}(0).$$

En consecuencia, para toda $n \geq N$,

$$\rho(f_n, f) < \varepsilon.$$

$\square$

**Proposición 5.1.9.** *Sea* $\{f_m\}$ *una sucesión de Cauchy en* $(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Entonces para toda* $\delta > 0$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $p, q \geq N$, *entonces* $\rho_n(f_p, f_q) < \delta$.

*Demostración.* Sea $\delta > 0$ y consideremos la bola cerrada $\overline{B_n}(0)$. Por el lema (5.1.7), existe $\varepsilon > 0$ tal que si $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ y $\rho(f, g) < \varepsilon$. Entonces $\rho_n(f, g) < \delta$.

Por ser $\{f_m\}$ una sucesión de Cauchy, para $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq N$ entonces

$$\rho(f_p, f_q) < \varepsilon.$$

Por tanto

$$sup\{|f_p(z) - f_q(z)| : z \in \overline{B_n}(0)\} < \delta,$$

$$\rho_n(f_p, f_q) < \delta.$$

□

Observe que la proposición anterior muestra que si $\{f_m\} \subset (\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$ es una sucesión de Cauchy, entonces para cada $z \in \mathbb{C}$, la sucesión $\{f_m(z)\}$ también es de Cauchy. Luego como $\mathbb{C}$ es completo $\lim_{m\to\infty} f_m(z)$ existe, y define una función en todo el plano $\mathbb{C}$, dada por $f(z) = \lim_{m\to\infty} f_m(z)$.

### 5.1.3. $(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$ es un espacio métrico completo.

**Teorema 5.1.10.** *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Sea* $\{f_m\}$ *una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{C}(\mathbb{C})$. *Sea*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} f_m(z), \quad \textit{para cada} \quad z \in \overline{B_n}(0).$$

*Entonces* $\{f_m\}$ *converge uniformemente a* $f$ *en* $\overline{B_n}(0)$.

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Por el lema (5.1.7) existe $\gamma > 0$ tal que para $g, h \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ si

$$\rho(g, h) < \gamma,$$

entonces

$$|g(z) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para toda} \quad z \in \overline{B_n}(0).$$

Como $\{f_m\}$ es una sucesión de Cauchy, para $\gamma > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geq 1$ y $m > n_0$, entonces

$$\rho(f_m, f_{m+i}) < \gamma.$$

Luego, para toda $z \in \overline{B_n}(0)$ se tiene que

$$|f_m(z) - f_{m+i}(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora tomemos el límite cuando $i \to \infty$, obtenemos lo siguiente:

$$|f_m(z) - f(z)| = lim_{i\to\infty}|f_m(z) - f_{m+i}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

$$\text{Por lo tanto} \quad \{f_m\} \to f \quad \text{uniformemente en} \quad \overline{B_n}(0).$$

□

**Teorema 5.1.11.** *Sea $\{f_m\}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$ que converge uniformememente a $f$ en la bola $\overline{B_n}(0)$. Entonces $f$ es continua en $\overline{B_n}(0)$.*

*Demostración.* Sean $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| < n$ y $\varepsilon > 0$.

Como $f_m \to f$ uniformemente en $\overline{B_n}(0)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq N$ entonces $|f_m(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$ para toda $z \in \overline{B_n}(0)$.

Sea $m \geq N$. Como $f_m$ es continua, para $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existe $\delta^* > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta^*$. Entonces

$$|f_m(z) - f_m(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Considerando $\delta = min\{\delta^*, n - |z_0|\}$ tenemos que si $|z - z_0| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(z_0)| + |f_m(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f$ es continua en $\mathbb{C}$. □

**Teorema 5.1.12.** *$(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$ es un espacio métrico completo.*

*Demostración.* Sea $\{f_m\}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(\mathbb{C}), \rho)$.

Para cada $z \in \mathbb{C}$, definimos

$$f(z) = \lim_{m\longrightarrow\infty} f_m(z).$$

(que existe por ser $\{f_m(z)\}$ de Cauchy.) Entonces por el teorema ( 5.1.10),para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{f_m\}$ converge uniformemente a $f$ en $\overline{B_n}(0)$, y por el teorema (5.1.11) tenemos que $f$ es continua para toda $z \in B_n(0)$, y como $n$ es arbitraria $f$ es continua en $\mathbb{C}$.

Así, $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$.

Por otro lado como $f_m \to f$ converge uniformemente en cada $\overline{B_n}(0)$, eso quiere decir que para $\delta > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq m_0$ entonces $|f_m(z) - f(z)| < \delta$ para toda $z \in \overline{B_n}(0)$, es decir

$$\rho_n(f_m, f) < \delta.$$

Ahora, dado $\varepsilon > 0$ aplicando el Lema ( 5.1.7), existe $\delta > 0$ y $\overline{B_n}(0)$, tales que

$$\rho_n(f_m, f) < \delta.$$

entonces, si $m \geq m_0$,

$$\rho(f_m, f) < \varepsilon.$$

Por tanto,

$$\lim_{m\to\infty} \rho(f_m, f) = 0.$$

$\square$

### 5.1.4. $(H(\mathbb{C}), \rho)$ es un espacio métrico completo y separable.

Denotamos con $H(\mathbb{C})$, el espacio de las funciones enteras, es decir funciones que son analíticas en todo $\mathbb{C}$.

Notemos que una función entera se puede expresar como una serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

con radio de convergencia infinito.

Como $H(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{C})$, podemos asumir que las funciones enteras heredan la misma métrica que las funciones continuas. Es decir, para toda $f, g \in H(\mathbb{C})$

$$\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\rho_n(f, g)}{1 + \rho_n(f, g)}$$

también es una métrica para $H(\mathbb{C})$.

Los siguientes dos teoremas nos van a ser útiles. Sus demostraciones se pueden encontrar en las páginas 174 y 212 de [4] y

**Teorema 5.1.13.** *Sea $A \subset \mathbb{C}$, un conjunto abierto y conexo. Sean $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva contenida en $A$ y $\{f_m\}$ una sucesión de funciones continuas definidas en $\gamma([a, b])$, las cuales convergen uniformemente a $f$ en $\gamma([a, b])$. Entonces*

$$\int_\gamma f_m \longrightarrow \int_\gamma f$$

**Teorema 5.1.14.** *Sea $f$ continua en una región $A$ y suponga que $\int_\gamma f = 0$, para cualquier curva cerrada en $A$. Entonces $f$ es analítica en $A$.*

**Teorema 5.1.15.** *Si $\{f_m\}$ es una sucesión en $H(\mathbb{C})$ y $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$, tal que*

$$\lim_{m \to \infty} \rho(f_m, f) = 0$$

*Entonces*

$$f \quad \textit{es analítica en todo} \quad \mathbb{C}.$$

*Demostración.* Sean $\varepsilon > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$.

Aplicando la proposición (5.1.8) a $\{f_m\}$ tenemos que $f_m \longrightarrow f$ uniformemente sobre todo compacto contenido en $\mathbb{C}$, en particular sobre la $\overline{B_\varepsilon}(z_0)$.

Considere ahora cualquier curva cerrada homotópica a un punto, la cual denotamos por $\gamma$, tal que $\gamma \subset \overline{B_\varepsilon}(z_0)$. Como $f_m$ es entera para toda $m$, entonces por el Teorema de Cauchy tenemos

$$\int_\gamma f_m = 0 \quad \text{para toda } m. \tag{5.1.1}$$

y por el teorema (5.1.13)

$$\int_\gamma f_m \longrightarrow \int_\gamma f. \tag{5.1.2}$$

De 5.1.1 y 5.1.2 obtenemos que

$$\int_\gamma f = 0.$$

finalmente utilizando el teorema de Morera, concluimos que $f$ es analítica en $\overline{B_\varepsilon}(z_0) \subset \mathbb{C}$. Por lo tanto $f$ es entera en todo $\mathbb{C}$. $\square$

**Teorema 5.1.16.** *$H(\mathbb{C})$ es completo.*

*Demostración.* Sea $\{f_m\}$ una sucesión de Cauchy en $H(\mathbb{C})$. Como $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ es completo, existe $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$ tal que

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \rho(f_m, f) = 0$$

Entonces, por el Teorema anterior tenemos que $f$ es analítica.

Por lo tanto $H(\mathbb{C})$ es completo. $\square$

**Teorema 5.1.17.** *$H(\mathbb{C})$ es separable.*

*Demostración.* Para demostrar que $H(\mathbb{C})$ es separable, mostraremos que existe un conjunto $\hat{D} \subset H(\mathbb{C})$, denso y numerable.

Sea

$$\hat{Q} = \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy \quad \text{con} \quad x \in \mathbb{Q}, \quad y \in \mathbb{Q}\}$$

Proponemos

$$\hat{D} = \{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n : a_i \in \hat{Q} \quad y \quad n \in \mathbb{N}\}$$

(1) $\hat{D}$ es denso

Sea $\varepsilon > 0$.

Primero consideremos $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Por el lema (5.1.6) existen $\delta > 0$, y una bola cerrada $\overline{B_R}(0)$ con $R > 1$, tales que para cada par $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$,

$$sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_R}(0)\} < \delta$$

implica

$$\rho(f, g) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora sí la densidad.

Sea $f \in H(\mathbb{C})$, entonces $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y como la convergencia de la serie es uniforme en compactos para $\overline{B_R}(0)$ y para $\delta > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para $m \geq k$

$$|\sum_{n=0}^{m} a_n z^n - f(z)| < \delta \quad \text{para toda} \quad z \in \overline{B_R}(0).$$

Si hacemos $P(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$ tenemos que

$$\rho(P, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otro lado sean $Q(z) = \sum_{n=0}^{k} b_n z^n$, $b_n \in \hat{Q}$ y $z \in \overline{B_R}(0)$. Entonces

$$\begin{aligned} |Q(z) - P(z)| &= |\sum_{n=0}^{k} (b_n - a_n) z^n| \\ &\leq \sum_{n=0}^{k} |b_n - a_n||z|^n. \end{aligned}$$

Sea $M = max\{|b_n - a_n| : n = 0, 1, \ldots, k\}$
entonces

$$\begin{aligned} |Q(z) - P(z)| &\leq M \sum_{n=0}^{k} R^n \\ &= M(k+1)R^k. \end{aligned}$$

Si $M < \frac{\delta}{(k+1)R^k}$ tenemos que

$$|Q(z) - P(z)| < \delta.$$

Entonces $\rho(Q, P) < \frac{\varepsilon}{2}$.
Por lo tanto,

$$\rho(f, Q) < \varepsilon.$$

(2) Ahora demostraremos que $D$ es numerable.

Sea

$$\begin{aligned}
&A_0 = \hat{\mathbb{Q}} \\
&A_1 = \{a_0 + a_1 z : a_0, a_1 \in \hat{\mathbb{Q}}\} \\
&A_2 = \{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 : a_0, a_1, a_2 \in \hat{\mathbb{Q}}\} \\
&\vdots \\
&A_n = \{a_0 + a_1 + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n : a_0, \ldots, a_n \in \hat{\mathbb{Q}}\}
\end{aligned}$$

Observe que cada $A_i$ es un conjunto numerable. Entonces $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i$ es numerable. Pero $\hat{D} = A$, con lo cual hemos terminado.

□

### 5.1.5. $H(\mathbb{C})$ un espacio de dimensión infinita

En el capítulo 2, demostramos que $l_2$ es un espacio de dimensión infinita, así es que ahora vamos a hacer lo mismo para el espacio de las funciones enteras. Para ello recordemos primero la definición de un espacio de dimensión infinita.

**Definición 5.1.3.** Decimos que un espacio vectorial $(X, +, *)$ tiene dimensión infinita sobre $K$, si para toda $n \in \mathbb{N}$, es posible hallar $n$ vectores en $X$ que son linealmente independientes sobre $K$.

**Proposición 5.1.18.** $H(\mathbb{C})$ *es un espacio de dimensión infinita.*

*Demostración.* Considere el siguiente conjunto:

$$X = \{1, z, z^2, z^3, ...\}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$, tomemos ahora el siguiente subconjunto de $X$.

$$E = \{z, z^2, ..., z^n\} \subset X$$

Observemos ahora que cualquier combinación lineal de $E$ es independiente, ya que

$$\alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_n z^n = 0$$

entonces

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Como $n$ fue cualquiera, concluimos que $H(\mathbb{C})$ tiene dimensión infinita. $\square$

## 5.2. El operador derivada.

La demostración del siguiente lema se encuentra en [4] página 172.

**Lema 5.2.1.** ***Desigualdad de Cauchy***. *Sea $f$ analítica en $A$, donde $A$ es un conjunto abierto y conexo, y sea $\gamma$ un círculo con radio $R$ y centro en $z_0$ que está en $A$. Supongamos que el conjunto $\{z : |z - z_0| < R\}$ también está en $A$. Suponga además que $|f(z)| \leq M$ para toda $z \in \gamma$. Entonces para $k = 0, 1, ...$*

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{R^k} M$$

El siguiente lema nos será útil al estudiar las propiedades del operador $f \to f'$.

**Lema 5.2.2.** *Sea $R > 0$. Consideremos las bolas $\overline{B_R}(0)$ y $\overline{B_{R+1}}(0)$. Sea $f$ analítica en $\overline{B_{R+1}}(0)$. Entonces*

$$sup\{|f'(z)| : z \in \overline{B_R}(0)\} \leq sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_{R+1}}(0)\}.$$

*Demostración.* Sea $\xi \in \overline{B_R}(0)$

Como $f$ es analítica en $\overline{B_{R+1}}(0)$ y $\overline{B_1}(\xi) \subset \overline{B_{R+1}}(0)$ tenemos que existe $N = sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_1}(\xi)\}$. Por la desigualdad de Cauchy tenemos que :

$$|f'(\xi)| \leq sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_1}(\xi)\}$$

Y como

$$sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_1}(\xi)\} \leq sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_{R+1}}(0)\},$$

entonces
$$|f'(\xi)| \leq sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_{R+1}}(0)\}$$
Pero $\xi$ fue cualquiera, entonces

$$|f'(z)| \leq sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_{R+1}}(0)\} \quad \text{para toda} \quad z \in \overline{B_R}(0).$$

Por lo tanto,

$$\sup\{|f'(z)| : z \in \overline{B_R}(0)\} \leq sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_{R+1}}(0)\}$$

□

### 5.2.1. Propiedades del operador derivada.

Empezemos por definir el operador derivada como sigue:

$$D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C}),$$
$$D(f) = f'.$$

Como la derivada de una función entera es una función entera, el operador $D$ está bien definido.

Ahora veamos algunas de las propiedades que posee :

(1) Es claro que $D$ es lineal.

(2) $D$ es continua en la función constante cero (que denotamos simplemente con 0).

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$. Por el lema (5.1.6), existen $\delta^* > 0$ y $R > 0$ tales que para $f \in \mathcal{C}(\mathbb{C})$, la condición:

$$sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_R}(0)\} < \delta^*,$$

implica que
$$\rho(f, 0) < \varepsilon.$$

Ahora consideremos $\delta^* > 0$ y $\overline{B_{R+1}}(0)$. Por el lema (5.1.7), existe $\delta > 0$ tal que si
$$\rho(f, 0) < \delta,$$

entonces
$$sup\{|f(z)| : z \in \overline{B_{R+1}}(0)\} < \delta^*.$$
Observe ahora que, por el lema anterior, tenemos que si $\rho(f, 0) < \delta$,
$$sup\{|f'(z)| : z \in \overline{B_R}(0)\} < \delta^*.$$
Entonces
$$\rho(f', 0) < \varepsilon.$$
□

(3) $\lim_{n\to\infty} \rho(D^n(P), 0) \longrightarrow 0$ para toda $P \in \hat{D}$

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ y $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k \in \hat{D}$
Considere $n_0 = k + 1$. Observe que si $n \geq n_0$, $D^n(p) = 0$, luego
$$\rho(D^n(P), 0) = \rho(0, 0) = 0 < \varepsilon$$
□

## 5.3. El operador integración.

Definimos ahora al operador integración como sigue:
$$\begin{aligned} &I : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}) \\ &(I(f))(z) = I(f(z)) = \int_0^z f(\xi) d\xi \end{aligned}$$
Observemos que $I$ es un operador lineal y es una inversa derecha para $D$.
Sea $f \in H(\mathbb{C})$. Observe que $f$ es integrable, por lo tanto existe $\varphi \in H(\mathbb{C})$ tal que $\varphi'(z) = f(z)$ o equivalentemente que
$$\int_0^z f(t)dt = \varphi(z) - \varphi(0).$$
Entonces,
$$D \circ I(f(z)) = D(I(f(z))) = D(\varphi(z) - \varphi(0)) = f(z).$$
**Proposición 5.3.1.** *Para toda* $P \in \hat{D}$, *se tiene que* $\lim_{n\to\infty} \rho(I^n(P), 0) = 0$

*Demostración.* Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_k z^k \in \hat{D}$

Para demostrar que el $\lim_{n\to\infty} \rho(I^n(P), 0) = 0$ Observe que:

$$I^k(P(z)) = I^k(a_0) + I^k(a_1 z) + \cdots + I^k(a_n z^n).$$

y usando que,

$$\rho(f+g, 0) \leq \rho(f, 0) + \rho(g, 0),$$

bastará ver lo siguiente $\lim_{n\to\infty} \rho(I^n(a_k z^k), 0) = 0$ para cada $k$.

*Demostración.* Sea $\varepsilon > 0$ por el lema (1.7) existen $\delta > 0$ y $\overline{B_R}(0)$ tal que para $f, g \in H(\mathbb{C})$. Si $sup\{|f(z) - g(z)| : z \in \overline{B_R}(0)\} < \delta$, entonces

$$\rho(f, g) < \varepsilon.$$

Observe que $I^n(a_k z^k) = \frac{a_k z^{k+n}}{(k+n)!} k! \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} sup\{|I^n(a_k z^k)| : z \in \overline{B_R}(0)\} &= sup\{|\frac{a_k z^{k+n}}{(k+n)!} k!| : z \in \overline{B_R}(0)\} \\ &= \frac{a_k R^{k+n}}{(k+n)!} k! \end{aligned}$$

Haciendo tender $n \to \infty$, obtenemos lo siguiente:

$$sup\{|I^n(a_k z^k)| : z \in \overline{B_R}(0)\} \to 0,$$

ya que la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{R^j}{j!}$ es convergente. Por lo que, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$sup\{|I^n(a_k z^k)| : z \in \overline{B_R}(0)\} < \delta.$$

Entonces, por la desigualdad anterior,

$$\rho(I^n(a_k z^k), 0) < \varepsilon$$

y obtenemos el resultado deseado. □

Usando las observaciones tenemos que:

$$\rho(I^n(P(z)), 0) \leq \rho(I^n(a_0), 0) + \rho(I^n(a_1 z), 0) + \cdots + \rho(I^n(a_k z^k), 0),$$

y por lo que acabamos de demostrar concluimos que

$$\rho(I^n(a_0), 0) + \rho(I^n(a_1 z), 0) + \cdots + \rho(I^n(a_k z^k), 0) \to 0$$

cuando $n$ tiende a infinito.

$$\text{como} \quad 0 \leq \rho(I^n(P(z)), 0),$$

entonces

$$\rho(I^n(P(z)), 0) \to 0.$$

$\square$

# 5.4. D es caótico

## 5.4.1. Vectores universales en $H(\mathbb{C})$

Hemos demostrado ya que

$$D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}),$$
$$D(f) = f',$$

es un operador lineal, definido en un espacio métrico, completo y separable.

Hemos visto también que el conjunto

$$\hat{D} = \{P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n : a_i \in \hat{\mathcal{Q}} \quad y \quad n \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbb{C})$$

es denso y numerable.

Recordemos además que la función

$$I : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C}),$$
$$I(f(z)) = \int_0^z f(\xi) d\xi,$$

es una inversa derecha para $D$, y que tanto $\rho(D^n(P), 0)$ y $\rho(I^n(P), 0)$ tienden a cero cuando $n$ tiende a infinito para toda $P \in \hat{D}$.

Observemos entonces, que lo hecho hasta el momento es demostrar que se cumplen todas las hipótesis del teorema ( 3.2.3). Con lo cual concluimos que $H(\mathbb{C})$ posee vectores universales para $D$. Es decir, existe $f \in H(\mathbb{C})$ tal que su sucesión de derivadas, $\{f, f', f^{(2)}, ...\}$ forman un conjunto denso de $H(\mathbb{C})$.

En resumen podemos concluir el siguiente teorema

**Teorema 5.4.1.** *El operador $D : H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ tiene una órbita densa es decir, existe $f \in H(\mathbb{C})$ tal que la sucesión de derivadas $\{f, f', f^2, ...\}$ es un conjunto denso en $H(\mathbb{C})$.*

### 5.4.2. Densidad del conjunto de las funciones periódicas

**Proposición 5.4.2.** *El conjunto de funciones periódicas de $D$, es un subespacio de $H(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Denotaremos con $Per(D)$ al conjunto de funciones periódicas de $D$.

Sean $f, g$ en $Per(D)$. Entonces existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $D^n(f) = f$ y $D^m(g) = g$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces

$$D^{nm}(\alpha f + \beta g) = \alpha D^{nm}(f) + \beta D^{nm}(g) = \alpha f + \beta g$$

□

**Proposición 5.4.3.** *Sean $M \geq 0$, $\varepsilon > 0$ y $f \in H(\mathbb{C})$ definida como*

$$f(z) = \frac{z^M}{M!}.$$

*Entonces existe $\varphi \in Per(D)$ tal que $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$.*

*Demostración.* Sean $\delta > 0$ y $\overline{B_N}(0)$, por el lema ( 5.1.7 ) tenemos que para $g, h \in H(\mathbb{C})$ si $\rho_N(g, h) < \delta$ entonces $\rho(g, h) < \varepsilon$.

Consideremos $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{i=k}^{\infty} \frac{N^i}{i!} < \delta.$$

Proponemos

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \frac{z^M}{M!} + \frac{z^{M+k}}{(M+k)!} + \frac{z^{M+2k}}{(M+2k)!} + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{M+jk}}{(M+jk)!}\end{aligned}$$

Observemos que el coeficiente de $z^i$ en $\varphi(z)$, es menor o igual que $\frac{1}{i!}$, por tanto el radio de convergencia de $\varphi(z)$ es infinito.

Notemos que $\varphi(z)$ es una función entera y además periódica bajo $D$, de periodo $k$.

Ahora consideremos $z$ de tal forma que $|z| \leq N$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\varphi(z) - \frac{z^M}{M!}\right| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^{M+jk}}{(M+jk)!}\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|z|^{M+jk}}{(M+jk)!}\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{N^{M+jk}}{(M+jk)!} \\
&\leq \sum_{i=K}^{\infty} \frac{N^i}{i!} \\
&< \delta
\end{aligned}$$

Entonces

$$\rho_N(f, \varphi) < \delta.$$

Con lo cual concluimos que

$$\rho(f, \varphi) < \varepsilon.$$

□

**Corolario 5.4.4.** *Sean* $M \geq 0$, $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, *y* $f \in H(\mathbb{C})$, *definida por* $f(z) = cz^M$, *entonces existe* $\varphi \in Per(D)$ *tal que* $\rho(f, \varphi) < \varepsilon$.

*Demostración.* Observe que $f(z)$ la podemos escribir también como $f(z) = (cM!)\frac{z^M}{M!}$.

Sea $g(z) = \frac{z^M}{M!}$. Por la proposición anterior tenemos que para $min\{\frac{\varepsilon}{|c|M!}, \varepsilon\}$ existe $\hat{\varphi} \in Per(D)$ tal que $\rho(g, \hat{\varphi}) < min\{\frac{\varepsilon}{|c|M!}, \varepsilon\}$

Ahora observemos lo siguiente:

$$\rho\left((cM!)\frac{z^M}{M!}, (cM!)\hat{\varphi}\right) \leq max\left\{\rho\left(\frac{z^M}{M!}, \hat{\varphi}\right), |c|M!\rho\left(\frac{z^M}{M!}, \hat{\varphi}\right)\right\}$$

Ahora consideremos dos casos:

Si $|c|M! \leq 1$ entonces

$$\begin{aligned}\rho\left((cM!)\frac{z^M}{M!},(cM!)\hat{\varphi}\right) &\leq \rho\left(\frac{z^M}{M!},\hat{\varphi}\right)\\ &\leq min\left\{\frac{\varepsilon}{|c|M!},\varepsilon\right\}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Si $|c|M! > 1$

$$\begin{aligned}\rho\left((cM!)\frac{z^M}{M!},(cM!)\hat{\varphi}\right) &\leq |c|M! \quad \rho\left(\frac{z^M}{M!},\hat{\varphi}\right)\\ &< |c|M! \quad min\left\{\frac{\varepsilon}{|c|M!},\varepsilon\right\}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de demostrar que el conjunto de funciones periódicas bajo $D$ es denso en $H(\mathbb{C})$. Para eso, demostraremos la siguiente proposición.

**Proposición 5.4.5.** *Para toda $P \in \hat{D}$ y $\varepsilon > 0$, existe $f \in Per(D)$ tal que $\rho(P, f) < \varepsilon$. Donde*

$$\hat{D} = \{Q(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n : a_i \in \hat{\mathbb{Q}} \quad y \quad n \in \mathbb{N}\}$$

*Demostración.* Sea $P(z) \in \hat{D}$ donde $P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_k z^k$ y $\varepsilon > 0$. Por el corolario anterior sabemos que existen $\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_k$ funciones enteras tales que para $0 \leq i \leq k$, $\rho(P_i, \varphi_i) < \frac{\varepsilon}{k+1}$ donde $P_i(z) = p_i z^i$ y $\varphi_i \in Per(D)$.

Proponemos

$$f = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i.$$

Por la proposición ( 5.4.2), $f \in Per(D)$.

Ahora calculemos la siguiente distancia:

$$\begin{aligned}
\rho(P,f) &= \rho(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_k z^k, \varphi_0 + \cdots + \varphi_k) \\
&= \rho((p_0 - \varphi_o) + (p_1 z - \varphi_1) + \cdots + (p_k z^k - \varphi_k), 0) \\
&\leq \rho(p_0 - \varphi_o, 0) + \cdots + \rho(p_k z^k - \varphi_k, 0) \\
&= \rho(p_0, \varphi_o) + \cdots + \rho(p_k z^k, \varphi_k) \\
&= \frac{\varepsilon}{k+1} + \cdots + \frac{\varepsilon}{k+1} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Lo anterior nos servirá para demostrar el siguiente teorema:

**Teorema 5.4.6.** *El conjunto de funciones periódicas bajo D es denso en $H(\mathbb{C})$.*

*Demostración.* Dada $f \in H(\mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$, por ser $\hat{D}$ denso existe $P \in \hat{D}$ con $\rho(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$ y por la proposición (5.4.5), existe $\varphi \in Per(D)$ tal que $\rho(P,\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$ luego

$$\rho(f,\varphi) \leq \rho(f,P) + \rho(P,\varphi) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Hemos probado entonces que $D$ posee una función cuya órbita es densa y además que el conjunto de funciones periódicas bajo $D$ es denso en $H(\mathbb{C})$, por lo tanto podemos enunciar la siguiente proposición.

**Proposición 5.4.7.** *D es caótico*

*Demostración.* La única condición que nos falta por demostrar es la sensibilidad a las condiciones iniciales. Como lo anunciamos en la introducción esta condición es consecuencia de la densidad de $Per(D)$ y de la existencia de un vector universal. Veáse el artículo de J. Banks et al. [1]. □

# Bibliografía


[1] J. Banks et al.,*On Devaney's Definition of Chaos*, Amer. Math. Monthly, 1992, 332-334.

[2] R. G. Bartle, *The Elements of Real Analysis*, segunda edición, Wiley International Edition, 1976.

[3] J. B. Conway, *Functions of One Complex Variable I*, Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1978.

[4] J. E. Marsden y M.J. Hoffman, *Análisis Básico de Variable Compleja*, Trillas, 1996.

[5] C. Blair and L.A. Rubel, *A Universal entire function* Amer. Math. Monthly 90, (1983), 331-332.

[6] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, Addison Wesley, 1989.

[7] D. S. Bennett, *Chaos and Linearity*, Journal of Undergraduate Mathematics vol. 24, 1992, 41-49

[8] R. M.Gethner and J.H. Shapiro, *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281-288

[9] H. L. Royden, *Real Analysis*, segunda edición, Macmillan Company, 1968.

[10] H. M. Lango, *Is the process of finding f' chaotic?*, enviado para su posible publicación a Amer. Math. Monthly.

[11] G. Grabinsky, *Introducción al análisis funcional* , ITAM, 1998.