SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS Y FRACTALES

GILBERTO ARENAS, RAFAEL ISAACS, HÉCTOR MÉNDEZ Y SONIA SABOGAL

Índice

Date: 14 de septiembre de 2011.

1. Prefacio

Durante el segundo semestre de 2007 se realizó, en la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, UIS, (Bucaramanga, Colombia), el *Seminario de Sistemas Dinámicos Discretos y Fractales*. A sus sesiones semanales asistieron los profesores Gilberto Arenas, Claudia Inés Granados, Rafael Isaacs, Carolina Mejía y Sonia Marleni Sabogal, todos ellos de la Escuela de Matemáticas. De la Escuela de Economía asistió el profesor Héctor Alirio Méndez, y de la Escuela de Ingeniería Electrónica asistió el estudiante Luis Antonio Gómez. Finalmente, de la Universidad Nacional Autónoma de México asistió el profesor Héctor Méndez (que en ese semestre se encontraba como profesor visitante en la Escuela de Matemáticas de la UIS).

El interés principal que animó este seminario fue el estudio de los distintos puentes que conectan la teoría de los sistemas dinámicos discretos con la teoría de los conjuntos fractales. Los *Conjuntos de Julia*, además de su atractivo visual, dan clara muestra de la relación entre estas dos teorías. En muchas ocasiones el correspondiente conjunto de Julia de una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es un conjunto fractal y es, también, un conjunto invariante bajo f donde se desarrolla un sistema dinámico discreto caótico.

En este trabajo se hace un recuento de los temas tratados en el seminario. Presentamos una breve introducción a los sistemas dinámicos discretos. Definimos puntos periódicos y hacemos algunos comentarios sobre el importante *Teorema de Sharkovskii*. Seguimos con la definición de *caos* dada por R. L. Devaney en 1985. Seguimos con una presentación de los conjuntos fractales. Aparece la métrica de Hausdorff y los *Sistemas Iterados de Funciones*. La dinámica simbólica nos da oportunidad de presentar otro ejemplo muy conocido de sistema caótico, el desplazamiento en dos símbolos. Más adelante definimos los hiperespacios y las funciones inducidas. Estudiamos propiedades dinámicas de este tipo de funciones. En la penúltima sección presentamos un espacio hiperconexo. Y en la última sección ofrecemos al lector una breve introducción al concepto de entropía topológica.

El texto cuenta con una buena cantidad de preguntas y ejercicios. Nos parece una excelente idea que el lector o la lectora dedique un poco de su tiempo a la solución de la mayoría de ellos.

En la parte final de estas notas viene una lista de referencias. En ella se encuentran los artículos y libros donde nos basamos. La mayoría de los elementos de esta lista son también textos donde el lector, la lectora, puede seguir el estudio de los temas que más le hayan interesado. A lo largo de estas notas le haremos saber al lector, a la lectora, nuestras sugerencias sobre los caminos que puede seguir en caso de estar interesado(a) en continuar sus estudios en los tópicos aquí tratados.

Agradecemos a todos los que de una forma u otra hicieron posible este seminario y la edición de estas notas. Muy en especial queremos agradecer a la estudiante de la licenciatura de matemáticas de la UIS Leidy Velasco por su ayuda en la realización de varias de las gráficas que aquí aparecen, y por la captura en *Latex* de gran parte de este material.

2. Sistemas dinámicos discretos

2.1. Los dos ingredientes. Para obtener un sistema dinámico discreto necesitamos tan sólo dos ingredientes.

El primero es un espacio métrico, X. El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, el plano, $\mathbb{R}^2$, el conjunto de los números complejos, $\mathbb{C}$, y el intervalo cerrado $[0,1]$, en la recta real, (cada uno de ellos junto con su métrica usual), son ejemplos de espacios métricos. La métrica en el conjunto X la representaremos con la letra d.

El segundo ingrediente es una función continua del espacio X en sí mismo, $f : X \to X$.

Una vez que tenemos estos ingredientes podemos definir, para cada punto $x \in X$, una sucesión de puntos en X conocida como la *órbita de x bajo f*,

$$o(x,f) = \left\{x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots\right\}.$$

Aquí el símbolo f^n representa una función de X en sí mismo. Esta función la obtenemos mediante el proceso de componer f consigo misma varias veces: f^0 es la función identidad, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f$, y así sucesivamente.

La interpretación que le damos a la sucesión $o(x,f)$ es la siguiente: En el tiempo $t = 0$ un objeto se encuentra en la posición x; en el tiempo $t = 1$ el objeto ha cambiado de posición y ahora se encuentra en $f(x)$; en el tiempo $t = 2$ el objeto vuelve a cambiar de posición y ahora se encuentra en $f(f(x)) = f^2(x)$; etcétera.

Posiciones:	x	$f(x)$	$f^2(x)$	...	$f^n(x)$	...
Tiempos:	0	1	2	...	n	...

Desde este punto de vista la pareja X y f nos da un modelo matemático del movimiento. Esto es, nos da un *sistema dinámico discreto*. La palabra discreto se refiere a que conocemos la posición del objeto que se mueve sólo cuando el tiempo asume un valor entero mayor o igual a cero.

La meta es estudiar todas las posibles sucesiones $o(x,f)$. De manera muy especial nos interesa su comportamiento cuando n tiende a infinito.

Decimos que $x_0 \in X$ es *punto fijo de f* si $f(x_0) = x_0$. En este caso la órbita de x_0 bajo f es un conjunto muy sencillo, $o(x_0,f) = \{x_0, x_0, ...\} = \{x_0\}$. Es claro, además que cuando n crece la $o(x_0,f)$ tiende a x_0.

De aquí en adelante todas las funciones consideradas son funciones continuas. La letras X, $Y, \ldots$, representan espacios métricos. La letra $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales, es decir, el conjunto de los enteros positivos.

2.2. El ejemplo clásico: *la Tienda*. Sean $X = [0,1]$, y $T : [0,1] \to [0,1]$ la función dada por:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 2 - 2x & \text{si } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

En la figura 1 se puede ver la gráfica de la función T.

Busquemos los puntos fijos de T. Si x es elemento del intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y es punto fijo de T, entonces, por un lado, $T(x) = x$ y, por el otro, $T(x) = 2x$. Por lo tanto, $2x = x$, y $x = 0$. Si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y x es un punto fijo de T, entonces $2 - 2x = x$, $x = \frac{2}{3}$. Observemos que estos puntos son los únicos dos puntos fijos de T.

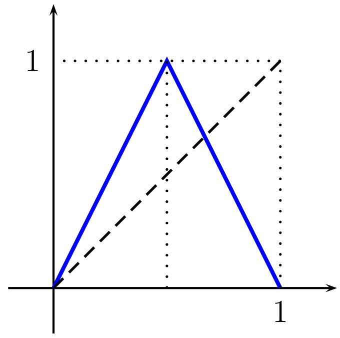


FIGURA 1. Gráfica de T.

Observación 1. *Si $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to A$, y $x_0 \in A$ es un punto tal que $f(x_0) = x_0$, entonces $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_0)$. Por lo tanto este punto, $(x_0, f(x_0))$, se encuentra en la intersección de la gráfica de f y la diagonal $\{(x, y) : x = y\}$. En la figura 2 se muestra la gráfica de una función con exactamente tres puntos fijos: x_0, x_1 y x_2.*

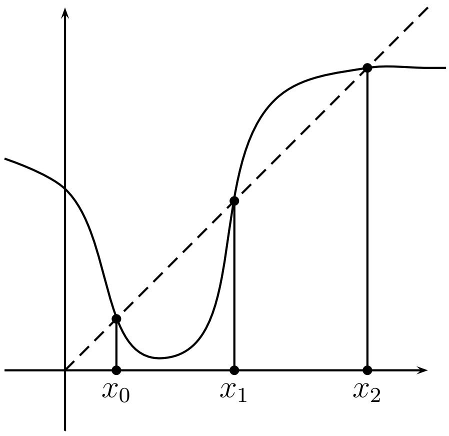


FIGURA 2. Puntos fijos de f.

Damos a continuación una herramienta que nos ayudará a encontrar puntos fijos.

Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado.

Proposición 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

a) Si $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

b) Si $f([a, b]) \supset [a, b]$, entonces f tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Demostración. a) Como $f([a, b]) \subset [a, b]$, entonces $f(a) \geq a$ y $f(b) \leq b$. Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = f(x) - x$.

La función h es continua en $[a, b]$ y $h(a) \geq 0$, $h(b) \leq 0$. Por lo tanto existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $h(x_0) = 0$. En consecuencia, $f(x_0) = x_0$.

b) Como $f([a, b]) \supset [a, b]$, entonces existen α, $\beta \in [a, b]$ tales que $f(\alpha) = a$ y $f(\beta) = b$. Notemos que $f(\alpha) \leq \alpha$ y $\beta \leq f(\beta)$. Consideramos ahora, como antes, una función auxiliar $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) = f(x) - x$. Tenemos $h(\alpha) \leq 0$ y $h(\beta) \geq 0$. Por tanto, existe $x_0 \in [\alpha, \beta]$, o existe $x_0 \in [\beta, \alpha]$, tal que $h(x_0) = x_0$ y con ello, $x_0 \in [a, b]$ y $f(x_0) = x_0$. $\square$

Sea $f : X \to Y$. Decimos que f es:

i) *Inyectiva* si para todo par de puntos en X, $x \neq y$, se tiene que $f(x) \neq f(y)$.
ii) *Suprayectiva* si para todo punto $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
iii) *Biyectiva* si f es inyectiva y suprayectiva.
iv) Un *homeomorfismo* si f es biyectiva y continua, y su inversa, $f^{-1} : Y \to X$ es continua también.

Ejercicio 1. *Sea* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$. *Demuestra que si* f *es suprayectiva, entonces* f *tiene, al menos, un punto fijo.*

Ejercicio 2. *Muestra, si es que existe, un homeomorfismo,* $f : (0, 1) \to (0, 1)$ *sin puntos fijos.*

Ejercicio 3. *Muestra, si es que existe, un homeomorfismo,* $f : [0, 1) \to [0, 1)$ *sin puntos fijos.*

Sean $f : X \to X$ y $x_0 \in X$. Decimos que x_0 es un *punto periódico de* f si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x_0) = x_0$. Al conjunto de todos los puntos periódicos de f lo denotamos con $Per(f)$.

Sea $x_0 \in Per(f)$. Decimos que x_0 tiene *periodo* k si $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : f^n(x_0) = x_0\}$.

Observación 3. *Si* x_0 *es punto fijo de* f, *entonces* $x_0 \in Per(f)$ *y* x_0 *tiene periodo* 1.

En la figura 3 se muestra la gráfica de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con un punto periódico de periodo 5. En la figura 4 se muestra lo que se conoce como el *retrato fase* de esta órbita de periodo 5.

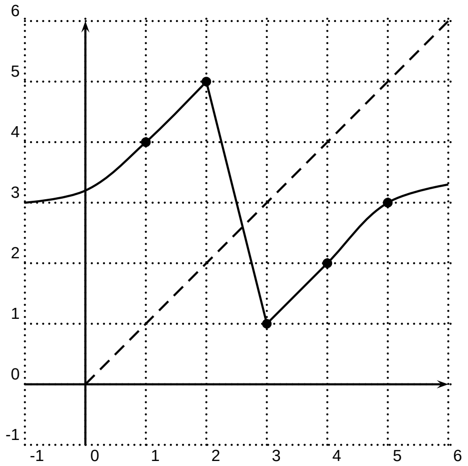


FIGURA 3. Gráfica de una $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con un punto periódico de periodo 5.

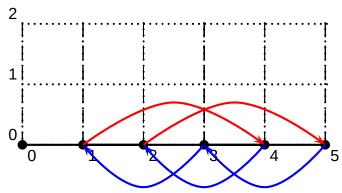


FIGURA 4. Retrato fase de la órbita.

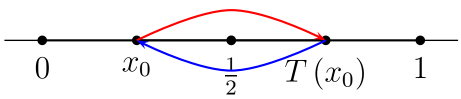
Ejercicio 4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Demuestra que si $Per(f) = \emptyset$, entonces una de las siguientes dos opciones se cumple:*

a) Para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = \infty$, o

b) para todo $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = -\infty$.

Regresemos a la función *Tienda*. Mostramos a continuación la existencia de un punto periódico de periodo 2 para T.

Recordemos que los puntos fijos de T son los puntos 0 y $\frac{2}{3}$. Observemos que $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \cap Per(f) = \emptyset$. Buscamos $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que $T(x_0) \neq x_0$ y $T^2(x_0) = x_0$. Obsérvese que si un punto x_0 cumple estas dos condiciones, entonces $T(x_0) > \frac{1}{2}$ (¿por qué?).



Como $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, entonces $T(x_0) = 2x_0$. Como $T(x_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, entonces $T^2(x_0) = 2 - 2(2x_0)$. Por tanto, $T^2(x_0) = x_0$ implica $2 - 4x_0 = x_0$, $x_0 = \frac{2}{5}$. Como $T\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$, la órbita bajo T de este punto es el siguiente conjunto:

$$o\left(\frac{2}{5}, T\right) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \ldots\right\} = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}.$$

Por lo tanto, $\frac{2}{5} \in Per(T)$ y su periodo es 2.

Ejercicio 5. *Muestra que T tiene un punto periódico de periodo 3.*

Ejercicio 6. *Si $x_0 \in Per(f)$ entonces cada punto $y \in o(x_0, f)$, es también un punto periódico de f del mismo periodo de x_0.*

2.3. Comentarios sobre el Teorema de Sharkovskii. Un intervalo en $\mathbb{R}$ es un conjunto que tiene alguna de las siguientes formas: (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$, donde a y b son dos números reales tales que $a \leq b$. Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea $f : A \to A$. Consideremos dos números n, m en $\mathbb{N}$. El teorema de Sharkovskii responde al siguiente tipo de preguntas: ¿Si f tiene puntos periódicos de periodo n, será esto suficiente para concluir que f tiene puntos periódicos de periodo m?, ¿Qué relación deben tener n y m para que una implicación de este tipo sea válida? Dado que hay una infinidad de parejas de números naturales, el camino hacia la solución de todas las posibles preguntas de este tipo se ve difícil. Lo sorprendente es que en 1965 el matemático ucraniano A. N. Sharkovskii dio una respuesta completa a este problema. En esta sección presentaremos al lector algunos resultados parciales. Éstos nos permitirán darnos una idea aproximada del camino seguido por Sharkovskii.

Proposición 4. *Sea $n \geq 2$. Si f tiene un punto periódico de periodo n, entonces f tiene un punto fijo.*

Demostración. Sea $x \in A$ tal que $x \in Per(f)$ y x tiene periodo n, $n \geq 2$. La $o(x, f)$ tiene n elementos que podemos ordenar así:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n.$$

Esto no quiere decir $f(x_1) = x_2$, sino simplemente que x_1 es el mínimo de los elementos de $o(x, f)$ y x_n es el máximo de $o(x, f)$. Ver figura 5.

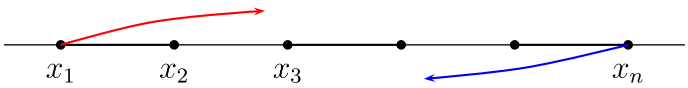


FIGURA 5. Órbita periódica de periodo $n \geq 2$.

Como n es mayor o igual a 2, $f(x_1) > x_1$ y $f(x_n) < x_n$. De aquí se sigue que f tiene un punto fijo en el intervalo $[x_1, x_n] \subset A$. □

Lema 5. *Sean A y B dos intervalos en $\mathbb{R}$, y $f : A \to B$. Sean $[a, b] \subset A$ y $[c, d] \subset B$ tales que $f([a, b]) \supset [c, d]$. Entonces existe un intervalo cerrado $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tal que $f([\alpha, \beta]) = [c, d]$.*

Demostración. Sean s, t en $[a, b]$ tales que $f(s) = c$ y $f(t) = d$. Ver figura 6.

Caso 1. Supongamos que $s < t$. Considera los siguientes puntos:

$$\alpha = \sup \{x \in [s, t] : f(x) = c\}$$

y

$$\beta = \text{ínf} \{x \in [\alpha, t] : f(x) = d\}.$$

Como f es continua, $f(\alpha) = c$ y $f(\beta) = d$. Por la forma en que fueron definidos α y β, y utilizando el teorema del valor intermedio, se tiene que si $\alpha < x < \beta$, entonces $f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$. Así el intervalo $[\alpha, \beta]$ cumple la condición deseada.

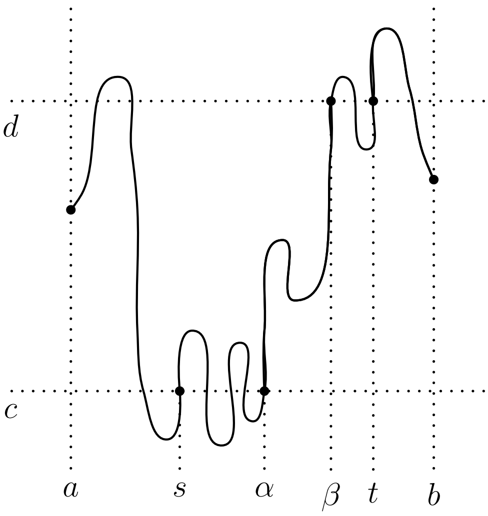


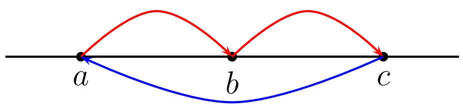
FIGURA 6. El intervalo $[\alpha, \beta]$.

Caso 2. La demostración para la desigualdad $s > t$, es análoga al caso anterior. □

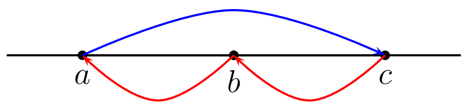
Proposición 6. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ un intervalo, y $f : A \to A$. Si f tiene un punto periódico de periodo 3, entonces f tiene puntos periódicos de todos los periodos.*

Demostración. Sea $a \in A$, $a \in Per\,(f)$, de periodo 3. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a es el mínimo de $o(a, f)$ (ver ejercicio 6).

Observemos que la órbita de a tiene dos opciones de recorrido. En el primero, $b = f\,(a)$ y $c = f^2\,(a)$; en el segundo, $c = f\,(a)$ y $b = f^2\,(a)$:



i):



ii):

Demostraremos el primer caso, con la convicción de que la demostración para el otro posible recorrido de la órbita es análoga.

La figura 7 puede ser de ayuda en lo que sigue.

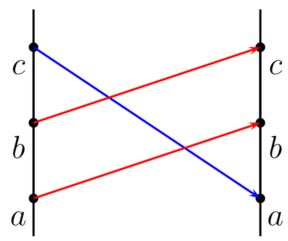


FIGURA 7. Dibujo que ayuda.

Ya sabemos que f tiene puntos periódicos de periodos 1 y 3.

Paso 1: La función f tiene puntos periódicos de periodo 2.

Demostración del paso 1. Como $f\,([b, c])$ contiene a $[a, b]$, existe un intervalo cerrado $[\alpha_1, \beta_1]$ contenido en $[b, c]$ tal que $f\,([\alpha_1, \beta_1]) = [a, b]$. Como $f\,([a, b]) \supset [b, c]$, entonces existe otro intervalo cerrado $[\alpha_2, \beta_2] \subset [a, b]$ tal que $f\,([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha_1, \beta_1]$. Así:

$$f^2\,([\alpha_2, \beta_2]) = [a, b]\,.$$

Como $[\alpha_2, \beta_2] \subset [a, b]$, entonces f^2 tiene un punto fijo en $[\alpha_2, \beta_2]$. Sea $x_0 \in [\alpha_2, \beta_2]$ tal que $f^2\,(x_0) = x_0$.

Ahora, como

$$f\,([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha_1, \beta_1] \subset [b, c]\,,$$

se tiene que $f\,(x_0) \in [b, c]$. Ya que b es de periodo 3, $f\,(x_0) \neq b$. Por lo tanto:

$$x_0 \leq \beta_2 \leq b < f\,(x_0)\,,$$

y con ello, $x_0 < f\,(x_0)$. Así, $x_0 \in Per\,(f)$ y su periodo es 2.

Paso 2: Sea $n > 3$ (fijo). Entonces f tiene un punto periódico de periodo n.

Demostración del paso 2. Análogo a lo hecho en el paso 1, existe un intervalo $[\alpha_1, \beta_1] \subset [b, c]$ tal que $f\,([\alpha_1, \beta_1]) = [a, b]$. Ahora como: $f\,([b, c])$ contiene a $[b, c]$, existe otro intervalo

$[\alpha_2, \beta_2] \subset [b, c]$ tal que $f([\alpha_2, \beta_2]) = [\alpha_1, \beta_1]$. Siguiendo este argumento varias veces podemos encontrar $n-1$ subintervalos de $[b, c]$,

$$[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], ..., [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}],$$

tales que, para $1 \leq i \leq n-2$,

$$f([\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}]) = [\alpha_i, \beta_i];$$

y tales que para cada $1 \leq i \leq n-1$,

$$f^i([\alpha_i, \beta_i]) = [a, b].$$

Finalmente, como $f([a, b]) \supset [b, c]$, existe un último intervalo cerrado $[\alpha_n, \beta_n] \subset [a, b]$, tal que $f([\alpha_n, \beta_n]) = [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}]$. Así,

$$f^n([\alpha_n, \beta_n]) = [a, b].$$

Por tanto, existe $x_0 \in [\alpha_n, \beta_n]$ tal que $f^n(x_0) = x_0$.

Obsérvese que para cada i, $1 \leq i \leq n-1$, se tiene que

$$f^i(x_0) \in [\alpha_{n-i}, \beta_{n-i}] \subset [b, c].$$

Ahora, si $x_0 = f^i(x_0)$ para alguna i, $1 \leq i \leq n-1$, entonces se tendría que $x_0 = b$, ya que $x_0 \leq b \leq f^i(x_0)$. En este caso la órbita de $x_0 = b$ tendría $n-1$ elementos en el intervalo $[b, c]$, con $n-1 \geq 3$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto para cada $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$, se tiene que $f^i(x_0) \neq x_0$. Como $f^n(x_0) = x_0$, entonces $x_0 \in Per(f)$ y tiene periodo n. □

El resultado que acabamos de demostrar es realmente muy interesante. Observe el lector que a partir de un conjunto de hipótesis muy pequeño, $f : A \to A$, continua en el intervalo A, f tiene un punto de periodo 3, obtenemos muchísima información sobre la función f: ella tiene puntos periódicos de todos los periodos posibles. Agreguemos que la demostración sólo utiliza herramientas que aprendemos en nuestros primeros cursos de cálculo diferencial e integral.

Para darnos una idea de la importancia del trabajo realizado por Sharkovskii debemos informar al lector que el resultado anterior es sólo una pequeña parte de un resultado más general obtenido por este matemático. Presentamos a continuación lo que se conoce en nuestros días como el *Teorema de Sharkovskii.*

El siguiente arreglo de los números naturales es conocido como el *orden de Sharkovskii.*

$$\begin{array}{rcl}
3 & \Rightarrow & 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow 9 \Rightarrow 11 \Rightarrow 13 \Rightarrow ... \\
2 \cdot 3 & \Rightarrow & 2 \cdot 5 \Rightarrow 2 \cdot 7 \Rightarrow ... \\
2^2 \cdot 3 & \Rightarrow & 2^2 \cdot 5 \Rightarrow 2^2 \cdot 7 \Rightarrow ... \\
2^3 \cdot 3 & \Rightarrow & 2^3 \cdot 5 \Rightarrow 2^3 \cdot 7 \Rightarrow ... \\
 & & \dots\dots\dots\dots\dots \\
 & & \cdots \Rightarrow 2^4 \Rightarrow 2^3 \Rightarrow 2^2 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1
\end{array}$$

En el primer renglón aparecen todos los números impares mayores que 1. En los siguientes renglones aparecen todos los números que se expresan como un producto de una potencia de 2 y un impar mayor que 1. En el último renglón aparecen todas las potencias de 2.

Teorema 7. *(Sharkovskii, 1964). Sean A un intervalo en $\mathbb{R}$ y sea f una función de A en A. Sean m y n en $\mathbb{N}$. Consideremos el orden de Sharkovskii. Si f tiene un punto periódico de periodo m y sucede alguna de las siguientes dos condiciones:*

i) m está en algún renglón arriba del renglón que ocupa n, o

ii) m y n están en el mismo renglón, pero m está a la izquierda de n,

entonces f también tiene un punto periódico de periodo n.

Teorema 8. *(Sharkovskii, 1964). Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Sean m y n en $\mathbb{N}$. Si m y n cumplen la condición i) o la condición ii) del teorema 7, entonces existe una función continua $f : A \to A$ tal que f sí tiene puntos periódicos de periodo n y f no tiene puntos periódicos de periodo m.*

No presentaremos en estas notas la demostración de estos teoremas. Parte de la demostración se puede consultar en el libro de R. L. Devaney: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, ver [9].

Ejercicio 7. *Considera de la función $g : [0,1] \to [0,1]$, lineal a pedazos, definida por los siguientes datos: $g(0) = \frac{1}{2}, g\left(\frac{1}{4}\right) = 1, g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ y $g(1) = 0$ (ver figura 8).*

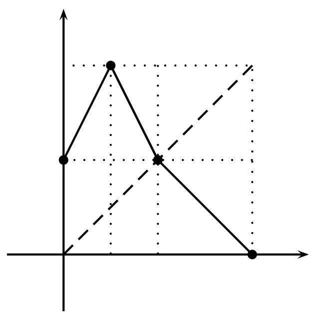


FIGURA 8. Gráfica de g.

1. *Dibuja la grafica de $g^2 = g \circ g$.*
2. *¿Tiene g un punto de periodo 3?*
3. *¿Tiene g^2 un punto de periodo 3?*
4. *¿Cuáles son todos los posibles periodos de los puntos periódicos de g?*

Ejercicio 8. *Muestra una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que sí tenga puntos periódicos de periodo 2 pero no tenga puntos fijos.*

Ejercicio 9. *Sea $n \in \mathbb{N}$ (n fijo). Muestra una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que sí tenga puntos periódicos de periodo n y no tenga puntos periódicos de periodo j, si $j \neq n$.*

Pregunta 10. *Verdadero o falso. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$. Supongamos que f es un homeomorfismo. Entonces si $x_0 \in Per(f)$, el periodo de x_0 sólo puede ser 1 ó 2.*

2.4. De regreso a la *Tienda*. Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función *Tienda*.

Por el ejercicio 5, sabemos que la *Tienda* tiene al menos un punto periódico de periodo 3. Por tanto esta función tiene puntos periódicos de todos los periodos. Como cada órbita periódica modela o representa un movimiento periódico, entonces la función *Tienda* presenta todos los movimientos periódicos posibles, sólo hay que partir de la condición inicial adecuada.

Ejercicio 11. *Para la función* Tienda, *T, encuentra un punto periódico tal que su periodo sea exáctamente* 763.

La riqueza dinámica presente en la *Tienda* no se limita a lo observado hasta ahora. El siguiente lema nos permitirá descubrir otras muy interesantes propiedades de la función $T : [0,1] \to [0,1]$.

Lema 9. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cada $\ell \in \{0,1,2,...,2^n-1\}$ se tiene que:*

$$T^n|_{\left[\frac{\ell}{2^n},\frac{\ell+1}{2^n}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^n},\frac{\ell+1}{2^n}\right] \to [0,1] \tag{1}$$

es un homeomorfismo.

Demostración. Nuestro argumento utiliza inducción matemática.

Veamos que la afirmación es cierta para $n=1$. En este caso, $\ell \in \{0,1\}$.

Es inmediato que $T : \left[0,\frac{1}{2}\right] \to [0,1]$ es homeomorfismo, ya que en este intervalo $T(x) = 2x$. De manera análoga, es inmediato que $T : \left[\frac{1}{2},1\right] \to [0,1]$ es homeomorfismo ya que en este conjunto, $T(x) = 2-2x$.

Suponemos válida la afirmación para $n=k$, y demostramos el caso $n=k+1$.

Sea $\ell \in \left\{0,1,2,...,2^{k+1}-1\right\}$. Observemos que $\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$ si $\ell \leq 2^k-1$, y $\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$ si $\ell \geq 2^k$.

Si $\ell \leq 2^k-1$, entonces la función T^{k+1} se puede expresar así:

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{\ell}{2^k},\frac{\ell+1}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Ambas funciones son homeomorfismos (la segunda de ellas, T^k, por hipótesis de inducción). Por tanto

$$T^{k+1}|_{\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right]} : \left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \to [0,1]$$

es un homeomorfismo.

Si $\ell \geq 2^k$, entonces

$$\left[\frac{\ell}{2^{k+1}},\frac{\ell+1}{2^{k+1}}\right] \xrightarrow{T} \left[\frac{2^{k+1}-\ell-1}{2^k},\frac{2^{k+1}-\ell}{2^k}\right] \xrightarrow{T^k} [0,1].$$

Es inmediato que la primera función es un homeomorfismo. Y como

$$2^k \leq \ell \leq 2^{k+1}-1,$$

entonces

$$\begin{array}{rcl} -2^k & \geq & -\ell \geq 1-2^{k+1}, \\ 2^{k+1}-2^k-1 & \geq & 2^{k+1}-\ell-1 \geq 0, \\ 2^k-1 & \geq & 2^{k+1}-\ell-1 \geq 0. \end{array}$$

Así la segunda función, gracias a la hipótesis de inducción, también es un homeomorfismo. □

De manera similar se puede demostar la siguiente proposición:

Proposición 10. *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\ell \in \{0,1,2,...,2^n - 1\}$. *Si* $x \in \left[\dfrac{\ell}{2^n}, \dfrac{\ell+1}{2^n}\right]$, *entonces existe* $\mu \in \mathbb{Z}$, μ *par, tal que*

$$T^n(x) = \mu + (-1)^\ell 2^n x.$$

Ejercicio 12. *Demuestra la proposición 10.*

Corolario 11. *Sea* (a,b), $a < b$, *un subintervalo de* $(0,1)$. *Entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $T^N(a,b) = [0,1]$.

Demostración. Como $a < b$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Se sigue que existe un valor ℓ en el conjunto $\{0,1,2,...,2^N - 1\}$ tal que $\left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}\right] \subset (a,b)$. Ahora, gracias al lema 9, tenemos que $T^N(a,b) = [0,1]$. □

Definición 12. *Sea* A *un intervalo en* $\mathbb{R}$. *Sea* $B \subset A$. *Decimos que* B *es denso en* A *si para todo subintervalo abierto de* A, *digamos* (α, β), *existe* $b \in B$ *tal que* $b \in (\alpha, \beta)$.

Corolario 13. *El conjunto* $Per\,(T)$ *es denso en* $[0,1]$.

Demostración. Sea $(a,b) \subset [0,1]$, $a < b$. Procediendo como en el corolario 11, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^N} < \frac{b-a}{2}$. Entonces existe $\ell \in \{0,1,2,...,2^n - 1\}$ tal que $\left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}\right] \subset (a,b)$.

Como $T^N\left(\left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}\right]\right) = [0,1]$, podemos aplicar la proposición 2 a la función T^N. Así concluimos que existe $x_0 \in \left[\frac{\ell}{2^N}, \frac{\ell+1}{2^N}\right] \subset (a,b)$ tal que $T^N(x_0) = x_0$. □

La demostración de la siguiente afirmación se sigue directamente de la proposición 10 y del ejercicio 12.

Corolario 14. $Per\,(T) \subset \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

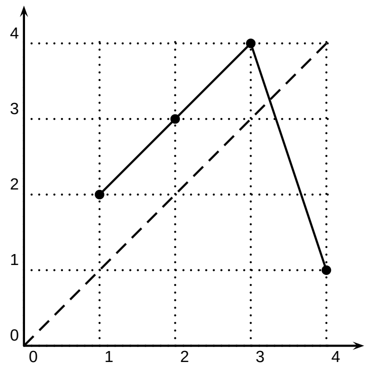
Ejercicio 13. *Muestra que* $Per\,(T) \neq \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

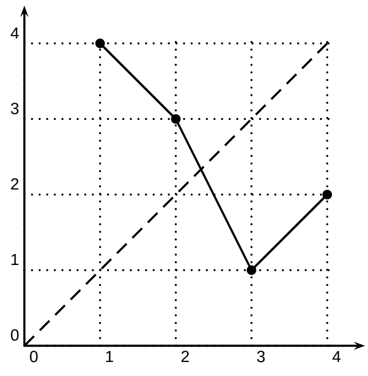
Ejercicio 14. *Demuestra que para cada* $x_0 \in [0,1]$ *se tiene que el conjunto* $\cup_{n=1}^{\infty} T^{-n}(x_0)$ *es denso en el intervalo* $[0,1]$.

Ejercicio 15. *Sean* $A = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ *y* $F : A \to A$ *la función dada por* $F(x,y) = (T(x), T(y))$. *Demuestra que* $Per(F)$ *es denso en* A.

¿Cuántas órbitas periódicas de periodo 3 *tiene* F*?*

Ejercicio 16. *Sea* $g : [0,1] \to [0,1]$ *la función definida en el ejercicio 7. Demuestra que* $Per(g)$ *es denso en* $[0,1]$.





Ejercicio 17. *El conjunto* $\{1, 2, 3, 4\}$ *es una órbita de periodo* 4 *en cada una de las dos gráficas que aparecen en la figura anterior. Una de ellas es la gráfica de una función que tiene órbitas periódicas de todos los periodos y la otra es la gráfica de una función que sólo tiene órbitas periódicas de periodos* 1, 2 *y* 4. *Identifica cuál es cuál.*

3. Transitividad topológica

Dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ definimos la *bola* de radio ε con centro en x así:

$$B_X(x,\varepsilon) = \{y \in X : d(x,y) < \varepsilon\}.$$

Si no hay confusión, respecto al espacio del que estamos hablando, escribiremos $B(x,\varepsilon)$ en lugar de $B_X(x,\varepsilon)$.

Sean $A \subset X$, y $x \in X$. Decimos que x es *punto interior* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset A$; decimos que x es *punto exterior* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(x,\varepsilon) \subset X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}$$

;

decimos que x es *punto frontera* de A si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

Al conjunto de todos los puntos interiores de A le llamamos el *interior* de A, al conjunto de todos los puntos exteriores de A le llamamos el *exterior* de A, y al conjunto de todos los puntos frontera de A le llamamos la *frontera* de A. Denotamos estos conjuntos por $int(A)$, $ext(A)$ y $fr(A)$ respectivamente.

Decimos que A es un conjunto *abierto* en X si todo punto $a \in A$ es punto interior de A, y decimos que A es *cerrado* en X si el conjunto $X \setminus A$ es abierto.

Decimos que x es *punto de adherencia* de A si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset;$$

y decimos que x es *punto de acumulación* de A si para toda $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Al conjunto de todos los puntos de adherencia de A le llamamos la *cerradura*, o *clausura*, de A, y lo denotamos con $cl(A)$ o con $\overline{A}$.

Decimos que $x \in A$ es *punto aislado* de A si existe $\varepsilon > 0$ tal que $(B(x,\varepsilon) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$

Observación 15. *Los conjuntos $\emptyset$ y X son abiertos y cerrados a la vez. Para cada $A \subset X$, los conjuntos $fr(A)$ y $cl(A)$ son siempre cerrados. Además A es cerrado si y sólo si $A = cl(A)$.*

Definición 16. *Sea $f : X \to X$. Decimos que f es* topologicamente transitiva en X *si para todo par de conjuntos abiertos no vacíos de X, U y V, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Hemos interpretado, a lo largo de estas notas, a la función $f : X \to X$ como la que define el movimiento: Un objeto que está en la posición $x \in X$, estará, una unidad de tiempo después, en la posición $f(x)$, y así sucesivamente. Bajo esta óptica una función transitiva da vida a una dinámica muy interesante. Hablando de manera intuitiva, una función que es transitiva *mueve* puntos de cualquier región U de X a cualquier otra región V de X. No lo hace de manera inmediata, es decir, no necesariamente a la primera aplicación de f hay puntos de U que van a dar a V. Pero lo que sí es seguro es que aplicando f una cantidad suficiente de veces sí habrá puntos de U que *viajen* a V. Como esto es válido para cualesquiera dos conjuntos abiertos de X, entonces f está *revolviendo*, *mezclando*, moviendo a todos los puntos de X.

Proposición 17. *La función $T : [0,1] \to [0,1]$ es transitiva en $[0,1]$.*

Demostración. Sean U y V dos subconjuntos de $[0,1]$ abiertos y no vacíos. Entonces existe un intervalo abierto (a,b), $a<b$, contenido en U y, por el corolario 11, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N(a,b)=[0,1]$. De aquí se sigue que $T^N(U)\cap V \neq \emptyset$. □

Ejercicio 18. *Recordemos la función $g:[0,1]\to[0,1]$ definida en el ejercicio 7. Demuestra que g es transitiva en $[0,1]$.*

Ejercicio 19. *Sea $f:[0,1]\to[0,1]$ una función transitiva en $[0,1]$. Demuestra lo siguiente:*
i) *f es suprayectiva,*
ii) *Existe x_0 en el intervalo abierto $(0,1)$ tal que $f(x_0)=x_0$.*

Definición 18. *Sea X un espacio métrico y sea $D\subset X$. Decimos que D es* denso *en X si para todo conjunto abierto U de X, $U\neq\emptyset$, se tiene que $U\cap D\neq\emptyset$.*

Ejercicio 20. *Demuestra que si X es un intervalo en $\mathbb{R}$, entonces la definición 12 es equivalente a la definición 18.*

Ejercicio 21. *Sean X un espacio métrico, $f:X\to X$ una función transitiva en X y $U\subset X$ un conjunto abierto no vacío. Demuestra que la siguiente unión infinita $\bigcup\limits_{n+1}^{\infty} f^{-n}(U)$ es un conjunto abierto y denso en X.*

Ejercicio 22. *Sean X un espacio métrico y $f:X\to X$ una función transitiva en X. Sea N un número natural fijo. Considera, en X, N conjuntos abiertos no vacíos, $U_1,\ldots,U_N$, que sean ajenos por parejas. Demuestra que existe un punto x_0 en X tal que su órbita visita todos estos conjuntos.*

Sean A un subconjunto de X y ε un número positivo. Decimos que A es un conjunto $\varepsilon-$*denso* en X si para todo $x\in X$, existe $a\in A$ tal que $d(x,a)<\varepsilon$.

Ejercicio 23. *Sean X un espacio métrico, $f:X\to X$ una función transitiva en X y $\varepsilon>0$. Demuestra que existe $x_0\in X$ tal que la $o(x_0,f)$ es un conjunto $\varepsilon-$denso en X.*

Ejercicio 24. *Sean X un espacio métrico y $f:X\to X$ una función transitiva en X. Sea U y W dos conjuntos abiertos en X y no vacíos. Demuestra el conjunto de puntos $x\in X$ tales que su órbita visita estos dos conjuntos es denso en X.*

De alguna manera los ejercicios 22 y 23 nos dicen que la condición de transitividad implica la existencia de puntos en X cuya órbita bajo f recorre casi todo el espacio. A partir de este hecho, suena interesante discutir la posible relación entre el concepto de transitividad y la existencia de al menos un punto cuya órbita forme un conjunto denso en X. Demostrar que para ciertos espacios X la transitividad sí implica la existencia de una órbita densa es la meta principal de esta sección.

Pero primero necesitamos recordar algunas propiedades presentes en los espacios métricos en los que estamos trabajando.

3.1. Sucesiones, cubiertas abiertas y espacios completos. Una *sucesión* en X es una función de $\mathbb{N}$ en X, $a:\mathbb{N}\to X$. Es común denotar a los elementos de la imagen de a, $a(n)$, con a_n, y referirse a la sucesión usando los símbolos: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, o simplemente $\{a_n\}$ y (a_n).

Decimos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *convergente* a $a_0 \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a_0, \text{ o } (a_n) \to a_0,$$

si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(a_n, a_0) < \varepsilon$.

Es tradicional presentar la definición de la continuidad de una función $f : X \to Y$, en un punto a de X, en términos de bolas de radio ε, con centro en $f(a)$, y de radio δ, con centro en a. En esta notas haremos también uso de la siguiente conocida equivalencia:

Proposición 19. *Sean $f : (X, d) \to (Y, m)$ y $a \in X$. La función f es continua en a si y sólo si $(x_n)_n \to a$ implica $(f(x_n))_n \to f(a)$, para cada sucesión $(x_n)_n$ en X.*

Ejercicio 25. *Sean $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en X convergentes a a_0 y b_0 respectivamente. Demuestra que*

$$\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(a_0, b_0).$$

Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Decimos que $\{a_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces $d(a_{n,}a_m) < \varepsilon$.

Ejercicio 26. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces es de Cauchy.*

Decimos que un espacio métrico X es *completo* si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a un punto de X.

Ejemplos de espacios métricos completos son los siguientes: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, el intervalo $[0, 1]$, los números complejos $\mathbb{C}$, la circunferencia $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Ejemplos de espacios métricos que no son completos son los siguientes: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, el intervalo abierto $(0, 1)$, $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\mathbb{C} \setminus S^1$.

Los conceptos de compacidad y completez están muy relacionados. Recordemos la definición de conjunto compacto.

Una *cubierta abierta* de X es una colección de conjuntos abiertos cuya unión es X. Si $Y \subset X$, una cubierta abierta de Y es una colección de conjuntos abiertos de X cuya unión contiene a Y.

Ejemplo 20. *La colecciones:*

$$\alpha = \left\{ \left[0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right] \right\}, \text{ y}$$

$$\beta = \left\{ \left(q - \frac{1}{4}, q + \frac{1}{4}\right) \cap [0, 1] : q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \right\},$$

son cubiertas abiertas de $X = [0, 1]$.

Sean α y β dos cubiertas abiertas de X. Decimos que β es una *subcubierta* de α si todo elemento de β es elemento de α, es decir, si $\beta \subset \alpha$.

Decimos que el espacio X es *compacto* si toda cubierta abierta de X tiene una subcubierta con una cantidad finita de elementos.

Ejercicio 27. *Sean A y B dos subconjuntos de X. Supongamos que ambos son compactos. Demuestra que tanto $A \cup B$ como $A \cap B$ son conjuntos compactos.*

Ejercicio 28. *Sea (X,d) un espacio métrico, entonces:*
(i) La unión finita de compactos es un conjunto compacto;
(ii) La intersección arbitraria de compactos es un conjunto compacto.

Ejercicio 29. *Sean A y B dos subconjuntos de X. Supongamos que ambos son compactos y no vacíos. Demuestra que si $A \cap B = \emptyset$, entonces existen dos puntos $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$ tales que para toda pareja de puntos $a \in A$ y $b \in B$ se tiene que $d(a,b) \geq d(a_0,b_0)$.* Sugerencia. *Define $\delta = \text{ínf}\,\{d(a,b) : a \in A, b \in B\}$ y observa que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $a_n \in A$ y $b_n \in B$ tales que $\delta \leq d(a_n,b_n) < \delta + \frac{1}{n}$.*

Ejercicio 30. *Sean X un espacio compacto y $Y \subset X$ un conjunto cerrado. Demuestra que Y es compacto.*

Sean $n \in \mathbb{N}$ y sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que X es *acotado* si existe $M > 0$ tal que $X \subset B_{\mathbb{R}^n}(\overline{0}, M)$, donde $\overline{0} = (0,0,\ldots,0)$ es el origen en R^n.

La afirmación contenida en el siguiente teorema es un resultado muy conocido. Su demostración se puede consultar en [24].

Teorema 21. *Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces X es compacto si y sólo si X es cerrado y acotado.*

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X, decimos que $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una *subsucesión* de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ si se cumplen las siguientes dos condiciones:
i) para todo j, existe n_j tal que $b_j = a_{n_j}$, y
ii) si $j < k$, entonces $n_j < n_k$.

Ejercicio 31. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en X. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a $a_0 \in X$, entonces toda subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es también convergente a a_0.*

Ejercicio 32. *Sean X un espacio y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en él. Sea x_0 un punto en X tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la cardinalidad del conjunto*

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n \in B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \right\}$$

es infinita. Demuestra que existe una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es convergente a x_0.

Ejercicio 33. *Sean X un espacio y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en él. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy y que tiene una subsucesión convergente a $a_0 \in X$. Demuestra que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a a_0 también.*

Proposición 22. *Toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio métrico y compacto X, tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sean X un espacio métrico compacto y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en él.

Caso 1. Existe x_0 en X tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la cardinalidad del conjunto

$$A_k = \left\{ n \in \mathbb{N} : a_n \in B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \right\}$$

es infinita. Entonces, gracias al ejercicio 32, existe una subsucesión de $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es convergente a x_0.

Caso 2. Supongamos ahora que para todo $x \in X$ existe un radio $\delta_x > 0$ tal que la cardinalidad del conjunto

$$A(x, \delta_x) = \{n \in \mathbb{N} : a_n \in B(x, \delta_x)\}$$

es finita.

Es inmediato que la colección $\{B(x, \delta_x) : x \in X\}$ forma una cubierta abierta de X. Como X es compacto existen $k \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ en X, y $\delta_{x_1} > 0, \delta_{x_2} > 0, \ldots, \delta_{x_k} > 0$, tales que

$$X = \cup_{j=1}^{k} B\left(x_j, \delta_{x_j}\right).$$

De aquí se sigue que $\mathbb{N} = \cup_{j=1}^{k} \left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\left(x_j, \delta_{x_j}\right)\right\}$. Pero esto es una contradicción ya que la cardinalidad de cada conjunto $\left\{n \in \mathbb{N} : a_n \in B\left(x_j, \delta_{x_j}\right)\right\}$ es finita. Por lo tanto este segundo caso no es posible. □

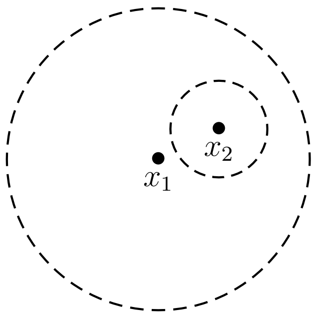
Corolario 23. *Todo espacio métrico y compacto X es completo.*

Demostración. Sean X un espacio métrico y compacto, y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de Cauchy. Por la proposición anterior la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos a x_0. Por el ejercicio 33 la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ también converge al mismo punto. □

El siguiente teorema es conocido como el *Teorema de Baire*. La demostración que presentamos se basa en la que ofrece H. L. Royden en el libro: *Real Analysis*, ver [21].

Teorema 24. *Sea X un espacio metrico completo. Consideremos una colección $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos no vacíos, abiertos y densos en X. Entonces: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea $x_1 \in A_1$ y sea $r_1 > 0$ tal que $S_1 = B(x_1, r_1) \subset A_1$.



Como A_2 es denso en X, entonces existe $x_2 \in A_2 \cap S_1$. Como $A_2 \cap S_1$ es abierto, existe r_2,

$$0 < r_2 < \frac{1}{2}\left(r_1 - d(x_1, x_2)\right) \leq \frac{r_1}{2},$$

tal que $S_2 = B(x_2, r_2) \subset Cl(S_2) \subset A_2 \cap S_1$.

Como A_3 es denso en X, existen $x_3 \in A_3 \cap S_2$, y r_3,

$$0 < r_3 < \frac{1}{2}\left(r_2 - d(x_2, x_3)\right) \leq \frac{r_2}{2},$$

tales que $S_3 = B(x_3, r_3) \subset Cl(S_3) \subset A_3 \cap S_2$.

Siguiendo este procedimiento obtenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, una colección de conjuntos abiertos $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, y una sucesión de números positivos $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que las siguientes condiciones se cumplen:

$$0 < r_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} r_1,\ x_n \in S_n$$

y

$$Cl\left(S_{n+1}\right) \subset A_{n+1} \cap S_n \subset S_n \subset Cl\left(S_n\right).$$

Sea $N \in \mathbb{N}$. Observemos que si n y m son mayores o iguales a N, entonces $x_n, x_m \in S_N$. Por lo tanto, $d\left(x_n, x_m\right) \leq 2r_N$. Así la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy (ya que $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$).

Sea $x_0 \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$, fijo. Observemos que para toda $n > N$ se tiene que $x_n \in S_{N+1}$. Esto implica que $x_0 \in Cl\left(S_{N+1}\right) \subset S_N \subset A_N$.

Por lo tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in A_n$, es decir, $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. □

Sea $B \subset X$. Decimos que B es *denso en ninguna parte* si $int\left(Cl\left(B\right)\right) = \emptyset$.

Corolario 25. *Sea X un espacio métrico completo y sea $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección numerable de conjuntos, en X, densos en ninguna parte. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \neq X$.*

Demostración. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $int\left(Cl\left(B_n\right)\right) = \emptyset$, entonces los conjuntos $A_n = X \setminus Cl\left(B_n\right)$ forman una colección de conjuntos abiertos y densos en X.

Por el teorema 24, existe $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. De aquí se sigue que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \notin B_n$. Por tanto $x_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. □

Ejercicio 34. *Demuestra que en el intervalo unitario $[0,1]$ hay al menos un número irracional. Sugerencia: Sea $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. El conjunto $\{q\}$ es denso en ninguna parte.*

Ejercicio 35. *Verdadero o falso. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos abiertos y densos en $[0,1]$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto no numerable.*

Ejercicio 36. *Verdadero o falso. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una colección de conjuntos abiertos y densos en $[0,1]$. Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ es un conjunto denso en $[0,1]$.*

Ejercicio 37. *Dar una colección $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de abiertos y densos en $[0,1]$ tales que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ no sea abierto.*

Ejercicio 38. *El intervalo $[0,1]$ no es numerable.*

Decimos que una función $f : X \to X$ es una *contracción* si existe un valor, $0 \leq r < 1$, tal que para toda pareja de puntos, x, y, en X se tiene que $d\left(f(x), f(y)\right) \leq rd(x,y)$.

El siguiente resultado es conocido y es muy importante. La demostración se puede consultar el el libro de H. L. Royden (ver [21]).

Teorema 26. *Sea X un espacio métrico completo. Si $f : X \to X$ es una contracción, entonces f tiene un único punto fijo, digamos x_0, tal que para todo punto $x \in X$ se tiene que* $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

Ejercicio 39. *Muestra una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para toda pareja de puntos x, y en $\mathbb{R}$, $x \neq y$, se tenga que $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, y f no tenga puntos fijos.*

Ejercicio 40. *Muestra un espacio métrico X y una contracción $f : X \to X$ tal que f no tenga puntos fijos en X.*

3.2. Las órbitas densas sí existen. La siguiente afirmación relaciona la transitividad topológica con la existencia de órbitas densas en un sistema dinámico discreto dado.

Teorema 27. *Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \to X$ una función transitiva en X. Entonces existe $x_0 \in X$ tal que la $o(x_0, f)$ es densa en X.*

Demostración. Como X es compacto, dado $\varepsilon_1 = 1$, existe una cantidad finita de puntos $x_{11}, x_{21}, ..., x_{n_1 1}$ en X, y una colección finita de bolas abiertas, tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_1} B(x_{j1}, 1).$$

De hecho, para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, existe una cantidad finita de puntos $x_{1k}, x_{2k}, ..., x_{n_k k}$, y sus correspondientes bolas, tales que:

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right).$$

Sea $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ la colección formada por todas estas bolas abiertas,

$$U_1 = B(x_{11}, 1), U_2 = B(x_{21}, 1), \ldots, U_{n_1} = B(x_{n_1 1}, 1), U_{n_1+1} = B\left(x_{12}, \frac{1}{2}\right), \ldots$$

Por cada $i \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto:

$$A_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} f^{-m}(U_i).$$

Observemos que cada A_i es un conjunto abierto y denso en X (ver ejercicio 21).

Entonces, por el Teorema de Baire, se tiene que:

$$A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset.$$

Sea $x_0 \in A$. Afirmamos que $o(x_0, f)$ es densa en X.

Sea $U \subset X$ un conjunto abierto y distinto del vacío. Sean $y_0 \in U$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que $B(y_0, \varepsilon_0) \subset U$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Observemos que en la colección $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ una de las bolas de radio $\frac{1}{k}$ contiene a y_0, por lo tanto existe $1 \leq j \leq n_k$ tal que:

$$y_0 \in B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_0) \subset U.$$

Como $x_0 \in A$, entonces $x_0 \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} f^{-m}\left(B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right)\right)$.

Por lo tanto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$f^n(x_0) \in B\left(x_{jk}, \frac{1}{k}\right) \subset U.$$

Es decir, la $o(x_0, f)$ tiene un elemento en U y, por lo tanto, ella forma un conjunto denso en X. □

Si el espacio X no es completo, entonces la transitividad de $f : X \to X$ no implica la existencia de una órbita densa. Convencer al lector que esta afirmación es cierta es la meta del siguiente ejercicio.

Ejercicio 41. *Sea $T : [0,1] \to [0,1]$ la función* Tienda.

a) Demuestra que si $0 \leq a < b \leq 1$ y $0 \leq c < d \leq 1$, entonces existen $x_0 \in Per(T)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $a < x_0 < b$ y $c < T^n(x_0) < d$.

b) Sean $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ y $f : X \to X$ dada por $f(x) = T(x)$ para cada $x \in X$. Demuestra que f es transitiva en X y que f no tiene órbitas densas.

Ejercicio 42. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transitiva en $\mathbb{R}$. Demuestra que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $o(x_0, f)$ es densa en $\mathbb{R}$.*

Ejercicio 43. *Sea $A = \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Sea $f : A \to A$ dada por $f(0) = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$.*

a) Muestra una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continua en $\mathbb{R}$, tal que para todo $x \in A$, se tenga que $F(x) = f(x)$.

b) Demuestra que existe $x_0 \in A$ tal que la $o(x_0, f)$ es densa en A.

c) ¿Es f topológicamente transitiva en A?

Ejercicio 44. *Sea X un espacio métrico tal que todos sus elementos son puntos de acumulación. Sea $f : X \to X$. Demuestra lo siguiente:*

a) Sean $A \subset X$, y $a \in A$. Si A es denso en X, entonces $B = A \setminus \{a\}$ es denso en X.

b) Sea $x_0 \in X$ tal que $o(x_0, f)$ es densa en X. Entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, fijo, la órbita $o\left(f^k(x_0), f\right)$ es densa en X.

c) Si existe $x_0 \in X$ tal que $o(x_0, f)$ es densa en X, entonces f es transitiva en X.

d) Si f tiene una órbita densa, entonces el conjunto de puntos con órbita densa bajo f forma un conjunto denso en X.

Ejercicio 45. *Sean X un espacio de cardinalidad infinita y f una función de X en X. Sea $x_0 \in X$ tal que la $o(x_0, f)$ forma un conjunto denso en X. Demuestra que la cardinalidad de $o(x_0, f)$ también es infinita.*

Proposición 28. *Sea* $T : [0,1] \to [0,1]$ *la función* Tienda. *Sea* $x_0 \in [0,1]$ *tal que la* $o\,(x_0, T)$ *es un conjunto denso en* $[0,1]$. *Entonces* $x_0 \notin \mathbb{Q}$.

Demostración. Sea x_0 tal que su órbita bajo T es densa en $[0,1]$. Si $x_0 \in \mathbb{Q}$ y $x_0 \neq 0$, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $x_0 = \frac{p}{q}$, $p \leq q$. Consideremos el conjunto

$$A = \left\{0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \frac{3}{q}, ..., \frac{q-1}{q}, 1\right\}.$$

Tenemos que $x_0 \in A$, y como $T\,(A) \subset A$, la cardinalidad de la $o\,(x_{0,}T)$ es finita, lo cual es una contradicción (ver ejercicio 45). Por lo tanto, $x_0 \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Quedaría ahora la pregunta de si todo punto $x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$ tiene órbita densa en $[0,1]$ bajo la función T. La respuesta es: no. Pero necesitamos más herramientas para convencer al lector de que nuestra respuesta es cierta.

4. La definición de caos según R. L. Devaney

Sea $f : X \to X$, y sea $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Decimos que x_0 es un *punto fijo atractor* si existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U$, $f(U) \subset U$, y para toda $x \in U$ se tiene que: $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$.

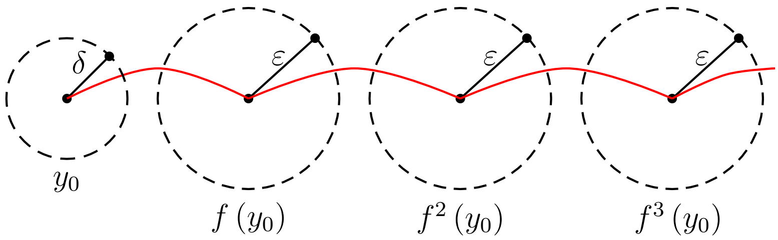
Decimos que x_0 es un *punto fijo repulsor* si existe un conjunto abierto U tal que $x_0 \in U$ y para cada $x \in U$, $x \neq x_0$, existe $n \in \mathbb{N}$, $n = n(x)$, tal que $f^n(x) \notin U$.

Ejercicio 46. *Los puntos fijos de la función* Tienda, 0 *y* $\frac{2}{3}$, *son ambos repulsores.*

Decimos que el punto fijo x_0 es *estable* (o tiene *órbita estable*) si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in B(x_0, \delta)$, entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(f^n(x), x_0) < \varepsilon$.

La siguiente es una definición más general.

Decimos que $y_0 \in X$ tiene *órbita estable* si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que para toda $x \in B(y_0, \delta)$ y para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(f^n(x), f^n(y_0)) < \varepsilon$.



Las órbitas estables son, en cierto sentido, fáciles de seguir con un error pequeño. Supongamos que la órbita de y_0 es estable. Si queremos seguir la órbita de y_0 con un error menor que un valor positivo ε, entonces tomemos la condición inicial x con un error menor que $\delta > 0$. Es decir, tomemos x tal que $d(x, y_0) < \delta$ y sigamos la $o(x, f)$. La estabilidad de la órbita de y_0 nos asegura que dada cualquier ε positiva, sí podemos encontrar la δ positiva que cumpla la condición.

Observación 29. *Si la órbita de* $x_0 \in X$ *no es estable, entonces existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $\delta > 0$, *podemos encontrar un punto* $y \in B(x_0, \delta)$ *y un número natural* n, *que depende de* y, *tales que* $d(f^n(x_0), f^n(y)) \geq \varepsilon_0$.

Ejercicio 47. *Sea* $f : A \to A$, *donde* $A \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo. Sea* $x_0 \in A$. *Supongamos que* f *es derivable en* x_0, *y que* $f(x_0) = x_0$.

Demuestra lo siguiente:

a) Si $|f'(x_0)| < 1$, *entonces* x_0 *es un punto fijo atractor.*

b) Si $|f'(x_0)| > 1$, *entonces* x_0 *es un punto fijo repulsor.*

c) En el caso a), la órbita de x_0 *es estable. En el caso b), la órbita de* x_0 *no es estable.*

Ejercicio 48. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *dada por* $f(x) = x^2$. *Encuentra todos los puntos con órbita estable bajo* f.

Observación 30. *Los puntos fijos de la función* Tienda, 0 *y* $\frac{2}{3}$, *son ambos puntos fijos no estables.*

Ejercicio 49. *Demuestra que la órbita de* $x_0 = \frac{1}{2}$ *bajo* T *no es estable.*

Ejercicio 50. *Verdadero o falso. Ninguna órbita bajo* T *es estable.*

En términos coloquiales podríamos decir que un sistema dinámico discreto, $f : X \to X$ donde todas sus órbitas son estables es un sistema que se *comporta muy bien*. A pesar de que podríamos, al escoger la condición inicial x_0, tener un pequeño error y tomar y_0, las órbitas de estos dos puntos no se separarían demasiado. Por otro lado, la presencia de algunas o muchas órbitas no estables provocaría, si no escogemos de manera exacta la condición inicial, muchos problemas y haría que el comportamiento del sistema, a la larga, fuera *impredecible* o *caótico*.

La siguiente definición la podríamos entender como una *no estabilidad* que abarca a todas las órbitas por igual.

Definición 31. *Decimos que $f : X \to X$ es* sensible a las condiciones iniciales *si existe un valor positivo ε_0, fijo, tal que para toda $x \in X$, y para toda $\delta > 0$, existen $y \in B(x, \delta)$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que:*

$$d(f^n(x), f^n(y)) \geq \varepsilon_0.$$

Una función f sensible a las condiciones iniciales no sólo nos dice que todas sus órbitas son no estables. Hay además una suerte de uniformidad en este fenómeno: La $\varepsilon_0 > 0$ para la cual falla la estabilidad es la misma para todas las órbitas.

Proposición 32. *La función $T : [0,1] \to [0,1]$ es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Sea $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Tomemos $x \in [0,1]$ y $\delta > 0$. Por el corolario 11, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n((x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]) = [0,1].$$

Por lo tanto existen en el intervalo $(x-\delta, x+\delta) \cap [0,1]$ dos puntos, digamos y_1 y y_2, tales que $T^n(y_1) = 0$, $T^n(y_2) = 1$. De aquí que:

$$|T^n(x) - T^n(y_1)| \geq \frac{1}{2}, \text{ ó } |T^n(x) - T^n(y_2)| \geq \frac{1}{2}.$$

$\square$

La siguiente es la definición de *caos* dada por R. L. Devaney en 1985 (ver [9]).

Definición 33. *Decimos que $f : X \to X$ es una* función caótica*, o genera un* sistema dinámico caótico*, si se cumplen las siguientes tres condiciones:*

a) El conjunto $Per(f)$ es denso en X,
c) f es transitiva en X, y
d) f es sensible a las condiciones iniciales en X.

Proposición 34. *La función $T : [0,1] \to [0,1]$ es caótica en $[0,1]$.*

Demostración. Se sigue de lo hecho en el corolario 13 y en las proposiciones 17 y 32. $\square$

A continuación recordamos algunos resultados importantes relacionados con los conceptos que hasta ahora hemos visto. Si bien no damos las demostraciones correspondientes, sí ofrecemos a los lectores las referencias necesarias.

Proposición 35. *Sea $f : X \to X$ donde X es un conjunto sin puntos aislados. Si f es transitiva en X y el conjunto $Per(f)$ es denso en X, entonces f es sensible a las condiciones iniciales en X.*

Demostración. Ver el artículo *On Devaney's Definition of Chaos* [5]. $\square$

Proposición 36. *Sea A un intervalo en $\mathbb{R}$. Sea $f : A \to A$ una función transitiva en A. Entonces $Per\,(f)$ es un conjunto denso en A.*

Demostración. Ver el artículo *On Intervals, Transitivity = Chaos*, [25]. $\square$

Observación 37. *De las dos proposiciones anteriores se sigue que si A es un intervalo en la recta real $\mathbb{R}$, y $f : A \to A$ es una función transitiva en A, entonces f es caótica en A.*

Proposición 38. *Sea $A = [a, b]$ un intervalo compacto en $\mathbb{R}$. Sea $f : A \to A$ sensible a las condiciones iniciales en A. Entonces existen $B \subset A$, conjunto cerrado con $int\,(B) \neq \emptyset$, y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f^N\,(B) = B$ y f^N, restringida a B, es caótica en B.*

Demostración. Ver el artículo *On Intervals, Sensitivity implies chaos*, [15]. $\square$

5. El espacio $(\boldsymbol{\mathcal{H}}(X), \boldsymbol{h})$: el espacio donde viven los fractales

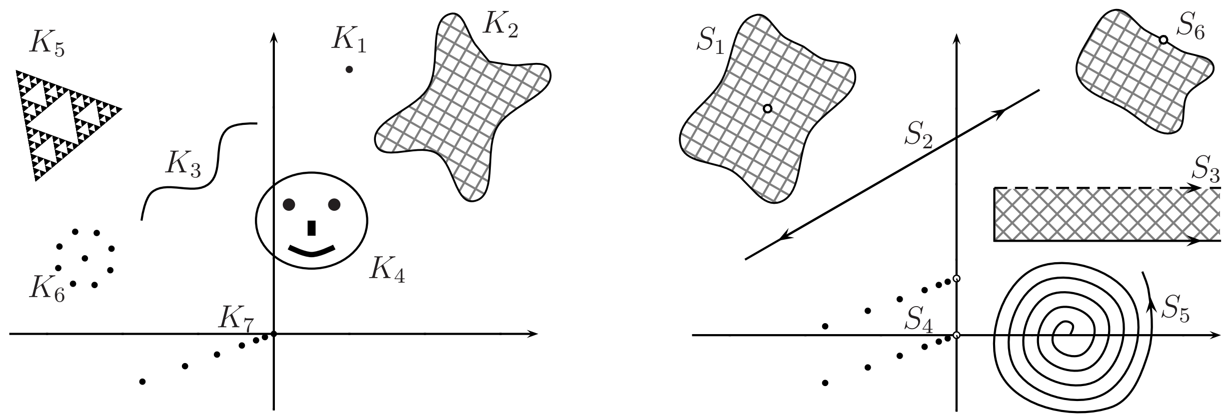
En esta sección nos dedicaremos al estudio de un espacio métrico particular el cual ha sido denominado por M. Barnsley (ver [6]) como el espacio donde "viven los fractales".

5.1. El conjunto $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ y la métrica de Hausdorff.

Definición 39. *Sea (X, d) un espacio métrico. Notemos $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ la familia de todos los subconjuntos compactos no vacíos de X, es decir:*

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(X) := \{K \subseteq X : K \text{ es compacto, } K \neq \emptyset\}.$$

Ejemplo 40. *Consideremos $\mathbb{R}^2$ con la métrica usual. Los conjuntos K_1 a K_7 que se muestran en la Figura 9(a) pertenecen a $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$, mientras que los conjuntos S_1 a S_6 **no** pertenecen a $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$ (ver Figura 9(b)).*



(a) Elementos de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$ *(b) Elementos que **no** están en $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$*

Figura 9

Se quiere ahora definir una métrica en el conjunto $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Observe que los "puntos" o elementos de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ no son sencillos o "elementales" en cuanto cada elemento es a su vez un conjunto, más exactamente un subconjunto compacto del espacio métrico X. De esta manera, para definir una métrica en el conjunto $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ procedemos por etapas.

Definición 41 (distancia de un punto a un compacto)**.** *Sean (X, d) espacio métrico, $a \in X$ y $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Se define $\hat{d}(a, K)$ por:*

$$\hat{d}(a, K) := \min\{d(a, x) : x \in K\}. \qquad \textit{(Ver Figura 10).}$$

Proposición 42. *El mínimo de la definición anterior siempre existe.*

Demostración. Sea $f : K \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := d(a, x)$, para todo $x \in K$. Veamos que f es continua.

Sea $\varepsilon > 0$. Observemos que: $-d(x, y) \leq d(x, a) - d(y, a) \leq d(x, y)$, por tanto:

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

De esta manera basta tomar $\delta \leq \varepsilon$ para tener la continuidad de f.

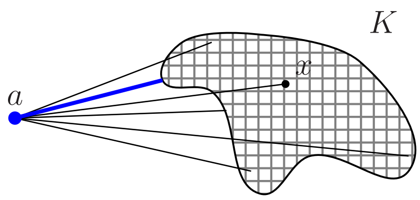


FIGURA 10. $\hat{d}(a, K)$

Ahora consideremos el conjunto $S := \{d(a,x) : x \in K\}$ $(= \{f(x) : x \in K\})$.

Claramente $S \subseteq \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ (pues $K \neq \emptyset$) y S es acotado inferiormente. Por el axioma de completez de $\mathbb{R}$, existe $P = \text{ínf}\, S$. Como P es la máxima cota inferior de S, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in K$, tal que $f(y_n) < P + \dfrac{1}{n}$ y se tiene:

$$-\frac{1}{n} < 0 \leq f(y_n) - P < \frac{1}{n},$$

por lo tanto $|f(y_n) - P| < \dfrac{1}{n}$. De lo cual se deduce que

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = P. \tag{2}$$

Como K es compacto, existe $(y_{k_n})_n$ subsucesión de $(y_n)_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = \hat{y}$, con $\hat{y} \in K$. Tenemos: $f\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n}\right) = f(\hat{y})$ y puesto que f es continua, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_{k_n}) = f(\hat{y})$. Pero $(f(y_{k_n}))_n$ es una subsucesión de $(f(y_n))_n$. Entonces, utilizando el ejercicio 31 y teniendo en cuenta (2) se concluye que $P = f(\hat{y})$. De modo que P es en realidad el mínimo de S, como se quería ver. □

Definición 43 (distancia de un compacto a otro compacto). *Sean* (X, d) *espacio métrico y* $A, B \in \mathcal{H}(X)$. *Se define* $\tilde{d}(A; B)$ *por:*

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A, B) &:= \text{máx}\left\{\hat{d}(a, B) : a \in A\right\} \\ &:= \text{máx}\{\text{mín}\{d(a,b) : b \in B\} : a \in A\}. \end{aligned} \qquad \textit{(Ver Figura 11).}$$

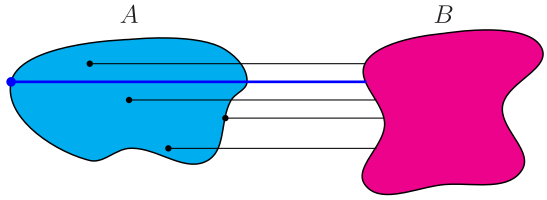


FIGURA 11. $\tilde{d}(A, B)$

Es de aclarar que $\tilde{d}$ no es métrica, ya que en general, no se cumple que $\tilde{d}(A, B) = \tilde{d}(B, A)$, es decir la propiedad de simetría, lo que se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 44.

1. *Considere en* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ *los siguientes dos conjuntos* $A = [0,1] \times [0,1]$ *y* $B = [1,7] \times [0,8]$. *Al calcular se obtiene que*
   - $\tilde{d}([0,1] \times [0,1], [1,7] \times [0,8]) = 1$.
   - $\tilde{d}([1,7] \times [0,8], [0,1] \times [0,1]) = \sqrt{85}$.

   Claramente $\tilde{d}(A,B) \neq \tilde{d}(B,A)$. *Ver figura 12.*
2. *Considere ahora a* $\mathbb{R}$*, con la métrica usual. Entonces*
$$\tilde{d}([0,1],[0,2]) = 0 \neq 1 = \tilde{d}([0,2],[0,1]).$$
   Ver figura 13.

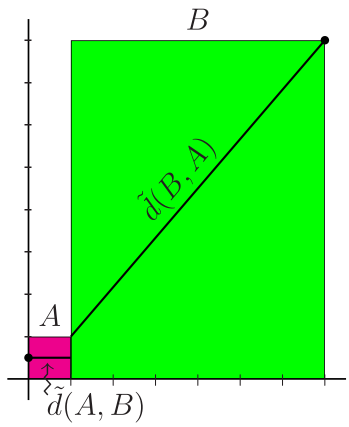


Figura 12. $\tilde{d}(A,B) \neq \tilde{d}(B,A)$

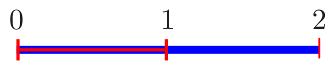


Figura 13. $\tilde{d}(A,B) \neq \tilde{d}(B,A)$

Para que la Definición 43 quede bien establecida, tenemos que demostrar la siguiente proposición.

Proposición 45. *El máximo de la Definición 43 siempre existe.*

Demostración. Definamos $f : A \to \mathbb{R}$ por: $f(x) := \hat{d}(x,B)$, para todo $x \in A$. Por la Proposición 42, $f(x)$ siempre existe. Veamos que f es continua. Sea $\varepsilon > 0$. Tenemos,
$$|f(x) - f(y)| = \left|\hat{d}(x,B) - \hat{d}(y,B)\right| = |d(x,b_1) - d(y,b_2)|$$
para algunos b_1, $b_2 \in B$; es decir:
$$\hat{d}(x,B) = d(x,b_1) \quad (= \min\{d(x,b) : b \in B\})$$
y
$$\hat{d}(y,B) = d(y,b_2) \quad (= \min\{d(y,b) : b \in B\}).$$

Por lo tanto,
$$d(x,b_1) \leq d(x,b_2) \leq d(x,y) + d(y,b_2)$$

y
$$d(y,b_2) \le d(y,b_1) \le d(y,x) + d(x,b_1).$$
De las desigualdades anteriores se obtiene:
$$-d(x,y) \le d(x,b_1) - d(y,b_2) \le d(x,y)$$
es decir,
$$|d(x,b_1) - d(y,b_2)| \le d(x,y),$$
y basta entonces tomar $0 < \delta \le \varepsilon$ para obtener la continuidad de f.

Ahora consideremos el conjunto
$$S := \left\{ \hat{d}(x,B) : x \in A \right\}.$$

Observe que $S \subseteq \mathbb{R}$, y $S \neq \emptyset$ (pues A y B son no vacíos). Como A y B son compactos, $A \cup B$ también es compacto (ver ejercicio 28). Luego existe $r > 0$ tal que para cualquier par de puntos x y y en $A \cup B$ se tiene que $d(x,y) < r$

Ahora, para cada $x \in A$, existe $b \in B$ tal que $\hat{d}(x,B) = d(x,b)$.

Sea $z \in A \cup B$, de modo que $x, b, z \in A \cup B$ y se tiene:
$$d(x,b) \le d(x,z) + d(z,b) < r + r = 2r$$
y de esta forma $2r$ es una cota superior de S. Aplicando entonces el axioma de completez de $\mathbb{R}$ podemos afirmar que existe $P = \sup S$. Queremos ver que en realidad P es el máximo de S. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in A$ tal que: $P - \frac{1}{n} < f(y_n)$; luego:
$$-\frac{1}{n} < 0 \le P - f(y_n) < \frac{1}{n}.$$
De donde $|P - f(y_n)| < \frac{1}{n}$ y por tanto
$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = P. \tag{3}$$

Ahora, como A es compacto y $(y_n)_n$ es una sucesión en A, existe $(y_{k_n})_n$ subsucesión de $(y_n)_n$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n} = \hat{a}$ para algún $\hat{a} \in A$. Por tanto: $f\left(\lim\limits_{n\to\infty} y_{k_n}\right) = f(\hat{a})$, y como f es continua $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_{k_n}) = f(\hat{a})$. Observando (3) y por el ejercicio 31 se concluye que $P = f(\hat{a})$. De modo que P es el máximo de S como se quería ver. □

Lema 46. *Si $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ y $A \subseteq B$ entonces $\tilde{d}(A,B) = 0$.*

Demostración.
$$\begin{aligned} \tilde{d}(A,B) &= \max\left\{ \hat{d}(a,B) : a \in A \right\} \\ &= \hat{d}(a_0,B) \text{ para algún } a_0 \in A \subseteq B \\ &= \min\{ d(a_0,b) : b \in B \}, \end{aligned}$$
pero $a_0 \in B$, luego $\min\{d(a_0,b) : b \in B\} = 0$. □

Definición 47. *Sean $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ se define $\boldsymbol{h}(A,B)$ por:*
$$\boldsymbol{h}(A,B) := \max\left\{ \tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A) \right\}.$$

Ejemplo 48.

1. *En* $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R}^2)$, $\boldsymbol{h}([0,1]\times[0,1],[1,7]\times[0,8]) = \text{máx}\{1,\sqrt{85}\} = \sqrt{85}$.
2. *En* $\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathbb{R})$, $\boldsymbol{h}([0,1],[0,2]) = \text{máx}\{0,1\} = 1$.

El objetivo ahora es demostrar que $\boldsymbol{h}$ **sí** define una métrica en $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$, pero para esto necesitaremos de algunos resultados previos.

Lema 49. *Sean* $S \subseteq \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{R}$, *k constante, entonces*

$$\text{mín}\{k+s : s \in S\} = k + \text{mín}\, S.$$

Demostración. Notemos $H = \{k+s : s \in S\}$. Es claro que $k + \text{mín}\, S \in H$. Sea $k+s \in H$, como $s \in S$ se tiene que $\text{mín}\, S \leq s$, por tanto $k + \text{mín}\, S \leq k+s$, para todo $s \in S$. Es decir, $k + \text{mín}\, S = \text{mín}\, H$. □

Lema 50. *Sean* $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$, *tales que cumplen las desigualdades* $a \leq b+c$ *y* $d \leq e+f$, *entonces*

$$\text{máx}\{a,d\} \leq \text{máx}\{b,e\} + \text{máx}\{c,f\}.$$

Demostración. Si $\text{máx}\{a,d\} = d$, entonces

$$\text{máx}\{a,d\} \leq e+f \leq \text{máx}\{b,e\} + \text{máx}\{c,f\}.$$

Si, por otro lado, $\text{máx}\{a,d\} = a$, entonces

$$\text{máx}\{a,d\} \leq b+c \leq \text{máx}\{b,e\} + \text{máx}\{c,f\}.$$

□

Lema 51. *Sean* $A,B,C \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$, $a \in A$, $c \in C$ *(a, c fijos). Entonces:*

$$\text{mín}\{d(a,b) : b \in B\} \leq \text{mín}\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\}.$$

Demostración. Sean b_0 y b_1 elementos de B tales que:

$$d(a,c) + d(c,b_0) = \text{mín}\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\}$$

y

$$d(a,b_1) = \text{mín}\{d(a,b) : b \in B\}.$$

Entonces se tiene que $d(a,b_1) \leq d(a,b_0) \leq d(a,c) + d(c,b_0)$. □

Lema 52. $\tilde{d}(A,B) \leq \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B)$, *para toda tercia de elementos* $A,B,C \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$.

Demostración. Para cada $a \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\hat{d}(a,B) &= \text{mín}\{d(a,b) : b \in B\} \\
&\leq \text{mín}\{d(a,c) + d(c,b) : b \in B\}, \quad \text{para toda } c \in C \quad \text{(usando el Lema anterior)} \\
&\leq d(a,c) + \text{mín}\{d(c,b) : b \in B\}, \quad \text{para toda } c \in C \quad \text{(usando el Lema 49).}
\end{aligned}$$

Luego, considerando $c_0 \in C$ tal que: $\hat{d}(a,C) = d(a,c_0)$ se tendría:

$$\begin{aligned}
\hat{d}(a,B) &\leq d(a,c_0) + \text{mín}\{d(c_0,b) : b \in B\} \\
&\leq \hat{d}(a,C) + \text{máx}\{\text{mín}\{d(c,b) : b \in B\} : c \in C\} \\
&= \hat{d}(a,C) + \tilde{d}(C,B).
\end{aligned}$$

Considerando en particular $a = a_0$ donde $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A,B) &\leq \hat{d}(a_0, C) + \tilde{d}(C,B) \\ &\leq \text{máx}\left\{\hat{d}(a,C) : a \in A\right\} + \tilde{d}(C,B) \\ &= \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B). \end{aligned}$$

□

Proposición 53. *La función* $\boldsymbol{h}$ *es una métrica sobre* $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$.

Demostración.
$(EM1)$ $\quad \boldsymbol{h}(A,B) = 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} A = B.$

$\Rightarrow$) Sea $a_0 \in A$. Como $\boldsymbol{h}(A,B) = 0$, entonces $\tilde{d}(A,B) = \tilde{d}(B,A) = 0$. Entonces $\tilde{d}(A,B) = \text{máx}\left\{\hat{d}(a,B) : a \in A\right\} = 0$, lo cual implica que existe $a_1 \in A$ tal que $\hat{d}(a_1, B) = 0$.

Por otra parte, se tiene que $\hat{d}(a_0, B) \leq \hat{d}(a_1, B) = 0$, en consecuencia $\hat{d}(a_0, B) = 0$. Luego existe $b_0 \in B$ tal que $\hat{d}(a_0, B) = d(a_0, b_0) = 0$, de modo que $a_0 = b_0$. Entonces $a_0 \in B$. Con esto hemos probado que $A \subseteq B$.

Análogamente se prueba que $B \subseteq A$.

$\Leftarrow$) Supongamos (sin pérdida de generalidad) que

$$\boldsymbol{h}(A,B) = \tilde{d}(A,B).$$

Para cada $a \in A$ se tiene que $\hat{d}(a,B) = \text{mín}\{d(a,b) : b \in B\} = 0$, pues $A \subseteq B$, entonces $\tilde{d}(A,B) = \text{máx}\{0\} = 0$.

$(EM2)$ $\quad \boldsymbol{h}(A,B) \overset{?}{\leq} \boldsymbol{h}(A,C) + \boldsymbol{h}(B,C) \qquad$ para todo $A, B, C \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$.

En efecto, por el Lema 52 se tiene que

$$\tilde{d}(A,B) \leq \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C,B) \quad \text{y} \quad \tilde{d}(B,A) \leq \tilde{d}(B,C) + \tilde{d}(C,A). \tag{4}$$

Ahora, usando el Lema 50 se puede ver que

$$\text{máx}\left\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\right\} \leq \text{máx}\left\{\tilde{d}(A,C), \tilde{d}(C,A)\right\} + \text{máx}\left\{\tilde{d}(C,B), \tilde{d}(B,C)\right\}.$$

En consecuencia

$$\boldsymbol{h}(A,B) \leq \boldsymbol{h}(A,C) + \boldsymbol{h}(B,C), \qquad \text{para todo } A, B, C \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X).$$

□

Ahora sí estamos en condiciones de formular la siguiente definición.

Definición 54 (Métrica de Hausdorff)**.** *Llamaremos al espacio métrico* $(\boldsymbol{\mathcal{H}}(X), \boldsymbol{h})$ *el espacio donde viven los fractales. La métrica* $\boldsymbol{h}$ *se llama* métrica de Hausdorff.

Como los elementos de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ son subconjuntos de X (es decir son elementos que a la vez son conjuntos), también se suele decir que $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ es un *hiperespacio* de X.

En la siguiente subsección se demuestra la completez de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ a partir de la completez de X, (en realidad se prueba la equivalencia entre la completez de X y la de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$). También se demuestran otros resultados que son importantes en nuestro propósito, el estudio de los sistemas iterados de funciones.

5.2. Completez del espacio $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Un objetivo importante en la presente sección es probar que la completez de (X, d) implica la completez de $(\boldsymbol{\mathcal{H}}(X), \boldsymbol{h})$, para esto se deben establecer antes varios conceptos y resultados.

Definición 55. *Sean* (X, d) *espacio métrico,* $A \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *y* $\varepsilon > 0$. *Se define la* nube *de centro* A *y radio* ε, *denotada* $N(A; \varepsilon)$ *por:*

$$N(A; \varepsilon) := \left\{x \in X : \hat{d}(x, A) < \varepsilon\right\}. \qquad \textit{(Ver Figura 14).}$$

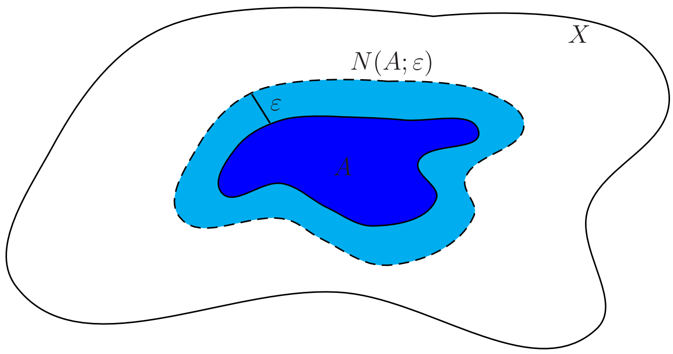


FIGURA 14. Nube $N(A; \varepsilon)$.

Es fácil verificar que:

$$N(A; \varepsilon) = \{x \in X : d(x, a) < \varepsilon \text{ para algún } a \in A\}.$$

Lema 56. *Sean* $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *y* $\varepsilon > 0$. *Entonces:* $\boldsymbol{h}(A, B) < \varepsilon$ *si y sólo si* $A \subseteq N(B; \varepsilon)$ *y* $B \subseteq N(A; \varepsilon)$.

Demostración. Basta probar que:

(*i*) $\tilde{d}(A, B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(B; \varepsilon)$, y
(*ii*) $\tilde{d}(B, A) < \varepsilon$ si y sólo si $B \subseteq N(A; \varepsilon)$.

Si $\tilde{d}(A, B) < \varepsilon$, entonces $\max\left\{\hat{d}(a, B) : a \in A\right\} < \varepsilon$, por lo tanto, $\hat{d}(a, B) < \varepsilon$, para toda $a \in A$. Entonces $a \in N(B; \varepsilon)$, para toda $a \in A$ y $A \subseteq N(B; \varepsilon)$. Recíprocamente si $A \subseteq N(B; \varepsilon)$, entonces para todo $a \in A$ se tiene que $\hat{d}(a, B) < \varepsilon$. Si en particular tomamos $a_0 \in A$ tal que $\hat{d}(a_0, B) = \tilde{d}(A, B)$, entonces se obtiene $\tilde{d}(A, B) < \varepsilon$.

Análogamente se prueba (*ii*). □

Si $A \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ y $\varepsilon > 0$, definimos la *nube cerrada* de centro A y radio ε, notado por $\overline{N}(A; \varepsilon)$ como sigue:

$$\overline{N}(A; \varepsilon) := \left\{x \in X : \hat{d}(x, A) \leq \varepsilon\right\} \quad \Big(= \{x \in X : \text{ existe } a \in A, \ d(x, a) \leq \varepsilon\}\Big).$$

Lema 57. *Sean* $A \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *y* $\varepsilon > 0$. *El conjunto* $\overline{N}(A; \varepsilon)$ *es cerrado.*

Demostración. Veamos que $\left(\overline{N}\,(A;\varepsilon)\right)^c$ es abierto.

Sea $y \in \left(\overline{N}\,(A;\varepsilon)\right)^c$. Entonces $\hat{d}\,(y,A) > \varepsilon$. Sea $a_0 \in A$ tal que $\hat{d}\,(y,A) = d\,(y,a_0)$. Ver figura 15.

Veamos que $B\,(y;\delta) \subseteq \left(\overline{N}\,(A;\varepsilon)\right)^c$ donde $\delta = d\,(y,a_0) - \varepsilon > 0$.

Sea $z \in B\,(y;\delta)$. Debemos probar que $d\,(z,a) > \varepsilon$ para toda $a \in A$.

Sea $a \in A$. Tenemos

$$\begin{aligned} d\,(y,a_0) &\leq d\,(y,a) \leq d\,(y,z) + d\,(z,a) \\ &< \delta + d\,(z,a) \\ &= d\,(y,a_0) - \varepsilon + d\,(z,a) \end{aligned}$$

de donde $\varepsilon < d\,(z,a)$, como se quería ver. □

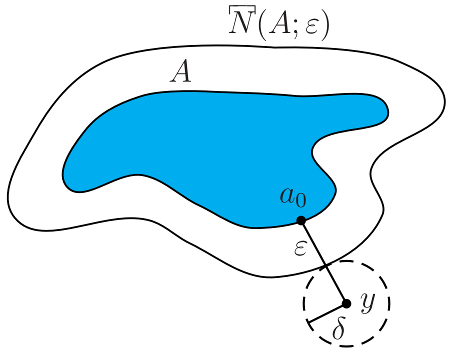


FIGURA 15. Nube cerrada de centro A y radio ε.

De manera análoga a como se demostró el Lema 56, se puede demostrar el siguiente resultado

Lema 58. *Sean $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ y $\varepsilon > 0$.*

$$\boldsymbol{h}\,(A,B) \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad A \subseteq \overline{N}\,(A;\varepsilon) \quad y \quad B \subseteq \overline{N}\,(A;\varepsilon)\,.$$

Lema 59 (Lema de Extensión)**.** *Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $(\boldsymbol{\mathcal{H}}(X), \boldsymbol{h})$. Sea $(n_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de naturales. Suponga que $\left\{x_{n_j} \in A_{n_j} : j = 1,2,\dots\right\}$ es una sucesión de Cauchy (en (X,d)). Entonces existe una sucesión de Cauchy $\{\tilde{x}_n \in A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\tilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$, para todo $j = 1,2,3,\dots$*

Demostración. Se construye la sucesión $(\tilde{x}_n)_n$ como sigue: para cada $n \in \{1,2,\dots,n_1-1\}$ escojemos $\tilde{x}_n \in A_n$ tal que $\hat{d}\,(x_{n_1},A_n) = d\,(x_{n_1},\tilde{x}_n)$. Análogamente para cada $j \in \{2,3,\dots\}$ y cada n tal que $n_{j-1} < n < n_j$, se escoge $\tilde{x}_n \in A_n$ tal que: $\hat{d}\left(x_{n_j},A_n\right) = d\left(x_{n_j},\tilde{x}_n\right)$ y por supuesto $\tilde{x}_{n_j} := x_{n_j}$, para todo $j = 1,2,3,\dots$ Veamos que $(\tilde{x}_n)_n$ así definida es la sucesión buscada: claramente $(\tilde{x}_n)_n$ es una extensión de $\left(x_{n_j}\right)_j$ y $\tilde{x}_n \in A_n$ para todo n. Veamos que $(\tilde{x}_n)_n$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\left(x_{n_j}\right)_j$ es de Cauchy, existe $N_1 > 0$ tal que:

$$n_k, n_j \geq N_1 \longrightarrow d\left(x_{n_k},x_{n_j}\right) < \varepsilon/3. \tag{5}$$

Como $(A_n)_n$ es de Cauchy, existe $N_2 > 0$ tal que:

$$m, n_j \geq N_2 \longrightarrow \boldsymbol{h}\left(A_m, A_{n_j}\right) < \varepsilon/3. \tag{6}$$

La última desigualdad significa, según el Lema 56 que:

$$A_m \subseteq N\left(A_{n_j}; \varepsilon/3\right) \qquad \text{y} \qquad A_{n_j} \subseteq N\left(A_m; \varepsilon/3\right).$$

Luego para $m, n_j \geq N_2$, $x_{n_j} \in N\left(A_m; \varepsilon/3\right)$, es decir $\hat{d}\left(x_{n_j}, A_m\right) < \varepsilon/3$, y por tanto:

$$d\left(x_{n_j}, \tilde{x}_m\right) = \hat{d}\left(x_{n_j}, A_m\right) < \varepsilon/3. \tag{7}$$

Análogamente, si

$$n, n_k \geq N_2 \longrightarrow d\left(x_{n_k}, \tilde{x}_n\right) < \varepsilon/3. \tag{8}$$

Basta entonces tomar $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y se tendrá: $m, n \geq N$ implica

$$\begin{aligned} d\left(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n\right) &\leq d\left(\tilde{x}_m, x_{n_j}\right) + d\left(x_{n_j}, x_{n_k}\right) + d\left(x_{n_k}, \tilde{x}_n\right) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Un resultado central, como ya se había comentado antes, es la obtención de la completez del hiperespacio $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$, a partir de la completez de X. En realidad se tiene la siguiente equivalencia:

Teorema 60. *Sea (X, d) un espacio métrico. $(\boldsymbol{\mathcal{H}}(X), \boldsymbol{h})$ es completo si y sólo si (X, d) es completo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Como claramente cada conjunto unitario $\{x_n\}$ es un compacto no vacío, entonces $(\{x_n\})_n$ es una sucesión en $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Además

$$\boldsymbol{h}\left(\{x_n\}, \{x_m\}\right) = \tilde{d}\left(\{x_n\}, \{x_m\}\right) = \hat{d}\left(x_n, \{x_m\}\right) = d\left(x_n, x_m\right).$$

De modo que $(\{x_n\})_n$ es una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Por hipótesis, $(\{x_n\})_n \to K$ para algún $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Veamos que K es un conjunto unitario. Sean $a, b \in K$ y $\varepsilon > 0$. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $\boldsymbol{h}\left(K, \{x_n\}\right) < \varepsilon/2$. Observemos que

$$\tilde{d}\left(K, \{x_n\}\right) = \text{máx}\left\{\hat{d}\left(y, \{x_n\}\right) : y \in K\right\} = \text{máx}\left\{d\left(y, x_n\right) : y \in K\right\}.$$

Ahora, para $n \geq N$ se tendrá:

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leq d\left(a, x_n\right) + d\left(b, x_n\right) \leq 2\,\text{máx}\left\{d\left(y, x_n\right) : y \in K\right\} \\ &= 2\tilde{d}\left(K, \{x_n\}\right) \leq 2\boldsymbol{h}\left(K, \{x_n\}\right) < 2 \cdot \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

De esta manera para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $d(a, b) < \varepsilon$ lo que implica $a = b$ y $K = \{a\}$. Por tanto

$$d\left(x_n, a\right) = \boldsymbol{h}\left(\{x_n\}, \{a\}\right) = \boldsymbol{h}\left(\{x_n\}, K\right)$$

se puede hacer tan pequeña como se quiera, es decir $(x_n)_n \to a$.

$\Leftarrow$) Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Definamos:

$$A := \left\{x \in X : \text{ existe } (x_n)_n \text{ sucesión de Cauchy, con } x_n \in A_n, \forall n \text{ y } (x_n)_n \to x\right\}.$$

(a) Probemos que $A \neq \emptyset$. Para esto basta probar que existe $(a_n)_n$ sucesión de Cauchy, con $a_n \in A_n$, para toda $n \in \mathbb{N}$, ya que la completez de X garantiza que en tal caso $(a_n)_n \to a$ para algún $a \in X$, y por tanto $a \in A$.

Como $(A_n)_n$ es de Cauchy, podemos escoger una sucesión creciente de naturales:

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_n < \cdots$$

tales que

$$\boldsymbol{h}(A_m, A_n) < \frac{1}{2^i}, \quad \text{para todo } m, n \geq N_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Sea $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Como $\boldsymbol{h}(A_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$, implica que $A_{N_1} \subseteq N\left(A_{N_2}; \frac{1}{2}\right)$, entonces $\hat{d}(x_{N_1}, A_{N_2}) < \frac{1}{2}$ lo que implica que existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < \frac{1}{2}$.

Como $\boldsymbol{h}(A_{N_2}, A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$, entonces $A_{N_2} \subseteq N\left(A_{N_3}; \frac{1}{2^2}\right)$, luego $\hat{d}(x_{N_2}, A_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$, de donde existe $x_{N_3} \in A_{N_3}$ tal que $d(x_{N_2}, x_{N_3}) < \frac{1}{2^2}$, y así sucesivamente se obtiene una sucesión $(x_{N_i})_i$ con $x_{N_i} \in A_{N_i}$ y tal que $d\left(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}\right) < \frac{1}{2^i}$. Tomemos $N_m \leq N_n$, entonces:

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_n}) &\leq d\left(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}\right) + d\left(x_{N_{m+1}}, x_{N_{m+2}}\right) + \cdots + d\left(x_{N_{n-1}}, x_{N_n}\right) \\ &< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

De esta manera $(x_{N_i})_i$ es de Cauchy y por el Lema de Extensión (Lema 59) existe $(\tilde{x}_n)_n$ sucesión de Cauchy tal que $\tilde{x}_n \in A_n$, para toda n y $\tilde{x}_{N_i} = x_{N_i}$, para toda i. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $(\tilde{x}_n)_n \to x$, de modo que $x \in A$ y así $A \neq \emptyset$.

(b) Probaremos ahora que A es cerrado. Sea $(a_i)_i$ sucesión de elementos de A tal que $(a_i)_i \to a$ y probemos que $a \in A$ (de esta manera se tendrá que $\bar{A} \subseteq A$). Como cada $a_i \in A$ entonces, para cada i, existe una sucesión de Cauchy $(x_n^i)_n$, con $x_n^i \in A_n$, para toda n y $(x_n^i)_n \to a_i$

$$\begin{array}{ccccc} (x_n^1)_n & = & (x_1^1\ x_2^1\ \ldots\ x_n^1\ \ldots) & \to & a_1 \\ (x_n^2)_n & = & (x_1^2\ x_2^2\ \ldots\ x_n^2\ \ldots) & \to & a_2 \\ & \vdots & & \vdots & \\ (x_n^i)_n & = & (x_1^i\ x_2^i\ \ldots\ x_n^i\ \ldots) & \to & a_i \\ & \vdots & & \vdots & \\ \left(x_n^{N_k}\right)_n & = & \left(x_1^{N_k}\ x_2^{N_k}\ \ldots\ x_n^{N_k}\ \ldots\right) & \to & a_{N_k} \\ & \vdots & & & \downarrow \\ & & & & a \end{array}$$

Como $(a_i)_i \to a$ es posible encontrar una sucesión creciente de naturales:

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$$

tal que para cada k,

$$d(a_{N_k}, a) < \frac{1}{k}.$$

Como $\left(x_n^{N_k}\right)_n \to a_{N_k}$, para k existe m_k tal que

$$d\left(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}\right) < \frac{1}{k}.$$

Entonces

$$d\left(x_{m_k}^{N_k}, a\right) \leq d\left(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}\right) + d\left(a_{N_k}, a\right) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \longrightarrow 0.$$

Notemos $y_{m_k} = x_{m_k}^{N_k}$. Entonces para cada k, $y_{m_k} \in A_{m_k}$ y además $\left(y_{m_k}\right)_k \to a$, luego $\left(y_{m_k}\right)_k$ es de Cauchy. En estas condiciones aplicamos de nuevo el Lema de Extensión para obtener una sucesión $\left(\tilde{y}_m\right)_m$ tal que $\tilde{y}_m \in A_m$, para toda m, $\tilde{y}_{m_k} = y_{m_k}$ y $\left(\tilde{y}_m\right)_m$ de Cauchy. Por la completez de X, $\left(\tilde{y}_m\right)_m$ debe ser convergente y como su subsucesión $\left(y_{m_k}\right)_k$ converge a a, entonces también $\left(\tilde{y}_m\right)_m \to a$. De esta manera a cumple todos los requisitos para pertenecer a A, como se quería probar.

(c) Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe N tal que para $n \geq N$, $A \subseteq \overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$. Como $\left(A_n\right)_n$ es de Cauchy, existe N tal que si $m, n \geq N$ entonces $\boldsymbol{h}\left(A_n, A_m\right) \leq \varepsilon$, luego $A_m \subseteq \overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$. (Lema 56). Sea $a \in A$. Entonces existe una sucesión $\left(a_i\right)_i$ tal que cada $a_i \in A_i$ y $\left(a_i\right)_i \to a$. Podemos asumir además que N es suficientemente grande para que si $m \geq N$ entonces $d\left(a_m, a\right) < \varepsilon$. Entonces $a_m \in \overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$ pues $A_m \subseteq \overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$. De esta manera $\left(a_N,\, a_{N+1},\, a_{N+2}, \ldots\right)$ es una sucesión en $\overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$ que converge a a, es decir, $a \in cl\left(\overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)\right) = \overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$ (Lema 57). Hemos probado así que para todo $n \geq N$, $A \subseteq \overline{N}\left(A_n; \varepsilon\right)$.

(d) Probemos ahora que A es compacto. Para esto basta probar que A es totalmente acotado y aplicar entonces el Teorema 68.

Por contradicción, supongamos que A no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon > 0$ para el cual **no** existe una $\varepsilon-$red que recubra a A. Sea $x_1 \in A$,

$$\begin{array}{lcl} A & \nsubseteq & B\left(x_1; \varepsilon\right) \longrightarrow \exists x_2 \in A : d\left(x_1, x_2\right) \geq \varepsilon \\ A & \nsubseteq & B\left(x_1; \varepsilon\right) \cup B\left(x_2; \varepsilon\right) \longrightarrow \exists x_3 \in A : d\left(x_3, x_1\right) \geq \varepsilon \text{ y } d\left(x_3, x_2\right) \geq \varepsilon \\ & \vdots & \end{array}$$

Se construye de esta manera una sucesión $\left(x_i\right)_i$ de elementos de A tal que $d\left(x_i, x_j\right) \geq \varepsilon$, para toda pareja $i \neq j$. Ahora, por (c) existe un n suficientemente grande tal que $A \subseteq \overline{N}\left(A_n; \varepsilon/3\right)$. Entonces para cada x_i, existe $y_i \in A_n$ tal que $d\left(x_i, y_i\right) \leq \varepsilon/3$. Como A_n es compacto, existe una subsucesión $\left(y_{n_i}\right)$ de $\left(y_i\right)_i$, convergente en A_n. Por tanto $\left(y_{n_i}\right)$ es de Cauchy, así que es posible encontrar y_{n_i}, y_{n_j} tales que $d\left(y_{n_i}, y_{n_j}\right) < \varepsilon/3$. Por tanto

$$\begin{array}{rcl} d\left(x_{n_i}, x_{n_j}\right) & \leq & d\left(x_{n_i}, y_{n_i}\right) + d\left(y_{n_i}, x_{n_j}\right) \\ & \leq & d\left(x_{n_i}, y_{n_i}\right) + d\left(y_{n_i}, y_{n_j}\right) + d\left(y_{n_j}, x_{n_j}\right) \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} + \dfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{array}$$

Esto claramente contradice la forma como fue construida $\left(x_n\right)_n$. De esta manera, A es totalmente acotado y puesto que en (b) se demostró que es cerrado, entonces se concluye (Teorema 68) que A es compacto.

(e) Probaremos ahora que

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Probaremos que existe N tal que $n \geq N$, implica $A_n \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon)$. Esto será suficiente teniendo en cuenta (c) y el lema 58.

Existe N tal que $m, n \geq N$ implica $\boldsymbol{h}(A_m, A_n) \leq \varepsilon/2$. Entonces para $m, n \geq N$, $A_m \subseteq \overline{N}(A_n; \varepsilon/2)$. Probemos que $n \geq N$ implica $A_n \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon)$.

Sea $y \in A_n$. Existe una sucesión creciente de enteros,

$$n < N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$$

tal que para $l, m \geq N_j$, $A_l \subseteq \overline{N}\left(A_m; \dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right)$. Entonces $A_l \subseteq \overline{N}\left(A_{N_1}; \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Como $y \in A_n$, existe $x_{N_1} \in A_{N_1}$ tal que $d(y, x_{N_1}) \leq \varepsilon/2$. Como $x_{N_1} \in A_{N_1}$ existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \varepsilon/2^2$. De esta manera continuamos y se encuentra una sucesión $x_{N_1}, x_{N_2}, x_{N_3}, \ldots$ tal que $x_{N_j} \in A_{N_j}$ y $d\left(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}\right) \leq \dfrac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Entonces

$$\begin{aligned} d\left(y, x_{N_j}\right) &\leq d(y, x_{N_1}) + d(x_{N_1}, x_{N_2}) + \cdots + d\left(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}\right) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2^j} < \varepsilon, \quad \text{para todo } j. \end{aligned}$$

Además $\left(x_{N_j}\right)$ es una sucesión de Cauchy, luego $\left(x_{N_j}\right) \to x$, para algún x. Esto implica que $x \in A$.

Veamos que $d(y, x) \leq \varepsilon$. Supongamos que $d(y, x) > \varepsilon$. Entonces $d(y, x) - \varepsilon > 0$ y como $\left(x_{N_j}\right) \to x$, existe $M > 0$ tal que $N_j > M$ implica $d\left(x_{N_j}, x\right) < d(y, x) - \varepsilon$, de donde

$$\begin{aligned} \varepsilon &< d(y, x) - d\left(x_{N_j}, x\right) \\ &\leq d\left(y, x_{N_j}\right) + d\left(x_{N_j}, x\right) - d\left(x_{N_j}, x\right) \ = \ d\left(y, x_{N_j}\right) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Se obtendría $\varepsilon < \varepsilon$, ¡absurdo! Por lo tanto $d(y, x) \leq \varepsilon$ y, puesto que $x \in A$, se concluye que $y \in \overline{N}(A; \varepsilon)$ luego $A_n \subseteq \overline{N}(A; \varepsilon)$ como se quería demostrar. □

El teorema anterior cuya demostración es un poco ardua, desempeña un papel muy importante en nuestro camino de acercamiento a los fractales; podríamos decir que este teorema proporciona la mitad de los "ingredientes" que usaremos para construir nuestros fractales. La otra mitad la constituye un número finito de contracciones que conformarán lo que se denomina un *Sistema Iterado de Funciones*. De esta manera los lemas que se presentan a continuación, se incluyen porque se usarán para garantizar el buen funcionamiento de los sistemas iterados de funciones.

Lema 61. *Sean (X, d) y (Y, m) espacios métricos y $f : X \to Y$ continua. Si $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$, entonces $f(K) \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(Y)$.*

Demostración. Sea $(y_n)_n$ una sucesión en $f(K)$, donde

$$f(K) = \{y \in Y : y = f(k) \quad \text{para algún} \quad k \in K\}.$$

Debemos probar que $(y_n)_n$ admite una subsucesión convergente.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(k_n)$ para algún $k_n \in K$. Dado que $(k_n)_n$ es una sucesión en K, y como K es compacto, existe $(k_{n_t})_t$ subsucesión de $(k_n)_n$ tal que

$$(k_{n_t})_t \to k \quad \text{para un} \quad k \in K. \tag{9}$$

Así $(f(k_{n_t}))_t$ es una subsucesión de $(y_n)_n$ y $(f(k_{tn}))_n \to f(k) \in f(K)$ por (9) y porque f es continua. (ver ejercicio 31). $\square$

Lema 62. *Sean (X,d) un espacio métrico y $f : X \to X$ una contracción. Definimos la función $\hat{f} : \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) \to \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ por $\hat{f}(K) = f(K)$ para todo $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Entonces $\hat{f}$ es una contracción en $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$.*

Demostración. En primer lugar obsérvese que $\hat{f}$ está bien definida en virtud del Lema 61.

Dado que f es una contracción, existe $r \in [0,1)$ tal que para toda pareja $x, y \in X$,

$$d(f(x), f(y)) \leq rd(x,y). \tag{10}$$

Sean $A, B, \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Tenemos

$$\boldsymbol{h}\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right) = \boldsymbol{h}(f(A), f(B)) = \text{máx}\left\{\tilde{d}(f(A), f(B)), \tilde{d}(f(B), f(A))\right\};$$

sin pérdida de generalidad, supongamos que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}(f(A), f(B)) &= \tilde{d}(f(A), f(B)) \\ &= \text{máx}\{\text{mín}\{d(f(a), f(b)) : a \in A\} : b \in B\} \\ &\leq \text{máx}\{\text{mín}\{rd(a,b) : a \in A\} : b \in B\} \qquad \text{(por (10))}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{h}\left(\hat{f}(A), \hat{f}(B)\right) &\leq r\,\text{máx}\{\text{mín}\{d(a,b) : a \in A\} : b \in B\} = r\tilde{d}(A,B) \\ &\leq r\,\text{máx}\left\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\right\} = r\boldsymbol{h}(A,B). \end{aligned}$$ $\square$

Lema 63. *Sean $A, B, C \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. Entonces $\tilde{d}(A \cup B, C) = \text{máx}\left\{\tilde{d}(A,C), \tilde{d}(B,C)\right\}$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} \tilde{d}(A \cup B, C) &= \text{máx}\left\{\hat{d}(x,C) : x \in A \cup B\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\hat{d}(x,C) : x \in A \vee x \in B\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{\hat{d}(x,C) : x \in A\right\}, \text{máx}\left\{\hat{d}(x,C) : x \in B\right\}\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\tilde{d}(A,C), \tilde{d}(B,C)\right\}. \end{aligned}$$ $\square$

Lema 64. *Sean $A, B, C, D \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. $\boldsymbol{h}(A \cup B, C \cup D) \leq \text{máx}\{\boldsymbol{h}(A,C), \boldsymbol{h}(B,D)\}$.*

Demostración. Por el Lema 52

$$\tilde{d}(A, C \cup D) \leq \tilde{d}(A,C) + \tilde{d}(C, C \cup D),$$

como $\tilde{d}(C, C \cup D) = 0$ ya que $C \subseteq C \cup D$ (Lema 46), entonces

$$\tilde{d}(A, C \cup D) \leq \tilde{d}(A,C). \tag{11}$$

De forma análoga,

$$\tilde{d}(B, C \cup D) \leq \tilde{d}(B,D) + \tilde{d}(D, C \cup D) \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}(B, C \cup D) \leq \tilde{d}(B,D), \tag{12}$$

$$\tilde{d}\,(C, A\cup B) \leq \tilde{d}\,(C,A) + \tilde{d}\,(A, A\cup B) \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}\,(C, A\cup B) \leq \tilde{d}\,(C,A) \tag{13}$$

y

$$\tilde{d}\,(D, A\cup B) \leq \tilde{d}\,(D,B) + \tilde{d}\,(B, A\cup B) \quad \Rightarrow \quad \tilde{d}\,(D, A\cup B) \leq \tilde{d}\,(D,B)\,. \tag{14}$$

Por la definición de $\boldsymbol{h}$, el Lema 63 y las inecuaciones anteriores, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}\,(A\cup B, C\cup D)\\
&\quad = \text{máx}\left\{\tilde{d}\,(A\cup B, C\cup D)\,, \tilde{d}\,(C\cup D, A\cup B)\right\}\\
&\quad = \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{\tilde{d}\,(A, C\cup D)\,, \tilde{d}\,(B, C\cup D)\right\}, \text{máx}\left\{\tilde{d}\,(C, A\cup B)\,, \tilde{d}\,(D, A\cup B)\right\}\right\}\\
&\quad = \text{máx}\left\{\tilde{d}\,(A, C\cup D)\,,\ \tilde{d}\,(B, C\cup D)\,,\ \tilde{d}\,(C, A\cup B)\,,\ \tilde{d}\,(D, A\cup B)\right\}\\
&\quad \leq \text{máx}\left\{\tilde{d}\,(A,C)\,,\ \tilde{d}\,(B,D)\,,\ \tilde{d}\,(C,A)\,,\ \tilde{d}\,(D,B)\right\}\\
&\quad = \text{máx}\left\{\text{máx}\left\{\tilde{d}\,(A,C)\,,\ \tilde{d}\,(C,A)\right\},\ \text{máx}\left\{\tilde{d}\,(B,D)\,,\ \tilde{d}\,(D,B)\right\}\right\}\\
&\quad = \text{máx}\left\{\boldsymbol{h}\,(A,C)\,,\ \boldsymbol{h}\,(B,D)\right\},
\end{aligned}$$

esto es

$$\boldsymbol{h}\,(A\cup B, C\cup D) \leq \text{máx}\left\{\boldsymbol{h}\,(A,C)\,,\ \boldsymbol{h}\,(B,D)\right\}. \quad \square$$

Los lemas anteriores se usarán para demostrar el siguiente, el cual a su vez constituye un resultado básico para el estudio de los sistemas iterados de funciones.

Lema 65. *Sean (X,d) espacio métrico y $f_i : X \to X$ una contracción en X, con $i = 1,2,3,\ldots,N$ ($N \in \mathbb{N}$, N fijo). Si se define $F : \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) \to \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ por*

$$F(K) := f_1\,(K) \cup f_2\,(K) \cup f_3\,(K) \cup \cdots \cup f_N\,(K) := \bigcup_{i=1}^{N} f_i\,(K)\,.$$

Entonces F es contracción.

Demostración. En primer lugar obsérvese que F está bien definida en virtud del ejercicio 28 y del Lema 61.

Para probar que F es contracción basta considerar el caso $N = 2$ (luego se aplica inducción matemática).

Existen $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ en $[0,1)$ tales que para toda pareja $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
d\,(f_1\,(x)\,, f_1\,(y)) &\leq \mathbf{r}_1 d\,(x,y)\,,\\
d\,(f_2\,(x)\,, f_2\,(y)) &\leq \mathbf{r}_2 d\,(x,y)\,.
\end{aligned}$$

Sean $A, B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$; utilizando los lemas 64 y 62, respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}\,(F\,(A)\,,\ F\,(B)) &= \boldsymbol{h}\,(f_1\,(A) \cup f_2\,(A)\,,\ f_1\,(B) \cup f_2\,(B))\\
&\leq \text{máx}\left\{\boldsymbol{h}\,(f_1\,(A)\,,\ f_1\,(B))\,,\ \boldsymbol{h}\,(f_2\,(A)\,,\ f_2\,(B))\right\}\\
&\leq \text{máx}\left\{\mathbf{r}_1\boldsymbol{h}\,(A,B)\,,\ \mathbf{r}_2\boldsymbol{h}\,(A,B)\right\}\\
&\leq \mathbf{r}\,\text{máx}\left\{\boldsymbol{h}\,(A,B)\,,\ \boldsymbol{h}\,(A,B)\right\} = \mathbf{r}\boldsymbol{h}\,(A,B)\,,
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{r} = \text{máx}\left\{\mathbf{r}_1,\ \mathbf{r}_2\right\}$. Por lo tanto F es una contracción. $\square$

Con los resultados que hemos presentado en esta sección la demostración del siguiente corolario es inmediata.

Corolario 66. *Sean (X,d) espacio métrico completo y $f_i : X \to X$, $i = 1,2,3,\ldots,N$, una colección de contracciones en X. Sea $F : \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) \to \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ dada por*

$$F(K) := f_1(K) \cup f_2(K) \cup f_3(K) \cup \cdots \cup f_N(K) := \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K).$$

Entonces existe un único elemento de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$, digamos Ω, tal que $F(\Omega) = \Omega$. Además para todo $B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{h}(F^n(B), \Omega) = 0.$$

A la colección de contracciones $f_i : X \to X$, $i = 1,2,3,\ldots,N$, y a la función F, consideradas en el lema 65 y el corolario 66, se les suele llamar un *Sistema Iterado de Funciones*, *SIF*. Y lo notamos así: $\{X;\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N\}$. Al conjunto Ω mencionado en el corolario 66 se le llama el *atractor* del *SIF*, $\{X;\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N\}$. Un *fractal*, en el espacio X, es un subconjunto de X que se puede expresar como el atractor de un *SIF*.

5.3. Algunos resultados utilizados. A continuación se recopilan algunos resultados utilizados en el desarrollo realizado en esta sección. La demostración de estos resultados se pueden encontrar por ejemplo en [21] y en [24].

Proposición 67. *Sean (X,d) un espacio métrico completo y $S \subseteq X$. Entonces S es cerrado si y sólo si S es completo.*

Teorema 68. *Sean (X,d) espacio métrico completo y $S \subseteq X$. Entonces S es compacto si y sólo si S es cerrado y totalmente acotado.*

Proposición 69. *Sean (X,d) un espacio métrico y $S \subseteq X$. Si S es totalmente acotado entonces S es acotado.*

Lo recíproco, en general no es cierto.

6. La función de direccionamiento

Esta función permitirá, entre otras cosas, asociar a cada punto del atractor de un SIF, un código, es decir un elemento del espacio de los códigos.

En primer lugar veamos cómo el atractor de un SIF determina un espacio de códigos, de acuerdo al número de contracciones del SIF.

Definición 70 (El espacio de códigos asociados a un SIF)**.** *Dado un SIF:* $\{X;\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N\}$ *se define su* espacio de códigos asociado *como el espacio métrico* $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *donde* $\Sigma = \{1, 2, \ldots, N\}$*.*

Recuerde que la métrica en $\Sigma^{\mathbb{N}}$ está dada por $d_c(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i}$, para todo par de puntos $\alpha = \alpha_1\alpha_2\ldots$; y $\beta = \beta_1\beta_2\ldots$.

Es sabido que el espacio de códigos aquí definido no es otra cosa que el espacio de Cantor, es decir $\left(\sum^{\mathbb{N}}, d_c\right)$ es el único espacio métrico compacto, perfecto y totalmente disconexo ([27], Corollary 30.4).

Ejemplo 71. *El espacio de códigos asociados al SIF:* $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$ *donde* $w_1(z) = \frac{1}{2}z$*;* $w_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$*;* $w_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$ *(y a cualquier SIF con tres contracciones) es* $\{1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$*.*

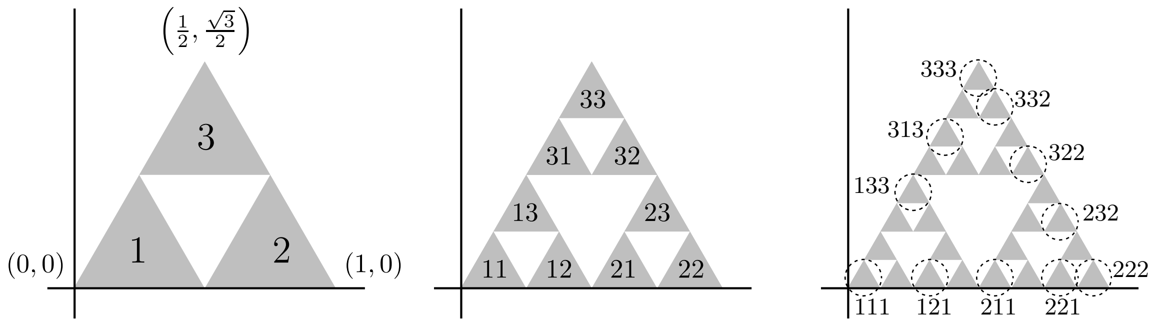


Figura 16. Espacio de códigos asociado con el triángulo de Sierpiński.

Los siguientes resultados se usarán en la demostración del Teorema 77, el cual a su vez constituye un resultado central de esta sección.

Teorema 72 (La completez del espacio donde viven los fractales)**.** *Si* (X, d) *es un espacio métrico completo, entonces* $(\mathcal{H}(X), h)$ *es completo. Además, si* (A_n) *es una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{H}(X)$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A, \qquad A \in \mathcal{H}(X)$$

y A *se puede caracterizar como sigue:*

$$A = \{x \in X \mid \text{existe } (a_n)_n \text{ sucesión en } X, \text{ tal que } (a_n)_n \to x \text{ y } a_n \in A_n \text{ para cada } n\}.$$

Una demostración de este teorema la presentamos en la sección anterior de estas notas. Además se puede encontrar en [4].

Definición 73. *Un SIF con* condensación *es de la forma* $\{X;\ f_0,\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N\}$ *donde* $\{X;\ f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_N\}$ *es un SIF y* $f_0 : \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) \to \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *es una función constante. En este caso f_0 se llama* función de condensación.

Teorema 74 (Atractor de un SIF con condensación)**.** *Sea* $\{X;\ f_0,\ f_1,\ \ldots,\ f_N\}$ *un SIF con condensación, (siendo f_0 la función de condensación). Entonces la función,* $F_0 : \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) \to \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *definida por:* $F_0(K) := \bigcup\limits_{i=0}^{N} f_i(K)$ *es una contracción en el espacio métrico* $(\boldsymbol{\mathcal{H}}(X), h)$ *y existe un único* $A \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *tal que,*

$$A = F_0(A) = \bigcup_{i=0}^{N} f_i(A)$$

Además, para todo $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *se tiene que,*

$$A = \lim_{n\to\infty} F_0^n(K).$$

A se llama el atractor *del SIF.*

La demostración del teorema anterior es totalmente análoga a la que se hace para los SIF's "tradicionales".

Lema 75. *Sea* $\{X; w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ *un SIF. Sea* $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$*. Entonces existe* $\tilde{K} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ *tal que* $K \subseteq \tilde{K}$ *y para cada* $i = 1, \ldots, N$, $w_i : \tilde{K} \to \tilde{K}$*. En otras palabras* $\left\{\tilde{K}; w_1, \ldots, w_N\right\}$ *es un SIF cuyo conjunto subyacente es un compacto.*

Demostración. Para construir $\tilde{K}$ considere el SIF con condensación

$$\{X; w_0, w_1, \ldots, w_N\}$$

donde la función w_0 es la función de condensación determinada por K, es decir: $w_0(B) := K$, para todo $B \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$.

Por el teorema 74 existe el atractor de este SIF con condensación, es decir existe $\tilde{K}$ el punto fijo de la contracción,

$$W_0 : \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) \to \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$$

definida por:

$$\begin{aligned} W_0(B) &:= w_0(B) \cup \overbrace{w_1(B) \cup \ldots \cup w_N B}^{W(B)} \\ &= K \cup W(B) \end{aligned}$$

Claramente $\tilde{K}$ es compacto y además cumple $W_0(\tilde{K}) = \tilde{K}$, es decir $K \cup W(\tilde{K}) = \tilde{K}$ de donde $K \subseteq \tilde{K}$ y $W(\tilde{K}) \subseteq \tilde{K}$; esta última contenencia implica $w_i : \tilde{K} \to \tilde{K}$, para toda $i = 1, \ldots, N$. □

Lema 76. *Sea* $\{X; w_1, \ldots, w_N\}$ *un SIF con factor de contracción* λ[1]*. Sea* $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *el espacio de códigos asociados al SIF. Sea,*

$$\phi : \Sigma^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \times X \to X$$

[1]Es decir $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N, \}$ donde λ_i es el factor de contracción de w_i, $i = 1, 2, \ldots, N$.

definida por:

$$\phi(\alpha, n, x) := w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n}(x).$$

Sea $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$. *Entonces existe una constante* D *tal que:*

$$d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) \leq D\lambda^{\min\{m,n\}}$$

para toda $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$, *para todo par de números* $m, n \in \mathbb{N}$, *y para todo par de puntos* $x_1, x_2 \in K$.

Demostración. Sean α, m, n, x_1, x_2 como se establecen en el lema. Construya el compacto $\tilde{K}$ como en el Lema 75, de modo que cada $w_i : \tilde{K} \to \tilde{K}$. Podemos suponer $m < n$. Tenemos:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, n, x_2) &= w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_m} \circ \underbrace{w_{\alpha_{m+1}} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n}(x_2)}_{x_3} \\ &= \phi(\alpha, m, x_3). \end{aligned}$$

De modo que:

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, n, x_2)) &= d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_3)) \\ &= d(w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_m}(x_1), w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_m}(x_3)) \\ &\leq \lambda^m d(x_1, x_3) \leq \lambda^m D \end{aligned}$$

donde $D = \max\left\{d(x, y) \mid x, y \in \tilde{K}\right\}$; D existe puesto que $\tilde{K}$ es compacto. □

Establecidos los lemas anteriores podemos ahora sí abordar la función que nos interesa.

Teorema 77 (La función φ)**.** *Sean* $\{X; w_1, \ldots, w_N\}$ *un SIF y* A *su atractor. Sea* $\Sigma^{\mathbb{N}}$ *el espacio de códigos asociado al SIF. Para cada* $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}, n \in \mathbb{N}$ *y* $x \in X$. *Sea*

$$\varphi(\alpha) := \lim_{n\to\infty} \phi(\alpha, n, x).$$

Entonces $\varphi(\alpha)$ *siempre existe, pertenece a* A, *es independiente de* x, *y la función:*

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ \Sigma^{\mathbb{N}} &\longrightarrow A \\ \alpha &\longmapsto \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

es continua y sobre.

Demostración. Sean $x \in X$ y $K \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ tal que $x \in K$. Construya $\tilde{K}$ como en el Lema 75. Sabemos que el atractor A se puede obtener como:

$$A = \lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(K).$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \phi(\alpha, 1, x) &= w_{\alpha_1}(x) \in W(K), \\ \phi(\alpha, 2, , x) &= w_{\alpha_1} \circ w_{\alpha_2}(x) \in W^{\circ 2}(K), \\ &\vdots \\ \phi(\alpha, n, x) &= w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n}(x) \in W^{\circ n}(K), \\ &\vdots \end{aligned}$$

Por el Lema 76 la sucesión $(\phi(\alpha, n, x))_n$ es de Cauchy, y aplicando entonces el Teorema de Completez de $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ (Teorema 72), podemos afirmar que dicha sucesión converge a un elemento del atractor A, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\alpha, n, x) \in A.$$

Veamos que φ es continua. Sea $\epsilon > 0$. Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda^n D < \epsilon$. (λ es un factor de contracción del SIF y D es el diámetro de $\tilde{K}$). Para $\alpha, \beta \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ que cumplan:

$$d_c(\alpha, \beta) < \frac{1}{(N+1)^{n+1}}$$

se tiene:

$$(N+1)^{n+1}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{(N+1)^i}\right] < 1$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n+1-i}}_{\substack{\shortparallel \\ t\in\mathbb{Z}^+\cup\{0\}}} + \sum_{i=n+1}^{\infty} |\alpha_i - \beta_i| (N+1)^{n+1-i} < 1.$$

Luego necesariamente $t = 0$, de modo que $\alpha_i = \beta_i$, para toda $i = 1, \ldots, n$ (es decir α y β coinciden en sus primeras n cifras). Por tanto, si $d_c(\alpha, \beta) < \delta = \frac{1}{(N+1)^{n+1}}$

$d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\beta, m, x_2)) =$

$$d\left(w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n} \circ \underbrace{w_{\alpha_{n+1}} \circ \ldots \circ w_{\alpha_m}(x_1)}_{x_3}, w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n} \circ \underbrace{w_{\beta_{n+1}} \circ \ldots \circ w_{\beta_m}(x_2)}_{x_4}\right),$$

tomando $m \geq n, x_1, x_2 \in \tilde{K}$,

$\leq \lambda^n d(x_3, x_4) \leq \lambda^n D < \epsilon$,

$$\begin{aligned} d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\beta, m, x_2)) &= d(w_{\alpha_1} \circ \ldots \circ w_{\alpha_m}(x_1), w_{\beta_1} \circ \ldots \circ w_{\beta_m}(x_2)), \qquad x_1, x_2 \in \tilde{K} \\ &= d(\phi(\alpha, m, x_1), \phi(\alpha, m, x_2)) \leq \lambda^m D < \epsilon, \end{aligned}$$

y tomando el límite cuando $m \to \infty$,

$$d\left(\lim_{m\to\infty} \phi(\alpha, m, x_1), \lim_{m\to\infty} \phi(\beta, m, x_2)\right) < \epsilon,$$

luego $d(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) < \epsilon$. Así φ es continua.

Sólo falta probar que φ es sobre. Sea $a \in A$. Claramente $\{x\} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$, de modo que,

$$A = \lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(\{x\}).$$

Considere la sucesión de compactos:

$$\begin{aligned}
W(\{x\}) &= \{w_1(x), \ldots, w_N(x)\} \\
W^{\circ 2}(\{x\}) &= \{w_1 \circ w_1(x), \ldots, w_1 w_n(x), w_2 w_1(x), \ldots, w_2 w_N(x), \ldots, w_N w_N(x)\} \\
&\vdots \\
W^{\circ n}(\{x\}) &= \{w_{\alpha_1} w_{\alpha_2} \ldots w_{\alpha_n}(x) \mid \alpha_i \in \{1, \ldots, N\}, 1 \le i \le N\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Claramente es una sucesión de Cauchy (en $\mathcal{H}(X)$), usando el Lema 59 y el Teorema 72 de $\mathcal{H}(X)$, debe existir una sucesión de Cauchy $(a_n)_n$ tal que $(a_n)_n \to a$ y $a_n \in W^{\circ n}(\{x\})$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Así, para cada n,

$$a_n = w_{\alpha_1^n} \circ w_{\alpha_2^n} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n^n}(x).$$

Se determina entonces una sucesión de códigos $(\alpha^n)_n$ donde $\alpha^n = (\alpha_m^n)_m$. Como $\Sigma^{\mathbb{N}}$ es compacto, $(\alpha^n)_n$ admite una subsucesión convergente, digamos $\left(\alpha^{k_n}\right)_n \to \alpha$, $\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}}$. Por esta última convergencia, los "segmentos iniciales" de los códigos α^{k_n}, coincidentes con los de α, se van haciendo cada vez "más largos", de modo que

$$d\left(\phi(\alpha, n, x), \phi\left(\alpha^{k_n}, n, x\right)\right) \le \lambda^{t(n)} D$$

donde

$$t(n) = \#\left\{j \in \mathbb{N} \mid \alpha_k^{k_n} = \alpha_k, 1 \le k \le j\right\}.$$

Tomando límite en los dos lados de la desigualdad, se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \phi(\alpha, n, x) = \lim_{n\to\infty} \phi\left(\alpha^{k_n}, n, x\right),$$

$$\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} w_{\alpha_1^{k_n}} \circ \ldots \circ w_{\alpha_n^{k_n}}(x) = \lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a. \qquad \square$$

De esta manera, para cada punto del atractor de un SIF, podemos ahora definir lo que llamaremos una dirección del punto.

Definición 78 (Función de direccionamiento)**.** *Sean $\{X; w_1, \ldots, w_n\}$ un SIF, $\Sigma^{\mathbb{N}}$ su espacio de códigos asociado y $\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \to A$ la función definida en el teorema anterior. Sea $a \in A$; llamaremos una* dirección *de a, a cualquier elemento del conjunto,*

$$\varphi^{-1}(a) := \left\{\alpha \in \Sigma^{\mathbb{N}} \mid \varphi(\alpha) = a\right\}.$$

El conjunto $\varphi^{-1}(a)$ lo llamaremos el conjunto de las direcciones de *a y la función φ la llamaremos la* función de direccionamiento *del atractor del SIF.*

Ejemplo 79. *Consideremos el SIF: $\{[0,1]; w_1, w_2\}$ donde $w_1(x) = \frac{1}{3}x$, $w_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$. El atractor de este SIF es el espacio de Cantor $\mathcal{C}$, y su función de direccionamiento,*

$$\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathcal{C} \qquad \textit{donde} \qquad \Sigma = \{1, 2\}.$$

Calculemos por ejemplo $\varphi(1\bar{2})$; $(1\bar{2} = 1222\ldots)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(1\bar{2}) &= \lim_{n\to\infty} w_1 \circ w_2 \circ w_2 \circ \ldots \circ w_2(1) \\
&= \lim_{n\to\infty} w_1(1) = w_1(1) = \tfrac{1}{3} \in \mathcal{C}
\end{aligned}$$

Luego $1\bar{2}$ *es dirección de* $\frac{1}{3}$.

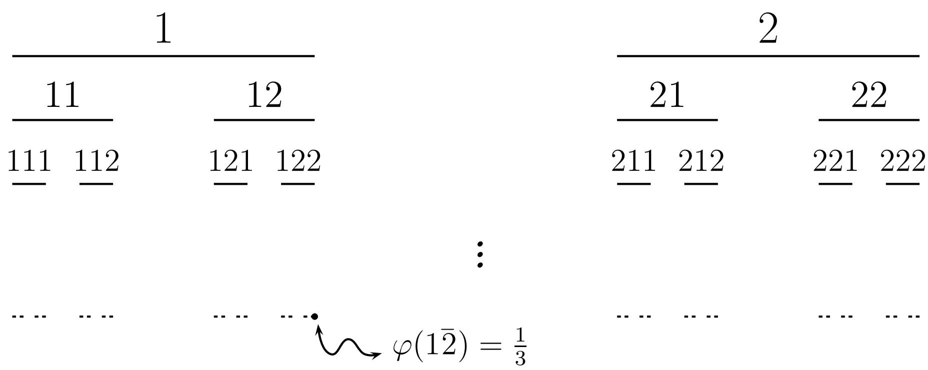


FIGURA 17. Espacio de códigos asociado con el conjunto de Cantor.

Ejemplo 80. *El atractor del SIF:* $\left\{I \times I;\ \frac{1}{3}z,\ \frac{1}{3}ze^{i\pi/3},\ \frac{1}{3}ze^{-i\pi/3} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i,\ \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\right\}$, *es la* curva de Koch, *que notaremos* $\mathcal{K}$. *Entonces*

$$\varphi : \Sigma^{\mathbb{N}} \to \mathcal{K} \qquad \textit{con} \quad \Sigma = \{1, 2, 3, 4\}\,.$$

En este caso, por ejemplo $\varphi^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \left\{1\bar{4}, 2\bar{1}\right\}$. *(Compruébelo!).*

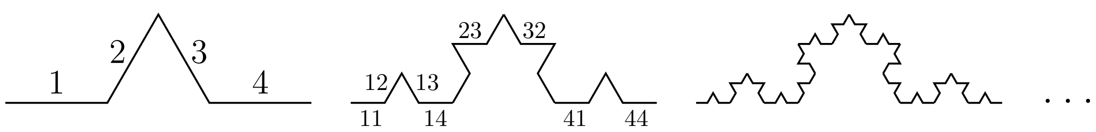


FIGURA 18. El espacio de códigos asociado con la curva de Koch.

Obsérvese que si F es un subconjunto cerrado de $\sum^{\mathbb{N}}$, y dado que $\sum^{\mathbb{N}}$ es compacto, entonces F es también compacto; de esta manera para la función $\varphi : \sum^{\mathbb{N}} \to A$ definida en el Teorema 77 , se tiene que $\varphi(F)$ es un subconjunto compacto de A (la imagen continua de un compacto es un compacto); además, puesto que A es Hausdorff (por ser un espacio métrico), entonces $\varphi(F)$ es un cerrado de A (un subconjunto compacto de un espacio Hausdorff, es cerrado, [27], Theorem 17.5). De esta manera la función φ es cerrada de modo que tendriamos una función continua, sobre y cerrada, podemos entonces aplicar el Teorema 9.2 de [27] para concluir que A es un cociente (topológico) del espacio de Cantor. Por supuesto esta conclusión también se puede obtener como una consecuencia directa del Teorema 30.7 de [27], el cual establece que todo espacio métrico compacto es una imagen continua del espacio de Cantor; sin embargo en el Teorema 77 se está mostrando explícitamente una función de cociente entre el espacio de Cantor $\sum^{\mathbb{N}}$ y el atractor A.

Para finalizar esta sección veamos ahora otro uso interesante de la función de direccionamiento, y es en la definición de tres clases de SIF´s, las cuales se refieren de alguna manera al *"tamaño"* de las zonas de intersección de las *çopias maximales"* del atractor del SIF, (si

A es el atractor del SIF $\{X; f_1, \ldots, f_N\}$ llamamos *copias maximales* de A a los conjuntos $f_1(A), f_2(A), \ldots, f_N(A)$).

A manera de motivación pensemos en los siguientes tres ejemplos de SIF´s:

1. $\left\{[0,1]; f_1(x) = \frac{1}{3}x,\ f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right\}$
2. $\left\{\mathbb{C}; f_1(z) = \frac{1}{2}z,\ f_2(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2},\ f_3(z) = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}i\right\}$
3. $\left\{[0,1]; f_1(x) = \frac{1}{2}x,\ f_2(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\right\}$

Sabemos ya que el atractor del primer SIF es el espacio de Cantor, notémoslo $\mathcal{C}$, cuyas copias maximales son disyuntas pues claramente $f_1(\mathcal{C}) \cap f_2(\mathcal{C}) = \emptyset$. En este caso cada punto del atractor tiene *exactamente una dirección.* Este es un ejemplo de una clase de SIF´s llamados totalmente disconexos.

FIGURA 19. SIF totalmente disconexo.

El atractor del segundo SIF es el triángulo de Sierpiński S, de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$.

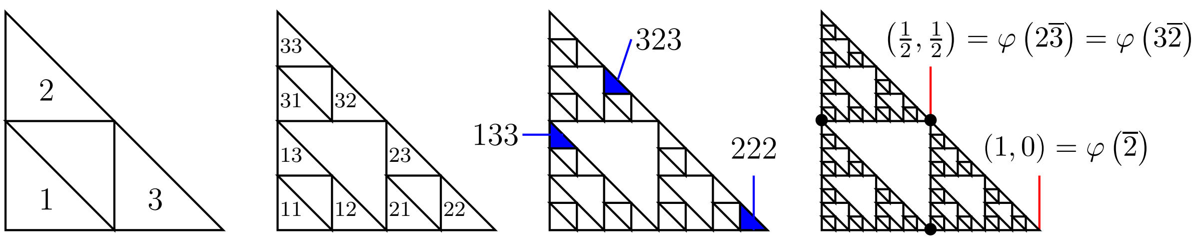


FIGURA 20. SIF totalmente disconexo.

En este caso algunos puntos del atractor tienen *exactamente una direcció*n (como los vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$), mientras que otros puntos tienen *exactamente dos direcciones* (como el punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ cuyas direcciones son $1\overline{3}$ y $3\overline{1}$, o, análogamente el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ cuyas direcciones con $2\overline{3}$ y $3\overline{2}$). Aunque la cantidad de puntos con más de una dirección es infinita, se trata de una cantidad en cierto sentido "pequeña" en relación con la cantidad total de puntos de S. Obsérvese que ahora, $f_1(S) \cap f_2(S)$, $f_1(S) \cap f_3(S)$ y $f_2(S) \cap f_3(S)$ son conjuntos unitarios. Este SIF corresponde a un ejemplo de lo que se llamará SIF "just-touching".

Para el SIF del tercer ejemplo se observa que el atractor resulta ser el mismo intervalo $I = [0,1]$ pues $f_1(I) \cup f_2(I) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right] = [0,1]$. La cantidad de puntos con más de una dirección es "grande" en algún sentido (por ejemplo todos los puntos del intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ tienen más de una dirección). En este caso $f_1(I) \cap f_2(I) = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$. Se trata de un tipo de SIF denominado "overlapping".

Finalizamos formalizando lo anterior:

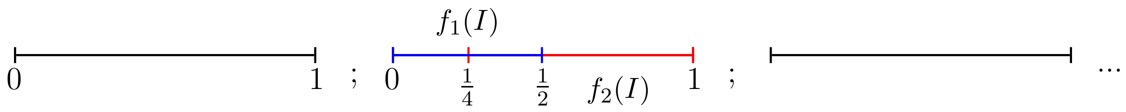


Figura 21. SIF ”overlapping ”.

Definición 81. *Si A es un atractor de un SIF $\{X; f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ y $\varphi : \sum^{\mathbb{N}} \to A$ su correspondiente función de direccionamiento,*

i) *Se dice que el SIF es* totalmente disconexo *si para todo $a \in A$, el conjunto $\varphi^{-1}(a)$ es unitario (es decir si cada punto del atractor tiene exactamente una dirección, o equivalentemente si φ es inyectiva).*

ii) *Se dice que el SIF es* just-touching *si* no *es totalmente disconexo pero existe un conjunto abierto $O \subseteq A$ tal que:*
  - *i)* $f_i(O) \cap f_j(O) = \emptyset, \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}, i \neq j,$ *y*
  - *ii)* $\bigcup_{i=1}^{N} f_i(O) \subseteq O$

iii) *Diremos que el SIF es* overlapping *si no es totalmente disconexo, ni es just-touching.*

7. El conjunto de los puntos atrapados y la Dinámica Simbólica

La siguiente definición es muy útil cuando estudiamos funciones definidas en el espacio $\mathbb{R}^n$. La redactamos para funciones en $\mathbb{R}$ sólo por comodidad.

Definición 82. *Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, el conjunto de todos los puntos x cuya órbita está acotada lo llamamos el* conjunto de los puntos atrapados *o el* conjunto de los puntos prisioneros. *Este conjunto lo denotamos con $J(f)$. Es decir,*

$$J(f) = \{x \in \mathbb{R} : o(x, f) \text{ está acotada}\}.$$

Observemos que si $x \in J(f)$, entonces $f(x)$ también está en $J(f)$ ya que la $o(f(x), f)$ está contenida en la $o(x, f)$. De aquí se sigue que $f(J(f)) \subset J(f)$.

Por otro lado, sea x en $J(f)$. Si existe y tal que $f(y) = x$, entonces y también está en $J(f)$ ya que

$$o(y, f) = \{y\} \cup o(x, f).$$

Así, si se tiene que $J(f) \subset f(\mathbb{R})$, entonces $J(f) \subset f(J(f))$, y con ello estos dos conjuntos son iguales, $J(f) = f(J(f))$. Es decir, $J(f)$ es un conjunto invariante bajo f.

Tal vez la importancia de este conjunto de puntos atrapados se vea si recordamos que para la función *Tienda* se tiene que $J(T) = [0, 1]$. Y es precisamente en este conjunto donde T tiene una dinámica caótica, y fuera de él su dinámica es muy sencilla.

Observación 83. *Si la función f está definida en los números complejos, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, y la regla de correspondencia de f se expresa de forma polinomial,*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_N z^N,$$

con $N \geq 2$ y $a_N \neq 0$, entonces $J(f)$ es conocido como el conjunto de Julia lleno de f *y la frontera de $J(f)$ es el* conjunto de Julia de f.

Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$P(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 3x & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Estudiaremos a continuación algunas propiedades dinámicas de esta función. En primer lugar nos interesa descubrir la estructura del conjunto $J(P)$. En particular demostraremos que este conjunto es un fractal. Una vez cumplida esta tarea demostraremos que P restringida a $J(P)$ es caótica. De aquí en adelante la letra P sólo la utilizaremos para designar esta función.

Las gráficas de P y T son muy parecidas. La única diferencia es la altura que alcanza el pico que ambas tienen en el punto $x = \frac{1}{2}$. Sin embargo, el conjunto de los puntos atrapados de una y otra es muy distinto.

Las demostraciones de las siguientes cuatro observaciones son casi inmediatas.

i) Para todo $x < 0$ se tiene que $P(x) < x$. Más aún, para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P^n(x) = 3^n x$. Así, $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$.

ii) Si $x > 1$, entonces $P(x) < 0$. Por lo tanto para estos puntos también se concluye que $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$.

iii) Los únicos puntos fijos de P son 0 y $\frac{3}{4}$, y ambos son repulsores.

iv) Si $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, entonces $P(x) > 1$ y, nuevamente, $\lim_{n\to\infty} P^n(x) = -\infty$.

Sobre el conjunto $J(P)$ hasta ahora sabemos lo siguiente:

$$J(P) \subset \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right], \text{ y } \left\{0, \frac{3}{4}\right\} \subset J(P).$$

Llamamos A_1 a la unión de los intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

La función P transforma al intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ en el intervalo $[0, 1]$ de manera lineal haciendo crecer las distancias por un factor de 3. El intervalo abierto $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ es transformado bajo P en el intervalo $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Así $J(P) \cap \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) = \emptyset$. Algo similar le sucede al intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Sea A_2 la unión de los 2^2 intervalos $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right]$, $\left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right]$ y $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$. Cada uno de estos intervalos es transformado bajo P^2 en el intervalo unitario. Este hecho provoca que el tercio de enmedio de cada uno de ellos esté formado por puntos que no están en $J(P)$. Con esta información podemos definir A_3 como la unión de 2^3 intervalos cerrados de longitud $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, tal que P^3 transforma a cada uno de ellos en el intervalo unitario, y tal que el conjunto $J(P)$ está contenido en A_3.

Podemos continuar el proceso anterior indefinidamente, quitando en cada paso puntos cuya órbita no está acotada. Los conjuntos A_n que se van formando son precisamente los que se utilizan en la construcción del conjunto de Cantor clásico. A este conjunto lo denotaremos con la letra C. Como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $J(P) \subset A_n$, entonces $J(P) \subset C$.

Por otro lado, si $x \in C$ entonces para toda $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$ y por ello $P^n(x) \in [0, 1]$. Esto implica que la órbita entera de x está en $[0, 1]$, así $x \in J(P)$. Por lo tanto $J(P) = C$.

Como $J(P)$ está contenido en la imagen de $\mathbb{R}$ bajo P, entonces $J(P)$ es un conjunto invariante de P.

Así nuestra función P nos ha proporcionado un conjunto invariante que es a su vez un conjunto fractal. Haremos algunos comentarios sobre este interesante hecho un poco más adelante. Por lo pronto nos interesa convencer al lector de que P, restringida a $J(P)$, es una función caótica. Así el conjunto de Cantor clásico es el escenario donde se lleva a cabo un sistema dinámico discreto caótico.

Ejercicio 51. *Encuentra un punto en el intervalo* $[0, 1]$ *tal que sea periódico de periodo* 3 *bajo la función* P.

A cada punto de $J(P)$ le vamos a asignar, mediante la función φ, una sucesión infinita formada solamente por ceros y unos.

Sea x_0 un punto en $J(P)$. Observemos que para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $P^n(x_0)$ está en el intervalo $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ o en el intervalo $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. La idea es asignar un 0 o un 1 según $P^n(x_0)$ se encuentre en el primer o en el segundo intervalo.

Sean $I_0 = \left[0, \frac{1}{3}\right]$ e $I_1 = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Entonces

$$\varphi(x_0) = \widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots),$$

donde las coordenadas de $\widehat{t}$ se definen de la siguiente manera: Para cada $n \geq 0$

$$t_n = \begin{cases} 0 & \text{si } P^n(x_0) \in I_0, \\ 1 & \text{si } P^n(x_0) \in I_1. \end{cases}$$

Sea

$$\Sigma_2 = \left\{\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) : \text{para cada } n \geq 0, t_n \in \{0, 1\}\right\}.$$

Ya habíamos visto este espacio antes, es el espacio de los códigos. Como sólo utilizamos dos símbolos, el 0 y el 1, la métrica está dada por la siguiente igualdad:

$$d\left(\widehat{t},\widehat{s}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t_n-s_n|}{3^n},$$

donde $\widehat{t}=(t_0,t_1,t_2,\ldots)$ y $\widehat{s}=(s_0,s_1,s_2,\ldots)$.

A la sucesión $\varphi(x_0)=\widehat{t}=(t_0,t_1,t_2,\ldots)$ se le llama, también, el *itinerario de* x_0. Si lo pensamos un poco este nombre tiene mucho sentido. El punto x_0 sólo puede *viajar*, al aplicarle P varias veces, a dos *ciudades*: I_0 e I_1. El valor que asuma t_n nos dirá de manera inmediata en cual de estos dos destinos se encuentra el punto $P^n(x_0)$.

Las siguientes cuatro proposiciones contienen las propiedades más importantes de la función $\varphi : J(P)\to\Sigma_2$. La meta es mostrar que φ es en realidad un homeomorfismo.

Proposición 84. $\varphi : J(P)\to\Sigma_2$ *es una función inyectiva.*

Demostración. Sea x_0 y y_0 dos puntos en $J(P)$ tales que $\widehat{t}=\varphi(x_0)=\varphi(y_0)=\widehat{s}$. Entonces para toda $n\geq 0$ se tiene que $t_n=s_n$. De aquí se sigue que para cada $n\in\mathbb{N}$, $P^{n-1}(x_0)$ y $P^{n-1}(y_0)$ están ambos en I_0 o ambos en I_1. Entonces

$$|P^n(x_0)-P^n(y_0)|=3\left|P^{n-1}(x_0)-P^{n-1}(y_0)\right|.$$

Y como para cada i, $0\leq i\leq n-2$, se tiene que $P^i(x_0)$ y $P^i(y_0)$ están ambos en I_0 o ambos en I_1, entonces tenemos que

$$|P^n(x_0)-P^n(y_0)|=3^n|x_0-y_0|.$$

De aquí se sigue que para toda $n\in\mathbb{N}$, $|x_0-y_0|\leq\frac{1}{3^n}$. Por lo tanto $x_0=y_0$. $\square$

Proposición 85. $\varphi : J(P)\to\Sigma_2$ *es una función suprayectiva.*

Demostración. Observemos primero que si $E=[a,b]$ es un intervalo contenido en $[0,1]$, entonces existen dos intervalos $E_0\subset I_0$ y $E_1\subset I_1$ tales que $P(E_i)=E$, $i=0,1$. Además la longitud de cada E_i es un tercio de la longitud de E.

Para los intervalos I_0 e I_1 existen dos intervalos en I_0, que llamaremos I_{00} e I_{01}, tales que $P(I_{00})=I_0$ y $P(I_{01})=I_1$, y existen dos intervalos en I_1, que ahora llamaremos I_{10} e I_{11}, tales que $P(I_{10})=I_0$ y $P(I_{11})=I_1$. La longitud de cada uno de estos cuatro intervalos cerrados es $\left(\frac{1}{3}\right)^2$. La unión de los cuatro intervalos nos da el conjunto A_2.

En el siguiente paso existen cuatro intervalos en I_0, llamados I_{000}, I_{001}, I_{010} e I_{011}, tales que la función P transforma de la siguiente manera:

$$\begin{array}{ll}I_{000}\to I_{00}, & I_{001}\to I_{01},\\ I_{010}\to I_{10}, & I_{011}\to I_{11}.\end{array}$$

De manera análoga existen cuatro intervalos en I_1 que se comportan de modo similar a los cuatro anteriores.

En este paso ya tenemos 2^3 intervalos de la forma $I_{s_0s_1s_2}$, $s_i\in\{0,1\}$ para $0\leq i\leq 2$, tales que $P(I_{s_0s_1s_2})=I_{s_1s_2}$, y la longitud de cada uno de ellos es $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

Obsérvese que si $x\in I_{s_0s_1s_2}$, entonces $x\in I_{s_0}$, $P(x)\in I_{s_1}$ y $P^2(x)\in I_{s_2}$.

En el paso n de esta construcción obtenemos 2^n intervalos de la forma $I_{s_0 s_1 s_2 \dots s_{n-1}}$, donde $s_i \in \{0,1\}$ para $0 \le i \le n-1$, tales que

$$P\left(I_{s_0 s_1 s_2,\dots,s_{n-1}}\right) = I_{s_1 s_2,\dots,s_{n-1}},$$

y la longitud de cada uno de ellos es $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Además si $x \in I_{s_0 s_1 s_2,\dots,s_{n-1}}$, entonces $x \in I_{s_0}$, $P(x) \in I_{s_1}$, $P^2(x) \in I_{s_2}$, y así hasta que $P^{n-1}(x)$ está en $I_{s_{n-1}}$.

Ahora sí demostraremos que φ es suprayectiva.

Sea $\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ un punto en Σ_2.

Sea $n \in \mathbb{N}$ y consideremos el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}$.

Observemos que si x es un punto en $J(P)$ tal que $x \in I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}$, entonces $\varphi(x)$ y $\widehat{t}$ tienen iguales las primeras $n+1$ coordenadas.

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}$ está contenido en el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_{n-1}}$, la colección $\{I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}\}_{n=0}^{\infty}$ forma una sucesión de intervalos cerrados encajados, cada uno de ellos distino del vacío. Sabemos también que la longitud del intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Entonces la intersección

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}$$

es exáctamente un punto, que llamaremos x_0.

Por la forma en que encontramos a x_0 se sigue que $x_0 \in J(P)$ y que $\varphi(x_0)$ es $\widehat{t}$. □

Proposición 86. *$\varphi : J(P) \to \Sigma_2$ es una función continua.*

Demostración. Sean $x_0 \in J(P)$, $\varphi(x_0) = \widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots)$ y $\varepsilon > 0$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

Consideremos el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}$. Este es uno de los 2^N intervalos que componen A_N. Su longitud es $\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}$. Además es inmediato que $x_0 \in I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}$.

Observemos que si x y y son dos puntos de $J(P)$ tales que también están en $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}$, entonces $\varphi(x)$ y $\varphi(y)$ coinciden desde la primera hasta la coordenada N. Así

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \le \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Sea $\delta > 0$ tal que

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A_N \subset I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}.$$

Si $|x_0 - x| < \delta$ y $x \in J(P)$, entonces $x \in I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}$ y $d(\varphi(x_0), \varphi(x)) < \varepsilon$. □

Proposición 87. *$\varphi^{-1} : \Sigma_2 \to J(P)$ es una función continua.*

Demostración. Sean $\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \dots) \in \Sigma_2$ y $\varepsilon > 0$.

Como la longitud del intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que la longitud de $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}$ es menor que ε.

Sea $\delta = \frac{1}{3^N}$. Observemos que si $\widehat{s} \in \Sigma_2$ es tal que $d\left(\widehat{t}, \widehat{s}\right) < \delta$, entonces para cada i, $0 \le i \le N$ se tiene $t_i = s_i$. Esto implica que $\varphi^{-1}(\widehat{s})$ también está en el intervalo $I_{t_0 t_1 t_2,\dots,t_N}$. Por ello la distancia entre $\varphi^{-1}\left(\widehat{t}\right)$ y $\varphi^{-1}(\widehat{s})$ es menor que ε. □

La demostración del siguiente resultado es inmediata a partir de las proposiciones 86 y 87.

Corolario 88. *La función* $\varphi : J(P) \to \Sigma_2$ *es un homeomorfismo.*

La siguiente observación nos permitirá definir una función del espacio Σ_2 en sí mismo.

Sea x en $J(P)$. La idea es encontrar una relación entre los itinerarios de x y de $P(x)$. Supongamos que $\varphi(x) = (t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots)$. Entonces, como la órbita de $P(x)$ siempre va un paso adelante de la órbita de x, es inmediato que $\varphi(P(x)) = (t_1, t_2, t_3, \ldots)$.

Es natural, entonces, definir la siguiente función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$,

$$\sigma\left((t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots)\right) = (t_1, t_2, t_3, \ldots).$$

El punto $\sigma\left(\widehat{t}\right)$ tiene una infinidad de coordenadas. Para encontrarlas sólo quitamos la primera coordenada de $\widehat{t}$, t_0, y desplazamos todas las demás un lugar hacia la izquierda. Así $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es conocida como la *función desplazamiento* o como la *función corrimiento.*

La demostración de que esta función es continua no es tan difícil y el lector es invitado a hacerla en el ejercicio 53.

Para cada punto $x \in J(P)$ se tiene que $\varphi(P(x)) = \sigma(\varphi(x))$. Esta igualdad es la clave para decifrar la dinámica de P restringida al conjunto de los puntos atrapados. Este hecho es tan importante que merece una definición que tome en cuenta a muchos posibles casos semejantes.

Definición 89. *Sean* $f : X \to X$ *y* $g : Y \to Y$ *dos funciones continuas definidas en sendos espacios métricos. Decimos que las funciones* f *y* g *son* topológicamente conjugadas*, o simplemente* conjugadas*, si existe un homeomorfismo* $h : X \to Y$ *tal que para todo punto* $x \in X$ *se tiene que* $h(f(x)) = g(h(x))$*.*

La condición de conjugación a veces se expresa diciendo que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ h\downarrow & & \downarrow h \\ Y & \xrightarrow{g} & Y. \end{array}$$

Si $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son dos funciones conjugadas, entonces las propiedades dinámicas de f son esencialmente iguales a las propiedades dinámicas de g. Dedicaremos la siguiente sección a la tarea de darle cuerpo a esta afirmación. En particular demostraremos que, bajo esta hipótesis, la función f es caótica en X si y solamente si la función g es caótica en Y.

Las funciones $P : J(P) \to J(P)$ y $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ son conjugadas bajo el homeomorfismo φ. Para demostrar que P es caótica en $J(P)$, demostraremos primero que σ es caótica en Σ_2.

Proposición 90. *El conjunto de puntos periódicos de* σ *es denso en* Σ_2*.*

Demostración. Sean $\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma_2$ y $\varepsilon > 0$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Considera el siguiente punto en Σ_2:

$$\widehat{s} = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N, t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N, t_0, t_1, t_2, \ldots)$$

donde la cadena finita de coordenadas $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N$ se repite indefinidamente.

Es inmediato que $\sigma^{N+1}\left(\widehat{s}\right) = \widehat{s}$ y que la distancia de $\widehat{t}$ a $\widehat{s}$ es menor que ε. $\square$

Proposición 91. *La función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es transitiva.*

Demostración. Sean $\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$ y $\widehat{s} = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$ dos puntos en Σ_2 y $\varepsilon > 0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \varepsilon$. Considera el siguiente punto en Σ_2:

$$\widehat{u} = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_N, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_N, u_{2N+2}, \ldots).$$

Por la forma que le hemos asignado al punto $\widehat{u}$ sus coordenadas, las siguientes desigualdades son inmediatas:

$$d\left(\widehat{t}, \widehat{s}\right) < \varepsilon, \text{ y } d\left(\widehat{s}, \sigma^{N+1}\left(\widehat{s}\right)\right) < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es transitiva. □

Proposición 92. *La función $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Toma $\varepsilon_0 = 1$. Esta va a ser nuestra constante de sensibilidad.

Sean $\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in \Sigma_2$ y $\delta > 0$. Demostraremos que existen un punto $\widehat{s}$, que está a distancia menor que δ de $\widehat{t}$, y $N \in \mathbb{N}$ tales que $d\left(\sigma^N\left(\widehat{t}\right), \sigma^N\left(\widehat{s}\right)\right) \geq \varepsilon_0$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{3^n} < \delta$. Consideramos ahora un punto $\widehat{s}$ tal que sus primeras N coordenadas coincidan con las primeras N coordenadas de $\widehat{t}$,

$$\widehat{s} = (t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}, s_N, s_{N+1}, \ldots,),$$

y tal que el valor de s_N sea distinto de valor de t_N.

Obsérvese que la distancia de $\widehat{t}$ a $\widehat{s}$ es menor que δ. Además, como $\sigma^N\left(\widehat{t}\right)$ y $\sigma^N\left(\widehat{s}\right)$ difieren en la primera coordenada, $d\left(\sigma^N\left(\widehat{t}\right), \sigma^N\left(\widehat{s}\right)\right) \geq 1$. □

De las tres proposiciones anteriores se sigue que la función σ es caótica en Σ_2.

Ejercicio 52. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $J(f) \neq \emptyset$, entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Ejercicio 53. *Demuestra que la función corrimiento $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ es continua.*

8. Equivalencia topológica

Varias son las propiedades dinámicas que se preservan a través de la equivalencia topológica. Dedicaremos por entero esta sección al estudio de algunas de ellas.

La hipótesis para todos los resultados contenidos en esta sección es la siguiente: Los espacios X y Y son compactos y las funciones $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ son conjugadas bajo el homeomorfismo $h : X \to Y$.

Proposición 93. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in X$ se tiene que $h(f^n(x)) = g^n(h(x))$.*

Demostración. Procederemos por inducción. Como f y g son conjugadas, la afirmación es cierta para el caso $n = 1$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que para todo $x \in X$ se tiene que $h\left(f^k(x)\right) = g^k(h(x))$.

Entonces

$$\begin{aligned} h\left(f^{k+1}(x)\right) &= h\left(f^k\left(f(x)\right)\right) = g^k(h(f(x))) \\ &= g^k(g(h(x))) = g^{k+1}(h(x)). \end{aligned}$$

□

Proposición 94. *Las funciones $g : Y \to Y$ y $f : X \to X$ son conjugadas bajo el homeomorfismo $h^{-1} : Y \to X$.*

Demostración. Demostraremos que para todo $y \in Y$ se tiene que $h^{-1}(g(y)) = f\left(h^{-1}(y)\right)$.

Sea y un punto en Y. Entonces

$$g(y) = g\left(h\left(h^{-1}(y)\right)\right) = h\left(f\left(h^{-1}(y)\right)\right).$$

Aplicando el homeomorfismo h^{-1} a los extremos de la expresión anterior obtenemos la igualdad siguiente: $h^{-1}(g(y)) = f\left(h^{-1}(y)\right)$. □

Proposición 95. *El conjunto $Per(f)$ es denso en X si y sólo si el conjunto $Per(g)$ es denso en Y.*

Demostración. Gracias a la proposición 94 es suficiente demostrar que si $Per(f)$ es denso en X, entonces $Per(g)$ es denso en Y.

Sea $U \subset Y$ un conjuto abierto y distinto del vacío. Entonces $h^{-1}(U)$ es un subconjunto de X que es también abierto y distinto del vacío. Como $Per(f)$ es denso en X, existe x_0, punto periódico de f, en $h^{-1}(U)$.

Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $f^N(x_0) = x_0$. Entonces $h(x_0) = y_0$ es un punto en U y

$$g^N(y_0) = g^N(h(x_0)) = h\left(f^N(x_0)\right) = h(x_0) = y_0.$$

Así y_0 es un punto periódico de g que está en U. □

Proposición 96. *La función f es transitiva en X si y sólo si g es transitiva en Y.*

Demostración. Es suficiente demostrar que si f es transitiva en X, entonces la función g es transitiva en Y.

Sean U y W dos conjuntos abiertos, no vacíos, en Y. Entonces los conjuntos $h^{-1}(U)$ y $h^{-1}(W)$ son conjuntos no vacíos y abiertos en el espacio X.

Como f es transitiva en X, existen x_0 en $h^{-1}(U)$ y N, un número natural, tales que $f^N(x_0)$ está en $h^{-1}(W)$. Entonces $h(x_0) \in U$ y $g^N(h(x_0)) = h\left(f^N(x_0)\right) \in W$. De aquí se sigue que $g^N(U) \cap W \neq \emptyset$. □

Proposición 97. *La función f es sensible a las condiciones iniciales en X si y sólo si g es sensible a las condiciones iniciales en Y.*

Demostración. Nuevamente es suficiente demostrar sólo una de las implicaciones.

Supongamos que f es sensible a las condiciones iniciales en X. Sea $\varepsilon_0 > 0$ una constante de sensibilidad para f.

Como Y es un espacio compacto y $h^{-1} : Y \to X$ es continua, entonces h^{-1} es uniformemente continua en Y. Para el valor ε_0, existe $\delta_0 > 0$ tal que para toda pareja de puntos y_1 y y_2 en Y tales que $d_Y(y_1, y_2) < \delta_0$ se tiene que $d_X\left(h^{-1}(y_1), h^{-1}(y_2)\right) < \varepsilon_0$.

Demostraremos que δ_0 es una constante de sensibilidad para $g : Y \to Y$.

Sean y_0 un punto en Y y $\gamma > 0$. Sea $U = B(y_0; \gamma)$. El conjunto U es abierto en Y. Sea $x_0 = h^{-1}(y_0)$.

El conjunto $h^{-1}(U)$ es abierto en X y contiene al punto x_0. Por lo tanto existen $x_1 \in h^{-1}(U)$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$d_X\left(f^N(x_0), f^N(x_1)\right) \geq \varepsilon_0.$$

Los correspondientes puntos $h(x_0) = y_0$ y $h(x_1)$ están en U.

Además, como

$$d_X\left(h^{-1}\left(g^N(y_0)\right), h^{-1}\left(g^N(h(x_1))\right)\right) = d_X\left(f^N(x_0), f^N(x_1)\right) \geq \varepsilon_0,$$

se tiene que

$$d_Y\left(g^N(y_0), g^N(h(x_1))\right) \geq \delta_0.$$

□

Ahora la demostración del siguiente corolario es inmediata.

Corolario 98. *La función f es caótica en X si y sólo si g es caótica en Y.*

Otra afirmación que ya podemos fácilmente demostrar es la siguiente:

Corolario 99. *La función P es caótica en el conjunto de los puntos atrapados $J(P)$.*

Demostración. Las funciones $P : J(P) \to J(P)$ y $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ son conjugadas. Como σ es caótica en Σ_2, entonces P es caótica en $J(P)$. □

Ejercicio 54. *Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ la función lineal a pedazos definida en el ejercicio 7. Demuestra que g es una función caótica en $[0,1]$.*

Ejercicio 55. *Sean c y k dos números reales distintos de cero. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x + c$ y $g(x) = x + k$. Demuestra que f y g son funciones conjugadas.* Sugerencia. *Supón que el homemorfismo buscado es de la forma $h(x) = \alpha x + \beta$.*

9. El omega conjunto límite

Sean $f : X \to X$ y $x_0 \in X$. Decimos que $y_0 \in X$ es *punto límite* de la órbita $o(x_0, f)$ si existe una sucesión $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$, $n_1 < n_2 < n_3 < ...$, en $\mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n_i \to \infty} f^{n_i}(x_0) = y_0.$$

Todos los puntos límite de $o(x_0, f)$ forman el *omega conjunto límite* de x_0 bajo f. A este conjunto lo denotamos por: $\omega(x_0, f)$. Es decir,

$$\omega(x_0, f) = \left\{ y \in X : \text{ existe } \{n_i\} \subset \mathbb{N}, \lim_{n_i \to \infty} f^{n_i}(x_0) = y \right\}.$$

Ejemplo 100. *Sea* $T : [0,1] \to [0,1]$ *la función* Tienda.

a) Si $x_0 = \frac{2}{3}$ *, entonces* $\omega(x_0, T) = \left\{\frac{2}{3}\right\}$.
b) Si $x_0 = \frac{2}{5}$ *, entonces* $\omega(x_0, T) = \left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right\}$.
c) Sea $k \in \mathbb{N}$ *fijo. Si* $x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, *entonces* $\omega(x_0, T) = \{0\}$.

Proposición 101. *Sea* X *un espacio compacto. Entonces para todo* $x \in X$, $\omega(x, f) \neq \emptyset$.

Demostración. Sea $x \in X$. Como X es compacto, entonces la sucesión $\{f^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión convergente, digamos a $y \in X$. Entonces $y \in \omega(x, f)$. $\square$

Proposición 102. *Para todo* $x \in X$, $\omega(x, f)$ *es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión contenida en $\omega(x_0, f)$ tal que $\lim_{n \to \infty} y_n = y_0$. Demostraremos que $y_0 \in \omega(x_0, f)$ y con ello concluimos que $\omega(x_0, f)$ es cerrado.

Como (y_n) converge a y_0, para $\varepsilon_1 = 1$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_1}, y_0) < \frac{\varepsilon_1}{2}$.

Como $y_{n_1} \in \omega(x_0, f)$, entonces existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k_1}(x_0) \in B\left(y_{n_1}, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_1).$$

Para $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_{n_2}, y_0) < \frac{\varepsilon_2}{2}$. Como $y_{n_2} \in \omega(x_0, f)$, entonces existe $k_2 > k_1$ tal que

$$f^{k_2}(x_0) \in B\left(y_{n_2}, \frac{\varepsilon_2}{2}\right) \subset B(y_0, \varepsilon_2).$$

De esta manera encontramos una sucesión de números naturales $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$ tales que $f^{k_j}(x_0) \in B\left(y_0, \frac{1}{j}\right)$. Por lo tanto, $y_0 \in \omega(x_0, f)$. $\square$

Proposición 103. *Sea* X *un espacio compacto. Para todo* $x \in X$, $f(\omega(x, f)) = \omega(x, f)$.

Demostración. Tomemos $x_0 \in X$ y consideremos su $\omega(x_0, f)$.

Demostraremos primero que $f(\omega(x_0, f))$ está contenido en $\omega(x_0, f)$.

Sea $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. Existe $z_0 \in \omega(x_0, f)$ tal que $f(z_0) = y_0$. Existe además una sucesión $\{n_i\}$ contenida en $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \to \infty} f^{n_i}(x_0) = z_0$.

Entonces, gracias a la continuidad de la función f, $\lim_{i \to \infty} f^{n_i+1}(x_0) = f(z_0) = y_0$. Así y_0 está en el $\omega(x_0, f)$. Por lo tanto $f(\omega(x_0, f))$ es subconjunto de $\omega(x_0, f)$.

Ahora demostraremos que $\omega(x_0, f) \subset f(\omega(x_0, f))$.

Sea $y_0 \in \omega(x_0, f)$. Existe una sucesión $\{n_i\} \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{i \to \infty} f^{n_i}(x_0) = y_0$. Podemos suponer que cada n_i es mayor o igual a 2.

Como X es compacto y la sucesión $\{f^{n_i-1}(x_0)\}$ está contenida en X, entonces existe una subsucesión de $\{n_i - 1\}$ contenida en $\mathbb{N}$ tal que $\lim_{j \to \infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0) = z_0$.

Así $z_0 \in \omega(x_0, f)$ y

$$f(z_0) = f\left(\lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}-1}(x_0)\right) = \lim_{j\to\infty} f^{n_{i_j}}(x_0) = y_0.$$

Por lo tanto, $y_0 \in f(\omega(x_0, f))$. $\square$

Proposición 104. *Sea* $T : [0,1] \to [0,1]$ *la función* Tienda. *Entonces existe* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $\omega(x_0, T) = [0,1]$.

Demostración. Sabemos que T es transitiva en $[0,1]$. Entonces existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $o(x_0, T)$ es densa en $[0,1]$. Afirmamos que $\omega(x_0, T) = [0,1]$.

Sean $x \in [0,1]$, y $\varepsilon > 0$. Como la órbita $o(x_0, T)$ es densa en $[0,1]$, para todo $k \in \mathbb{N}$ la órbita $o\left(T^k(x_0), T\right)$ también es densa en $[0,1]$ (ver ejercicio 44).

Entonces existe una sucesión de números naturales $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ tales que

$$|T^{n_1}(x_0) - x| < 1,\ |T^{n_2}(x_0) - x| < \frac{1}{2}, \ldots,\ |T^{n_k}(x_0) - x| < \frac{1}{k}, \ldots$$

Así obtenemos que $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}(x_0) = x$. Por lo tanto $x \in \omega(x_0, T)$. Esto implica que

$$[0,1] \subset \omega(x_0, T).$$

Y así $\omega(x_0, T) = [0,1]$. $\square$

Ejercicio 56. *Sea* $x_0 \in X$. *Entonces para cada* $k \in \mathbb{N}$, *se tiene que* $\omega(x_0, f) = \omega\left(f^k(x_0), f\right)$.

Ejercicio 57. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$, *y sea* $x_0 \in [0,1]$. *Verdadero o falso:* $\omega(x_0, f) = \omega(x_0, f^2)$.

Ejercicio 58. *Sea* $T : [0,1] \to [0,1]$ *la función* Tienda. *Demuestra que si* $x_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, *entonces la cardinalidad de* $\omega(x_0, T)$ *es finita.*

Ejercicio 59. *Sean* $f : X \to X$ *y* x_0 *un punto en* X. *Demuestra lo siguiente: Si* $\omega(x_0, f) = \{x_1, x_2\}$, *entonces* $f(x_1) = x_2$.

Pregunta 60. *¿Existen un espacio métrico* X, *una función continua* $f : X \to X$ *y un punto* x_0 *en* X *tales que* $f(\omega(x_0, f)) \neq \omega(x_0, f)$*?*

Ejercicio 61. *Sean* $f : X \to X$, *y* x_0 *y* y_0 *dos puntos en* X. *Demuestra lo siguiente: Si* $\lim_{n\to\infty} d(f^n(x_0), f^n(y_0)) = 0$, *entonces* $\omega(x_0, f) = \omega(y_0, f)$.

10. Hiperespacios y funciones inducidas

Sea (X, d) un espacio métrico compacto. La colección de todos los subconjuntos de X es el *conjunto potencia de* X. Un *hiperespacio* de X es un subconjunto del conjunto potencia de X junto con una función distancia. En esta sección sólo trataremos con los siguientes dos hiperespacios de X:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(X) = \{A \subset X : A \text{ es compacto y } A \neq \emptyset\}$$

y

$$C(X) = \{A \in \boldsymbol{\mathcal{H}}(X) : A \text{ es conexo}\}.$$

Dedicaremos la primera parte de esta sección al hiperespacio $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$.

Observación 105. *En algunos libros el hiperespacio $\boldsymbol{\mathcal{H}}(X)$ se denota también con el símbolo 2^X. A lo largo de esta sección utilizaremos este segundo símbolo.*

Recordemos lo siguiente: Dados A y B elementos de 2^X, la métrica de Hausdorff está dada por

$$\boldsymbol{h}(A, B) = \text{máx}\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

Dados $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$, la *nube de radio ε alrededor de A* es el conjunto:

$$N(A; \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon) = \{x \in X : \text{existe } a \in A,\ d(x, a) < \varepsilon\}.$$

Dados A y B en 2^X, sea

$$j(A, B) = \text{ínf}\{\varepsilon > 0 : A \subset N(B, \varepsilon) \text{ y } B \subset N(A, \varepsilon)\}.$$

Proposición 106. *Sean A y B dos elementos de 2^X. Entonces $\boldsymbol{h}(A, B) = j(A, B)$.*

Demostración. Dados A y B en 2^X, sea $\delta = \boldsymbol{h}(A, B)$.

Como $d(A, B) \leq \delta$ y $d(B, A) \leq \delta$, entonces para todo $\varepsilon > \delta$ se tiene que $A \subset N(B, \varepsilon)$ y $B \subset N(A, \varepsilon)$. De aquí que $j(A, B) \leq \delta$.

Por otro lado, y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $d(A, B) = \delta$. Entonces existe $a_0 \in A$ tal que $d(a_0, B) = \delta$. De aquí que para todo $b \in B$, $d(a_0, b) \geq \delta$. Y así, si $A \subset N(\varepsilon, B)$, entonces $\varepsilon > \delta$. Esto implica que $\delta \leq j(A, B)$.

Por lo tanto $j(A, B) = \delta = \boldsymbol{h}(A, B)$. $\square$

Sean X y Y dos espacios métricos compactos con métricas d y d' respectivamente. Sea f una función continua de X en Y. La función f induce una función entre los respectivos hiperespacios que denotaremos así:

$$2^f : 2^X \to 2^Y.$$

Esta nueva función tiene la siguiente regla de correspondencia: Si $A \in 2^X$, entonces

$$2^f(A) = f(A) = \{y \in Y : \text{ existe } a \in A,\ f(a) = y\}.$$

Como $f : X \to Y$ es continua, entonces 2^f está bien definida, es decir, $2^f(A)$ sí es un elemento de 2^Y.

La función 2^f es conocida como la *función inducida* por f en el hiperespacio 2^X.

Proposición 107. *La función inducida $2^f : 2^X \to 2^Y$ es continua.*

Demostración. Denotamos con $\boldsymbol{h}_d$ la métrica de Hausdorff en 2^X y con $\boldsymbol{h}_{d'}$ la métrica de Hausdorff en 2^Y. Sea $\varepsilon > 0$. Demostremos que existe $\delta > 0$ tal que si A y B son dos elementos de 2^X tales que $\boldsymbol{h}_d(A, B) < \delta$, entonces $\boldsymbol{h}_{d'}\left(2^f(A), 2^f(B)\right) < \varepsilon$.

Como $f : X \to Y$ es continua y X es un espacio compacto, entonces f es uniformemente continua en X. Existe $\delta^* > 0$ tal que si $x_1, x_2 \in X$ son tales que $d(x_1, x_2) < \delta^*$, entonces $d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Sea $\delta = \delta^*$. Sean $A, B \in 2^X$ tales que:

$$\boldsymbol{h}_d(A, B) < \delta.$$

Para cada $z \in f(A)$. Existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $f(a) = z$ y $d(a, b) < \delta$.

Entonces $d'(f(a), f(b)) < \varepsilon$, y por tanto,

$$f(A) \subset N(f(B), \varepsilon).$$

De manera análoga, se obtiene que:

$$f(B) \subset N(f(A), \varepsilon).$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{h}_{d'}(f(A), f(B)) < \varepsilon.$$

□

10.1. Propiedades dinámicas de la función inducida. La función $f : X \to X$ nos da de *manera natural* una función en el hiperespacio 2^X, $2^f : 2^X \to 2^X$. Al aplicar f varias veces, los puntos de X se van moviendo a lo largo de sus respectivas órbitas. La función 2^f se aplica a subconjuntos compactos de X. Podemos intuir que al aplicar 2^f varias veces lo que se mueve ahora son los subconjuntos compactos de X. Es decir, 2^f nos da un sistema dinámico definido ahora en el hiperespacio 2^X. Esto suena muy bien: ¡Ahora tenemos conjuntos que se mueven!

Dada la relación tan estrecha que existe entre f y 2^f, la pregunta obligada es: ¿Cuál es la relación entre las propiedades dinámicas de f y las propiedades dinámicas de 2^f?

Haremos en esta sección algunos comentarios sobre la respuesta a esta pregunta. Debemos advertir al lector, a la lectora, que la pregunta es muy amplia, tan amplia que en estos momentos no se cuenta con una respuesta completa a ella. La búsqueda de una respuesta global nos lleva directo a terrenos en los que en estos momentos se hace investigación matemática. Es claro que esta pregunta es, en esencia, muchas preguntas. Y muchas de estas preguntitas carecen, hoy día, de respuesta.

Iniciemos con un ejemplo.

Sea $T : [0, 1] \to [0, 1]$ la función *Tienda*, y sea

$$2^{[0,1]} = \{A \subset [0, 1] : A \neq \emptyset,\ A \text{ es compacto}\}.$$

Dados A y B en $2^{[0,1]}$, $\boldsymbol{h}(A, B)$ es la distancia de Hausdorff entre A y B, construida a partir de la distancia usual en $\mathbb{R}$.

La función inducida por T en $2^{[0,1]}$ la denotamos por 2^T. Para cada A en $2^{[0,1]}$,

$$2^T(A) = \{T(a) : a \in A\} = T(A).$$

Obsérvese que dado $A \in 2^{[0,1]}$, y dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\left(2^T\right)^n(A) = T^n(A)$. Esta igualdad es muy importante y aparecerá varias veces en esta sección.

Conocemos ya algunas propiedades dinámicas de $T : [0,1] \to [0,1]$. En particular, T es caótica en $[0,1]$. Mostraremos a continuación algunas propiedades dinámicas de la función $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$. En particular, demostraremos que 2^T también es caótica en $2^{[0,1]}$.

Proposición 108. *La función inducida $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ tiene densidad de puntos periódicos.*

Demostración. Sean $A \in 2^{[0,1]}$ y $\varepsilon > 0$. Demostraremos que existen $B \in 2^T$ y $M \in \mathbb{N}$, tales que $\boldsymbol{h}(A,B) < \varepsilon$ y $\left(2^T\right)^M (B) = B$.

Como A es compacto, existen k puntos en A, $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B\left(a_i; \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Como el conjunto de puntos periódicos de T es denso en $[0,1]$, para cada i, $1 \leq i \leq k$, existe $b_i \in Per(T)$ tal que $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Obsérvese que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(b_i; \varepsilon) = N(\{b_1, b_2, ..., b_k\}, \varepsilon) \text{ y } \{b_1, b_2, ..., b_k\} \subset N(A, \varepsilon).$$

Por tanto, $\boldsymbol{h}(A, \{b_1, b_2, ..., b_n\}) < \varepsilon$.

Ahora, sea $M \in \mathbb{N}$ tal que para toda i, $1 \leq i \leq k$ se tenga que $T^M(b_i) = b_i$. Tal número M sí existe. Por ejemplo podemos tomar M como el mínimo común múltiplo de los periodos de los puntos b_i, $1 \leq i \leq k$. Sea $B = \{b_1, b_2, ..., b_k\}$. Entonces $\boldsymbol{h}(A,B) < \varepsilon$, $B \in 2^{[0,1]}$, y $\left(2^T\right)^M (B) = T^M(B) = B$. □

Los siguientes tres lemas contienen herramientas que nos ayudarán en la demostración de la transitividad de la función $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$.

Lema 109. *Sean a_1, a_2, b_1, b_2 cuatro puntos en $[0,1]$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existen dos puntos c_1 y c_2 en $[0,1]$ y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que:*

i) $\boldsymbol{h}(\{a_1, a_2\}, \{c_1, c_2\}) < \varepsilon$, *y*
ii) $\boldsymbol{h}\left(\{b_1, b_2\}, \left\{T^N(c_1), T^N(c_2)\right\}\right) < \varepsilon$.

Demostración. Consideremos los siguientes dos conjuntos:

$$[0,1] \cap (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) = U, \ [0,1] \cap (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) = V.$$

Por el corolario 11, existen n_1, n_2 en $\mathbb{N}$ tales que:

$$T^{n_1}(U) = [0,1] \text{ y } T^{n_2}(V) = [0,1].$$

Sea $N = \max\{n_1, n_2\}$. Como $T^N(U) = [0,1]$, existe $c_1 \in U$ tal que

$$T^N(c_1) \in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \cap [0,1].$$

De manera análoga existe $c_2 \in V$, $c_2 \neq c_1$, tal que

$$T^N(c_2) \in (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \cap [0,1].$$

Los puntos c_1 y c_2 cumplen lo prometido. □

Lema 110. *Sean* $\{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\} = A$ *y* $\{b_1, ..., b_{n_2}\} = B$ *dos colecciones de puntos en* $[0,1]$ *tales que* $n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_2$*. Sea* $\varepsilon > 0$*. Entonces existe una colección de* n_1 *puntos* $\{c_1, c_2, ..., c_{n_1}\} = C$ *y existe* $N \in \mathbb{N}$ *tales que*

$$\boldsymbol{h}(A, C) < \varepsilon \ y \ \boldsymbol{h}\left(B, \left(2^T\right)^N (C)\right) < \varepsilon.$$

Demostración. De forma análoga a la demostración del lema enterior, podemos encontar n_1 puntos, $c_1, ..., c_{n_1}$, tales que

$$\begin{aligned} c_1 &\in (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \cap [0,1], \\ c_2 &\in (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \cap [0,1], \\ &\vdots \\ c_{n_1} &\in (a_{n_1} - \varepsilon, a_{n_1} + \varepsilon) \cap [0,1], \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} T^N(c_1) &\in (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \cap [0,1], \\ T^N(c_2) &\in (b_2 - \varepsilon, b_2 + \varepsilon) \cap [0,1], \\ &\vdots \\ T^N(c_{n_2-1}) &\in (b_{n_2-1} - \varepsilon, b_{n_2-1} + \varepsilon) \cap [0,1], \\ \left\{T^N(c_{n_2}), ..., T^N(c_{n_1})\right\} &\subset (b_{n_2} - \varepsilon, b_{n_2} + \varepsilon) \cap [0,1]. \end{aligned}$$

La colección $C = \{c_1, c_2, ..., c_{n1}\}$ cumple la condición del lema. □

Lema 111. *Sean* $\{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\} = A$ *y* $\{b_1, ..., b_{n_2}\} = B$ *dos colecciones de puntos en* $[0,1]$ *tales que* $n_1 < n_2$*. Sea* $\varepsilon > 0$*. Entonces existe una colección de* n_2 *puntos,* $\{c_1, c_2, ..., c_{n_2}\} = C$ *y existe* $N \in \mathbb{N}$ *tales que* $\boldsymbol{h}(A, C) < \varepsilon$*, y* $\boldsymbol{h}\left(B, \left(2^T\right)^N (C)\right) < \varepsilon$*.*

Demostración. Es análoga a la demostración del lema anterior. □

Ejercicio 62. *Demuestra el lema 111.*

Proposición 112. *La función inducida* $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ *es transitiva.*

Demostración. Sean A, B dos elementos de $2^{[0,1]}$ y sea $\varepsilon > 0$. Para convencernos que 2^T es transitiva es suficiente demostrar que existe un conjunto compacto C, no vacío, y existe una $N \in \mathbb{N}$ tales que $\boldsymbol{h}(A, C) < \varepsilon$ y $\boldsymbol{h}\left(B, \left(2^T\right)^N (C)\right) < \varepsilon$.

Como A y B son conjuntos compactos, existen dos colecciones de puntos:

$$\{a_1, a_2, ..., a_{n_1}\} \subset A, \text{ y } \{b_1, b_2, ..., b_{n_2}\} \subset B,$$

tales que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B\left(a_i; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $B \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B\left(b_i; \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Por los lemas anteriores, existe una colección de M puntos, digamos $\{c_1, c_2, ..., c_M\}$, donde $M = \text{máx}\{n_1, n_2\}$, y existe $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\boldsymbol{h}(\{a_1, ..., a_{n_1}\}, \{c_1, ..., c_M\}) < \frac{\varepsilon}{2},$$

y

$$\boldsymbol{h}\left(\{b_1,...,b_{n_2}\},\left\{T^N(c_1),...,T^N(c_M)\right\}\right)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $C=\{c_1,c_2,...,c_M\}$. Observemos que

$$\boldsymbol{h}(A,C)<\varepsilon \text{ y } \boldsymbol{h}\left(B,\left(2^T\right)^N(C)\right)<\varepsilon.$$

Por lo tanto la función 2^T es transitiva en $2^{[0,1]}$. □

Ya comentamos que la densidad de puntos periódicos y la transitividad, en espacios perfectos, implican la sensibilidad a las condiciones iniciales. No es difícil de demostrar que $2^{[0,1]}$ es perfecto (ver ejercicio 63). Por tanto la función $2^T:2^{[0,1]}\to 2^{[0,1]}$ es sensible a las condiciones iniciales.

Ejercicio 63. *Demuestra que el hiperespacio* $2^{[0,1]}$ *es un conjunto perfecto.*

Daremos a continuación otra demostración de la sensibilidad a las condiciones iniciales de la función $2^T:2^{[0,1]}\to 2^{[0,1]}$.

Proposición 113. *La función inducida* $2^T:2^{[0,1]}\to 2^{[0,1]}$ *es sensible a las condiciones iniciales.*

Demostración. Sabemos que la función T tiene dos puntos fijos: 0 y $\frac{2}{3}$. Gracias al ejercicio 14 podemos concluir que los siguientes dos conjuntos son densos en $[0,1]$:

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}(0) \text{ y } B=\bigcup_{n=1}^{\infty}T^{-n}\left(\frac{2}{3}\right).$$

Sean $C\in 2^{[0,1]}$ y $\varepsilon>0$. Demostremos que existe $F\in 2^{[0,1]}$ y $N\in\mathbb{N}$ tales que

$$\boldsymbol{h}(C,F)<\varepsilon \text{ y } \boldsymbol{h}\left(\left(2^T\right)^N(C),\left(2^T\right)^N(F)\right)\geq\frac{1}{3}.$$

Como C es compacto, existe una colección finita de puntos $\{x_1,x_2,...,x_n\}$ en C tal que $C\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}B\left(x_i;\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Dado que los conjuntos A y B son densos en $[0,1]$ existen dos colecciones de puntos en $[0,1]$, $D=\{d_1,...,d_n\}$ y $E=\{e_1,...,e_n\}$, tales que:

i) $D\subset A$ y $E\subset B$ y

ii) Para toda i, $1\leq i\leq n$, $|d_i-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$ y $|e_i-x_i|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Por lo tanto, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que

$$T^N(\{d_1,...,d_n\})=\{0\} \text{ y } T^N(\{e_1,...,e_n\})=\left\{\frac{2}{3}\right\}.$$

Así obtenemos lo siguiente: $\boldsymbol{h}(C,D)<\varepsilon$, $\boldsymbol{h}(C,E)<\varepsilon$. Además

$$\boldsymbol{h}\left(\left(2^T\right)^N(D),\left(2^T\right)^N(E)\right)=\boldsymbol{h}\left(\{0\},\left\{\frac{2}{3}\right\}\right)=\frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$\boldsymbol{h}\left(\left(\left(2^T\right)^N(C)\right),\left(2^T\right)^N(D)\right)\geq\frac{1}{3}, \text{ ó } h\left(\left(2^T\right)^N(C),\left(2^T\right)^N(E)\right)\geq\frac{1}{3}.$$

En el primer caso tomamos $F = D$, en el segundo $F = E$. $\square$

Corolario 114. *La función $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es caótica en el hiperespacio $2^{[0,1]}$.*

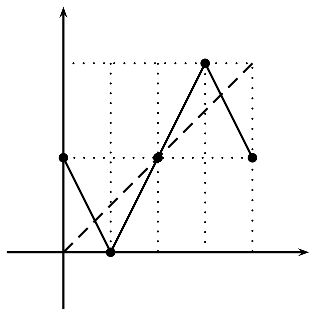
A continuación haremos algunos comentarios sobre las posibles generalizaciones de los resultados anteriores. Sean X un espacio métrico compacto y $f : X \to X$ una función continua. Sea $2^f : 2^X \to 2^X$ la función inducida.

Proposición 115. *Si $Per(f)$ es un conjunto denso en X, entonces $Per(2^f)$ es un conjunto denso en 2^X.*

Demostración. Los argumentos dados en la proposición 108 se pueden seguir aquí paso a paso. Invitamos a los lectores a hacer los ajustes necesarios. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que si f es transitiva en X, esto no implica necesariamente que 2^f sea transitiva en el hiperespacio 2^X.

Ejemplo 116. *Sea $g : [0,1] \to [0,1]$ la función lineal a pedazos definida en el ejercicio 7 Las gráfica de g^2 se puede ver en la figura siguiente.*



Como $g\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[\frac{1}{2},1\right]$ y $g\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right]$, se tiene que $g^2\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right) = \left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $g^2\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right) = \left[\frac{1}{2},1\right]$.

La dinámica de g^2 en $\left[\frac{1}{2},1\right]$ es, en esencia, la misma que la dinámica de T, la *Tienda*, en $[0,1]$. Así, si un intervalo abierto (a,b), $a < b$, está contenido en $\left[\frac{1}{2},1\right]$, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $(g^2)^N(a,b) = \left[\frac{1}{2},1\right]$. Esta información nos permitirá demostrar que g es transitiva en $[0,1]$.

Sean U y V dos conjuntos abiertos, no vacíos, en $[0,1]$.

Si $U \cap \left[\frac{1}{2},1\right] \neq \emptyset$, entonces existen a, b en $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $a < b$, tal que $(a,b) \subset U$. De aquí que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g^{2n_0}(U) \supset \left[\frac{1}{2},1\right]$.

Como $g^{2n_0}(U) \supset \left[\frac{1}{2},1\right]$ y $g^{2n_0+1}(U) \supset \left[0,\frac{1}{2}\right]$, $g^{2n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ ó $g^{2n_0+1}(U) \cap V \neq \emptyset$. Es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $g^N(U) \cap V \neq \emptyset$.

Si $U \cap \left[\frac{1}{2},1\right] = \emptyset$, entonces $U \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$ y $g(U) \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$. Además $int(g(U)) \neq \emptyset$, por tanto existen a y b en $\left[\frac{1}{2},1\right]$, $a < b$, tales que $(a,b) \subset g(U)$. Como existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(g^2)^{n_0}(a,b) = \left[\frac{1}{2},1\right]$, se sigue que $\left[\frac{1}{2},1\right] = g^{2n_0+1}(U)$ y $g^{2n_0+2}(U) = \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Es decir, nuevamente existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$g^N(U) \cap V = \emptyset.$$

Por lo tanto g es transitiva en $[0,1]$.

Ahora lo interesante es mostrar que 2^g no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Observemos primero que si A es un subconjunto compacto de $[0,1]$ tal que A está contenido en $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, entonces $\boldsymbol{h}(A,[0,1]) \geq \frac{1}{2}$ (ya que $d(1,A) \geq \frac{1}{2}$). De manera análoga, si A es un conjunto compacto tal que $A \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$, entonces $\boldsymbol{h}(A,[0,1]) \geq \frac{1}{2}$.

Sean U,V los siguientes conjuntos abiertos en $2^{[0,1]}$:

$$\begin{aligned} U &= \left\{A \in 2^{[0,1]} : \boldsymbol{h}(A,\{0\}) < \frac{1}{2}\right\}, \\ V &= \left\{A \in 2^{[0,1]} : \boldsymbol{h}(A,[0,1]) < \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Observemos que si $A \in U$, entonces $A \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$ y para toda $n \in \mathbb{N}$, n par, se tiene que $g^n(A) \subset \left[0,\frac{1}{2}\right]$. Además para toda $n \in \mathbb{N}$, n impar, $g^n(A) \subset \left[\frac{1}{2},1\right]$. Por tanto, para toda $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\boldsymbol{h}(g^n(A),[0,1]) \geq \frac{1}{2}$. Es decir, $f^n(A)$ nunca es elemento de V. De aquí se concluye que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(2^g)^n(U) \cap V = \emptyset.$$

Por tanto 2^g no es transitiva en $2^{[0,1]}$.

Observación 117. *El ejemplo anterior también nos dice que la siguiente implicación no es cierta en general: Si $f : X \to X$ es caótica según Devaney, entonces la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ es caótica según Devaney.*

Las siguientes proposiciones contienen resultados donde se estudia la influencia de la dinámica de 2^f en la dinámica de f.

Proposición 118. *Si la función inducida 2^f es transitiva en 2^X, entonces la función f es transitiva en X.*

Demostración. Sean $a,b \in X$, y $\varepsilon > 0$. Como 2^f es transitiva, existen $A \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\boldsymbol{h}(\{a\},A) < \varepsilon$ y $\boldsymbol{h}\left(\{b\},\left(2^f\right)^N(A)\right) < \varepsilon$.

Tomemos un punto $x \in A$. Entonces $d(a,x) < \varepsilon$ y $d\left(b,f^N(x)\right) < \varepsilon$. De aquí se sigue que f es transitiva en X. □

Proposición 119. *Si la función inducida 2^f es sensible a las condiciones iniciales en 2^X, entonces f es sensible a las condiciones iniciales en X.*

Demostración. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $A \in 2^X$ y para todo $\delta > 0$, existen $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\boldsymbol{h}(A,B) < \delta$ y $\boldsymbol{h}\left(\left(2^f\right)^N(A),\left(2^f\right)^N(B)\right) \geq \varepsilon_0$.

Sean $a \in X$ y $\delta > 0$. Sean $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$, tales que

$$\boldsymbol{h}(\{a\},B) < \delta \text{ y } \boldsymbol{h}\left(\left(2^f\right)^N(\{a\}),\left(2^f\right)^N(B)\right) \geq \varepsilon_0.$$

Entonces existe $x_0 \in B$ tal que $d(a,x_0) < \delta$ y $d\left(f^N(x_0),f^N(a)\right) \geq \varepsilon_0$. Esto muestra la sensibilidad de f en X. □

La última propiedad que nos interesa discutir es la densidad de puntos periódicos. En términos generales, la densidad de $Per\left(2^f\right)$ en 2^X no implica la densidad de $Per(f)$ en X. Esta situación tiene algo de sorprendente. Supongamos que el espacio X es compacto y el conjunto $Per\left(2^f\right)$ es denso en 2^X. Dados un punto en X, digamos x_0, y un valor positivo muy pequeño, ε, existe un conjunto compacto A y un número natural N tales que $\boldsymbol{h}(\{x_0\}, A) < \varepsilon$ y $f^N(A) = A$. Este conjunto compacto A es periódico, está contenido en la bola $B(x_0, \varepsilon)$ y, aún así, esto no implica la existencia de un punto periódico de f en esa bola.

Antes de ofrecer al lector el ejemplo de un espacio métrico compacto X y una función continua definida en él, $f : X \to X$, donde densidad de $Per\left(2^f\right)$ en el hiperespacio 2^X no implique la densidad de $Per(f)$ en X, presentamos un resultado en positivo.

Resulta que si el espacio donde estamos trabajando es el intervalo $[0,1]$ entonces densidad de puntos periódicos en el hiperespacio sí implica densidad de puntos periódicos en la base.

Proposición 120. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Si 2^f tiene densidad de puntos periódicos en $2^{[0,1]}$, entonces f tiene densidad de puntos periódicos en $[0,1]$.*

Demostración. Sean $0 \leq a < b \leq 1$. Sean $x_0 = \frac{a+b}{2}$ y $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

Como 2^f tiene densidad de puntos periódicos, existen $A \in 2^{[0,1]}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\boldsymbol{h}(\{x_0\}, A) < \varepsilon$ y $f^N(A) = A$.

Por tanto, $A \subset (a,b)$. Sean $\alpha = \min A$ y $\beta = \max A$.

Tenemos $a < \alpha \leq \beta < b$. Como $f^N(A) = A$, entonces $f^N(\alpha) \geq \alpha$ y $f^N(\beta) \leq \beta$. Como f^N es una función continua en el intervalo $[0,1]$, existe $c \in [\alpha, \beta]$, tal que $f^N(c) = c$. Por lo tanto $Per(f) \cap (a,b) \neq \emptyset$. $\square$

Observación 121. *Si $2^f : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ es caótica en el hiperespacio $2^{[0,1]}$, entonces $f : [0,1] \to [0,1]$ es caótica en $[0,1]$. Este resultado es consecuencia de las proposiciones 118, 119 y 120.*

Ahora nuestra meta es construir el ejemplo prometido. Mostraremos un espacio X, compacto y conexo, junto con una función $f : X \to X$ tales que el conjunto de los puntos periódicos de la función inducida $2^f : 2^X \to 2^X$ sí forma un conjunto denso en 2^X, pero $Per(f)$ no es denso en X.

Sea $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. En notación de números complejos, S^1 es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función $f_n : S^1 \to S^1$ así:

$$f_n(z) = f_n\left(e^{i\theta}\right) = e^{i\left(\theta + \frac{2\pi}{n}\right)}.$$

Es decir, cada f_n es una rotación en S^1 de ángulo $\frac{2\pi}{n}$. Es inmediato que para cada $n \in \mathbb{N}$, $Per(f_n) = S^1$, y para todo $z \in S^1$, el periodo de z bajo f_n es n.

Sea $X = \prod_{n=1}^{\infty} S^1$. Es decir,

$$X = \left\{\widehat{t} = (t_1, t_2, \ldots) : t_n \in S^1, \text{ para toda } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Si d representa la metrica en S^1, entonces la metrica en X está dada así:

$$\widehat{d}\left(\widehat{t}, \widehat{s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(t_n, s_n)}{2^n}.$$

Sea $f : X \to X$ dada por:

$$f\left(\widehat{t}\right) = f(t_1, t_2, t_{3,\ldots}) = (f_1(t_1), f_2(t_2), f_3(t_3), \ldots).$$

Entonces:

i) La función f es continua en X.
ii) El espacio X es compacto y conexo.
iii) La función f no tiene puntos periódicos.

Las demostraciones correspondientes a los incisos *i*) e *ii*) se pueden consultar en el libro de Hocking y Young, [13].

Para convencernos que la afirmación *iii)* es cierta supongamos que existen $\widehat{x} \in X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f^N(\widehat{x}) = \widehat{x}$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n^N(x_n) = x_n$. Como x_n es de periodo n bajo f_n, n divide a N para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

En la siguiente proposición demostramos que, a diferencia de f, la función inducida en el hiperespacio, $2^f : 2^X \to 2^X$, sí tiene muchísimos puntos periódicos, tantos que forman un conjunto denso en 2^X.

Proposición 122. *El conjunto Per* $\left(2^f\right)$ *es denso en* 2^X.

Demostración. Paso uno. Sean $\widehat{t} = (t_1, t_2, t_{3,\ldots})$, un punto en X, y ε un valor positivo.

El conjunto $\left\{\widehat{t}\right\}$ es un elemento de 2^X. Demostraremos que existen $B \in 2^X$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $\left(2^f\right)^N(B) = B$ y $\boldsymbol{h}\left(\left\{\widehat{t}\right\}, B\right) < \varepsilon$.

Como la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=M+1}^{\infty} \frac{diam\left(S^1\right)}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea N el mínimo común múltiplo de $(1, 2, 3, \ldots, M)$. Observemos que para cada t_i, $1 \leq i \leq M$ se tiene que $f_i^N(t_i) = t_i$ ya que la coordenada t_i es un punto periódico de la rotación f_i.

Como las primeras M coordenadas de $\widehat{t}$ y $f^N\left(\widehat{t}\right)$ coinciden, se tiene que $\widehat{d}\left(\hat{t}, f^N\left(\hat{t}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}$.

De hecho tenemos un poco mas: Para todo $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $\widehat{t}$ y $f^{jN}\left(\widehat{t}\right)$ coinciden en las primeras M coordenadas, así:

$$\widehat{d}\left(\widehat{t}, f^{jN}\left(\widehat{t}\right)\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Esto implica que la $o\left(\widehat{t}, f^N\right)$ está contenida en la bola $B\left(\widehat{a}; \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Así el conjunto $\omega\left(\widehat{t}, f^N\right)$ está contenido en la cerradura de esa misma bola. Sea $B = \omega\left(\widehat{t}, f^N\right)$. Es inmediato que B es un subconjunto compacto de X y que $f^N(B) = B$. Además como la distancia de Hausdorff de $\left\{\widehat{t}\right\}$ a B es menor o igual a $\frac{\varepsilon}{2}$, se concluye que $\boldsymbol{h}\left(\left\{\widehat{t}\right\}, B\right) < \varepsilon$.

Paso dos. Sean $A \in 2^X$ y $\varepsilon > 0$.

Como A es compacto, existen L puntos en A, $\widehat{a}_1, \ldots, \widehat{a}_L$, tales que:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{L} B\left(\widehat{a}_i; \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Por cada punto $\widehat{a}_i$, $1 \leq i \leq L$ consideramos un conjunto compacto B_i y un número natural N_i tales que $\boldsymbol{h}\left(\left\{\widehat{a}_i\right\}, B_i\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $f^{N_i}(B_i) = B_i$.

Sea $B = \cup_{i=1}^{L} B_i$ y sea N igual al mínimo común múltiplo de los números $(N_1, \ldots, N_L)$.

Entonces $f^N(B) = B$ y $\boldsymbol{h}(A, B) < \varepsilon$. □

Ejercicio 64. *Demuestra que la función* $2^f : 2^X \to 2^X$ *descrita en el ejemplo anterior no es transitiva.*

Observación 123. *Existe un espacio compacto X y una función continua $f : X \to X$ donde 2^f sí tiene densidad de puntos periódicos y es transitiva en 2^X, pero f no tiene densidad de puntos periódicos en X (ver* [12]*). Este ejemplo muestra que es posible que $2^f : 2^X \to 2^X$ sí sea caótica en 2^X mientras que $f : X \to X$ no es caótica en X.*

10.2. La función inducida en el hiperespacio de los subcontinuos. Hay otro hiperespacio interesante que vale la pena conocer: Sea

$$C(X) = \left\{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\right\}.$$

A los conjuntos A que son compactos, conexos y no vacíos los llamaremos *continuos*. Si A es un continuo y $A \subset X$, diremos que A es un *subcontinuo* de X. Así $C(X)$ es el hiperespacio de los subcontinuos de X. Como $C(X)$ es un subconjunto de 2^X, la métrica en $C(X)$ es la que hereda de 2^X, es decir la métrica de Hausdorff.

Como $f : X \to X$ es una función continua, entonces si $A \in C(X)$, $f(A)$ es compacto y conexo. Así $f(A)$ también es un elemento de $C(X)$. Por lo tanto f induce una función en $C(X)$,

$$C(f) : C(X) \to C(X),$$

dada así: si $A \in C(X)$, entonces $C(f)(A) = f(A)$.

Claro, ahora nos preguntamos sobre la posible relación entre la dinámica de f y la dinámica de $C(f)$. Antes de emprender este estudio, haremos algunas observaciones sobre los hiperespacios 2^X y $C(X)$ en el caso de que $X = [0,1]$. Nos motiva el deseo de convencer al lector de que estos dos hiperespacios son muy distintos, aún en el caso de que el espacio base sea muy sencillo.

Si $A \subset [0,1]$ es un conjunto compacto conexo y no vacío, entonces A sólo tiene dos opciones:

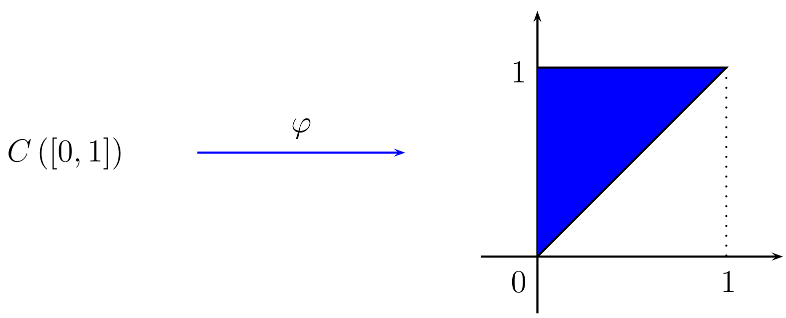
1. A está formado sólo por un punto, $A = \{x_0\}$, o
2. Existen a y b en $[0,1]$, $a < b$, tales que $A = [a,b]$.

Así $C([0,1])$ se puede expresar como esta colección de intervalos:

$$\{[a,b] : 0 \le a \le b \le 1\}.$$

Sea $B \subset \mathbb{R}^2$, $B = \{(x,y) : 0 \le x \le y \le 1\}$. Definimos la función $\varphi : C([0,1]) \to B$ dada por

$$\varphi(A) = \varphi([a,b]) = (a,b).$$



Proposición 124. *La función φ es un homeomorfismo.*

Demostración. i) Veamos primero que φ es inyectiva.

Sean A, D en $C([0,1])$, $A=[a,b]$, $D=[c,d]$. Si $A\neq D$, entonces $a\neq c$ ó $d\neq b$. En cualquier caso $\varphi(A)\neq\varphi(D)$.

ii) Ahora, φ es suprayectiva.

Sea $(x_0,y_0)\in B$. Tomamos $A=[x_0,y_0]$. Claramente $A\in C([0,1])$ y $\varphi(A)=(x_0,y_0)$.

iii) Por último, φ es continua.

Sea $A=[a,b]$, $D=[c,d]$ en $C([0,1])$, y sea $\varepsilon>0$.

Si $\boldsymbol{h}([a,b],[c,d])<\delta$, entonces $|a-c|<\delta$ y $|b-d|<\delta$. De aquí que

$$\begin{aligned}\|\varphi(A)-\varphi(D)\| &= \|(a,b)-(c,d)\|\\ &\leq |a-c|+|b-d|<2\delta\end{aligned}$$

Tomando $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ finalizamos.

De lo anterior se sigue que $\varphi: C([0,1])\to B$ es un homemorfismo. □

Esta función φ nos permite hacernos una idea geométrica de $C([0,1])$. El conjunto $C([0,1])$ y el triángulo B son, en esencia, el mismo objeto.

El hiperespacio $2^{[0,1]}$ es un poco más *extraño* que $C([0,1])$ como ahora veremos.

Sea $N\in\mathbb{N}$. Definimos

$$[0,1]^N=\left\{\bar{x}=(x_1,x_2,...,x_N): x_i\in[0,1], 1\leq i\leq N\right\}.$$

La distancia en $[0,1]^N$ está dada por

$$d((x_1,...,x_N),(y_1,...,y_N))=\text{máx}\{|x_i-y_i|: 1\leq i\leq N\}.$$

Proposición 125. *Para cada $N\in\mathbb{N}$, existe $A\subset 2^{[0,1]}$ tal que A es homeomorfo a $[0,1]^N$.*

Demostración. Sea $N\in\mathbb{N}$ fijo. Consideremos la siguiente partición del intervalo $[0,1]$,

$$P=\left\{t_0=0, t_1=\frac{1}{2N-1}, t_2=2\left(\frac{1}{2N-1}\right),...,t_{2N-1}=1\right\}.$$

Sea $B=\left[0,\frac{1}{2N-1}\right]\times\left[\frac{2}{2N-1},\frac{3}{2N-1}\right]\times...\times\left[\frac{2N-2}{2N-1},1\right]$ Obsérvese que B es homeomorfo al conjunto $[0,1]^N$.

Sea $\psi: B\to 2^{[0,1]}$ dada por:

$$\psi(x_1,x_2,...,x_N)=\{x_1,...,x_N\}.$$

i) La función ψ es inyectiva.

Sean $\bar{x}=(x_1,...,x_N)$ y $\bar{y}=(y_1,...,y_N)$ dos puntos en B. Si $\bar{x}\neq\bar{y}$, entonces existe n_0, $1\leq n_0\leq N$ tal que $x_{n_0}\neq y_{n_0}$. Como para cada i, $1\leq i\leq N$, $i\neq n_0$,

$$y_i\in\left[\frac{2(i-1)}{2N-1},\frac{2(i-1)+1}{2N-1}\right] \text{ y } \left[\frac{2(i-1)}{2N-1},\frac{2(i-1)+1}{2N-1}\right]\cap\left[\frac{2(n_0-1)}{2N-1},\frac{2(n_0-1)+1}{2N-1}\right]=\emptyset,$$

entonces $y_i\neq x_{n_0}$. Así $x_{n_0}\notin\psi(\bar{y})$.

Por tanto $\psi(\bar{x})\neq\psi(\bar{y})$.

ii) La función ψ es continua.

Sea $\bar{x}=(x_1,...,x_N)$ y $\bar{y}=(y_1,...,y_N)$ en B Observemos que:

$$\boldsymbol{h}(\psi(\bar{x}),\psi(\bar{y}))=\text{máx}\{|x_i-y_i|: 1\leq i\leq N\}=d(\bar{x},\bar{y}).$$

Es decir, ψ es una isometría. Por tanto ψ es continua en B.

De lo anterior se deduce que:

$$\psi : B \to \psi(B) \subset 2^{[0,1]}$$

es un homeomorfismo.

Tomando $A = \psi(B)$ terminamos la demostración . $\square$

Como para cada $N \in \mathbb{N}$, $2^{[0,1]}$ contiene un subconjunto homeomorfo a $[0,1]^N$, entonces $2^{[0,1]}$ no puede ser un conjunto de dimensión finita. Ya que el hiperespacio $C([0,1])$ es homeomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}^2$, entonces $2^{[0,1]}$ y $C([0,1])$ son en verdad muy distintos.

La definición del concepto de dimensión y muchas de sus propiedades se pueden consultar en el libro *Dimension Theory: An Introduction with Exercises* escrito por el profesor Sam B. Nadler Jr. (ver [19]).

Se sabe, además, que el hiperespacio $2^{[0,1]}$ es homeomorfo al *Cubo de Hilbert,* Q (Ver [23]). Este espacio se define así:

$$Q = \prod_{n=1}^{\infty} [0,1] = \{\widehat{x} = (x_1, x_2, ...) : x_n \in [0,1]\,, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}\,.$$

La métrica en Q está dada por:

$$\widehat{d}\left(\widehat{t}, \widehat{s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n - s_n|}{2^n}.$$

Este espacio es compacto, conexo y de dimensión infinita (ver [13]).

Regresemos a la función tienda $T : [0,1] \to [0,1]$. Veremos ahora algunas diferencias entre las dinámicas de $2^T : 2^{[0,1]} \to 2^{[0,1]}$ y $C(T) : C([0,1]) \to C([0,1])$.

Proposición 126. *La función inducida* $C(T) : C([0,1]) \to C([0,1])$ *no es transitiva.*

Demostración. Sean U, V dos subconjuntos abiertos de $C([0,1])$ definidos así:

$$\begin{aligned} U &= \left\{A \in C([0,1]) : \boldsymbol{h}(A, [0,1]) < \frac{1}{4}\right\}, \\ V &= \left\{A \in C([0,1]) : \boldsymbol{h}\left(A, \left\{\frac{1}{2}\right\}\right) < \frac{1}{4}\right\}. \end{aligned}$$

Observaciones.

i) Si $A \in V$, entonces $\frac{1}{4} \notin A$ y $\frac{3}{4} \notin A$.

ii) Si $A \in U$, entonces el intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ está contenido en A.

iii) $U \cap V = \emptyset$.

iv) Sea $A \in U$, entonces $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset T(A)$ y $[0,1] = T^2(A)$. Por tanto, para todo $A \in U$ se tiene que $C(T)(A) \notin V$. Y como para toda $n \geq 2$ se tiene que $C(T)^n(A) = [0,1]$, entonces $C(T)^n(A) \notin V$.

De aquí que para toda $n \geq 0$, $C(T)^n(U) \cap V = \emptyset$.

Por lo tanto $C(T)$ no es transitiva en $C([0,1])$. $\square$

Otras dos observaciones interesantes sobre la dinámica de $C(T)$ son las siguientes:

Sea $F_1([0,1]) = \{\{x\} : x \in [0,1]\}$. Obsérvese que $F_1([0,1]) \subset C([0,1])$.

1) $C\,(T)$ restringida a $F_1([0,1])$ se comporta como la función T.

2) Si $A \in C\,([0,1])$ y la cardinalidad de A es mayor que 1, entonces A es de la forma $A = [a,b]$ con $a < b$. En este caso existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N\,(A) = [0,1]$.

Por lo tanto, para todo $A \in C\,([0,1]) \setminus F_1\,([0,1])$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{h}\,([0,1]\,, C(T)^n\,(A)) = 0.$$

Es decir, $[0,1]$ es un punto fijo atractor de la función $C(T)$.

Ejercicio 65. *El conjunto* $D = C\,([0,1]) \setminus F_1\,([0,1])$ *es abierto y denso en* $C\,([0,1])$*. Además* D *es un conjunto invariante bajo* $C(T)$*,* $C(T)(D) = D$*.*

Ejercicio 66. *La función* $C(T) : C([0,1]) \to C([0,1])$ *no tiene densidad de puntos periódicos.*

El siguiente resultado muestra que lo que obtuvimos en la proposición 126, para la función $C(T)$, es un hecho más general.

Proposición 127. *Para toda* $f : [0,1] \to [0,1]$*, se tiene que* $C\,(f) : C\,([0,1]) \to C\,([0,1])$ *no es transitiva.*

Demostración. Consideremos dos casos.

Primer caso. Existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f\,(x_0) = x_0$.

Segundo caso. Para todo $x \in (0,1)$ se tiene que $f(x) \neq x$.

Nosotros haremos la demostración del primero y dejaremos al lector la demostración del segundo.

Supongamos que $f\,(x_0) = x_0$ y que $0 < x_0 \leq \frac{1}{2}$. Digamos que este es un subcaso del primer caso.

Sea $\varepsilon = \frac{x_0}{2}$, y sean

$$\begin{aligned} U &= \{A \in C\,([0,1]) : \boldsymbol{h}\,(A, [0,1]) < \varepsilon\}\,, \\ V &= \{A \in C\,([0,1]) : \boldsymbol{h}\,(A, \{0\}) < \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

Observemos que si $A \in U$, entonces $x_0 \in A$. Además para toda $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in f^n\,(A)$ ya que x_0 es punto fijo de f.

Por otro lado, si $B \in V$, entonces $x_0 \notin B$. De aquí se sigue que para todo $A \in U$ y para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$C\,(f)^n\,(A) \notin V.$$

Como U y V son abiertos de $C\,([0,1])$, no vacíos, concluimos que $C\,(f)$ no es transitiva.

Si existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $f\,(x_0) = x_0$ y $\frac{1}{2} < x_0 < 1$, la demostración es análoga, utilizando ahora $\varepsilon_0 = \frac{1-x_0}{2}$.

Con la ayuda que el lector nos proporcionará en el ejercicio 67 concluimos que la función $C\,(f)$ nunca es transitiva en $C\,([0,1])$. $\square$

Ejercicio 67. *Sea* $f : [0,1] \to [0,1]$ *una función tal que para todo* $x \in (0,1)$ *se tiene que* $f(x) \neq x$*. Demuestra que* $C(f) : C([0,1]) \to C([0,1])$ *no puede ser una función transitiva.* Sugerencia. *Estudia primero el caso* $f(x) < x$ *para toda* $x \in (0,1)$*.*

El lector puede encontrar en [1] el ejemplo de un espacio X compacto y conexo, y una función continua en X, tales que $C\,(f) : C\,(X) \to C\,(X)$ sí es transitiva.

Dado un conjunto A denotamos con $|A|$ su cardinalidad. Decimos que el conjunto A es no degenerado si $|A| > 1$.

Ejercicio 68. *Sea X un espacio métrico, compacto y no degenerado. Demuestra que $C(X)$ no forma un subconjunto denso en 2^X.*

Ejercicio 69. *Sea X un continuo. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $C(X)$. Sea $A \in 2^X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{h}(A, A_n) = 0$. Entonces $A \in C(X)$.*

Dado $n \in \mathbb{N}$ fijo definimos el hiperespacio $F_n(X)$ de la siguiente forma:

$$F_n(X) = \left\{A \in 2^X : |A| \leq n\right\}.$$

A este hiperespacio se le conoce como el n *producto simétrico* de X.

Ejercicio 70. *Sea X un espacio métrico compacto. Demuestra que $\cup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ es denso en 2^X.*

11. Un espacio simbólico hiperconexo

Hiperconexos son los espacios topológicos en los que cada par de abiertos se intersectan. Se muestra un curioso espacio de éstos que aparece como cociente del espacio de Cantor. Se caracterizan en términos de decibilidad, sus abiertos y sus cerrados.

11.1. Preliminares. Las palabras.

$2 = \{0, 1\}$.

2^* son las palabras (o cadenas) sobre el alfabeto $\{0, 1\}$. Más formalmente $2^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} 2^k$ donde 2^k son las palabras de k letras y $2^0 = \{\lambda\}$ siendo λ la palabra sin letras.

$2^+ = 2^* - \{\lambda\}$.

Las palabras de 2^* se yuxtaponen, con esta operación forman un monoide, el **monoide libre** sobre 2.

Los subconjuntos de 2^* son llamados **lenguajes**.

Si $L \subseteq 2^*$, el conjunto de todas las palabras que se pueden formar yuxtaponiendo palabras de L se nota L^* o L^+ según contenga o no a λ.

Ejemplo 128. *Sea L el lenguaje consistente en aquellas palabras que no tienen tres (ni más) 1's seguidos y no empiezan por 11 ni terminan en 11. Aseguramos que:*

$$\{0, 01, 10, 101\}^* \cup \{1\} = L$$

11.1.1. Los bicódigos. Si en $2 = \{0, 1\}$ consideramos la topología discreta, entonces $2^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de funciones de $\mathbb{Z}$ en $\{0, 1\}$. Sus elementos son llamados **bicódigos**.

$2^{\mathbb{Z}}$ con la topología producto es una de tantas representaciones del famoso y muy importante espacio de Cantor. Hay muchas formas de dar una base para la topología de este espacio. Sea $f : A \longrightarrow 2$ una función definida sobre A que es un subconjunto finito de $\mathbb{Z}$, difinimos $[f]$ como el conjunto de todas las funciones que amplían a f a $\mathbb{Z}$ es decir:

$$[f] = \{g : \mathbb{Z} \longrightarrow 2 : \ g \downharpoonright_A = f\}.$$

El conjunto de todas las $[f]$ forma una base (de abiertos cerrados) para $2^{\mathbb{Z}}$. Los dominios de las f también se pueden centrar, así

$$\{[f] : \ f : \{-n, \ldots, m\} \longrightarrow 2, \ n, m \in \mathbb{N}\}$$

es también una base para la topología de $2^{\mathbb{Z}}$.

Definición 129. *Si $L \subseteq 2^*$ tal que $\lambda \notin L$ los bicódigos que se pueden formar con L los notaremos $L^{\mathbb{Z}}$:*

$$L^{\mathbb{Z}} =: \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow L \mid f \ \textit{es función}\}.$$

De la topología de $2^{\mathbb{Z}}$ hay que decir lo fundamental del espacio de Cantor: Es un espacio metrizable, totalmente disconexo, compacto y perfecto, todo espacio con estas características es isomorfo al espacio de Cantor y además cualquier espacio métrico compacto es imagen continua de este espacio.

11.2. Los elementos de $\mathbb{X}$.

Si $f, g \in 2^{\mathbb{Z}}$, se define:

$$f \sim g \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = g(k + n)).$$

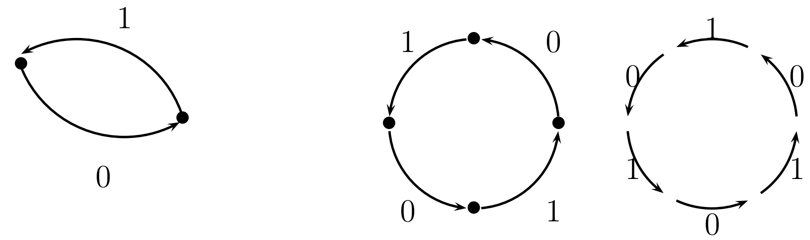
La relación $\sim$ es de equivalencia sobre $2^{\mathbb{Z}}$. Las clases de equivalencia son los elementos de $\mathbb{X}$.

Los elementos de $\mathbb{X}$ se deben ver como sucesiones que se extienden indefinidamente tanto a derecha como a izquierda, sin interesar donde inician. Cada $p \in \mathbb{X}$ es un conjunto de funciones $f \in 2^{\mathbb{Z}}$, cada una de ellas es representante de p.

Conviene emplear la siguiente notación: subrayar una cadena significa que ésta se extiende indefinidamente hacia la izquierda y una linea por encima significa que la cadena respectiva se extiende indefinidamente hacia la derecha. Así

$$\underline{00}\;11\;\overline{01}$$

significa que la cadena 00 se extiende indefinidamente hacia la izquierda, la cadena 11 aparece una única vez y 01 se repite indefinidamente a la derecha. El "moño" o "widetilde" se utilizará para indicar que la cadena se extiende indefinidamente tanto a derecha como a izquierda. Estas situaciones se pueden representar con grafos cíclicos etiquetados con 0's y 1's. Los siguientes tres ciclos representan el mismo punto $\widetilde{01}$



Ejemplo 130. *Se tienen muchas igualdades, entre otras:*

$$\begin{aligned} \underline{00}\;11\;\overline{01} &= \underline{00}\;1\;\overline{10} \\ \widetilde{01} &= \widetilde{10} \\ \widetilde{101} = \widetilde{110} &= \widetilde{011} \end{aligned}$$

Además de representar elementos $p \in \mathbb{X}$ por un elemento de $f \in 2^{\mathbb{Z}}$ con $f \in p$, también serán representados por elementos de $(2^{+})^{\mathbb{Z}}$. Así $\widetilde{01}$ se puede representar por la función constante que a cada $n \in \mathbb{Z}$ le hace corresponder la cadena 01. A veces se utilizará el símbolo de productoria $\prod$.

Ejemplo 131. *Nótense las siguientes igualdades:*

$$\underline{00}\;11\;\overline{01} = \left(\prod_{i=-\infty}^{0} 0\right) 1\;\overline{10} = \left(\prod_{i=-\infty}^{0} 0\right) 1 \prod_{i=1}^{\infty} 10$$

$$\left(\prod_{i=-\infty}^{\infty} 10\right) = \left(\prod_{i=-\infty}^{\infty} 0101\right)$$

$$\underline{00}\prod_{i=0}^{\infty} 01^{i}0 = \underline{0}\prod_{i=0}^{\infty} 001^{i}$$

Es fácil ver que el cardinal de $\mathbb{X}$ es $2^{\aleph_0}$.

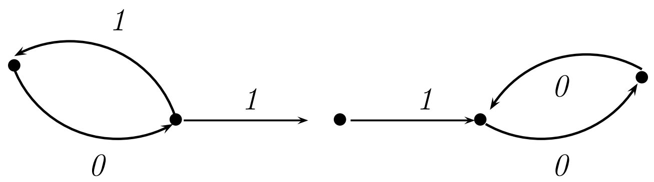
Definición 132. *Un grafo 2-etiquetado G es una quíntupla $G =< V, E, s, m, e >$ donde V y E son conjuntos finitos denominados vértices y aristas respectivamente; $s : E \longrightarrow V$ y*

$m : E \longrightarrow V$ son las funciones salida y meta que a cada arista le hace corresponder sus respectivos vértices de salida y de llegada, mientras $e : V \longrightarrow 2$ es la función de etiqueta que asocia a cada arista un 0 o un 1.

Para efectos prácticos como los que aquí nos interesan, también se pueden ver los grafos 2-etiquetados como subconjuntos no vacíos de $V \times V \times 2$.

Los grafos 2-etiquetados nos sirven para describir ciertos subconjuntos de puntos de $\mathbb{X}$. Cada camino define una palabra en 2^*. De igual forma al considerar caminos infinitos, que no empiezan ni terminan, le podemos asociar puntos de $\mathbb{X}$.

Ejemplo 133. *El siguiente grafo representa a* $\left\{\underline{10}11\overline{0},\ \widetilde{10},\ \widetilde{0}\right\}$.



11.3. La topología de $\mathbb{X}$. Dada una palabra $w \in 2^*$, digamos $w = x_1x_2 \dots x_n$, decimos que w está en $p \in \mathbb{X}$ si para todo $f \in p$ existe k tal que

$$f(k) = x_1; f(k+1) = x_2; \dots ; f(k+n-1) = x_n.$$

Se notará $w \lhd p$. A cada palabra $w \in 2^*$ asociamos el conjunto:

$$[w] = \{p \in \mathbb{X} |\ w \lhd p\}.$$

Estos conjuntos forman una base para la topología de $\mathbb{X}$ determinada como el cociente $2^{\mathbb{Z}} / \sim$. Es claro que $[vw] \subseteq ([v] \cap [w])$ y como todos estos subconjuntos son no vacíos se concluye que la intersección de dos de ellos es siempre no vacía. Esto nos garantiza que $\mathbb{X}$ es hiperconexo. Además, cualquier sub-espacio denso, también será hiperconexo. Por ser "tan conexo" es claro que los únicos abiertos cerrados de $\mathbb{X}$ son los triviales el mismo $\mathbb{X}$ y $\emptyset$. Por otra parte, por ser $\mathbb{X}$ cociente de un compacto es compacto.

Ejemplo 134. *Un abierto que no es básico:* $[10] \cup [01] = \mathbb{X} - \left\{\widetilde{0}, \widetilde{1}\right\}$.

Ejemplo 135. *Todo abierto que contiene a $\widetilde{0}$ contiene a $\underline{0}\overline{1}$, mientras que $[01]$ es un abierto que contiene a $\underline{0}\overline{1}$ pero que no contiene $\widetilde{0}$. Por tanto la topología que hereda $\left\{\widetilde{0}, \underline{0}\overline{1}\right\}$ es la de Sierpinski donde los únicos abiertos son:*

$$\left\{\widetilde{0}, \underline{0}\overline{1}\right\}, \left\{\underline{0}\overline{1}\right\}, \emptyset.$$

Ejemplo 136. $U = [101] \cup [1001] \cup [10001] \cup \dots$ *es un abierto que no es unión finita de básicos y que no es compacto. El complemento de U es el conjunto $\left\{\underline{0}1^i\overline{0}\right\}_{i \in \mathbb{N}} \cup \left\{\widetilde{0}, \widetilde{1}, \underline{1}\overline{0}, \underline{0}\overline{1}\right\}$, aquellos $p \in X$ en cuyas representaciones no se encuentran dos 1's separados por ceros, es decir todos los 1's van en bloque.*

Ejemplo 137. *Se tiene:*

$$\begin{aligned} [1] = & \quad \mathbb{X} - \left\{ \widetilde{0} \right\} \\ [01] = & \quad \mathbb{X} - \left\{ \widetilde{0}, \widetilde{1}, \underline{1}\overline{0} \right\} \\ [11] \cup [00] = & \quad \mathbb{X} - \left\{ \widetilde{01} \right\} \end{aligned}$$

La forma de los abiertos sugiere que detectar si determinado elemento pertenece al abierto sea algorítmicamente seguro siempre y cuando éste sí pertenezca al abierto. Para efectos computacionales cada elemento de $\mathbb{X}$ lo suponemos colocado en la cinta que se extiende a derecha y a izquierda indefinidamente de una Máquina de Turing. La cabeza lectora de la máquina se encuentra inicialmente en cualquier lugar de la cinta.

Proposición 138. *Dado un abierto U en $\mathbb{X}$ existe un algoritmo para que dado $p \in \mathbb{X}$ se detenga si $p \in U$. Tal algoritmo no se detiene si $p \notin U$.*

Demostración. Sea $U = [w_0] \cup [w_1] \cup [w_2] \cup \dots$ donde $w_i \in 2^*$. Dado $p \in \mathbb{X}$ representado por $f \in 2^{\mathbb{Z}}$ el algoritmo comprueba para cada $i \in \mathbb{N}^+$ si alguna de las palabras $w_0, w_1, w_2 \dots w_i$ es subpalabra de $f(-i)f(-i+1)\dots f(i)$, si éste es el caso, se detiene y concluye que $p \in U$, si no, pasa al siguiente i. $\square$

Buscando los cerrados de $\mathbb{X}$ podemos deducir que si V es cerrado debe existir un algoritmo que decida si $p \notin V$ aunque tal vez no se detenga si $p \in V$.

Introducimos por ahora para cada lenguaje L el subconjunto de $\mathbb{X}$ notado $[L]^{\mathbb{Z}}$.

Definición 139. *Si $L \subseteq 2^*$ notaremos:*

$$[L]^{\mathbb{Z}} = \left\{ p \in \mathbb{X} | \ \forall f \in 2^{\mathbb{Z}} (f \in p \Rightarrow f \in L^{\mathbb{Z}}) \right\}.$$

$[L]^{\mathbb{Z}}$ comprende todos los elementos de $\mathbb{X}$ cuyas representaciones se pueden formar yuxtaponiendo cadenas de L.

Nota 1. *Se evitará la notación $[\{ \quad \}]^{\mathbb{Z}}$ y se escribirá solamente $[\quad]^{\mathbb{Z}}$.*

Si un punto $p \in \mathbb{X}$ cumple:

i: Existe $v \in L$ tal que $v \lhd p$.

ii: Si $u \in L^*$ es tal que $u \lhd p$, entonces existen $v_1, v_2 \in L^+$ tal que $v_1 u v_2 \lhd p$.

Entonces $p \in [L]$.

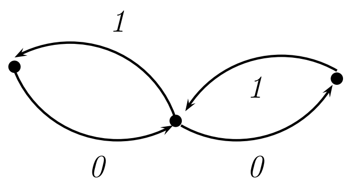
Ejemplo 140. $[0, 10]^{\mathbb{Z}} = [01, 0]^{\mathbb{Z}}$ *comprende aquellos $p \in \mathbb{X}$ tales que en sus representaciones los 1's van siempre precedidos y antecedidos de un 0, o lo que es lo mismo no contienen 11. Se tiene entonces que $[0, 10]^{\mathbb{Z}} = \mathbb{X} - [11]$*

Ejemplo 141. $[010]^{\mathbb{Z}}$ *contiene únicamente a $\widetilde{010}$. Aunque $010 \lhd \widetilde{10}$ yuxtaponiendo la cadena 010 no se puede formar $\widetilde{10}$ y por tanto $\widetilde{01} \notin [010]^{\mathbb{Z}}$.*

Ejemplo 142. *Se tiene*

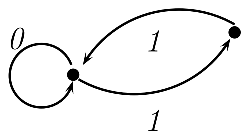
$$[01, 10]^{\mathbb{Z}} = \mathbb{X} - ([111] \cup [000]).$$

Nótese además que $[01, 10]^{\mathbb{Z}} = [1001, 1010, 0101, 0110]^{\mathbb{Z}} \neq [1100, 0011]^{\mathbb{Z}}$. A este conjunto $[01, 10]^{\mathbb{Z}}$ se le puede asociar un grafo



Ejemplo 143. *$[11,0]^{\mathbb{Z}}$ es el complemento de U formado por aquellos $p \in \mathbb{X}$ en cuyas representaciones hay bloques impares de 1's. U es abierto pues $U = [010] \cup [01110] \cup [0111110] \dots$ por tanto $[11,0]^{\mathbb{Z}}$ es cerrado.*

Nótese además que a $[11,0]^{\mathbb{Z}}$ se le puede asociar el grafo



Ejemplo 144. *Si $L = 1^+0$ entonces $[L]^{\mathbb{Z}}$ comprende aquellos $p \in \mathbb{X}$ representables con cadenas de finitos 1's separadas por 0. No pertenece a $[L]^{\mathbb{Z}}$ por ejemplo $\underline{01}\,\overline{1}$, tampoco $\widetilde{1}$.*

Formalizamos a continuación un concepto que ya ha sido esbozado previamente.

Proposición 145. *A cada grafo 2-etiquetado G se le asocia $L(G)$ el subconjunto de $\mathbb{X}$ correspondiente, conformados por las etiquetas de todos los caminos infinitos a izquierda y derecha.*

Demostración. Un punto $p \in \mathbb{X}$ no está en $L(G)$ si existe $w \in 2^+$ con $w \triangleleft p$ tal que para cada vértice de G no hay camino que iniciando en tal vértice esté etiquetado con w. ☐

Corolario 146. *Dado G un grafo 2-etiquetado existe un algoritmo para que dado un punto $p \in \mathbb{X}$ se detenga si y sólo si p no está en $L(G)$.*

Corolario 147. *Dado G un grafo 2-etiquetado se tiene que $L(G)$ es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Corolario 148. *Si $L \subseteq 2^*$ es finito entonces $[L]^{\mathbb{Z}}$ es cerrado en $\mathbb{X}$.*

Demostración. Por ser L finito se puede representar $[L]^{\mathbb{Z}}$ como generado por un grafo 2-etiquetado. ☐

Ejemplo 149. *Sea $L = \{ww \mid w \in 2^*\}$ entonces $[L]^{\mathbb{Z}}$ es denso en $\mathbb{X}$ pues para cualquier $w \in 2^*$ se tiene que $\widetilde{w} \in [w] \cap [L]^{\mathbb{Z}}$. Como $[L]^{\mathbb{Z}}$ no es $\mathbb{X}$, pues por ejemplo $\underline{0}1\overline{0} \notin [L]^{\mathbb{Z}}$, se concluye que $[L]^{\mathbb{Z}}$ no es cerrado en $\mathbb{X}$.*

11.4. Elementos distingidos de $\mathbb{X}$. Las palabras de 2^* son enumerables. Supongamos una enumeración $\{w_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$ entonces $\prod_{i=-\infty}^{\infty} w_i$ es un elemento de $\mathbb{X}$ que está en todos los abiertos no vacíos.

Definición 150. *Los **ángeles** son elementos de $\mathbb{X}$ que están en todos los abiertos no vacíos.*

Definición 151. *Los* ***querubines*** *son elementos* $p \in \mathbb{X}$ *tales que* $\{p\}$ *es cerrado.*

Ejemplo 152. $\underline{0}1\overline{0}$ *no es querubín pues no hay una vecindad de* $\widetilde{0}$ *que no contenga a* $\underline{0}1\overline{0}$*.*

Proposición 153. *Si* $w \in 2^+$*, entonces* $\widetilde{w}$ *es un querubín.*

Demostración. $\widetilde{w}$ es la única palabra generada por el ciclo etiquetado con w. $\square$

Ejemplo 154. *Consideremos* $B = \left\{\underline{0}1^n\overline{0} \mid n \in \mathbb{Z}^+\right\}$*, entonces* B *es un sub-espacio infinito cuya topología es la discreta. En efecto* $[01^n0] \cap B = \left\{\underline{0}1^n\overline{0}\right\}$*.*

Ejemplo 155. $\widetilde{0}$ *y* $\widetilde{1}$ *son querubines así como* $\widetilde{01}$ *(ejemplo 137). Como podemos garantizar que si* $w \in 2^*$ *entonces* $\widetilde{w}$ *es un querubín, el subespacio de los querubines es infinito y* T_1*.*

Ejemplo 156. *Para cada* $k \in \mathbb{N}$ *es posible construir un subespacio discreto de* $n = 2^k$ *puntos. En efecto sean* $w_1, \ldots, w_n$ *las* n *palabras de longitud* k*, entonces* $A = \{\widetilde{w_1}, \ldots, \widetilde{w_n}\}$ *es subespacio discreto pues para cada* i *se tiene* $[w_i] \cap A = \{\widetilde{w}_i\}$*. Si embargo el subespacio*

$$Y = \{\widetilde{w} \mid w \in 2^*\}$$

es un subespacio denso enumerable y por tanto hiperconexo.

11.5. Preguntas.

Pregunta 71. *¿Son todos los querubines de la forma* $\widetilde{w}$ *con* $w \in 2^*$*?*

Pregunta 72. *¿Todos los cerrados son de la forma* $L(G)$ *para algún grafo* 2*-etiquetado?*

Pregunta 73. *¿Si* Y *es un espacio topológico finito, es isomorfo a algún subespacio de* $\mathbb{X}$*?*

Pregunta 74. *¿Hay alguna copia de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{X}$*?*

12. Breve introducción a la entropía topológica

Regresamos en la última sección de estas notas a los sistemas dinámicos discretos. Nuestra meta en esta parte es hacer algunos comentarios a las siguientes preguntas, que tal vez el lector ya se ha planteado: ¿es la definición de caos dada por Devaney la única posible? Si f y g son dos funciones caóticas, ¿tiene sentido preguntarse cuál de las dos es más caótica? Éstas y otras inquietudes similares nos llevan hacia el concepto de *entropía topológica*.

La entropía es un intento de asignarle una medida, un número mayor o igual a cero, a la complejidad de una función definida en un espacio compacto X.

En estas notas daremos la definición de entropía propuesta por Adler, Konheim y McAndrew en 1965 (ver [2]). Estos autores utilizan de manera esencial el concepto de cubierta abierta de X.

Si bien sólo estudiaremos la definición de Adler et al, es bueno saber que existe una segunda definición que fue propuesta por Dinaburg y Bowen. En este segundo enfoque se utiliza fuertemente la métrica de X y el concepto de *conjunto generador*. Es un resultado conocido que en espacios métricos compactos ambas definiciones son equivalentes (ver [26]).

De aquí en adelante X y Y representan dos espacios métricos compactos. Las letras griegas α, β, γ y η representan cubiertas abiertas (ya sea de X o de Y). Todas las funciones consideradas son funciones continuas.

Sean α y β dos cubiertas abiertas de X. Definimos

$$\alpha \vee \beta = \{A \cap B : A \in \alpha, B \in \beta\}.$$

Obsérvese que $\alpha \vee \beta$ es también una cubierta abierta de X. En esta sección el símbolo $\vee$ es utilizado sólo en estos términos. De la definición se sigue de manera inmediata que $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$. Denotaremos a esta última cubierta así: $\alpha \vee \beta \vee \gamma$.

Decimos que β es un *refinamiento* de α, en símbolos $\alpha < \beta$, si para todo $B \in \beta$, existe $A \in \alpha$ tal que $B \subset A$.

Ejercicio 75. *Sean α, β, γ y η cuatro cubiertas abiertas de X. Entonces*
i) $\alpha < \alpha \vee \beta$ y $\beta < \alpha \vee \beta$;
ii) $\alpha < \alpha \vee \alpha$, y $\alpha \vee \alpha < \alpha$;
iii) si $\alpha < \beta$, entonces $\alpha \vee \beta < \beta$; y
iv) si $\alpha < \beta$, y $\gamma < \eta$, entonces $\alpha \vee \gamma < \beta \vee \eta$.

Pregunta 76. *Verdadero o falso. $\alpha = \alpha \vee \alpha$.*

Como X es compacto, entonces la cubierta abierta α tiene al menos una subcubierta finita. Si β es una subcubierta finita de α, $|\beta|$ denotará la cantidad de elementos de β. Al mínimo de estos números le llamaremos $N(\alpha)$, es decir,

$$N(\alpha) = \text{mín}\{|\beta| : \beta \text{ es subcubierta finita de } \alpha\}.$$

Obsérvese que $N(\alpha) \geq 1$.

Ejercicio 77. *Sean α y β dos cubiertas abiertas de X. Si $\alpha < \beta$, entonces*
i) $N(\alpha) \leq N(\beta)$,
ii) $N(\alpha \vee \beta) = N(\beta)$, y
iii) $N(\alpha \vee \alpha) = N(\alpha)$.

Ejercicio 78. *Sean α y β dos cubiertas abiertas de X de cardinalidad finita. Demuestra que $|\alpha \vee \beta| \leq |\alpha|\,|\beta|$*

Proposición 157. *Sean α y β dos cubiertas abiertas de X. Entonces $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$.*

Demostración. Sean γ y η subcubiertas de α y β, respectivamente, tales que $|\gamma| = N(\alpha)$ y $|\eta| = N(\beta)$. Entonces $\gamma \vee \eta$ es una cubierta abierta de X tal que

$$|\gamma \vee \eta| \leq |\gamma|\,|\eta| = N(\alpha)N(\beta).$$

Como $\gamma \vee \eta$ es una subcubierta de $\alpha \vee \beta$, tenemos que $N(\alpha \vee \beta) \leq N(\alpha)N(\beta)$. $\square$

Sea $f : X \to Y$ una función, y sea α una cubierta abierta de Y. Definimos

$$f^{-1}(\alpha) = \left\{ f^{-1}(A) : A \in \alpha \right\}.$$

Obsérvese que $f^{-1}(\alpha)$ es una cubierta abierta de X.

Ejercicio 79. *Sea $f : X \to Y$, y sean α y β dos cubiertas abiertas de Y. Si $\alpha < \beta$, entonces $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$.*

Proposición 158. *Sean $f : X \to Y$, y α una cubierta abierta de Y. Entonces $N\left(f^{-1}(\alpha)\right) \leq N(\alpha)$. Si además f es suprayectiva, entonces $N\left(f^{-1}(\alpha)\right) = N(\alpha)$.*

Demostración. Sea γ una subcubierta de α tal que $|\gamma| = N(\alpha)$, $\gamma = \left\{A_1, A_2, \ldots, A_{N(\alpha)}\right\}$. Entonces

$$Y = \cup_{i=1}^{N(\alpha)} A_i.$$

Para cada punto x en X existe $1 \leq i \leq N(\alpha)$ tal que $f(x) \in A_i$. Por lo tanto,

$$X = \cup_{i=1}^{N(\alpha)} f^{-1}\left(A_i\right).$$

Como $\left\{f^{-1}\left(A_1\right), f^{-1}\left(A_2\right), \ldots, f^{-1}\left(A_{N(\alpha)}\right)\right\}$ es una subcubierta abierta de $f^{-1}(\alpha)$ con $N(\alpha)$ elementos, entonces $N\left(f^{-1}(\alpha)\right) \leq N(\alpha)$.

Supongamos ahora que $f : X \to Y$ es suprayectiva. Sea η una subcubierta de $f^{-1}(\alpha)$ tal que $|\eta| = N\left(f^{-1}(\alpha)\right)$. Sean $A_i \in \alpha$, $1 \leq i \leq N\left(f^{-1}(\alpha)\right)$, tales que

$$\eta = \left\{f^{-1}\left(A_1\right), f^{-1}\left(A_2\right), \ldots, f^{-1}\left(A_{N(f^{-1}(\alpha))}\right)\right\}.$$

Entonces

$$Y = f(X) = \cup_{i=1}^{N\left(f^{-1}(\alpha)\right)} A_i.$$

Así, $N(\alpha) \leq N\left(f^{-1}(\alpha)\right)$. Por lo tanto $N\left(f^{-1}(\alpha)\right) = N(\alpha)$. $\square$

Ejercicio 80. *Sean $f : X \to Y$, y α y β dos cubiertas abiertas de Y. Entonces*

$$f^{-1}\left(\alpha \vee \beta\right) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta).$$

Dados $n \in \mathbb{N}$, $f : X \to X$, y A un subconjunto de X, denotamos por $f^{-n}(A)$ a la imagen inversa de A bajo la función f^n, es decir,

$$f^{-n}(A) = \left(f^n\right)^{-1}(A) = \{x \in X : f^n(x) \in A\}.$$

Ejercicio 81. *Sea $f : X \to X$, y sea $A \subset X$. Entonces para toda pareja de números naturales n y m se tiene lo siguiente:*

i) $f^{-n}\left(f^{-m}(A)\right) = f^{-n-m}(A)$, *y*

ii) $\left(f^m\right)^{-n}(A) = f^{-mn}(A)$.

Ejercicio 82. *Sea $f : X \to X$, y sean α y β dos cubiertas abiertas de X. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*
i) $f^{-n}(\alpha \vee \beta) = f^{-n}(\alpha) \vee f^{-n}(\beta)$, y
ii) si $\alpha < \beta$, entonces $f^{-n}(\alpha) < f^{-n}(\beta)$.

Sean $f : X \to X$, y α una cubierta abierta de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos la cubierta:

$$\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha).$$

A partir de la pareja: $f : X \to X$, función continua, y α, cubierta abierta de X, obtenemos una sucesión de cubiertas,

$$\alpha,\ \alpha \vee f^{-1}(\alpha),\ \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha),\ \cdots,\ \vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha),\ \ldots$$

Observemos que cada una de ellas refina a la anterior, es decir

$$\alpha < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha) < \cdots < \vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha) < \cdots$$

Obtenemos así la siguiente sucesión de números naturales:

$$N(\alpha) \le N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha)\right) \le N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee f^{-2}(\alpha)\right) \le \cdots \le N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right) \le \cdots$$

Obsérvese que, una vez que fijamos la pareja f y α, el valor de $N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)$ sólo depende de n. La idea central es descubrir que tan simple o complicado es el sistema dinámico generado por f a través del estudio de la rapidez de crecimiento de esta sucesión cuando n tiende a infinito:

$$\left\{N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Intuitivamente una función sencilla, que mueve muy poco a los puntos de X, estaría relacionada con un crecimiento lento o polinomial (con respecto a n) de $N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)$. Una función con dinámica más complicada movería tanto los puntos de X que el crecimiento sería exponencial.

Para descubrir esta diferencia, entre crecimiento polinomial y crecimiento exponencial, intentaremos calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right).$$

Observemos que este límite es cero si el crecimiento de la sucesión

$$\left\{N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

es polinomial en la variable n (o está acotado por un polinomio en n), y es positivo si éste es exponencial.

Demostraremos primero que el $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right)$ sí existe. La siguiente proposición contiene el primer paso en esta dirección.

Proposición 159. *Sean $f : X \to X$, α una cubierta abierta de X, n y m dos números naturales. Entonces*

$$\log\left(N\left(\vee_{i=0}^{(n+m)-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right) \le \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right) + \log N\left(\left(\vee_{i=0}^{m-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right).$$

Demostración. Sean n y m dos números en $\mathbb{N}$ y sea α una cubierta abierta de X. Entonces

$$\log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\alpha)\right)\right)$$

$$= \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m-n+1}(\alpha)\right)\right),$$

y por el ejercicio 82,

$$= \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha) \vee f^{-m}\left((\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\right)\right)\right),$$

y por la proposición 157,

$$\leq \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha)\right) N\left(f^{-m}\left((\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\right)\right)\right)$$

$$= \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha)\right)\right) + \log\left(N\left(f^{-m}\left((\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\right)\right)\right),$$

y por la proposición 158 tenemos,

$$\leq \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-m+1}(\alpha)\right)\right) + \log\left(N\left((\alpha) \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\right)\right),$$

con lo cual terminamos nuestra demostración. □

Ejercicio 83. *Mantenemos la notación de la proposición 159. Sea* $b_n = \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right)$. *La proposición mencionada nos dice que para cada pareja de números naturales n y m se tiene que $b_{n+m} \leq b_n + b_m$. Demuestra que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene lo siguiente:*
i) $b_k \leq b_{k+1}$; *y*
ii) $b_k \leq k b_1$.

Obsérvese que del ejercicio anterior se concluye que para todo n en $\mathbb{N}$ se tiene que $\frac{1}{n}\log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right)$ es menor o igual que $\log(N(\alpha))$.

Dada $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ definimos el $\limsup(a_n)$ y el $\liminf(a_n)$ de la siguiente forma:

i) si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, entonces

$$\limsup(a_n) = \infty,$$

ii) si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada inferiormente, entonces

$$\liminf(a_n) = -\infty,$$

iii) si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada, entonces

$$\limsup(a_n) = \max\left\{y \in \mathbb{R} : \text{existe } \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \lim_{n_i\to\infty} a_{n_i} = y\right\},$$

y

$$\liminf(a_n) = \min\left\{y \in \mathbb{R} : \text{existe } \{n_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}, \lim_{n_i\to\infty} a_{n_i} = y\right\}.$$

Ejercicio 84. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada en $\mathbb{R}$. Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que* $\limsup(a_n) < b$. *Entonces la cardinalidad del conjunto $\{a_n : a_n > b\}$ es finita.*

Ejercicio 85. *Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathbb{R}$ y sea $a_0 \in \mathbb{R}$. Entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ *si y sólo si* $\limsup(a_n) = \liminf(a_n) = a_0$.

Proposición 160. *Sea* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}$ *que cumple las siguientes condiciones:*
i) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, *y*
ii) para todo par de números n, m *en* $\mathbb{N}$, *se tiene que* $a_{n+m} \leq a_n + a_m$.
Entonces el $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$ *sí existe y su valor es* $\inf\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.

Demostración. Sea $m \in \mathbb{N}$ un número fijo. Para cada $n > m$ podemos escribir $n = qm + r$, donde $1 \leq q$ y $0 \leq r < m$. Entonces

$$a_n = a_{qm+r} \leq a_{qm} + a_r \leq q a_m + a_r.$$

Observemos que para todo $n > m$ tenemos que

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} a_m + \frac{a_r}{n}.$$

Como $n = qm + r$, entonces $\frac{n-r}{m} = q$ y $\frac{q}{n} = \frac{n-r}{nm}$. De aquí se sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q}{n} = \frac{1}{m}.$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{q}{n} a_m + \frac{a_r}{n}\right) = \frac{a_m}{m},$$

ya que a_r sólo toma una cantidad finita de valores, $\{a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}\}$.

Por lo tanto para cada m en $\mathbb{N}$ se tiene que

$$\limsup \frac{a_n}{n} \leq \frac{a_m}{m}.$$

De aquí se sigue que

$$\limsup \frac{a_n}{n} \leq c = \inf\left\{\frac{a_m}{m} : m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Por otro lado, como para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $c \leq \frac{a_n}{n}$, entonces $c \leq \liminf \frac{a_n}{n}$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = c$. □

La demostración del siguiente corolario es ahora inmediata.

Corolario 161. *El límite,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log\left(N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right)\right).$$

sí existe. Además su valor es mayor o igual a 0 *y menor o igual a* $\log(N(\alpha))$.

Definición 162. *Sean* $f : X \to X$ *y* α *una cubierta abierta de* X.
La entropía de f con respecto a la cubierta α *es:*

$$ent\,(f, \alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N\left(\vee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\alpha)\right).$$

Definimos la entropía topológica *de* f *así:*

$$ent\,(f) = \sup\{ent\,(f, \alpha) : \alpha \text{ es una cubierta abierta de } X\}.$$

Ejercicio 86. *Sea* $f : X \to X$ *la función identidad en* X. *Entonces* $ent(f) = 0$.

Ejercicio 87. *Sean* $x_0 \in X$ *y* $f : X \to X$ *la función dada por* $f(x) = x_0$ *para todo* x *en* X. *Entonces* $ent(f) = 0$.

Ejercicio 88. *Si la cardinalidad de X es finita, entonces para toda función $f : X \to X$ se tiene que $ent(f) = 0$.*

En relación al ejercicio anterior es importante señalar el siguiente resultado: Si la cardinalidad de X es infinita numerable, entonces para toda función $f : X \to X$ se tiene que $ent(f) = 0$.

Así, desde el punto de vista de la entropía, sólo podemos encontrar funciones con comportamiento *caótico* si éstas están definidas en un espacio de cardinalidad infinita no numerable.

Proposición 163. *Sean $f : X \to X$, y $k \in \mathbb{N}$. Entonces $ent\left(f^k\right) = k \cdot ent(f)$.*

Demostración. Sean f y k según las hipótesis, sea α una cubierta abierta de X, y sea β la cubierta abierta de X dada por $\beta = \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-k+1}(\alpha)$. Entonces

$$\begin{aligned} ent\left(f^k\right) &\geq ent\left(f^k, \beta\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log\left(N\left(\beta \vee \left(f^k\right)^{-1}(\beta) \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-n+1}(\beta)\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log\left(N\left(\beta \vee f^{-k}(\beta) \vee f^{-2k}(\beta) \vee \cdots \vee f^{-nk+k}(\beta)\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-k+1}(\alpha) \vee f^{-k}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} k\tfrac{1}{nk} \log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right) \\ &= k \cdot ent(f, \alpha). \end{aligned}$$

La última igualdad se sigue del hecho de que $\left\{\frac{1}{nk} \log\left(N\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right)\right\}$ es una subsucesión de $\left\{\frac{1}{n} \log\left(N\left(\alpha \vee \cdots \vee f^{-n+1}(\alpha)\right)\right)\right\}$.

Tenemos entonces que $ent\left(f^k\right) \geq k \cdot ent(f, \alpha)$ para cada cubierta α de X. Por lo tanto $ent\left(f^k\right) \geq k \cdot ent(f)$.

Por otro lado, como

$$\alpha \vee \left(f^k\right)^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-n+1}(\alpha) < \alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha),$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{nk}\right) log\left(N\left(\alpha \vee \left(f^k\right)^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-n+1}(\alpha)\right)\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{nk}\right) log\left(N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-nk+1}(\alpha)\right)\right).$$

Y así,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{nk}\right) log\left(N\left(\alpha \vee \left(f^k\right)^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee \left(f^k\right)^{-n+1}(\alpha)\right)\right) \leq ent(f, \alpha).$$

Por lo tanto, para cada cubierta α se tiene que

$$\frac{1}{k} \cdot ent\left(f^k, \alpha\right) \leq ent(f, \alpha) \leq ent(f).$$

De aquí se sigue que $ent\left(f^k\right) \leq k \cdot ent(f)$. Y con ello concluimos que $ent\left(f^k\right) = k \cdot ent(f)$. $\square$

Ejercicio 89. *Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ la función dada por $f(x) = 1 - x$. Demuestra que $ent(f) = 0$.*

Ejemplo 164. *Sean* $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *y* $k \in \mathbb{N}$. *La rotación en* $\mathbb{S}^1$ *de ángulo* $\frac{2\pi}{k}$ *está dada por la siguiente función:*

$$f(z) = ze^{i\frac{2\pi}{k}}.$$

Como $f^k(z) = z$ *para toda* z *en* $\mathbb{S}^1$, *entonces* $ent(f) = 0$.

La demostración que presentamos del siguiente lema sigue, casi al pie de la letra, la demostración de un resultado similar que aparece en el capítulo VIII de [7].

Lema 165. *Sea* $f : X \to X$ *y sea* $k \in \mathbb{N}$. *Si existen* k *subconjuntos cerrados de* X, *no vacíos, ajenos dos a dos,* $A_1, A_2, \ldots, A_k$, *tales que*

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \subset (f(A_1) \cap \cdots \cap f(A_k)),$$

entonces $ent(f) \geq \log k$.

Demostración. Sean $O_1, O_2, \ldots, O_k$, k subconjuntos abiertos de X, ajenos por parejas, tales que $A_i \subset O_i$, $1 \leq i \leq k$. Sea $O = X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$.

Entonces la colección $\alpha = \{O_1, O_2, \ldots O_k, O\}$ es una cubierta abierta de X.

Sea $n \in \mathbb{N}$. El conjunto

$$\Gamma = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{1, 2, \ldots, k\}\}$$

tiene cardinalidad k^n.

Por cada elemento en Γ, digamos

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x},$$

consideramos el conjunto

$$E_{\bar{x}} = \left\{p \in X : p \in A_{x_1}, f(p) \in A_{x_2}, \ldots, f^{n-1}(p) \in A_{x_n}\right\}.$$

Este conjunto es no vacío. Cada punto de $E_{\bar{x}}$ está contenido en un único elemento de la cubierta $\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)$, a saber

$$O_{x_1} \cap f^{-1}(O_{x_2}) \cap \cdots \cap f^{-n+1}(O_{x_n}).$$

De aquí se sigue que

$$N\left(\alpha \vee f^{-1}(\alpha) \vee \cdots \vee f^{-(n-1)}(\alpha)\right) \geq k^n.$$

Así $ent(f, \alpha) \geq \log k$ y, por lo tanto, $ent(f) \geq \log k$. □

Ejercicio 90. *La entropía de* $\sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ *es mayor o igual a* $\log(2)$.

Ejercicio 91. *La entropía de* la tienda $T : [0,1] \to [0,1]$ *es positiva.* Sugerencia. *Demuestra que* $ent(T^2) > 0$.

Proposición 166. *La entropía de* $\sigma : Q \to Q$ *es infinita.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$. Consideremos los siguientes k subconjuntos de Q, $A_1, A_2, \ldots, A_k$, definidos de esta manera: Para cada $1 \leq i \leq k$, sea

$$A_i = \left\{\widehat{t} = (t_0, t_1, t_2, \ldots) \in Q : t_0 = \frac{i}{k}\right\}.$$

No es difícil ver que las siguientes condiciones son ciertas:

i) Cada A_i es un subconjunto cerrado de Q.

ii) Si $i \neq j$, entonces $A_i \cap A_j = \emptyset$.
iii) Para cada i, se tiene que $\sigma(A_i) = Q$.
Entonces, por el lema 165, $ent(\sigma) \geq \log(k)$. Como esto sucede para cada $k \in \mathbb{N}$ que tomemos, la entropía de σ es infinita. □

La demostración de la siguiente importante proposición se puede consultar en el libro de Peter Walters [26].

Proposición 167. *Sean $f : X \to X$ y $g : Y \to Y$ dos funciones continuas definidas en espacios compactos. Sea $h : X \to Y$ una función continua y suprayectiva. Si el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "h"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd},$$

entonces $ent(f) \geq ent(g)$.

A partir de la proposición 167 la demostración del siguiente corolario es inmediata.

Corolario 168. *Si en las hipótesis de la proposición 167 se tiene además que $h : X \to Y$ es un homeomorfismo, entonces $ent(f) = ent(g)$.*

Ejercicio 92. *La entropía de* la función logística $f : [0,1] \to [0,1]$, $f(x) = 4x(1-x)$ *es positiva.*

Proposición 169. *Si $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene un punto periódico de periodo 3, entonces la entropía de f es positiva.*

Demostración. Sea $x_0 \in [0,1]$ tal que x_0 es un punto periódico de $f : [0,1] \to [0,1]$ de periodo 3. Sea a el elemento más pequeño de la órbita de x_0. El punto a es también de periodo 3 y su órbita se comporta de una de las siguientes dos formas:
Primera: $a < f(a) < f^2(a)$.
Segunda: $a < f^2(a) < f(a)$.
Consideraremos sólo el primer caso ya que la demostración para el segundo es análoga.
Sean $b = f(a)$ y $c = f^2(a)$. Entonces $0 \leq a < b < c \leq 1$. Como $f([b,c]) \supset [a,c]$, existe $[b_1, c_1] \subset [b,c]$ tal que $f([b_1,c_1]) = [a,b]$. Como $f([b,c]) \supset [b_1,c_1]$, existe $[b_2,c_2] \subset [b,c]$ tal que $f([b_2,c_2]) = [b_1,c_1]$.
Obsérvese que como a no está en $[b_1,c_1]$, entonces c no está en $[b_2,c_2]$.
Como $f([b,c]) \supset [b_2,c_2]$ y $f([a,b]) \supset [b_2,c_2]$, existen $[b_3,c_3] \subset [b,c]$ y $[u,v] \subset [a,b]$ tales que $f([b_3,c_3]) = [b_2,c_2]$ y $f([u,v]) = [b_2,c_2]$.
Como c no está en $[b_2,c_2]$, entonces b no es elemento de $[u,v]$ ni de $[b_3,c_3]$. Así los intervalos cerrados $K = [u,v]$ y $J = [b_3,c_3]$ son ajenos. Además estos conjuntos cumplen lo siguiente:

$$f^3(K) = [a,b], \text{ y } f^3(J) = [a,b].$$

Por el lema 165, obtenemos que la entropía de f^3 es mayor o igual a $log(2)$. Por lo tanto la entropía de la función f es positiva. □

Ejercicio 93. *Si $f : [0,1] \to [0,1]$ tiene un punto periódico de periodo m tal que m no es potencia de 2, entonces la entropía de f es positiva.* Sugerencia. *Utiliza el teorema de*

Sharkovskii para demostrar que existe $k \in \mathbb{N}$ *tal que* f^k *tiene un punto periódico de periodo* 3.

Proposición 170. *Si la función* $f : [0,1] \to [0,1]$ *es transitiva en* $[0,1]$*, entonces la entropía de* f *es positiva.*

Demostración. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función transitiva en $[0,1]$. Por el ejercicio 19 sabemos que existe un punto w_0 en el intervalo abierto $(0,1)$ tal que $f(w_0) = w_0$. En nuestra demostración consideraremos varios casos.

Caso 1. Existe $w_1 \in (0,1)$, $w_1 \neq w_0$, tal que $f(w_1) = w_0$.

Subcaso 1a. $0 < w_1 < w_0$.

Como f es transitiva, existen x, $w_1 < x < w_0$, y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x) < w_1$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (x-\delta, x+\delta)$ se tiene que $f^m(t) < w_1$. Obsérvese que $f^m(x-\delta) \leq w_1$ y $f^m(x+\delta) \leq w_1$.

Sean $B_1 = [w_1, x-\delta]$ y $B_2 = [x+\delta, w_0]$. Como $f(w_1) = w_0$, se sigue que $B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_1)$ y $B_1 \cup B_2 \subset f^m(B_2)$. Y por el lema 165, la entropía de f^m es positiva (ya que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$). Así $ent(f) > 0$.

Subcaso 1b. $w_0 < w_1 < 1$.

Como f es transitiva, existen x, $w_0 < x < w_1$, y $m \in \mathbb{N}$ tales que $f^m(x) > w_1$. Sea $\delta > 0$ tal que para todo $t \in (x-\delta, x+\delta)$ se tiene que $f^m(t) > w_1$. Así, $f^m(x-\delta) \geq w_1$ y $f^m(x+\delta) \geq w_1$. Sean $B_1 = [w_0, x-\delta]$ y $B_2 = [x+\delta, w_1]$. Análogo al subcaso *1a.* se tiene que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

Como $f(w_1) = w_0 = f(w_0)$, se sigue que $B_1 \cup B_2$ es subconjunto de $f^m(B_1)$ y de $f^m(B_2)$. Nuevamente por el lema 165, la entropía de f^m y la de f son positivas.

Caso 2. No existe $w \in (0,1)$, $w \neq w_0$, tal que $f(w) = w_0$.

Sean $I_0 = [0, w_0]$ y $I_1 = [w_0, 1]$. Observemos que para cualquier par de puntos, s y t, en I_0 no puede suceder que $f(s) < w_0 < f(t)$ ya que, por el teorema del valor intermedio, esto nos llevaría a concluir la existencia de un punto w, en el intervalo (0,1), tal que $f(w) = w_0$, con $w \neq w_0$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto $f(I_0) \subset I_0$ o $f(I_0) \subset I_1$. Situación análoga se vive en el intervalo I_1. Como f es transitiva en $[0,1]$ concluimos que

$$f(I_0) \subset I_1, \text{ y } f(I_1) \subset I_0.$$

Entonces $f^2(I_0) \subset I_0$ y $f^2(I_1) \subset I_1$. Observe el lector que para todo número par n se tiene que $f^n(I_0) \subset I_0$, y para todo número impar n se tiene que $f^n(I_0) \subset I_1$.

Sean $0 < a < b < w_0$ y $0 < c < d < w_0$. Como f es transitiva, existe n tal que $f^n(a,b) \cap (c,d) \neq \emptyset$. Como $(c,d) \cap I_1 = \emptyset$, entonces n es par, digamos $n = 2m$. Por lo tanto $(f^2)^m(a,b) \cap (c,d) \neq \emptyset$. Esto implica que la función f^2 es transitiva en I_0. Y utilizando nuevamente el ejercicio 19 concluimos que existe un punto w_1 en el intervalo abierto $(0, w_0)$ tal que $f^2(w_1) = w_1$.

Observemos que tanto w_0 como w_1 son ambos puntos fijos de f^2. Si $f^2([w_1, w_0]) \subset [w_1, w_0]$, entonces f^2 no sería transitiva en I_0. Por lo tanto existe w_2, $w_1 < w_2 < w_0$ tal que $f^2(w_2) = w_1$. Y así arribamos a una situación análoga al *Subcaso 1b.*

Entonces existen un número natural N y dos intervalos cerrados en $[w_1, w_2]$, digamos J y K, tales que $J \cap K = \emptyset$, $J \cup K \subset f^{2N}(J)$ y $J \cup K \subset f^{2N}(K)$. De donde se concluye que la entropía de f es positiva. ☐

De la proposición 170 se sigue lo siguiente: Si la función $f : [0,1] \to [0,1]$ es caótica, según la definición dada por Devaney, en $[0,1]$, entonces la entropía de f es positiva. El siguiente teorema, cuya demostración se puede consultar en el libro *Dynamics in One Dimension*, [7], muestra la relación que existe para funciones definidas en el intervalo $[0,1]$ entre entropía positiva y la presencia de una dinámica caótica según Devaney.

Sea $f : X \to X$ y sea $B \subset X$. Si $f(B) \subset B$, decimos que B es *invariante* bajo f.

Teorema 171. *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$. La entropía de f es positiva si y sólo si existe un conjunto cerrado B, contenido en $[0,1]$, invariante bajo f, tal que f restringida a B es caótica en B.*

Varios de los libros dedicados a los sistemas dinámicos discretos contienen una presentación de la entropía topológica. A los lectores interesados en continuar el estudio de este tema les recomendamos ampliamente los siguientes: *Dynamics in One Dimension*, escrito por L. S. Block y W. A. Coppel (ver [7]), *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, escrito por L. Alseda, J. Llibre y M. Misiurewicz (ver [3]), y *An Introduction to Ergodic Theory*, escrito por P. Walters (ver [26]). Recomendamos también el trabajo de tesis de licenciatura que presentó la estudiante Belén Espinosa Lucio en la Facultad de Ciencias de la UNAM, México. El título de esta tesis es *Introducción a la entropía topológica*, ver ([11]).

Referencias

1. G. Acosta, A. Illanes y H. Méndez, *The transitivity of induced maps*, Topology and its Applications, Vol. **156** (2009), 1013-1033.
2. R. L. Adler, A. G. Konheim y M. H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc., **114** (1965), 309-319.
3. L. Alseda, J. Llibre y M. Misiurewicz, *Combinatorial Dynamics and Entropy in Dimension One*, Series in Nonlinear Dynamics **5**, World Scientific, 1993.
4. G. Arenas y S. M. Sabogal, *Una introducción a la geometría fractal.* Ediciones UIS, Bucaramanga, Colombia, 2011.
5. J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis y P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, American Mathematical Monthly **99** (1992), 332-334.
6. M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere.* Second Edition, Academic Press, Cambridge, 1993.
7. L. S. Block y W. A. Coppel, *Dynamics in One Dimension.* Lecture Notes in Math. **1513**, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
8. R. Bowen, *Topological entropy and axiom A*, Global Analysis (1968), Proc. Sympos. Pure Math., **XIV**, Berkeley, Calif., Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970.
9. R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
10. R. Escobedo, S. Macías y H, Méndez eds., *Invitación a la Teoría de los Continuos y sus Hiperespacios.* Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. **31**, Sociedad Matemática Mexicana, 2006.
11. B. Espinosa, *Introducción a la entropía topológica*, Tesis de licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, 2006.
12. J. L. García, D. Kwietniak, M. Lampart, P. Oprocha y A. Peris, *Chaos on hyperspaces*, Nonlinear Anal. 71 (2009), no. 1-2, 1–8.
13. J. G. Hocking y G. S. Young, *Topology*, Dover Publications, New York, 1996.
14. R. A. Holmgren, *A First Course in Discrete Dynamical Systems*, Segunda Edición, Springer-Verlag, New York, 1996.
15. H. Méndez Lango, *On intervals, sensitivity implies Chaos*, Revista Integración, Vol. **21**, Nos. 1 y 2, (2003), 15-23.

16. H. Méndez Lango, *Is the process of finding f' chaotic?*, Revista Integración, Vol. **22**, Nos. 1 y 2, (2004), 37-41.
17. P. Minc y W. R. R. Transue, *Sarkovskii's Theorem for Hereditarily Decomposable Chainable Continua*, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. **315**, No. 1, (1989), 173-188.
18. S. B. Nadler Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. **158**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.
19. S. B. Nadler Jr., *Dimension Theory: An Introduction with Exercises*, Aportaciones Matemáticas, Serie Textos, Vol. **18**, Sociedad Matemática Mexicana, 2002.
20. C. Robinson, *Dynamical Systems, Stability, Symbolic Dynamics and Chaos*, CRC Press Inc., Boca Raton, Florida, 1995.
21. H. L. Royden, *Real Analysis*, MacMillan Publishing, New York, 1968.
22. S. Ruette, *Chaos for continuous interval maps.* Notas disponibles en la dirección electrónica: http://www.math.u-psud.fr/∼ruette/abstracts/abstract-chaos-int.html
23. R. M, Schori y J. E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert Cube*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **213**, (1975), 217-235.
24. M. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Editorial Reverte, España, 1968.
25. M. Vellekoop y R. Berglund, *On Intervals, Transitivity = Chaos*, Amer. Math. Monthly, **101**, (1994), 353-355.
26. P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory.* Graduate Texts in Math. **79**, Springer Verlag, New York, 1982.
27. S. Willard, *General Topology.* Dover Publications, New York, 2004.

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
E-mail address: garenasd@gmail.com

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
E-mail address: rafaisaacs@gmail.com

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM, Ciudad Universitaria, C.P. 04510, D. F., México.
E-mail address: hml@fciencias.unam.mx

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, A.A. 678, Bucaramanga, Colombia
E-mail address: ssabogal@uis.edu.co