¿Cuántos fractales hay?

Uriel Díaz Castañeda

8 de junio de 2011

Índice general

Prólogo

¿Qué es un fractal?, esta pregunta no se puede responder de una manera formal y sencilla en términos matemáticos. La idea de forma general, es la de un conjunto muy irregular, esto es, un conjunto que nunca se hace suave sin importar cuánto se magnifique cualquier región de este conjunto. El matemático francés Benoît Mandelbrot propuso el término fractal en 1975, esta palabra deriva del latín fractus que quiere decir quebrado o fracturado. Mandelbrot dice que este tipo de objetos geométricos representan mejor al mundo físico que los objetos geométricos clásicos como son los círculos, elipses o rectas.

La primer definición formal que dio Mandelbrot de un fractal, fue la de un conjunto que tuviera dimensión de Hausdorff estrictamente mayor a la dimensión topológica. Deafortunadamente esta definición deja fuera a muchos objetos que por sus propiedades se desearía que fueran también conjuntos fractales. Hasta ahora no hay una definición general de fractal, en el sentido de que no ha habido una que englobe a todos los objetos que por sus propiedades, qusieramos que fueran fractales. De esta forma, Mandelbrot ha sugerido que se use el término fractal de una forma más conceptual. Para tratar este objeto matemáticamente, se necesita una definición rigurosa, así que se sugiere que se trate con la definición mas conveniente, dependiendo de qué aspecto se esté trabajando.

Los fractales son objetos relativamente nuevos. Su descubrimiento y estudio comenzó apenas a principios de la década de los 70. Una de las principales características geométricas de estos objetos es la de autosimilaridad, la idea es, el objeto parece estar hecho de copias más pequeñas de sí mismo.

Los primeros ejemplos de fractales son de mucho tiempo atrás, antes de que se acuñara el término y se estudiara con detalle la idea. Por ejemplo el matemático alemán Karl Weierstrass encontró una función que es continua en todo punto pero no es diferenciable en ningún punto, la gráfica de esta función es un fractal y tiene la propiedad de autosimilaridad. Actualmente existen mucho ejemplos de conjuntos fractales. La idea de los fractales ha sido muy usada también en el arte.

Sorprendentemente los fractales, que son objetos de naturaleza geométrica compleja, tienen muchas aplicaciones dentro y fuera de las matemáticas como son en astronomía, biología, química, geografía, compresión de datos e imágenes, economía, música, finanzas entre otras.

En esta tesis se estudiarán a los fractales. Primero se construirán a partir de ideas geométricas sencillas, con iteraciones de funciones, y después notaremos que los objetos a los que llamaremos fractales son de una naturaleza geométrica generalmente compleja.
Veremos que en algún sentido, hay muy pocos fractales. Finalmente, estudiaremos el concepto de dimensión con la idea de calcluar la dimensión de los fractales. De hecho calcularemos la dimensión de algunos de ellos, con la idea de que podamos ver que este concepto puede reflejar la complejidad geométrica que en general tienen los fractales.

En el primer capítulo se introducirán todos los conceptos topológicos para el estudio y la construcción de los fractales. Se presentarán los conceptos de espacio métrico, conjunto abierto, conjunto cerrado, conjunto compacto entre otros, además del concepto de espacio métrico completo que resultará ser una parte fundamental en nuestro estudio. Seguiremos con la construcción del espacio donde viven los fractales, denotado por $\mathcal{H}(X)$, que es un espacio cuyos elementos son subconjuntos compactos y no vacíos de un espacio métrico X. Concluiremos el capítulo probando que es un espacio métrico completo, propiedad que es esencial para la construcción de los fractales.

En el segundo capítulo comenzaremos trabajando con transformaciones en espacios métricos, con la idea de ver qué es lo que estas transformaciones hacen a ciertos subconjuntos del espacio métrico. En particular trabajaremos con contracciones en espacios métricos. Una vez introducida la idea geométrica de éstas, presentaremos el teorema de punto fijo de Banach, para después construir contracciones en el espacio de los fractales a partir de contracciones en el espacio métrico original. Introduciremos los sistemas iterados de funciones como un conjunto finito de contracciones en el espacio métrico original y éstos serán denotados por SIF. Entenderemos a los fractales como los puntos fijos de contracciones que serán construidas por sistemas iterados de funciones (SIF) y veremos cómo estos SIF caracterizan a los fractales. Así veremos también que a pesar de que los fractales son construidos a partir de procesos de una naturaleza geométrica simple, estos en general tienen una naturaleza geométrica bastante compleja.

En el tercer capítulo la meta será construir un conjunto compacto que no sea atractor de ningún SIF. Esto es, veremos que no todos los conjuntos compactos son fractales. Màs aun, veremos que relativamente hay muy pocos fractales. Para hacer esto de manera formal, introduciermos elteorema de categoría de Baire. Este teorema será presentado pero no demostrado, sólo daremos una idea y algunos ejemplos de lo que este teorema dice. Con esta herramienta demostraremos que el conjunto de los fractales es muy pequeño, es decir de primera categoría mientras que el conjunto de los compactos que no son un conjunto fractal son de segunda categoría.

En el capítulo 4 estudiaremos el concepto de dimensión. Primero estudiaremos la dimensión topológica la cual a su vez se va a dividir en dos que serán la dimensión inductiva débil y la dimensión inductiva fuerte. Después de introducirlas y dar la idea geométrica de éstas, veremos que éstas dos son iguales en los fractales, es decir, éstas valen lo mismos en espacios métricos compactos. A la dimensión obtenida le llamaremos dimensión topológica. Después estudiaremos la dimensión de Hausdorff. Daremos la idea geométrica y se dará una caracterización muy útil de ésta en los fractales. Esto es, veremos que para fractales que cumplan una condición específica, será muy sencillo calcular su dimensión de Haussdorff. Concluiremos el capítulo con el cálculo de la dimensión de algunos fractales en particular y veremos que éstos también son fractales según la definición de Mandelbrot.

Agradecimientos.

Especialmente a mi madre, Celia Castañeda Arceo. Por su incondicional apoyo y cariño, mi más grande ejemplo de vida, día a día me llena de orgullo. Gracias a ella estoy en donde estoy y soy quien soy.

Al Dr. Héctor Méndez Lango por la enorme ayuda y paciencia que me ha brindado durante toda mi carrera y al día de hoy, ha sido pieza fundamental en mi formación, entendimiento y especialmente, en el cariño que he desarrollado por las matemáticas.

A mis sinodales, Dra. Magali Louise Marie Folch Gabayet, Dr. Jorge Marcos Martínez Montejano, Dr. Antonio Lascurain Orive y la M en C Emily Sánchez García por su tiempo y por las observaciones que hicieron para hacer de éste un mejor trabajo.

A la UNAM.

Gracias.

Capítulo 1

El espacio $\mathcal{H}(X)$

1.1. Espacios Métricos

Comenzaremos el capítulo con el concepto de espacio métrico. La razón de esto es que estamos interesados en estudiar la estructura de algunos subconjuntos de espacios geométricamente *simples* que serán denotados por X y resulta ser que los espacios en los que trabajaremos son espacios métricos generados a partir de otros espacios métricos. Se definirá también el concepto de espacio completo ya que éste es necesario para asegurar la existencia de los *fractales*.

Definición 1.1.1. *Una métrica d en un conjunto X es una función $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:*

i) $d(x, y) \geq 0$		$x, y \in X$.
ii) $d(x, y) = 0$	*si y sólo si*	$x = y$.
iii) $d(x, y) = d(y, x)$		$x, y \in X$.
iv) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$		$x, y, z \in X$.

Llamaremos espacio métrico a la pareja (X, d). A continuación veremos algunos ejemplos de espacios métricos.

Ejemplo 1.1.2. *La pareja $(\mathbb{R}, d)$ donde $\mathbb{R}$ denota a los números reales y*

$$d(x, y) = |x - y|$$

es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.3. *La pareja $(\mathbb{R}^n, d)$ donde*

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

es un espacio métrico donde la métrica d es conocida como la métrica usual.

Ejemplo 1.1.4. *La pareja* $(\mathbb{R}^n, d)$ *donde*

$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + ... + |x_n - y_n|$$

es un espacio métrico.

Definición 1.1.5. *Una función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *de un espacio métrico* (X_1, d_1) *a otro espacio métrico* (X_2, d_2) *es continua en* $a \in X_1$ *si ocurre que para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $d_1(x, a) < \delta$ *entonces* $d_2(f(x), f(a)) < \varepsilon$

Definición 1.1.6. *Se dice que la función* $f : X_1 \longrightarrow X_2$ *es continua en* X_1 *si* f *es continua para toda* $a \in X_1$

El concepto de continuidad nos dice que puntos cercanos tienen imágenes cercanas.
Si además la función f es biyectiva y su inversa f^{-1} también es continua, entonces se dice que la función f es un *homeomorfismo* entre X_1 y X_2, en cuyo caso decimos que, X_1 y X_2 son homeomorfos.

1.2. Sucesiones de Cauchy

En el estudio de los conjuntos fractales, estamos interesados en describir, analizar y clasificar ciertos subconjuntos de espacios métricos (X, d). Hay varias nociones y conceptos generales de los espacios métricos que necesitamos introducir, ya que trabajaremos con ellos. Los fractales resultarán ser elementos de un espacio métrico particular. Algunas de estas nociones son de carácter topológico. A continuación se introducirán dichos conceptos. La referencia básica para los resultados de la secciónes de este y del siguiente capítulo son los libros de Barnsley [1] y Royden [5].

Definición 1.2.1. *Una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *contenida en* X *es una sucesión de Cauchy si para toda* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $m, n \geq N$ *entonces* $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

La definición dice que en una sucesión de Cauchy, los puntos de ésta se van acercando cada vez más entre sí. Esto sin embargo, en general no implica que los puntos de la sucesión se vayan acercando a algún punto del espacio.

Definición 1.2.2. *Decimos que una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *converge a* $x \in X$ *si para toda* $\varepsilon > o$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$ *entonces* $d(x_n, x) < \varepsilon$.

En este caso decimos que $x \in X$ es el *límite de la sucesión*, esto suele ser denotado como $x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

A continuación se enunciará un resultado que no se demostrará.

Teorema 1.2.3. *Si* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión contenida en* X *y además* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$ *entonces* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión de Cauchy.*

Definición 1.2.4. *Un espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de Cauchy es convergente.*

Ejemplo 1.2.5. *El espacio métrico $(0, 1)$ no es completo, ya que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es una sucesión de Cauchy pero no converge en $(0, 1)$.*

Esta definición nos dice que cualquier sucesión de Cauchy en un espacio completo, converge en el mismo espacio. Es decir, en un espacio completo, las sucesiones de Cauchy efectivamente se acercan a un punto.
Algunas veces denotaremos a la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ como (x_n) y denotaremos al límite $\lim_{n\to\infty} x_n$ como $\lim x_n$ cuando sea claro a qué se refiere.

Ejemplo 1.2.6. *El espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ donde d es la métrica euclideana es un espacio métrico completo.*

Ejemplo 1.2.7. *El espacio métrico $(\mathbb{R}^n, d)$ donde d es la métrica euclideana en $\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo.*

Definición 1.2.8. *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto del espacio métrico (X, d). Decimos que un punto $x \in X$ es un punto de acumulación de S si existe una sucesión (x_n) contenida en $S\backslash\{x\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Definición 1.2.9. *Sea $S \subseteq X$ un subconjunto del espacio métrico (X, d). La cerradura de S denotada por $\overline{S}$, se define como*

$$\overline{S} = S \cup \{x \in X : x \textit{es punto de acumulación de} S\}.$$

Decimos que S es cerrado si éste contiene a todos sus puntos de acumulación, es decir, si $S = \overline{S}$.

Lema 1.2.10. *Si (X, d) es un espacio métrico completo y $A \subseteq X$ es un subconjunto cerrado, entonces (A, d_A) es completo, donde d_A la métrica d restringida al conjunto A.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en A con respecto a la métrica inducida d_A. Entonces ésta es una sucesión de Cauchy en X con la métrica d. Así la sucesión converge a un punto $x \in X$. Si para toda $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n \neq x$, entonces x es punto de acumulación de A, entonces $x \in A$. Si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m = x$ entonces $x \in A$. Así x es un punto de acumulación de A. Pero A es cerrado, entonces $x \in A$ y por lo tanto el espacio (A, d_A) es completo. □

Ejemplo 1.2.11. *El intervalo cerrado $I = [0, 1]$ es un conjunto cerrado y completo en $\mathbb{R}$.*

1.3. Conjuntos Compactos

Continuaremos dando definiciones y propiedades necesarias para el estudio de subconjuntos de espacios métricos.

Definición 1.3.1. *Sea S un subconjunto del espacio métrico (X, d). Decimos que el conjunto S es abierto si para toda $x \in S$ existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\} \subseteq S.$$

Notemos que de acuerdo a la definición, el conjunto X es un conjunto abierto ya que $B(x, 1) \subseteq X$ para toda $x \in X$.

Definición 1.3.2. *Sea S un subconjunto del espacio métrico (X, d), decimos que el conjunto S es acotado si existe $x \in X$ y $R > 0$ tal que*

$$d(x, s) < R$$

para todo $s \in S$.

Definición 1.3.3. *Sea S un subconjunto del espacio métrico (X, d). Decimos que S es totalmente acotado si para toda $\varepsilon > 0$, existe $\{y_1, y_2, ..., y_n\} \subseteq S$ tal que $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon)$. Al conjunto $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ le llamaremos una ε-red.*

Ahora probaremos un resultado que nos da una caracterización muy útil de los conjuntos abiertos.

Lema 1.3.4. *Sea (X, d) un espacio métrico y S subconjunto de X. Entonces, S es abierto si y sólo si $X \setminus S$ es cerrado.*

Demostración. Supongamos que S es abierto y que tenemos una sucesión $(x_n) \subseteq X \setminus S$ que converge a $x \in X$. Supongamos que $x \in S$. Como la sucesión (x_n) converge a x, entonces para toda $\varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon)$ contiene una infinidad de elementos de la sucesión $(x_n) \subseteq X \setminus S$, es decir, $B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus S) \neq \emptyset$, esto es, S no es abierto. Lo cual es una contradicción ya que por hipótesis S es abierto. Así, $x \in X \setminus S$ y por lo tanto $X \setminus S$ es cerrado.

Ahora supongamos que $X \setminus S$ es cerrado y sea $x \in S$. Supongamos que no existe un radio $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq S$. Entonces para toda $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar un punto

$$x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap (X \setminus S).$$

Por construcción $(x_n) \subseteq X \setminus S$ que es cerrado por hipótesis. Además $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Así, $x \in X \setminus S$ lo cual es una contradicción ya que por hipótesis $x \in S$. Por lo tanto S es abierto.

□

Definición 1.3.5. *Sea S un subconjunto del espacio métrico (X, d). Decimos que el punto $x \in X$ es un punto frontera del conjunto S si para toda $\varepsilon > 0$,*

$$B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$$

y

$$B(x, \varepsilon) \cap (X \setminus S) \neq \emptyset.$$

Es decir, cualquier bola abierta alrededor del punto x tiene elementos del conjunto S y del conjunto $X \setminus S$. El conjunto de todos los puntos frontera de S es llamado la frontera del conjunto S y es denotado por ∂S. Notemos que $\partial\emptyset = \emptyset$.

Notemos que si $S \subseteq X$ entonces $\partial S = \partial(X \setminus S)$.

Definición 1.3.6. *Sea S un subconjunto del espacio métrico (X, d). Decimos que un punto $x \in S$ es un punto interior de S, si existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq S$. El conjunto de todos los puntos interiores de S es llamado el interior de S y es denotado por $int(S)$.*

Definición 1.3.7. *Sea S un subconjunto del espacio métrico (X, d). Decimos que S es compacto si toda cubierta abierta de S tiene una subcubierta finita. Esto es, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{I}}$ es una familia de conjuntos abiertos tal que $S \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha$ entonces existe $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{I}$, finito, tal que $S \subseteq \bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}} U_\alpha$.*

A continuación daremos un teorema que nos dará una caracterización de los conjuntos compactos en espacios métricos.

Teorema 1.3.8. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) X es compacto.
ii) Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.
iii) X es completo y totalmente acotado.

Demostración. Veamos que (i) implica (ii)
Sea (x_n) una sucesión en X, supongamos que para toda $y \in X$, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B(y, \varepsilon_y)$ contiene sólo a un número finito de elementos de (x_n). Si $n \neq m$, decimos que x_n y x_m son elementos distintos de la sucesión. Considera la colección $\{B(y, \varepsilon_y) : y \in X\}$. Esta es una cubierta abierta de X que es compacto, entonces existe una subcubierta abierta finita, esto es, existen $y_1, y_2, ..., y_m$ en X tal que,

$$X \subseteq B(y_1, \varepsilon_{y_1}) \cup B(y_2, \varepsilon_{y_2}) \cup \cdots \cup B(y_m, \varepsilon_{y_m})$$

Así tenemos que la sucesión (x_n) tendría un número finito de elementos lo cual es falso. Entonces existe $y_0 \in X$ tal que para toda $\varepsilon > 0$, la bola abierta $B(y_0, \varepsilon)$ contiene a una infinidad de elementos de (x_n). Podemos entonces tomar una sucesión creciente de números naturales,

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_j < \ldots$$

tales que $x_{k_j} \in B(y_0, 1/j)$. Así, $\lim_{j\to\infty} (x_{k_j}) = y_o$.

Veamos que (ii) implica (iii)

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy. Entonces ésta tiene una subsucesión que converge a un punto $x \in X$ y como la sucesión es de Cauchy, la misma sucesión (x_n) converge a x. Así X es completo.
Supongamos que X no es totalmente acotado, entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que X no puede ser cubierto por un número finito de bolas de radio ε_0. Esto es, podemos construir una sucesión $(x_k) \subseteq X$ tal que

$$x_{k+1} \notin B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0) \cup \cdots \cup B(x_k, \varepsilon_0).$$

Es decir, $d(x_k, x_j) > \varepsilon_0$ si $j \neq k$. Entonces la sucesión no puede tener ninguna subsucesión convergente, esto es, si X no fuera totalmente acotado entonces (ii) que es nuestra hipótesis no se cumpliría.

Veamos que (iii) implica (i)
Supongamos que X es completo y totalmente acotado pero no compacto. Entonces X tiene una cubierta abierta $U = \{U_i : i \in \mathcal{I}\}$ tal que no tiene una subcubierta finita. Como X es totalmente acotado, entonces X está contenido en un número finito de bolas de radio 1. Entonces existe $x_1 \in X$ tal que $B(x_1, 1)$ no puede ser cubierto por un número finito de elementos de U. Análogamente, como $B(x_1, 1)$ es totalmente acotado ya que $B(x_1, 1)$ está contenida en X, existe $x_2 \in B(x_1, 1)$ tal que $B(x_2, 1/2)$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U. Así podemos construir una sucesión (x_k) tal que $x_k \in B(x_{k-1}, \frac{1}{2^{k-1}})$ y $B(x_k, \frac{1}{2^k})$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U. Así para toda $j \geq k$ tenemos que,

$$\begin{aligned} d(x_k, x_j) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + \ldots + d(x_{j-1}, x_j) \\ &\leq 1/2^k + \ldots + 1/2^{j-1} \\ &< \textstyle\sum_{i=k}^{\infty} 1/2^i \\ &= 1/2^{k-1} \end{aligned}$$

Es decir, (x_k) es de Cauchy, por lo tanto converge a un punto $\widetilde{x} \in X$ ya que X es completo. De la desigualdad anterior si j tiende a ∞ tenemos que,

$$d(x_k, \widetilde{x}) \leq 1/2^{k-1}, k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, como $\widetilde{x} \in X$ existe $U_{i_0} \in U$ tal que $\widetilde{x} \in U_{i_0}$ y como U_{i_0} es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(\widetilde{x}, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}$. Ahora sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{k-2} < \varepsilon$.
Entonces para todo $x \in B(x_k, 1/2^k)$ tenemos que,

$$\begin{aligned} d(x, \widetilde{x}) &\leq d(x, x_k) + d(x_k, \widetilde{x}) \\ &< 1/2^k + 1/2^{k-1} \end{aligned}$$

$$< \varepsilon.$$

Esto es

$$B(x_k, 1/2^k) \subseteq B(\widetilde{x}, \varepsilon) \subseteq U_{i_0}.$$

Lo cual es una contradicción ya que habíamos supuesto que $B(x_k, 1/2^k)$ no puede ser cubierta por un número finito de elementos de U. Por lo tanto X es compacto.

□

1.4. Conjuntos Conexos

Definición 1.4.1. *Un espacio métrico (X, d) es disconexo si existen conjuntos abiertos U y V tal que:*

i) $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$,
ii) $X = U \cup V$,
iii) $U \cap V = \emptyset$.

Decimos que un espacio X es conexo si X no es disconexo.
Un subconjunto $S \subseteq X$ es conexo si el espacio métrico $(S, d|_S)$ es un espacio métrico conexo.

Observemos que para toda $x \in X$, $\{x\}$ es un conjunto conexo.

Ejemplo 1.4.2. *El espacio métrico $(\mathbb{R}, d)$ donde d denota a la métrica euclideana, es un espacio métrico conexo.*

Ejemplo 1.4.3. *El intervalo $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ es un subconjunto conexo de los números reales.*

Definición 1.4.4. *Sea $x_0 \in X$ y $\{C_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ la colección de todos los subconjuntos conexos tal que $x_0 \in C_i$ para toda $i \in \mathfrak{I}$. El conjunto*

$$C(x_0) = \bigcup_{i \in \mathfrak{I}} C_i$$

es llamado la componente conexa de X que contiene al punto x_0. La componente conexa es a su vez un conjunto conexo.

Definición 1.4.5. *Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que X es totalmente disconexo si para toda $x \in X$, se tiene que $C(x) = \{x\}$ donde $C(x)$ es la componente conexa de X que contiene a x.*

La idea intuitiva de un espacio totalmente disconexo, es la de un espacio que es como *polvo*, es decir, un espacio hecho de puntos separados.

Ejemplo 1.4.6. *El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es un conjunto totalmente disconexo.*

Definición 1.4.7. *Sean (X,d) un espacio métrico y x y y dos puntos en X. Una trayectoria entre x y y es una función $f:[0,1]\longrightarrow X$ tal que f es continua, $f(0)=x$ y $f(1)=y$. En este caso, decimos que x y y son los extremos de la trayectoria que une a x con y.*

Diremos que X es conexo por trayectorias *si para cualquier par de puntos $x,y\in X$ existe una trayectoria en X que una a x y y.*

Ejemplo 1.4.8. *El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un espacio conexo por trayectorias. En efecto, si $x,y\in\mathbb{R}$ entonces $f(t)=ty+(1-t)x$, $t\in[0,1]$, es una trayectoria entre x y y.*

1.5. El hiperespacio de los fractales $(\mathcal{H}(X),h)$

En este capítulo se construirá un hiperespacio que resulta ser el espacio métrico donde estudiaremos a las conjuntos fractales. Este espacio métrico será construido a partir del espacio métrico original, y la métrica en este espacio también será construida a partir de la métrica original. Este es conocido como un hiperespacio debido a que sus elementos son a su vez conjuntos de X. A lo largo de todo este capítulo (X,d) representa un espacio métrico completo. Nuestro principal ejemplo de espacio X es el plano; es decir $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.5.1. *Sea (X,d) un espacio métrico, consideremos al conjunto*

$$\mathcal{H}(X)=\{K\subseteq X|K\,es\ compacto, K\neq\emptyset\}.$$

Es decir, los elementos de $\mathcal{H}(X)$ son subconjuntos compactos del espacio métrico (X,d).

Notemos que si $x\in X$, $\{x\}$ es un subconjunto compacto de X.
La meta es definir una métrica en este espacio. Para hacerlo, primero definiremos la distancia de un punto a un compacto.

Definición 1.5.2. *Sean $x\in X$ y $B\in\mathcal{H}(X)$, definimos:*

$$d(x,B)=\text{ínf}\{d(x,y)|y\in B\}.$$

Entonces $d(x,B)$ es la distancia entre el punto x y el conjunto B.

Veamos que el conjunto $\{d(x,y)|y\in B\}$ siempre alcanza su mínimo, para ver esto notemos primero lo siguiente.

Afirmación 1.5.3. *Sean $K\in\mathcal{H}(X)$ y $z\in X$. Definimos $f:K\longrightarrow\mathbb{R}$ como $f(x)=d(z,x), x\in K$. Entonces la función f es una función continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon>0$. Sabemos que

$$d(z,x)\leq d(z,y)+d(y,x).$$

Entonces
$$d(z,x) - d(z,y) \leq d(y,x).$$
Por otro lado,
$$d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y).$$
Entonces
$$-d(x,y) \leq d(x,z) - d(z,y).$$
Así tenemos que si $d(x,y) < \delta = \varepsilon$ entonces
$$|f(x) - f(y)| = |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y) < \delta = \varepsilon.$$

□

Así tenemos que la función $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y como K es compacto, entonces la función alcanza su mínimo en algún punto de K. Es decir, existe $\widetilde{x} \in X$ tal que $f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ para toda $x \in K$. Esto es, $d(\widetilde{x}, z) \leq d(x,z)$ para toda $x \in K$.
Tenemos entonces que, $d(\widetilde{x}, z) = min\{d(x,z)|x \in K\} = d(x,K)$ donde $K \in \mathcal{H}(X)$. Así tenemos que la distancia de un punto a un conjunto compacto está bien definida. Además para toda $z \in X$, existe un punto $\widetilde{x} \in K$ tal que $d(z, \widetilde{x}) = d(z,K)$.

Definición 1.5.4. *Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$, definimos*
$$d(A,B) = \sup\{d(x,B)|x \in A\}.$$

A continuación demostraremos que el máximo se alcanza.

Afirmación 1.5.5. *La función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(x,B)$ para $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y para toda $x \in A$ es continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$,
$$|f(x) - f(y)| = |d(x,B) - d(y,B)|,$$
sabemos que existen $b_1, b_2 \in B$ tal que $d(x,B) = d(x,b_1)$ y $d(y,B) = d(y,b_2)$, así tenemos que
$$d(x,b_1) \leq d(x,b_2) \leq d(x,y) + d(y,b_2).$$
De forma similar tenemos
$$d(y,b_2) \leq d(y,b_1) \leq d(y,x) + d(x,b_1).$$
De estas dos desigualdades obtenemos
$$-d(x,y) \leq d(x,b_1) - d(y,b_2) \leq d(x,y),$$
esto es

$$|d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y),$$

así tenemos que si $d(x, y) < \delta = \varepsilon$, entonces

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, B) - d(y, B)| = |d(x, b_1) - d(y, b_2)| \leq d(x, y) < \delta = \varepsilon.$$

Por lo tanto f es continua.

$\square$

La existencia del máximo es debida a que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = d(x, B)$ para toda $x \in A$ es continua y al hecho de que $A \in \mathcal{H}(X)$. Así f alcanza su máximo. Es decir, existe $a_1 \in A$ tal que $f(a) \leq f(a_1)$, para toda $a \in A$. Esto es,

$$d(A, B) = max\{d(x, B)|x \in A\} = max\{f(x)|x \in A\} = f(a_1) = d(a_1, B).$$

Con el resultado anterior, obtenemos que existe $\widetilde{a} \in A$ y existe $\widetilde{b} \in B$ tal que

$$d(A, B) = d(\widetilde{a}, \widetilde{b}).$$

Notemos que d no define una métrica en $\mathcal{H}(X)$, como se ve en el siguiente ejemplo:

Consideremos $A, B \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, $A = [0, 1] \times \{0\}$ y $B = [0, 2] \times \{1\}$.
Así tenemos que $d(A, B) = 1$ y $\sqrt{2} = d(B, A)$. Esto es, d no define una métrica en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ ya que d no cumple la condición de simetría.

A continuación veremos algunas propiedades y definiremos la métrica que usaremos en el estudio de los fractales.

Lema 1.5.6. *Si $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $A \subseteq B$ entonces $d(A, B) = 0$.*

Demostración. Tenemos que

$$d(A, B) = max\{d(a, B)|a \in A\} = d(a_0, B)$$

para alguna $a_0 \in A$. Así,

$$d(A, B) = min\{d(a_0, b)|b \in B\},$$

pero como $a_0 \in A \subseteq B$, entonces $a_0 \in B$. Así

$$min\{d(a_0, b|b \in B\} = 0.$$

$\square$

Definición 1.5.7. *Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Definimos $h(A, B)$ como*

$$h(A, B) = max\{d(A, B), d(B, A)\}.$$

El objetivo ahora es ver que h es una métrica en $\mathcal{H}(X)$, para esto, demostraremos antes algunos resultados necesarios.

Lema 1.5.8. *Sea $S \subseteq \mathbb{R}$ tal que $S \neq \emptyset$ y el mínimo de S existe. Sea $k \in \mathbb{R}$ fija, entonces*

$$min\{k+s|s \in S\} = k + minS.$$

Demostración. Sea $K = \{k+s|s \in S\}$. Como $\min s \in S$, entonces $k + minS$ está en K. Ahora, sea $k+s \in K$ como $s \in S$ tenemos que $minS \leq s$, entonces, $k + minS \leq k+s$ para toda $s \in S$, esto es,

$$k + minS = minK.$$

□

Lema 1.5.9. *Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, tales que cumplen las siguientes desigualdades*

$$a \leq b + c \qquad y \qquad d \leq e + f. \text{ Entonces,}$$

$$max\{a, d\} \leq max\{b, e\} + max\{c, f\}.$$

Demostración. Si $max\{a, d\} = a$, entonces

$$max\{a, d\} \leq b + c \leq max\{b, e\} + max\{c, f\}.$$

Por otro lado si $max\{a, d\} = d$, entonces

$$max\{a, d\} \leq e + f \leq max\{b, e\} + max\{c, f\}.$$

En ambos casos se obtiene lo que se quería.

□

Lema 1.5.10. *Sean A, B, C elementos de $\mathcal{H}(X)$. Sean $a \in A$ y $c \in C$ fijos. Entonces*

$$min\{d(a, b)|b \in B\} \leq min\{d(a, c) + d(c, b)|b \in B\}$$

Demostración. Sean $b_0, b_1 \in B$ tales que:

$$d(a, c) + d(c, b_0) = min\{d(a, c) + d(c, b)|b \in B\}$$

y

$$d(a, b_1) = min\{d(a, b)|b \in B\}.$$

Así tenemos que

$$d(a, b_1) \leq d(a, b_0) \leq d(a, c) + d(c, b_0).$$

Por lo tanto

$$min\{d(a, b)|b \in B\} \leq min\{d(a, c) + d(c, b)|b \in B\}.$$

□

Lema 1.5.11. *Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Entonces,*

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

Demostración. Para cada $a \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(a, B) &= min\{d(a, b) | b \in B\} \\ &\leq min\{d(a, c) + d(c, b) | b \in B\} \\ &= d(a, c) + min\{d(c, b) | b \in B\} \text{ para toda } c \in C. \end{aligned}$$

Ahora tomamos $c_0 \in C$ tal que $d(a, C) = d(a, c_0)$. Así tenemos que,

$$\begin{aligned} d(a, B) &\leq d(a, c_0) + min\{d(c_0, b) | b \in B\} \\ &\leq d(a, C) + max\{min\{d(c, b) | b \in B\} | c \in C\} \\ &= d(a, C) + d(C, B). \end{aligned}$$

Ahora tomamos $a_0 \in A$ tal que $d(A, B) = d(a_0, B)$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} d(A, B) &\leq d(a_0, C) + d(C, B) \\ &\leq max\{d(a, C) | a \in A\} + d(C, B) \\ &= d(A, C) + d(C, B), \end{aligned}$$

como se quería demostrar.

□

Ahora tenemos todos los resultados para probar que h es métrica.

Proposición 1.5.12. *La función h es una métrica en $\mathcal{H}(X)$.*

Demostración. i) $h(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.
Sea $a_0 \in A$. Como $h(A, B) = 0$ entonces $d(A, B) = 0 = d(B, A)$ esto es,

$$d(A, B) = max\{d(a, B) | a \in A\} = 0,$$

lo cual implica que existe $a_1 \in A$ tal que $d(a_1, B) = 0$. Entonces tenemos que $d(a_0, B) \leq d(a_1, B) = 0$, así $d(a_0, B) = 0$. Sabemos también que existe $b_0 \in B$ tal que $d(a_0, b_0) = d(a_0, B) = 0$ esto es $a_0 = b_0$ y así $a_0 \in B$. Entonces $A \subseteq B$. De forma análoga se puede probar que $B \subseteq A$, esto es $A = B$

Supongamos ahora que $A = B$. Utilizando el lema 1.5.6, como $A \subseteq B$ tenemos que $d(A, B) = 0$, y como $B \subseteq A$ tenemos que $d(B, A) = 0$. Por lo tanto $h(A, B) = 0$.

ii)Claramente $h(A,B) = h(B,A)$
iii)Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Por el resultado anterior, sabemos que,

$$d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$$

y

$$d(B,A) \leq d(B,C) + d(C,A).$$

Por el lema 1.5.11, sabemos que

$$max\{d(A,B), d(B,A)\} \leq max\{d(A,C), d(C,A)\} + max\{d(C,B), d(B,C)\}$$

así,

$$h(A,B) \leq h(A,C) + h(C,B)$$

y por lo tanto h es métrica.

□

A la métrica h se le conoce como métrica de Hausdorff. Notemos que esta métrica depende de la métrica original en X.

1.6. El espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo

El objetivo de esta sección será probar que el espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo si el espacio (X, d) es completo. De hecho probaremos la equivalencia de estas dos condiciones. Para esto probaremos algunos resultados previos.

Definición 1.6.1. *Sean (X,d) espacio métrico, $A \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Definimos la nube de radio ε con centro en A como,*

$$N(A,\varepsilon) := \{x \in X : d(x;A) < \varepsilon\}.$$

Lema 1.6.2. *Sean A, B elementos de $\mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $h(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(B,\varepsilon)$ y $B \subseteq N(A,\varepsilon)$.*

Demostración. Supongamos que $d(A,B) < \varepsilon$. Esto es

$$max\{d(a,B) : a \in A\} < \varepsilon.$$

Por lo tanto $d(a,B) < \varepsilon$ para toda $a \in A$. Esto es, para toda $a \in A, a \in N(B,\varepsilon)$. Así $A \subseteq N(B,\varepsilon)$.

Supongamos ahora que $A \subseteq N(B,\varepsilon)$. Así, para toda $a \in A, d(a,B) < \varepsilon$. En particular para $a_0 \in A$ tal que $d(A,B) = d(a_0,B) < \varepsilon$.
Hemos probado que $d(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(B,\varepsilon)$. De forma análoga se obtienes $d(B,A) < \varepsilon$ si y sólo si $B \subseteq N(A,\varepsilon)$.

Así, $h(A,B) < \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq N(B,\varepsilon)$ y $B \subseteq N(A,\varepsilon)$.

□

Denotamos a la nube cerrada con centro en A y radio ε como:

$$\overline{N}(A,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,A) \leq \varepsilon\}.$$

Lema 1.6.3. *Sean $A \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces $\overline{N}(A,\varepsilon)$ es un conjunto cerrado.*

Demostración. Sea $y \in X \setminus (\overline{N}(A,\varepsilon))$. Entonces $d(y,A) > \varepsilon$, sea $a_0 \in A$ tal que

$$d(y,A) = d(y,a_0).$$

Considera $\delta = d(y,a_0) - \varepsilon > 0$. Sean $z \in B(y,\delta)$ y $a \in A$. Así tenemos que

$$d(y,a_0) \leq d(y,a) \leq d(y,z) + d(z,a) < \delta + d(z,a) = d(y,a_0) - \varepsilon + d(z,a).$$

Esto es, $d(z,a) > \varepsilon$. Así $B(y,\delta) \subseteq X \setminus (\overline{N}(A,\varepsilon))$. Entonces $\overline{N}(A,\varepsilon)$ es cerrado. □

De forma análoga a un lema anterior, se puede probar lo siguiente.

Lema 1.6.4. *Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, $h(A,B) \leq \varepsilon$ si y sólo si $A \subseteq \overline{N}(B,\varepsilon)$ y $B \subseteq \overline{N}(A,\varepsilon)$.*

Lema 1.6.5. *(lema de extensión) Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{H}(X),h)$, sea $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente.*
Supongamos que $\{x_{n_j} \in A_{nj} : j \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy en (X,d). Entonces existe una sucesión de Cauchy $\{\widetilde{x_n} \in A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\widetilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$ para toda $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Construiremos $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como sigue. Para cada $n \in \{1,2,3,......,n_1-1\}$, tomamos $\widetilde{x}_n \in A_n$ tal que

$$d(x_{n_1},\widetilde{x}_n) = d(x_{n_1},A_n).$$

Análogamente para cada $j \in \mathbb{N}$ y cada n tal que $n_{j-1} < n < n_j$, tomamos $\widetilde{x}_n \in A_n$ tal que $d(x_{n_j},\widetilde{x}_n) = d(x_{n_j},A_n)$ y finalmente $\widetilde{x}_{n_j} = x_{n_j}$. Veamos que la sucesión $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$, como $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n_j, n_k \geq N_1$ entonces $d(x_{n_j},x_{n_k}) < \frac{\varepsilon}{3}$.
Como (A_n) es de Cauchy entonces existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n_j \geq N_2$ entonces $h(A_m,A_{n_j}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Entonces, $A_m \subseteq N(A_{n_j},\frac{\varepsilon}{3})$ y $A_{n_j} \subseteq N(A_m,\frac{\varepsilon}{3})$. Así tenemos que,

$$d(x_{n_j},A_m) = d(x_{n_j},\widetilde{x}_m) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Análogamente si $n, n_k \geq N_2$ entonces $d(x_{n_k},\widetilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{3}$. Sea $N = max\{N_1,N_2\}$. Si $m,n \geq N$, entonces tenemos

$$d(\widetilde{x}_m,\widetilde{x}_n) \leq d(\widetilde{x}_m,x_{n_j}) + d(x_{n_j},x_{n_k}) + d(x_{n_k},\widetilde{x}_n)$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= \varepsilon.$$

Esto es, $(\widetilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por construcción, es una extensión de la sucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$

$\square$

Ahora estamos listos para probar que el espacio $(\mathcal{H}, h)$ es completo.

Teorema 1.6.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo si y sólo si (X, d) es completo.*

Demostración. Probaremos primero que si $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo, entonces (X, d) es completo. Sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en (X, d). Claramente $(\{x_n\})_n$ es una sucesión en $\mathcal{H}(X)$, esto es, para toda $n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\}$ es un compacto no vacío de X. Además

$$h(\{x_n\}, \{x_m\}) = d(x_n, x_m).$$

Esto es, $(\{x_n\})_n$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$ que es completo. Entonces existe $K \in \mathcal{H}(X)$ tal que $lim\ \{x_n\} = K$.
Ahora, sean $x, y \in K$ y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces

$$h(K, \{x_n\}) < \varepsilon/2.$$

Notemos que

$$d(K, \{x_n\}) = max\{d(z, \{x_n\}) : z \in K\}$$

$$= max\{d(z, x_n) : z \in K\}.$$

Así, si $n \geq N, x \in K$ y $y \in K$, tenemos que

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$$

$$\leq 2max\{d(z, x_n) : z \in K\}$$

$$= 2d(K, \{x_n\})$$

$$\leq 2h(K, \{x_n\})$$

$$< 2(\varepsilon/2)$$

$$= \varepsilon.$$

Esto es, para toda $\varepsilon > 0$ y $x, y \in K$ tenemos que $d(x, y) < \varepsilon$, entonces $x = y$.
Así K es un conjunto unitario, digamos $K = \{z\}$. Así si $\varepsilon > 0$ entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$h(K, \{x_n\}) = h(\{z\}, \{x_n\}) = d(z, x_n) < \varepsilon.$$

Entonces lím $x_n = z$, por lo tanto, (X, d) es completo.

Probemos ahora el recíproco.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}(X)$. Definamos,
$A = \{x \in X |$ existe (x_n) de Cauchy tal que $x_n \in A_n$, $n \in \mathbb{N}$ y $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x\}$.

(i) Veamos que $A \neq \emptyset$. Como $(A_n)_n$ es una sucesión de Cauchy, podemos tomar

$$N_1 < N_2 < N_3 < \cdots < N_n < \cdots$$

tales que, $h(A_n, A_m) < 2^{-i}$ si $m, n \geq N_i$, $i \in \mathbb{N}$.
Sea $x_{N_1} \in A_{N_1}$. Como $h(A_{N_1}, A_{N_2}) < 1/2$, entonces $A_{N_1} \subseteq N(A_{N_2}, 1/2)$.
Así, $d(x_{N_1}, A_{N_2}) < 1/2$, entonces existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que $d(x_{N_1}, x_{N_2}) < 1/2$.
De manera análoga, podemos construir una sucesión $(x_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{N_i} \in A_{N_i}$ y tal que $d(x_{N_i}, x_{N_{i+1}}) < \frac{1}{2^i}$.
Tomemos $N_m < N_k$, entonces

$$\begin{aligned} d(x_{N_m}, x_{N_k}) &\leq d(x_{N_m}, x_{N_{m+1}}) + \ldots + d(x_{N_{k-1}}, x_{N_k}) \\ &< \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}} \\ &< \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si $N_j \leq N_m < N_k$, entonces

$$d(x_{N_m}, x_{N_k}) < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Dada $\varepsilon > 0$, sea $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Así, si $N_j \leq N_m < N_k$, entonces

$$d(x_{N_m}, x_{N_k}) < \varepsilon.$$

Así, $(x_{N_i})_i$ es una sucesión de Cauchy en X que es completo. Por el lema de extensión, existe $(x_n)_n$ sucesión de Cauchy tal que $x_n \in A_n$ para toda n. Y como X es completo existe $x \in X$ tal que $\text{lím}_{n\to\infty} x_n = x$. Así $x \in A$.

ii) Veamos que A es cerrado.
Sea $(a_i)_i$ una sucesión en A tal que $\text{lím}_{i\to\infty} a_i = a$. Como $a_i \in A$, entonces para cada i existe una sucesión de Cauchy $(x_n^i)_n$ con $x_n^i \in A_n$ para toda n y $\text{lím}\, n \to \infty x_n^i = a_i$.

Como $\text{lím}_{i\to\infty} a_i = a$ podemos encontrar una sucesión creciente de naturales

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$$

tal que para cada k tenemos

$$d(a_{N_k}, a) < 1/k,$$

además como $lim\ x_n^{N_k} = a_{N_k}$, para cada k existe m_k tal que

$$d(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}) < 1/k.$$

Así tenemos que si m_k y N_k son suficientemente grandes entonces,

$$\begin{aligned} d(x_{m_k}^{N_k}, a) &\leq d(x_{m_k}^{N_k}, a_{N_k}) + d(a_{N_k}, a) \\ &< 1/k + 1/k = 2/k \end{aligned}$$

donde la última expresión converge a 0 cuando k tiende a infinito. Sea $y_{m_k} = x_{m_k}^{N_k}$. Entonces para cada k, $y_{m_k} \in A_{m_k}$ y además $\lim_{k\to\infty} y_{m_k} = a$. Entonces $(y_{m_k})_k$ es de Cauchy. Aplicando una vez más el lema de extensión, obtenemos $(\widetilde{y}_m)_m$ tal que $\widetilde{y}_m \in A_m$ para toda m. Además $\lim_{m\to\infty} \widetilde{y}_m = a$ ya que $(y_{m_k})_k$ converge a a. Así tenemos que $a \in A$ y por lo tanto A es cerrado.

iii) Sea $\varepsilon > 0$. Veamos que existe N tal que si $n \geq N$ entonces $A \subseteq \overline{N}(A_n, \varepsilon)$.
Como $(A_n)_n$ es de Cauchy, entonces existe N tal que si $m, n \geq N$ entonces

$$h(A_n, A_m) \leq \varepsilon,$$

así

$$A_m \subseteq \overline{N}(A_n, \varepsilon).$$

Sea $a \in A$. Entonces existe una sucesión $(a_i)_i$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$, $a_i \in A_i$ y además $\lim_{i\to\infty} a_i = a$. Podemos asumir también que N es lo suficientemente grande para que si $m \geq N$ entonces $d(a_m, a) < \varepsilon$. Así, $a_m \in \overline{N}(A_n, \varepsilon)$, así, $(a_N, a_{N+1}, ...)$ es una sucesión en $\overline{N}(A_n, \varepsilon)$ que converge a a. Por lo tanto $a \in cl(\overline{N}(A_n, \varepsilon)) = \overline{N}(A_n, \varepsilon)$. Así, si $n \geq N$ entonces $A \subseteq \overline{N}(A_n, \varepsilon)$.

iv) Veamos que A es compacto.
Supongamos que A no es totalmente acotado. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que no existe una ε-red que cubra a A.
Sea $x_1 \in A$, $A \subsetneq B(x_1, \varepsilon)$ entonces existe $x_2 \in A$ tal que $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$. Como A no está contenido en $B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)$, entonces existe $x_3 \in A$ tal que $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$ y $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$.

De esta forma podemos construir una sucesión $(x_i)_i$ de elementos de A tal que $d(x_i.x_j) \geq \varepsilon$ si $i \neq j$.
Por (iii) existe n lo suficientemente grande tal que $A \subseteq \overline{N}(A_n, \varepsilon/3)$. Así, para cada x_i existe $y_i \in A_n$ tal que $d(x_i, y_i) \leq \varepsilon/3$. Ahora, como A_n es compacto existe una subsucesión (y_{n_i}) de (y_i) tal que converge en A_n. Entonces (y_{n_i}) es de Cauchy, entonces podemos encontrar y_{n_i} y y_{n_j} tal que $d(y_{n_i}, y_{n_j}) < \varepsilon/3$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} d(x_{n_i}, x_{n_j}) &\leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, x_{n_j}) \\ &\leq d(x_{n_i}, y_{n_i}) + d(y_{n_i}, y_{n_j}) + d(y_{n_j}, x_{n_j}) \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción por la construcción de $(x_n)_n$. Así, A es totalmente acotado. Ahora, vimos que A es cerrado y X es completo, entonces A es completo. Así tenemos que A es completo y totalmente acotado, entonces $A \in \mathcal{H}(X)$.

v) Veamos que $lim_{n\to\infty} A_n = A$ con respecto a la métrica de Hausdorff.

Sea $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$ entonces $h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ esto es $A_m \subseteq \overline{N}(A_n, \varepsilon/2)$. Ahora, sea $y \in A_n$, existe una sucesión creciente de números naturales,

$$n < N_1 < N_2 < \cdots < N_k < \cdots$$

tales que si $m, l \geq N_j$, entonces

$$A_l \subseteq \overline{N}(A_m, \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}),$$

entonces

$$A_l \subseteq \overline{N}(A_{N_1}, \varepsilon/2).$$

Como $y \in A_n$, existe $x_{N_1} \in A_{N_1}$, tal que

$$d(y, x_{N_1}) \leq \varepsilon/2,$$

de manera análoga, como $x_{N_1} \in A_{N_1}$ existe $x_{N_2} \in A_{N_2}$ tal que

$$d(x_{N_1}, x_{N_2}) \leq \frac{\varepsilon}{2^2},$$

de este modo, podemos construir una sucesión $(x_{N_i})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que para toda $i \in \mathbb{N}$, $x_{N_i} \in A_{N_i}$ y $d(x_{N_j}, x_{N_{j+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$. Entonces

$$\begin{aligned} d(y, x_{N_j}) &\leq d(y, x_{N_1}) + \ldots + d(x_{N_{j-1}}, x_{N_j}) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2^j} \\ &< \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Además $(x_{N_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\lim_{j\to\infty} x_{N_j} = x$ para alguna $x \in X$, lo cual implica que $x \in A$.
Supongamos que $d(x,y) > \varepsilon$, entonces $d(x,y) - \varepsilon > 0$ y como $lim\ x_{N_j} = x$, existe $M > 0$ tal que si $N_j > M$ entonces

$$d(x_{N_j}, x) < d(x,y) - \varepsilon.$$

Así tenemos que,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< d(x,y) - d(x_{N_j}, x) \\
&\leq d(y, x_{N_j}) + d(x_{N_j}, x) - d(x_{N_j}, x) \\
&= d(y, x_{N_j}) \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción.
Por lo tanto $d(x,y) \leq \varepsilon$ y como $x \in A$ tenemos que $y \in \overline{N}(A,\varepsilon)$. Esto es $A_n \subseteq \overline{N}(A,\varepsilon)$. Usando (iii) tenemos que para toda $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $h(A_n, A) < \varepsilon$, esto es $lim_{n\to\infty} A_n = A$.

$\square$

Con esto hemos probado que el espacio es completo y además el conjunto

$$A = \{x \in X : \text{existe } (x_n) \text{ de Cauchy tal que } x_n \in A_n,\ n \in \mathbb{N} \text{ y } x_n \to x\}$$

es una caracterización del punto al que convergen las sucesiones de Cauchy. En el siguiente capítulo se presentará la construcción de los fractales en este espacio.

Capítulo 2

Construcción de los fractales

2.1. Transformaciones en espacios Métricos

En este capítulo construiremos a los conjuntos fractales en el espacio métrico $(\mathcal{H}(X), h)$. Los conjuntos fractales serán definidos a partir de un número finito de funciones continuas del espacio X en sí mismo. Normalmente estas transformaciones son de un carácter geométrico simple, por ejemplo, homotecias y traslaciones. Antes de esto, enunciaremos y probaremos algunos resultados previos. Uno de los primeros matemáticos en construir algunos fractales de esta forma fue J. E. Hutchinson en su artículo *Fractals and Self Similarity* [4].

Lema 2.1.1. *Sean* (X, d_x) *y* (Y, d_y) *espacios métricos y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua. Si* $V \subseteq Y$ *es un conjunto abierto en* Y*, entonces* $f^{-1}(V) = \{x \in X : f(x) \in V\}$ *es abierto en* X*.*

Demostración. Sea V un conjunto abierto en Y y $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$ y como es abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Como f es continua entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$. Esto es, $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$ y por lo tanto $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto. $\square$

Lema 2.1.2. *Sean* (X, d_x) *y* (Y, d_y) *espacios métricos y* $f : X \longrightarrow Y$ *una función continua, si* $K \in \mathcal{H}(X)$ *entonces* $f(K) \in \mathcal{H}(Y)$*.*

Demostración. Sea $K \in \mathcal{H}(X)$ y $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de $f(K)$. Entonces $\mathcal{V} = \{V = f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ es una cubierta abierta de K. Como K es compacto entonces existe un subconjunto finito $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ tal que $K \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$. Para cada $B \in \mathcal{B}$, existe $A_B \in \mathcal{U}$, tal que $B = f^{-1}(A_B)$. Entonces la colección

$$\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{A_B : B \in \mathcal{B}\},$$

es una cubierta abierta finita de $f(K)$. Luego entonces $f(K) \in \mathcal{H}(Y)$. $\square$

El lema anterior nos dice que la imagen continua de un conjunto compacto es a su vez un conjunto compacto. Es decir, una función continua $f : X \longrightarrow X$ induce una transformación de $\mathcal{H}(X)$ en $\mathcal{H}(X)$ bien definida. Si $A \in \mathcal{H}(X)$ entonces $f(A) \in \mathcal{H}(X)$. Esta es una condición fundamental en nuestra construcción de los fractales.

2.2. Contracciones

El objetivo de esta sección es probar un teorema que será fundamental para la construcción de los fractales.

Definición 2.2.1. *Sean (X, d_X) y $(Y; d_Y)$ espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Decimos que f es una contracción si existe $s \in (0,1)$ tal que*

$$d_y(f(x), f(y)) \leq s d_x(x,y)$$

para toda x, y en X.

Llamamos a s el factor de contracción de f.

Lema 2.2.2. *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una contracción. Entonces f es continua.*

Demostración. Sea s el factor de contracción de f. Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \varepsilon/s$. Entonces $d_Y(f(x), f(y)) \leq s d_X(x,y) < s\delta = \varepsilon$. Esto es, f es continua.

□

En este trabajo usaremos contracciones que van de un espacio métrico (X, d) en sí mismo e iteraciones de funciones que serán denotadas como sigue:

$$f^n(x) = f \circ f \circ ..... \circ f(x)$$

Es decir, aplicamos f a un punto x, después aplicamos f al punto $f(x)$ y así sucesivamente n veces. En este caso tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.2.3. *Sea (X, d) un espacio métrico completo y $f : X \longrightarrow X$ una contracción. Entonces existe un único $x_f \in X$ tal que $f(x_f) = x_f$. Además, si $x \in X$ entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f.$$

Demostración. Sea $x \in X$ y $s \in (0,1)$ el factor de contracción de f. Entonces

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{min\{n,m\}} d(x, f^{|n-m|}(x))$$

para $m, n \in \mathbb{N}$. En particular si $k \in \mathbb{N}$ es fija tenemos que,

$$d(x, f^k(x)) \leq d(x, f(x)) + ... + d(f^{k-1}(x), f^k(x))$$

$$\leq (1 + s + s^2 + ... + s^{k-1}) d(x, f(x))$$

$$\leq (1-s)^{-1} d(x, f(x)).$$

Juntando esto con la ecuación anterior tenemos que

$$d(f^n(x), f^m(x)) \leq s^{min\{n,m\}} (1-s)^{-1} d(x, f(x)).$$

Lo cual implica que la sucesión $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como X es completo existe $x_f \in X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f.$$

Ahora veamos que x_f es punto fijo de f. Sabemos que como f es una contracción entonces f es continua. Así tenemos que

$$f(x_f) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x) = x_f.$$

Ahora supongamos que x_f y y_f son puntos fijos de f. Entonces,

$$d(x_f, y_f) = d(f(x_f), f(y_f)) \leq s d(x_f, y_f).$$

De esto último obtenemos que $(1-s)d(x_f, y_f) \leq 0$, lo cual implica que

$$d(x_f, y_f) = 0.$$

Esto es $x_f = y_f$ y por lo tanto el punto fijo es único.

□

2.3. Contracciones en $\mathcal{H}(X)$

Nosotros entenderemos a los fractales como puntos fijos de contracciones específicas en el hiperespacio $\mathcal{H}(X)$. Veremos que los fractales son construidos a partir de transformaciones simples (homotecias, rotaciones, traslaciones etc.) y sin embargo la naturaleza geométrica de los fractales es, en general, compleja.

Lema 2.3.1. *Sea $\widetilde{f} : X \longrightarrow X$ una contracción con factor de contracción s en el espacio métrico (X, d). Entonces la función $f : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ dada por*

$$f(K) = \widetilde{f}(K) = \{\widetilde{f}(x) \in X : x \in K\}$$

para cada $K \in \mathcal{H}(X)$, es una contracción en $\mathcal{H}(X)$ con factor de contracción s.

Demostración. Primero observemos que la función f está bien definida en virtud del lema 2.1.2.
Sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$, entonces

$$h(f(A), f(B)) = h(\widetilde{f}(A), \widetilde{f}(B)) = \text{máx}\{d(\widetilde{f}(A), \widetilde{f}(B), d(\widetilde{f}(B), \widetilde{f}(A))\}.$$

Sin perder generalidad, supongamos que,

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &= d(\widetilde{f}(A), \widetilde{f}(B)) \\ &= \text{máx}\{\text{mín}\{d(\widetilde{f}(a)), \widetilde{f}(b) : b \in B\} : a \in A\} \\ &\leq \text{máx}\{\text{mín}\{sd(a,b) : b \in B\} : a \in A\}. \end{aligned}$$

Lo anterior implíca que

$$\begin{aligned} h(f(A), f(B)) &\leq s\,\text{máx}\{min\{d(a,b) : b \in B\} : a \in A\} = sd(A,B) \\ &\leq s\,\text{máx}\{d(A,B), d(B,A)\} = sh(A,B) \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.3.2. *Sean $A, B, C \in \mathcal{H}(X)$. Entonces $d(A \cup B, C) = \text{máx}\{d(A,C), d(B,C)\}$.*

Demostración. Sabemos que

$$\begin{aligned} d(A \cup B, C) &= \text{máx}\{d(x,C) : x \in A \cup B\} \\ &= \text{máx}\{d(x,C) : x \in A \text{ ó } x \in B\} \\ &= \text{máx}\{\text{máx}\{d(x,C) : x \in A\}, \text{máx}\{d(x,C) : x \in B\}\} \\ &= \text{máx}\{d(A,C), d(B,C)\}. \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.3.3. *Sean $A, B, C, D \in \mathcal{H}(X)$. Entonces*

$$h(A \cup B, C \cup D) \leq \text{máx}\{h(A,C), h(B,D)\}.$$

Demostración. Por el lema 1.5.11 sabemos que

$$d(A, C \cup D) \leq d(A,C) + d(C, C \cup D).$$

Ahora, como $C \subseteq C \cup D$, entonces $d(C, C \cup D) = 0$. Entonces

$$d(A, C \cup D) \leq d(A,C).$$

De manera análoga tenemos que

$$d(B, C \cup D) \leq d(B,D),$$

$$d(C, A \cup B) \leq d(C,A),$$
$$d(D, A \cup B) \leq d(D,B).$$

Por el lema anterior tenemos que

$$h(A \cup B, C \cup D)$$

$$= \text{máx}\{d(A \cup B, C \cup D), d(C \cup D, A \cup B)\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \text{máx}\{\text{máx}\{d(A, C\cup D), d(B, C\cup D)\}, \text{máx}\{d(C, A\cup B), d(D, A\cup B)\}\}\\
&= \text{máx}\{d(A, C\cup D), d(B, C\cup D), d(C, A\cup B), d(D, A\cup B)\}\\
&\leq \text{máx}\{d(A, C), d(B, D), d(C, A), d(D, B)\}\\
&= \text{máx}\{\text{máx}\{d(A, C), d(C, A)\}, \text{máx}\{d(B, D), d(D, B)\}\}\\
&= \text{máx}\{h(A, C), h(B, D)\}.
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos que

$$h(A\cup B, C\cup D) \leq \text{máx}\{h(A, C), h(B, D)\}.$$

□

Aplicando varias veces el lema 2.3.3 se puede demostrar el siguiente corolario.

Corolario 2.3.4. *Sea $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Sean $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ $2n$ elementos de $\mathcal{H}(X)$. Entonces*

$$h\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) \leq \text{máx}\{h(A_1, B_1), \ldots, h(A_n, B_n)\}.$$

Lema 2.3.5. *Sean (X, d) un espacio métrico completo y $f_i : X \longrightarrow X$ una contracción para cada $i \in \{1, 2, 3, \ldots, N\}$ donde $N \in \mathbb{N}$ es fijo.*
Definimos $F : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$ como

$$F(K) = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \ldots \cup f_N(K) = \bigcup_{n=1}^{N} f_i(K).$$

Entonces F es una contracción en $\mathcal{H}(X)$ con factor de contracción s donde $s = \text{máx}\{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$ y s_i es el factor de contracción de f_i.

Demostración. Primero observemos que F está bien definida ya que la unión finita de conjuntos compactos es un conjunto compacto.
Para probar este teorema es suficiente probar el caso $N = 2$. Sean s_1 y s_2 los factores de contracción de las funciones f_1 y f_2 respectivamente y sean $A, B \in \mathcal{H}(X)$. Usando los resultados anteriores obtenemos,

$$
\begin{aligned}
h(F(A), F(B)) &= h(f_1(A) \cup f_2(A), f_1(B) \cup f_2(B))\\
&\leq \text{máx}\{h(f_1(A), f_1(B)), h(f_2(A), f_2(B))\}\\
&\leq \text{máx}\{s_1 h(A, B), s_2 h(A, B)\}
\end{aligned}
$$

$$\leq s \max\{h(A,B), h(A,B)\} = sh(A,B),$$

donde $s = \max\{s_1, s_2\}$. Luego entonces F es una contracción.

$\square$

Con este resultado y con el hecho de que el espacio $(\mathcal{H}(X), h)$ es completo, sabemos que existe un único punto fijo $K_0 \in \mathcal{H}(X)$ tal que $F(K_0) = K_0$. Notemos que la contracción F se construyó a partir de las N contracciones $\{f_1, ..., f_N\}$. Así llamaremos al conjunto $\{X, f_1, f_2, ..., f_N\}$ un *sistema iterado de funciones* y lo abreviaremos como SIF. Al punto fijo $K_0 \in \mathcal{H}(X)$ lo llamaremos el *atractor* del SIF.

Definición 2.3.6. *Sea $K \in \mathcal{H}(X)$. Decimos que K es un conjunto fractal si existen $f_i : K \longrightarrow K, 1 \leq i \leq n$, contracciones tales que*

$$\bigcup_{i=1}^{n} f_i(K) = K.$$

Es decir, K es un conjunto fractal si este es el atractor de algún SIF $\{K, f_1, \ \dots\ , f_n\}$.

Ejemplo 2.3.7. *El conjunto de Cantor es un fractal.*
Considera las contracciones $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Veamos que el atractor en $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ es el conjunto de Cantor. Sea C el conjunto de Cantor. Sabemos que $f_1(C) = C \cap [0, \frac{1}{3}]$ y que $f_2(C) = C \cap [\frac{2}{3}, 1]$. Entonces

$$F(C) = (C \cap [0, \frac{1}{3}]) \cup (C \cap [\frac{2}{3}, 1]) = f_1(C) \cup f_2(C).$$

Por lo tanto $F(C) = C$. Así C es el atractor del SIF $\{\mathbb{R}^2, f_1, f_2\}$.
Vease la siguiente ilustración.

Figura 2.1: Conjunto de Cantor.

Ejemplo 2.3.8. *El triángulo de Sierpinski es un fractal.*
Considera las contracciones en $\mathbb{R}^2$ dadas por

$$f_1(x,y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),$$

$$f_2(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$f_3(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right).$$

Observemos cual es la imagen del triángulo equilátero con vértices en los puntos $(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. *Las tres contracciones transforman este triángulo equilátero en otro triángulo equilátero de la mitad de tamaño, es decir, la longitud de cada uno de sus lados es exactamente la mitad de la longitud del lado del triángulo original. La primer contracción transforma este triángulo y deja el vertice* $(0,0)$ *fijo. La segunda y tercera contracción lo trasladan el vertice* $(0,0)$ *a los puntos* $(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$ *y* $(\frac{1}{2},0)$ *respectivamente. Con esta observación, veamos como se construye el triángulo de Sierpinski para convencernos de que esté, efectivamente es el conjunto atractor. El triángulo de Sierpinski se construye de la siguiente manera. Consideremos en* $\mathbb{R}^2$ *el triángulo equilátero* T_1 *con vértices en los puntos* $(0,0),(1,0),(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$. *Dividimos el triángulo* T_1 *en cuatro triángulos utilizando los puntos medios de los lados de* T_1. *Quitamos el triángulo del centro y nos quedamos con 3 triángulos más pequeños. En cada uno de ellos repetimos la misma acción que hicimos en* T_1 *y obtenemos* 3^3 *nuevos triángulos aún más pequeños. Al repetir este proceso indefinidamente, al final obtenemos el conjunto buscado. Llamémosle* T. *Tenemos que*

$$T = f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T)$$

entonces T *es el atractor del SIF* $\{\mathbb{R}^2, f_1, f_2, f_3\}$.
Véase la siguiente figura.

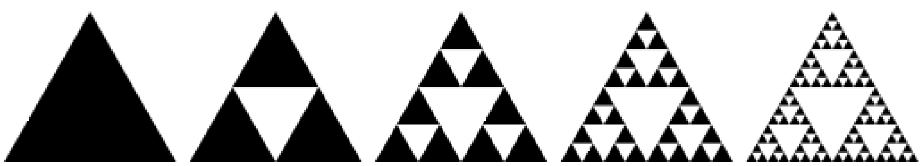

Figura 2.2: Triángulo de Sierpinski.

Lema 2.3.9. *Sea* (X,d) *un espacio métrico completo. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : F \, es \; finito, \; F \neq \emptyset\}$$

es denso en $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Sean $K \in \mathcal{H}(X)$ y $\varepsilon > 0$. Veamos que existe $F \in \mathcal{F}$, tal que

$$h(K,F) < \varepsilon.$$

Como K es compacto, entonces existe un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in K$ tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Consideremos al conjunto $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Sabemos que $h(K, F) < \varepsilon$ si y soló si $F \subseteq N(K, \varepsilon)$ y $K \subseteq N(F, \varepsilon)$.
La primera contención es clara ya que $F \subseteq K \subseteq N(K, \varepsilon)$.
La segunda contención es consecuencia inmediata de que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon).$$

Así tenemos que $h(K, F) < \varepsilon$ y, por lo tanto, $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$.

$\square$

Observemos ahora que cualquier conjunto finito y no vacío, es un conjunto fractal. Esto es claro ya que si $F = \{y_1, \ldots, y_n\}$, $y_i \in X$, entonces el SIF $\{X, f_1, \ldots, f_n\}$, donde cada contracción $f_i : F \longrightarrow F$ está dada por $f_i(x) = y_i$ para toda $x \in F$, tiene como atractor al conjunto F.
Demostraremos ahora que la colección de todos los conjuntos fractales forma un conjunto denso en $\mathcal{H}(X)$.

Corolario 2.3.10. *Sea (X, d) un espacio métrico completo. Entonces el conjunto*

$$\mathfrak{F} = \{A \in \mathcal{H}(X) : A \text{ es un fractal}\}$$

es denso en $\mathcal{H}(X)$.

Demostración. Como $\mathcal{F} \subseteq \mathfrak{F}$ y el conjunto $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$, entonces el conjunto $\mathfrak{F}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$. $\square$

Capítulo 3

Hay muy pocos fractales

En el capítulo anterior vimos que los fractales son densos en $\mathcal{H}(X)$, es decir, todo conjunto compacto se puede aproximar con el atractor de un SIF con la métrica de Hausdorff. Una pregunta natural es si todos los conjuntos compactos son fractales. La respuesta es que no y en esta sección se construirá un conjunto compacto en $\mathbb{R}$ que no es atractor de ningún SIF y a partir de este se pueden construir otros en $\mathbb{R}^n$. Además veremos que el conjunto formado por los $A \in \mathcal{H}(X)$ que no son fractales, forman también un conjunto denso en $\mathcal{H}(X)$. Este problema es tratado en [6].

3.1. Un conjunto $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ que no es un fractal

Definición 3.1.1. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definamos el límite superior de la sucesión como*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} a_k.$$

Proposición 3.1.2. *Existe $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ tal que K no es atractor de ningún sistema iterado de funciones en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Considera al conjunto $K = \{0, \frac{1}{\ln(3)}, \frac{1}{\ln(4)}, \ldots)$. Veamos que este conjunto no es atractor de ningún SIF.
Observemos que $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ ya que

$$\lim_{k\to\infty} (\ln(k+2))^{-1} = 0.$$

Supongamos que K es atractor de algún SIF, esto es,

$$K = f_1(K) \cup f_2(K) \cup \ldots \cup f_n(K)$$

para n contracciones $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $a_k = (\ln(k+2))^{-1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Definamos la densidad $d(B)$ de un subconjunto $B \subseteq K$ como sigue,

$$d(B) = \limsup_{N\to\infty} \frac{\#(\{k : 1 \leq k \leq N, a_k \in B\})}{N}.$$

Donde $\#(A)$ denota la cardinalidad del conjunto A.
Antes de seguir con la demostración veamos con detalle la definición de densidad. La idea de la densidad que se está definiendo es la de ver qué proporción de$K\setminus\{0\}$ está contenida en B. Por ejemplo, si B es un conjunto finito, entonces $d(B)=0$, si $B=K\setminus\{0\}$ entonces $d(B)=1$, si $B=\{a_k : k \text{ es par }\}$, es decir, la mitad de la sucesión, entonces tenemos que

$$\frac{N}{2}-1 \leq \#(\{k : 1 \leq k \leq N, a_k \in B\}) \leq \frac{N}{2}+1,$$

entonces

$$\frac{\frac{N}{2}-1}{N} \leq \frac{\#(\{k : 1 \leq k \leq N, a_k \in B\})}{N} \leq \frac{\frac{N}{2}+1}{N}.$$

Así tenemos que

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{N} \leq \frac{\#(\{k : 1 \leq k \leq N, a_k \in B\})}{N} \leq \frac{1}{2}+\frac{1}{N}.$$

Si N tiende a infinito, entonces tenemos que

$$d(B)=\frac{1}{2},$$

como era de esperarse. Ahora sigamos con la demostración.

Claramente tenemos que

$$1 \leq d(f_1(K))+d(f_2(K))+...+d(f_n(K))$$

ya que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} f_i(K).$$

Ahora veremos que $d(f(K))=0$ si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es una contracción tal que $f(K)\subseteq K$.

Supongamos que $f(0)\neq 0$, entonces $f(0)=a_j$ para alguna a_j en K. Como f es continua entonces tenemos que para toda $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|x|<\delta$ entonces $|f(x)-a_j|<\varepsilon$. Ahora, como

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

tenemos que existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que si $k\geq k_0$, entonces $a_k<\delta$ y así

$$|f(a_k)-a_j|<\varepsilon.$$

Sea $\varepsilon < min\{d(a_j,a_{j-1}), d(a_j,a_{j+1})\}$. Así tenemos que si $k\geq k_0$ entonces $f(a_k)=a_j$, esto es $\#(f(K))\leq k_0$, esto es $f(K)$ es finito y así $d(f(K))=0$.

Supongamos ahora que $f(0) = 0$ y sea $r \in (0,1)$ el factor de contracción de f. Así tenemos que $|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$ para toda $x, y \in \mathbb{R}$. Si $1 \leq k \leq N$ y $a_k \in f(K)$ entonces $a_k = f(a_j)$ para alguna j.
Así tenemos que $a_k = |a_k - 0| \leq r|a_j - 0| = ra_j$, esto es

$$(ln(k+2))^{-1} \leq r(ln(j+2))^{-1},$$

entonces

$$j + 2 \leq (k+2)^r \leq (N+2)^r.$$

Y de esto se sigue que

$$\begin{aligned} 0 \leq d(f(K)) &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{(N+2)^r - 2}{N} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \left(\frac{(N+2)^r}{N} - \frac{2}{N} \right) \\ &= \limsup_{N\to\infty} \left(\frac{(N+2)^r}{N^r} \right) \left(\frac{N^r}{N} \right) - \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

y tenemos que

$$\lim_{N\to\infty} \left(\frac{N+2}{N} \right)^r = 1, \lim_{N\to\infty} N^{r-1} = 0, \lim_{N\to\infty} \frac{2}{N} = 0.$$

Esto implica que $d(f(K)) = 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto K no es atractor de ningún SIF.

$\square$

A partir de este conjunto, construiremos un conjunto en $\mathbb{R}^2$ que no será atractor de ningún SIF. Esta construcción se puede generalizar a $\mathbb{R}^n$, sin embargo nos parece que es más claro si lo presentamos en $\mathbb{R}^2$. Como notación llamaremos r-contracciones a las contracciones con factor de contracción $r \in (0,1)$. Antes de construir este conjunto veamos algunos resultados previos que serán utilizados en la construcción.

Lema 3.1.3. *Sea A el conjunto atractor de algún SIF y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría. Entonces $f(A)$ es también un atractor de un SIF.*

Demostración. Sea $(\mathbb{R}^n, \widetilde{w_1}, ..., \widetilde{w_n})$ un SIF con factor de contracción $s \in (0,1)$ y con atractor A. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una isometría. Así tenemos que f es continua y por lo tanto $f(A) \in \mathcal{H}(X)$. Además $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ existe, es continua y también es una isometría.
Considera al SIF $(\mathbb{R}^n; w_1, ..., w_n)$ donde $w_i = f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}$. Observemos que

$$\begin{aligned} d(w_i(x), w_i(y)) &= d(f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(x), f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(y)) \\ &= d(\widetilde{w_i} \circ f^{-1}(x), \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

$$\leq sd(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$$
$$= sd(x, y).$$

Entonces la colección $(X; w_1, ..., w_n)$ efectivamente es un SIF. Veamos que $f(A)$ es el atractor del SIF.

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} w_i(f(A)) &= \bigcup_{i=1}^{n} f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(f(A)) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f \circ \widetilde{w_i}(A) \\ &= f(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{w_i}(A)) \\ &= f(A).\end{aligned}$$

De esta forma tenemos que $f(A)$ es el atractor del SIF $(\mathbb{R}^n, w_1, ..., w_n)$.

□

Ahora veremos un resultado similar con homotecias. La idea de estos dos lemas es que si un conjunto es un fractal o atractor de un SIF y se hace más grande o más pequeño y además se rota, se traslada o se refleja, entonces el nuevo conjunto, como era de esperarse, también es un atractor de un SIF.

Lema 3.1.4. *Sea A al conjunto atractor de algún SIF y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una homotecia. Entonces $f(A)$ es también atractor de un SIF.*

Demostración. Sea $(\mathbb{R}^n, \widetilde{w_1}, ..., \widetilde{w_n})$ un SIF con factor de contracción $s \in (0, 1)$ y con atractor A y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una homotecia con factor de homotecia $C > 0$, esto es, para todo par de puntos x, y en $\mathbb{R}^n$, se tiene que $d(f(x), f(y)) = Cd(x, y)$. Así tenemos que f es continua y por lo tanto $f(A) \in \mathcal{H}(X)$, además f^{-1} existe, es continua y también es una homotecia con factor de homotecia $\frac{1}{C} > 0$. Considera al SIF $(X; w_1, ..., w_n)$ donde $w_i = f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}$. Veamos que para cada i, w_i es en efecto una contracción.

$$\begin{aligned}d(w_i(x), w_i(y)) &= d(f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(x), f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(y)) \\ &= Cd(\widetilde{w_i} \circ f^{-1}(x), \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(y)) \\ &\leq Csd(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \\ &= C^{-1}Csd(x, y). \\ &= sd(x, y).\end{aligned}$$

Entonces la colección $(X; w_1, ..., w_n)$ efectivamente es un SIF.
Veamos que $f(A)$ es el atractor del SIF.

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{n} w_i(f(A)) &= \bigcup_{i=1}^{n} f \circ \widetilde{w_i} \circ f^{-1}(f(A)) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} f \circ \widetilde{w_i}(A) \\ &= f(\bigcup_{i=1}^{n} \widetilde{w_i}(A)) \\ &= f(A).\end{aligned}$$

□

Ahora veremos un resultado que sólo será demostrado para $\mathbb{R}^2$ ya que así la idea de la demostración es mucho más clara. A pesar de eso este hecho también se puede demostrar para el caso general en $\mathbb{R}^n$y la demostración es esencialmente igual a la que daremos.

Proposición 3.1.5. *Sea $Q = \{q_1, q_2, ..., q_N\}$ un conjunto finito de vectores en $\mathbb{R}^2$. Entonces podemos renombrar a Q de tal forma que existen $u \in \mathbb{R}^2$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\|u\| = 1$ y $\langle \widetilde{q}_i - \widetilde{q}_1, u\rangle > \varepsilon$ si $i \in \{2, ..., N\}$.*

Demostración. Consideremos al conjunto finito de vectores $\{V_{i,j}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ dado por

$$V_{i,j} = \{q_i - q_j : i, j \in \{1, 2, ..., N\}, i \neq j\}.$$

Consideremos a la familia de rectas que pasan por el punto a en la dirección del vector b, $b \neq 0$,

$$\mathcal{L}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = a + \lambda b, b \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

donde $b \notin \{V_{i,j}\}$. Es decir, estas rectas tocan a lo más un punto del conjunto Q. Esto es posible ya que el conjunto $V_{i,j}$ es finito.

Tenemos que como el conjunto Q es finito entonces existe una bola compacta B tal que $Q \subseteq B$. Considera una recta $\mathcal{L}_{a,b}$, b fija, fuera de la bola compacta, si movemos la recta en dirección a la bola de manera paralela, es decir, conservando la dirección b, llamaremos $\widetilde{q}_1$ al primer elemento de Q que encontramos. Esta recta parte al plano en dos semiplanos. Sea u un vector ortogonal a esa recta en dirección al semiplano en donde estan los demás elementos de Q y sean $\{\widetilde{q}_2, ..., \widetilde{q}_N\}$ el resto de los vectores.

Por construcción tenemos que $\langle \widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_l, u\rangle > 0$ ya que la recta $\mathcal{L}_{a,b}$ toca a lo más un punto de Q.
Considera

$$\varepsilon = \min_{l \in \{2,...,N\}} \langle \widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_l, u\rangle (\frac{1}{2}) > 0.$$

De esta forma tenemos que $\langle \widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_l, u\rangle > \varepsilon$ si $l \in \{2, 3, ..., N\}$.

□

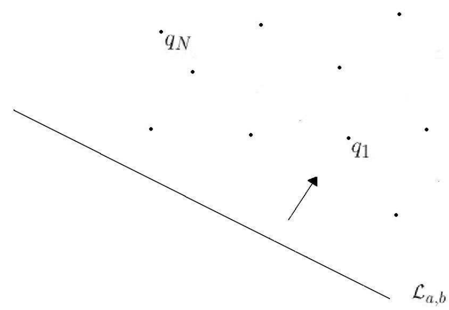

Figura 3.1: La recta $\mathcal{L}_{a,b}$ toca a lo más un punto del conjunto Q.

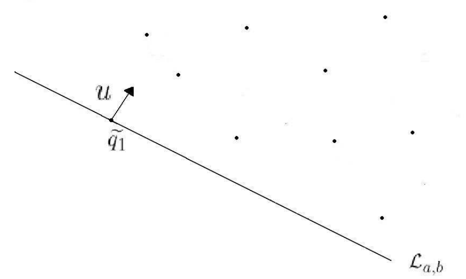

Figura 3.2: Un vector u tal que $\langle \widetilde{q}_1 - \widetilde{q}_l, u \rangle > 0$.

Ahora estamos listos para construir un conjunto compacto que no es atractor de ningún SIF en $\mathbb{R}^2$. Análogamente, se pueden construir compactos que no sean atractores en $\mathbb{R}^n$.

Lema 3.1.6. *Sea $\widetilde{K} \subseteq [0,1]$ el conjunto en $\mathbb{R}$ que no es atractor de ningún SIF visto en la proposición 3.1.1. Sea $A = g(\widetilde{K})$, donde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ está dada por $g(x) = x\ln(3)$, es decir, g es una homotecia. Sean $\varepsilon > 0$, $u \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario y $Q = \{q_1, ..., q_m\} \subseteq \mathbb{R}^2$ tales que $\langle q_l - q_1, u \rangle > \varepsilon$ si $l \in \{2, ..., N\}$. Definamos*

$$B = Q + \varepsilon A u = \{w \in \mathbb{R}^2 : w = q_i + \varepsilon \alpha u, q_i \in Q, \alpha \in A\}.$$

Entonces B no es atractor de ningún sistema iterado de funciones.

Demostración. Antes de comenzar la prueba observemos que el conjunto A es el resultado de aplicar una homotecia al conjunto $\widetilde{K}$ que no es atractor de ningún SIF, así A tampoco es atractor de ningún SIF ya que si lo fuera $\widetilde{A}$ lo sería ya

que sería la imagen de A bajo una homotecia.
Para cada $1 \leq l \leq m$, sea

$$B_l = q_l + \varepsilon A u = \{q_l + \varepsilon \alpha u : \alpha \in A\}.$$

Notemos que

$$B = \bigcup_{l=1}^{m} B_l.$$

Tenemos también que

$$B_l = S_l(\varepsilon A) = \{s_l(z) | z \in \varepsilon A\}$$

donde $S_l : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $S_l(t) = q_l + tu$.
Esto es, S_l manda al conjunto $\mathbb{R}$ a una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por q_l en dirección u. Por otro lado tenemos que

$$\langle B_l, u\rangle = \{\langle b, u\rangle : b \in B_l\} = \langle q_l, u\rangle + \varepsilon A, \qquad l \in \{1, 2, ..., m\},$$

donde $\varepsilon A = \{\varepsilon a : a \in A\}$.
Por hipótesis tenemos que si $l \geq 2$, entonces para toda $b \in B_l$ se cumple que

$$\begin{aligned}\langle b, u\rangle - \langle q_1, u\rangle &= \langle b - q_1, u\rangle \\ &= \langle q_l + \varepsilon\alpha u - q_1, u\rangle \\ &= \langle q_l - q_1, u\rangle + \langle \varepsilon\alpha u, u\rangle \\ &= \langle q_l - q_1, u\rangle + \varepsilon\alpha \\ &\geq \langle q_l - q_1, u\rangle \\ &> \varepsilon.\end{aligned}$$

Consideremos ahora una función auxiliar.
Sea $P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$P(v) = \text{mín}\{\varepsilon, \langle v - q_1, u\rangle\}.$$

Observemos lo siguiente:
Si $v \in B_1$, entonces

$$\begin{aligned}P(v) &= \text{mín}\{\varepsilon, \langle q_1 + \varepsilon\alpha u - q_1, u\rangle\} \\ &= \text{mín}\{\varepsilon, \varepsilon\alpha\} \\ &= \varepsilon\alpha.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P(B_1) = \varepsilon A.$$

Si $v \in B_l, l \neq 1$, entonces

$$P(v) = \text{mín}\{\varepsilon, \langle q_l + \varepsilon\alpha u - q_1, u\rangle\}$$

$$= \text{mín}\{\varepsilon, \langle q_l - q_1, u\rangle + \varepsilon\alpha\}$$
$$= \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$P(B_l) = \{\varepsilon\}.$$

La función P se puede expresar como la composición $P = m \circ h$, donde $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ están dadas por $h(v) = \langle v - q_1, u\rangle$ y $m(t) = \text{mín}\{\varepsilon, t\}$. Como para toda pareja v, w en $\mathbb{R}^2$ y toda pareja s, t en $\mathbb{R}$, se tiene que

$$\mid h(v) - h(w) \mid \quad \leq \quad \mid v - w \mid$$

y

$$\mid m(s) - m(t) \mid \quad \leq \quad \mid s - t \mid,$$

entonces para toda pareja v, w en $\mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\mid P(v) - P(w) \mid \quad \leq \quad \mid v - w \mid .$$

Observemos de manera similar que el conjunto εA tampoco es atractor de ningún SIF ya que sería la imagen de A bajo una homotecia.
Ahora, supongamos que B es atractor de algún SIF $\{\mathbb{R}^2, T_1, \ldots, T_r\}$, esto es

$$\begin{aligned} B &= \bigcup_{k=1}^{r} T_k(B) \\ &= \bigcup_{k=1}^{r} T_k\left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right) \\ &= \bigcup_{k=1}^{r}\bigcup_{l=1}^{m} T_k(B_l). \end{aligned}$$

Considera las funciones $T_{kl} = P \circ T_k \circ S_l$. Por construcción tenemos

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=1}^{r}\bigcup_{l=1}^{m} T_{kl}(\varepsilon A) &= \bigcup_{k=1}^{r}\bigcup_{l=1}^{m} P \circ T_k \circ S_l(\varepsilon A) \\ &= \bigcup_{k=1}^{r}\bigcup_{l=1}^{m} P \circ T_k(B_l) \\ &= P(\bigcup_{k=1}^{r}\bigcup_{l=1}^{m} T_k(B_l)) \\ &= P(B) \\ &= \varepsilon A \cup \{\varepsilon\} \\ &= \varepsilon A, \end{aligned}$$

ya que $\varepsilon \in \varepsilon A$.
Ahora, cada función $T_{kl} = P \circ T_k \circ S_l$ es una contracción ya que S_l es una isometría, T_k es una contracción y P no es expansiva. Así la composición que define a T_{kl} es una contracción. De esta forma tendríamos que el conjunto εA es atractor de un SIF lo cual es una contradicción que obtuvimos de suponer que B es atractor de algún SIF. Luego entonces B no es atractor de ningún SIF.

$\square$

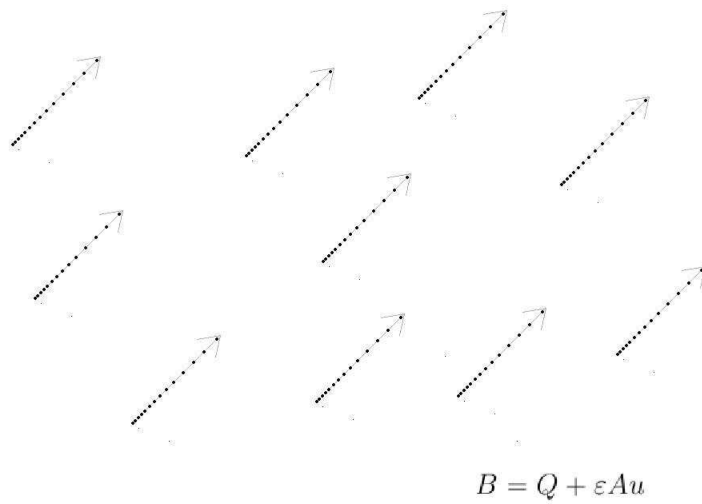

Figura 3.3: Un conjunto compacto que no es un conjunto fractal.

Observemos que por la forma en que se construyó el conjunto B se tiene que

$$h(Q, B) \leq \varepsilon.$$

Proposición 3.1.7. *La colección de los conjuntos compactos que no son fractales, forman un conjunto denso en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sean $K \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$ y $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ finito tal que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Esto es,

$$h(K, F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sabemos por el lema 3.1.5, que a partir del conjunto finito F y $\varepsilon > 0$, podemos construir un conjunto B que no es fractal tal que

$$h(B, F) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Con estos dos resultados obtenemos que

$$\begin{aligned} h(B,K) &\leq h(B,F) + h(F,K) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Esto es, los conjuntos que no son fractales son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^m)$.

$\square$

Con este resultado vemos que los fractales y los conjuntos que no son fractales son densos el en los conjuntos compactos. Sin embargo, veremos que en algún sentido, los fractales forman un conjunto muy pequeño.

3.2. Teorema de categoría de Baire

En esta sección simplemente daremos algunas definiciones y veremos el teorema de categoría de Baire. Esto lo haremos ya que resulta que los fractales son de *primera categoría* en $\mathcal{H}(X)$, veremos lo que esto quiere decir con detalle más adelante.

Definición 3.2.1. *Sea $A \subseteq X$ un subconjunto de un espacio métrico. Decimos que A es denso en ninguna parte si $int(\overline{A}) = \emptyset$. Es decir si el interior de su cerradura es vacío. Una definición equivalente es que A es denso en ninguna parte si $(\overline{A})^c$ es denso en X, es decir, el complemento de la cerradura es denso en X.*

Ejemplo 3.2.2. *El conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros en denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.2.3. *El conjunto $\{1, 1/2, 1/3, ...\}$ es denso en ninguna parte en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.2.4. *El conjunto de Cantor es denso en ninguna parte en $[0, 1]$.*

Decimos que $E \subseteq X$ es de primera categoría si se puede expresar como la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Por ejemplo el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es de primera categoría en los reales esto es ya que

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{q_i\},$$

donde $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ es una enumeración de los números racionales.
Al complemento de un conjunto de primera categoría le llamaremos residual.
Un conjunto es de segunda categoría si no es de primera categoría.
La idea intuitiva de un conjunto de primera categoría en un espacio métrico completo es la de un conjunto muy pequeño.

Teorema 3.2.5. *Sean X un espacio métrico completo y $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de subconjuntos abiertos y densos en X. Entonces*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n \neq \emptyset.$$

La demostración se puede ver en [5].

Corolario 3.2.6. *(Teorema de categoría de Baire.) Un espacio métrico completo es de segunda categoría.*

Demostración. Sea $(A_n)_n$ una colección numerable de conjuntos densos en ninguna parte. Entonces $O_n = (\overline{A}_n)^c$ es una colección de subconjuntos abiertos y densos en X. Así existe $x \in \bigcap_n O_n$, esto es, $x \notin \bigcup_n A_n$.

□

3.3. Los fractales forman un conjunto de primera categoría

En esta sección veremos que los fractales son muy pocos. Esto es, el conjunto de todos los fractales en $\mathcal{H}(X)$ es de alguna forma pequeño ya que es un conjunto de primera categoría.

Definición 3.3.1. *Dado $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 2$, llamaremos un r-fractal en $\mathbb{R}^N$ a un conjunto compacto $B \subseteq \mathbb{R}^N$ que es atractor de algún SIF $(\mathbb{R}^N, f_1, f_2, ..., f_r)$ tal que cada $f_i, 1 \leq i \leq r$, es una $\frac{r-1}{r}$-contracción.*

Escribiremos $\mathcal{F}_r^{(N)}$ para denotar a todos los r-fractales y $\mathcal{F}^N$ para la familia de todos los atractores de todos los SIF del espacio métrico $\mathbb{R}^N$.

Proposición 3.3.2.

$$\mathcal{F}^N = \bigcup_{r>1} \mathcal{F}_r^{(N)}$$

Demostración. La contención $\bigcup_{r>1} \mathcal{F}_r^{(N)} \subseteq \mathcal{F}^N$ es inmediata.
Ahora, sea $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ tal que es el atractor del SIF $\{\mathbb{R}^N, f_1\ , \dots\ , f_j\}$. Sean $s_i, 1 \leq i \leq j$ los factores de contracción de f_i. Sea

$$s = \max_{1\leq i\leq j}\{s_i\}.$$

Tomamos $r > 1$ tal que $r \geq j$ y $\frac{r-1}{r} = s$. Entonces, repitiendo f_j si es necesario, es decir, $f_{j+n} = f_j$ con $n \geq 1$, tenemos que A es el atractor de un SIF con r contracciones $\{\mathbb{R}^N, f_1\ , \dots\ , f_j\}$ tal que para todas estas se cumple que

$$\mid\ f_i(x) - f_i(y)\ \mid \leq \frac{r-1}{r} \mid\ x - y\ \mid$$

para toda $x, y \in \mathbb{R}^N$. Es decir, tienen factor de contracción $\frac{r-1}{r}$ y así A es un r-fractal. □

Definamos al conjunto

$$B_n^{(N)} = \{B \subseteq \mathbb{R}^N : B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^N), B \subseteq \overline{B_n(0)}\}.$$

Observemos que $B_n^{(N)} = \mathcal{H}(\overline{B_n(0)})$, donde $\overline{B_n(0)}$ denota a la bola cerrada de radio n con centro en 0, es decir, la colección de conjuntos compactos contenidos en $\overline{B_n(0)}$. Tenemos que $\overline{B_n(0)}$ es un conjunto compacto, de esta forma tenemos que $B_n^{(N)}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$.

Lema 3.3.3. *Las familias* $\mathcal{K}_n^{(N)} = \mathcal{F}_n^{(N)} \bigcap B_n^{(N)}$ *son compactas con la métrica de Hausdorff en* $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Sean $n, N \in \mathbb{N}$ y sea $\{B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots\}$ una sucesión en $\mathcal{K}_n^{(N)}$. Veamos que tiene una subsucesión convergente.
Por construcción existen n contracciones con factor de contracción $(1-n^{-1})$ tal que $T_k^{(i)} : B^{(i)} \longrightarrow B^{(i)}$, si $1 \leq k \leq n$, tales que

$$B^{(i)} = \bigcup_{k=1}^{n} T_k^{(i)}(B^{(i)}).$$

Ahora consideremos al conjunto

$$graf(T_k^{(i)}) = \{(a, T_k^{(i)}(a)) : a \in B^{(i)}\} \subseteq \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \equiv \mathbb{R}^{2N}.$$

La familia $B_n^{(N)}$ forma un conjunto compacto con respecto a la métrica de Hausdorff, y claramente $graf(T_k^{(i)}) \in B_{2n}^{(2N)}$. Como $\{B^{(i)}\}$ y $\{graf(T_k^{(i)})\}$ son sucesiones en B_n^N y $B_n^N \times B_n^N$ respectivamente, sin perder generalidad, podemos asumir que

$$\lim_{i\to\infty} h_N(B^{(i)}, B) = 0, \lim_{i\to\infty} h_{2N}(graf(T_k^{(i)}), G_k) = 0,$$

si $1 \leq k \leq n$, para algún compacto no vacío $B \in B_n^{(N)}$ y compactos $G_1, G_2, ..., G_n \in B_{2n}^{(2N)}$. Esto es ya que los conjuntos $B_n^{(N)}$ y $B_{2n}^{(2N)}$ son compactos en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ y $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2N})$ respectivamente. Como vimos en el primer capítulo, estos conjuntos se pueden caracterizar de la siguiente manera.

$$B = \{b \in \mathbb{R}^N \text{ :existe } \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots\}, b^{(i)} \in B^{(i)}, b^{(i)} \to b \text{ si } i \to \infty\},$$

$$G_k = \{(a,b) \in \mathbb{R}^{2N} \text{ :existe } \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots\}, b^{(i)} \in B^{(i)}, b^{(i)} \to a, T_k^{(i)}(b^{(i)}) \to b \text{ si } i \to \infty\}.$$

Tomando las proyecciones $\Pi_1, \Pi_2 : \mathbb{R}^{2N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ como $\Pi_1(a,b) = a$ y $\Pi_2(a,b) = b$, y dado que éstas son continuas tenemos que

$$B = \lim_{i\to\infty} B^{(i)}$$

$$= \lim_{i\to\infty} \Pi_1(graf(T_k^{(i)}))$$

$$= \Pi_1(G_k),$$

si $1 \leq k \leq n$. Tenemos también que,

$$B = \lim_{i\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} T_k^{(i)}(B^{(i)})$$

$$= \lim_{i\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_2(graf(T_k^{(i)}))$$

$$= \Pi_2 \lim_{i\to\infty} \bigcup_{k=1}^{n} graf(T_k^{(i)})$$

$$= \Pi_2 \left(\bigcup_{k=1}^{n} G_k \right)$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_2(G_k),$$

donde los límites son tomados con las respectivas métricas de Hausdorff. Tenemos que si $a \in B$, existe una sucesión $\{a^{(i)}\}, a^{(i)} \in B^{(i)}$ tal que $a^{(i)}$ converge a a. Como la sucesión $\{T_k^{(i)}(a^{(i)})\}$ está contenida en $\overline{B_n(0)}$, podemos definir, sin pérdida de generalidad,

$$T_k(a) = b = \lim_{i\to\infty} T_k^{(i)}(a^{(i)}).$$

Tenemos que para toda i, $T_k^{(i)}(a^{(i)}) \in B^{(i)}$. De esto concluimos que $T_k(a) \in B$. De esta forma tenemos que $T_k : B \longrightarrow B$. Veamos ahora que T_k es una contracción. Sean $a, a' \in B$ tales que $T_k(a) = b$ y $T_k(a') = (b')$. con el hecho de que $T_k^{(i)}$ son $(1 - \frac{1}{n})$-contracciones tenemos que para toda i

$$\| b^{(i)} - b'^{(i)} \| = \| T_k^{(i)}(a^{(i)}) - T_k^{(i)}(a'^{(i)}) \|$$

$$\leq (1 - \frac{1}{n}) \| a^{(i)} - a'^{(i)} \| .$$

Así tenemos que

$$\| b - b' \| = \| T_k(a) - T_k(a') \|$$

$$\leq (1 - \frac{1}{n}) \| a - a' \| .$$

Esto es, T_k es una contracción en B. Juntando lo anterior tenemos que

$$graf(T_k) = (B, T_k(B)) = G_k.$$

Veamos que T_k está bien definida. Esto es, veremos que $T_k(a)$ no depende de la sucesión $a^{(i)}$ que converge a a.
Sea $\varepsilon > 0$ y $a^{(i)}, b^{(i)} \in B^{(i)}$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} a^{(i)} = a = \lim_{i\to\infty} b^{(i)}.$$

Tenemos también que $\| a^{(i)} - a \| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\| b^{(i)} - a \| < \frac{\varepsilon}{2}$ si i es suficientemente grande. De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} \| T_k^{(i)}(a^{(i)}) - T_k^{(i)}(b^{(i)}) \| &\leq \| a^{(i)} - b^{(i)} \| \\ & \| a^{(i)} - a \| + \| b^{(i)} - a \| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

si i es suficientemente grande. Así tenemos que

$$\lim_{i\to\infty} T_k^{(i)}(a^{(i)}) = \lim_{i\to\infty} T_k^{(i)}(b^{(i)}).$$

Esto es, T_k está bien definida. Tenemos que $T_k : B \longrightarrow B$ es una contracción y además tenemos que

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} \Pi_2(G_k) = \bigcup_{k=1}^{n} T_k(B).$$

Luego entonces $B \in \mathcal{F}_n^{(N)}$. Esto es $B \in \mathcal{K}_n^{(N)}$ y, por lo tanto, $\mathcal{K}_n^{(N)}$ es un conjunto compacto.

$\square$

A continuación probaremos un resultado que de cierta manera identifica el tamaño de la colección de los fractales.

Teorema 3.3.4. *El conjunto de los fractales $\mathcal{F}^N$ formado por los atractores de los SIF con contracciones de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$ es de primera categoría en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$.*

Demostración. Observemos primero que $\mathcal{F}^{(N)} = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{K}_n^{(N)}$. Por el resultado anterior, $\mathcal{K}_n^{(N)}$ es compacto y por lo tanto cerrado con respecto a la métrica de Hausdorff h. Como la colección de conjuntos compactos que no son fractales forma un conjunto denso en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$, proposición 3.1.6, entonces cada K_n^N tiene interior vacío, así $\mathcal{F}^{(N)}$ es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte. De esta forma tenemos que $\mathcal{F}^{(N)}$ es de primera categoría.

$\square$

El teorema anterior nos dice que el conjunto de los fractales es de primera categoría. Esto nos dice que en realidad hay muy pocos fractales. En el capítulo anterior demostramos que el conjunto de los fractales es denso en el conjunto de los compactos de un espacio métrico completo dado. Así tenemos que los fractales son simultáneamente de primera categoría y densos en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$, como lo son los números racionales en los números reales.

Capítulo 4

Dimensión Topológica

Los conjuntos que son de una naturaleza geométrica elemental tienen asociada una dimensión. Los puntos tienen dimensión 0, las curvas tienen dimensión 1, las superficies tienen dimensión 2 y los sólidos tienen dimensión 3. Existen conjuntos de una naturaleza geométrica mucho más compleja. En algunos de estos conjuntos no es claro cuál es la dimensión que se les debe asociar. Para el estudio de estos conjuntos se presenta el concepto de dimensión topológica. Esta idea se ha presentado en formas distintas, es decir, una definición de dimensión puede ser útil para un propósito pero no para otro. Nuestra meta es mostrar que existen conjuntos fractales en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^N)$ tales que la dimensión topológica (que definimos en este capítulo) es diferente de la dimensión fractal (que definimos en el siguiente capítulo). En esta parte seguiremos el camino sugerido por el libro *Measure, Topology, and Fractal Geometry* del autor Gerald Edgar.

4.1. Espacios 0-Dimensionales

Definición 4.1.1. *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos colecciones de conjuntos en X. Decimos que $\mathcal{B}$ es subordinada de $\mathcal{A}$ si para toda $B \in \mathcal{B}$, existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subseteq A$.*

Definición 4.1.2. *Sea S un espacio métrico y $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de S, es decir, $S \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Un refinamiento de $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta $\mathcal{B}$ de S que es subordinada de $\mathcal{A}$.*

Definición 4.1.3. *Sea S un espacio métrico. Diremos que un conjunto $A \subseteq S$ es un conjunto clopen, por su notación en inglés, si es un conjunto cerrado y abierto al mismo tiempo. Una partición clopen de S es una cubierta de S que consiste en conjuntos ajenos clopen.*

Definición 4.1.4. *Sea S un espacio métrico. Diremos que S tiene dimensión 0 si cualquier cubierta abierta finita de S tiene un refinamiento finito que es una partición clopen.*

Ejemplo 4.1.5. *Cualquier conjunto finito A contenido en S, espacio métrico, es 0-dimensional. Esto es ya para cada $x \in A$, los conjuntos $\{x\}$ y $A \setminus \{x\}$ son cerrados y por lo tanto el conjunto $\{x\}$ es un conjunto clopen en A y cualquier cubierta abierta puede ser refinada por la colección $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in A\}$.*

Ejemplo 4.1.6. *El conjunto de Cantor tiene dimensión 0.*
Denotaremos al conjunto de Cantor como C y llamaremos a C_n a la n-ésima iteración del intervalo $[0,1]$ con el SIF que se usó en el ejemplo 2.3.7 para construirlo. Es decir, $C_n = F^n([0,1])$, donde $F(A) = f_1(A) \cup f_2(A), A \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$.
Sea $\mathcal{A}$ una cubierta abierta de C y $x \in C$. Entonces existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap C \subseteq A$.

Sabemos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-n} < r$. Así el intervalo $I \subseteq C_n$ tal que $x \in I$ tiene longitud 3^{-n}, y además $I \cap C \subseteq A$. Por construcción el complemento en C_n de I es una unión finita de intervalos cerrados, digamos $B_1, B_2, ...B_m$. Así el complemento de I en C está dado por $\bigcup_{n=1}^{m} B_i \cap C$ que es una unión finita de conjuntos cerrados en C. Por lo tanto $I \cap C$ es clopen en C. Así para cada $x \in C$ existe I_x con $I_x \cap C$ clopen en C, $x \in I_x$, y además $I_x \subseteq A$ para alguna $A \in \mathcal{A}$ y así tenemos que

$$\mathcal{A}_1 = \{I_x : x \in C\}$$

es una cubierta abierta para C que es compacto y por lo tanto tiene una subcubierta finita. Digamos

$$\mathcal{A}_2 = \{I_1, I_2, ..., I_k\}.$$

Definamos $J_1 = I_1$, $J_2 = I_2 \setminus J_1$, $J_3 = I_3 \setminus J_2$, $\ldots$, $J_k = J_k \setminus J_{k-1}$, obtenemos una nueva cubierta abierta de C

$$\mathcal{A}_3 = \{J_1, J_2, ..., J_k\},$$

formada por conjuntos clopen en C que además son ajenos. Así la cubierta $\mathcal{A}$ tiene un refinamiento finito de conjuntos clopen y ajenos. Esto es, C tiene dimensión 0.

Sabemos que en $\mathbb{R}$ los únicos conjuntos clopen son $\mathbb{R}$ y $\emptyset$, por lo tanto $\mathbb{R}$ no tiene dimensión 0, análogamente, si $a, b \in \mathbb{R}$ y $a < b$, entonces el intervalo $[a, b]$ no tiene dimensión 0.

A continuación veremos algunas equivalencias.

Teorema 4.1.7. *Sea S un espacio métrico. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) S tiene dimensión 0.
(ii) Si $\{U_1, ..., U_k\}$ es una cubierta abierta de S, entonces existen conjuntos $B_1 \subseteq U_1$, ... , $B_k \subseteq U_k$, tal que $\{B_1, ..., B_k\}$ es una partición clopen de S.
(iii) Si $\{U, V\}$ es una cubierta abierta de S entonces existen conjuntos abiertos

$A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ tal que $A \cup B = S$ y $A \cap B = \emptyset$.
(iv) Si $\{U, V\}$ es una cubierta abierta de S entonces existen conjuntos cerrados $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$ tal que $A \cup B = S$ y $A \cap B = \emptyset$.

Demostración. Tenemos claramente que (ii) implica (iii), (ii) implica (i) y que (iii) si y sólo si (iv) ya que en este último caso tenemos que A y B son clopen.

(i) implica (ii)

Supongamos que S tiene dimensión 0. La cubierta abierta $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ es refinada por una partición finita clopen, digamos $\mathcal{W}$. Así para cada $W \in \mathcal{W}$ existe i, $1 \leq i \leq k$ tal que $W \subseteq U_i$. Podemos escoger sólo uno y lo denotaremos como $g(W) = i$. Ahora para cada i sea

$$B_i = \bigcup\{W \in \mathcal{W} : g(W) = i\}.$$

Así los conjuntos B_i son clopen ya que son el resultado de una unión finita de conjuntos clopen. Si $x \in S$ entonces x está a en sólo uno de los conjuntos de $\mathcal{W}$ ya que esta es un refinamiento, pero $x \in B_i$ sólo si $x \in W$ para alguna W tal que $g(W) = i$. Así x está sólo en uno de los conjuntos B_i. Esto es, los conjuntos B_i son ajenos.

(iii) implica (ii)

Supongamos que S cumple (iii) y sea $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ una cubierta abierta de S. Si $k = 1$ tenemos que está cubierta ya es una partición clopen, entonces supongamos que $k \geq 2$. La idea es construir para cada $i, 1 \leq i \leq k$, un conjunto abierto B_i tal que $B_i \subseteq U_i$ con las siguientes propiedades:

a) $S = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ y
b) $B_i \cap (\bigcap_{i \neq j} B_i) = \emptyset$.

Definimos $U = U_1$, $V = \bigcup_{i=2}^{k} U_i$, y así U y V cubren a S y por hipótesis existen conjuntos clopen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ tal que $A \cup B = S$ y $A \cap B = \emptyset$.
Sean $B_1 = A$ y $B_i = B \cap U_i$ para $i \geq 2$. Entonces $B_i \subseteq U_i$ para toda $i \in \{1, 2, ..., k\}$, así tenemos que $\{B_1, B_2, \ \dots \ B_k\}$ es una cubierta abierta de S, $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$ y $B_1 \cap B_j = \emptyset$ para toda $j \neq 1$. Podemos repetir esta construcción un numero finito de veces para cada elemento de $\{U_1, U_2, ..., U_k\}$ para construir conjuntos cuya intersección entre cualesquiera dos de ellos sea vacía.

□

Teorema 4.1.8. *Sea S un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) S tiene dimensión 0
(ii) Para todo par A y B subconjuntos ajenos y cerrados de S, existen conjuntos clopen U y $V = S \setminus U$, tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = S$.

Demostración. Supongamos que S tiene dimensión 0. Sean A y B conjuntos cerrados y ajenos. Entonces sus complementos $A' = S \setminus A$ y $B' = S \setminus B$ son abiertos. Como $A \cap B = \emptyset$, tenemos que $A' \cup B' = S$ y por el teorema 4.1.6 tenemos que existen conjuntos $U \subseteq B'$, $V \subseteq A'$ tal que $U \cup V = S$ y $U \cap V = \emptyset$. Así tenemos que los conjuntos U y V son abiertos, además como $U \cup V = S$ y $U \cap V = \emptyset$ tenemos que $V = S \setminus U$. De esta forma tenemos que U y V son clopen. Como $A \cap V = \emptyset$ entonces $A \subseteq U$ y como $B \cap U = \emptyset$ entonces $B \subseteq V$.

Veamos que S tiene dimensión 0.
Sea $\{U_1, U_2\}$ una cubierta abierta de S. Entonces los complementos $A = S \setminus U_1$ y $B = S \setminus U_2$ son conjuntos cerrados y ajenos.
Por hipótesis existe un conjunto V clopen con complemento $U = S \setminus V$ tal que $A \subseteq V$, $B \subseteq U$. Así tenemos que $V \subseteq U_2$ y $U \subseteq U_1$ y por el teorema 4.1.6 tenemos que S tiene dimensión 0.

□

Definición 4.1.9. *Decimos que la colección $\mathcal{B}$ es una base para la topología de S si para cada $x \in S$ y cada conjunto abierto U tal que $x \in U$, existe $V \in \mathcal{B}$ tal que $x \in V$ y $V \subseteq U$.*

Veamos que la dimensión 0 está asociada a la existencia de una base de la topología formada de conjuntos clopen.

Proposición 4.1.10. *Sea S un espacio métrico de dimensión 0, entonces existe una base de la topología de S formada de conjuntos clopen.*

Demostración. Supongamos que S tiene dimensión 0 y sea $U \subseteq S$ abierto y $x_0 \in U$. Sea $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subseteq U$. De esta forma S es cubierto por los dos conjuntos abiertos U y $V = \{x \in S : d(x, x_0) > r/2\}$.
Esta cubierta puede ser refinada por una partición clopen $\mathcal{A}$. Como el conjunto abierto U fue tomado arbitrariamente, esto muestra que podemos construir una base para la topología hecha por conjuntos clopen.

□

A continuación enunciaremos un resultado acerca de espacios métricos separables, ya que en la siguiente proposición usaremos una de las equivalencias. Este resultado no será demostrado. La demostración se puede ver en [2].

Teorema 4.1.11. *Sea S un espacio métrico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Existe un subconjunto $D \subseteq S$ que es denso y numerable (S es separable).
ii) Existe una base numerable para la topología de S (segundo axioma de numerabilidad).
iii) Toda cubierta abierta de S tiene una subcubierta numerable (la propiedad de Lindelöf).

El resultado anterior es importante en nuestro estudio porque, como se demostrará posteriormente, los fractales resultan ser espacios separables. Ahora veremos un resultado que habla de la dimensión de la unión de conjuntos cerrados.

Proposición 4.1.12. *Sea S un espacio métrico separable, entonces S tiene dimensión 0 si y solamente si existe una base de la topología de S hecha de conjuntos clopen.*

Demostración. Un lado de la implicación fue demostrado en la proposición 4.1.11.
Supongamos que existe una base $\mathcal{B}$ para la topología de S que está hecha de conjuntos clopen.
Sea $\{U, V\}$ una cubierta abierta de S. Entonces existe una colección $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{U}_1 = U$.
Por la propiedad de Lindelof, existe una subcolección numerable $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$ tal que $\bigcup \mathcal{U}_2 = U$. Análogamente tenemos que existe una colección numerable $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{B}$ tal que $\bigcup \mathcal{V}_2 = V$. Si numeramos la unión tenemos

$$\mathcal{U}_2 \cup \mathcal{V}_2 = \{G_1, G_2, ...\}.$$

De esta forma tenemos que los conjuntos G_m son clopen y que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} G_m = S$.
Definimos $H_1 = G_1$, $H_2 = G_2 \setminus G_1$, $\ \dots\ , H_m = G_m \setminus (\bigcup_{i=1}^{m-1} G_i)$.
De este modo tenemos que los conjuntos H_m son clopen, ajenos y que cumplen $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} H_m = S$. Considera los conjuntos

$$E = \bigcup \{H_m : H_m \subseteq U\}$$

y

$$F = \bigcup \{H_m : H_m \subsetneq U\}.$$

Esto es, E y F son abiertos, $E \cap F = \emptyset$ y $E \cup F = S$. Así tenemos que E y F son clopen. Además $E \subseteq U$ y $F \subseteq V$, por lo tanto S tiene dimensión 0.

□

4.2. Dimensión inductiva débil

La dimensión 0 fue caracterizada en la sección anterior por el hecho de la existencia de una base para la topología hecha de conjuntos clopen. La dimensión inductiva débil generaliza esta misma idea.
La idea de esta definición es que un cubo es de dimensión 3 porque sus paredes son de dimensión 2. Para esto debemos saber que un plano es de dimensión 2, una curva es de dimensión 1 y que un punto es de dimensión 0. Esto último debido al hecho de que un conjunto de puntos aislados están inmóviles por sí mismos, es decir, no necesito otros puntos, curvas, planos etc. para aislar a un punto de los demás.

La dimensión inductiva débil es definida de manera inductiva, a cada espacio métrico S le será asignado una dimensión denotada por $ind(S)$. Esta dimensión está en el conjunto $\{-1, 0, 1, 2, 3, \ \ldots\}$.
El conjunto $\emptyset$ tendrá dimensión -1, $ind(\emptyset) = -1$. Si $S \neq \emptyset$ entonces $ind(S) \geq 0$. Si k es un entero no negativo, entonces diremos que $ind(S) \leq k$ si existe una base para la topología que consiste de conjuntos U tal que para todo U, se tiene que $ind(\partial U) \leq k - 1$. Diremos que $ind(S) = k$ si $ind(S) \leq k$ pero $ind(S) \nleq k - 1$. Finalmente diremos que $ind(S) = \infty$ si $ind(S) \leq k$ es falso para toda $k \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$.
A continuación veremos que la dimensión inductiva débil es un invariante topológico y que la dimensión respeta subconjuntos. Es decir, como se espera intuitivamente, la dimensión de un conjunto es menor o igual a la del conjunto en el que está contenido.

Teorema 4.2.1. *Sean S y T espacios métricos. Si S y T son homeomorfos, entonces $ind(S) = ind(T)$.*

Demostración. La demostración será por inducción sobre $ind(S)$.
Si $ind(S) = -1$ entonces $S = \emptyset$, y como S y T son homeomorfos entonces tenemos que $T = \emptyset$. Por lo tanto $ind(T) = -1$
Supongamos que el teorema se cumple para S tal que $ind(S) \leq k$. Considera un espacio S tal que $ind(S) = k + 1$ y tomemos T tal qu S y T son homeomorfos. Sea $h : S \longrightarrow T$ un homeomorfismo. Existe una base $\mathcal{B}$ para la topología de S tal que si $B \in \mathcal{B}$ entonces $ind(\partial B) \leq k$. Tenemos que la colección

$$\{h(B) : B \in \mathcal{B}\}$$

es una base para la topología de T. Como h es homeomorfismo, tenemos que si $B \in \mathcal{B}$ entonces $h(\partial B) = \partial h(B)$. La restricción de h a ∂B es un homeomorfismo y por lo tanto, por hipótesis tenemos que $ind(\partial h(B)) = ind(\partial B) \leq k$. Así tenemos que existe una base para la topología de T que consiste en conjuntos con fronteras de dimensión menor o igual a k, lo cual implica que $ind(T) \leq k + 1$. Supongamos que $ind(T) \leq k$, entonces por hipótesis de inducción tendríamos que $ind(S) \leq k$ que es falso y así tenemos que $ind(T) = k + 1$. Así tenemos que si $ind(S)$ es un numero entero entonces $ind(S) = ind(T)$.
Supongamos que $ind(S) = \infty$. Entonces tendríamos que $indT = k$ sería falso para toda $k \in 1, 0, 1, 2, ...\}$. Esto es $ind(T) = \infty$.

$\square$

Teorema 4.2.2. *Sea S un espacio métrico y $T \subseteq S$ entonces $ind(T) \leq ind(S)$.*

Demostración. El resultado es evidente si $ind(S) = \infty$, entonces supongamos que $ind(S) < \infty$. La prueba se va a hacer por inducción sobre $ind(S)$.
Si $ind(S) = -1$ tenemos que $S = \emptyset$. Entonces si $T \subseteq S$ entonces $T = \emptyset$ y por lo tanto $ind(T) = -1$.
Supongamos que el resultado es cierto para k, esto es, si $ind(S) \leq k$ y $T \subseteq S$. Entonces $ind(T) \leq ind(S)$.
Supongamos ahora que $T \subseteq S$ y que $ind(S) = k + 1$. Sea $x \in T$ y sea $V \subseteq T$

abierto (en T) tal que $x \in V$. Buscamos $U \subseteq T$ tal que $x \in U \subseteq V$ y tal que $ind(\partial_T U) \leq k$. Es decir, que la dimensión de la frontera en T sea menor a k, esto es ya que la frontera de un conjunto en T podría ser distinta a la frontera del mismo conjunto en S.
Tenemos que como V es abierto en T entonces existe un conjunto $\widetilde{V} \subseteq S$ abierto tal que $V = \widetilde{V} \cap T$. Como $ind(S) \leq k+1$ y $x \in \widetilde{V}$, existe $\widetilde{U} \subseteq S$ abierto tal que $x \in \widetilde{U} \subseteq \widetilde{V}$ tal que $ind(\partial_S)\widetilde{U} \leq k$. Considera $U = \widetilde{U} \cap T$.
Por construcción tenemos que U es abierto en T y $x \in U \subseteq V$. Además tenemos que $\partial_T U \subseteq \partial_S \widetilde{U}$ y por hipótesis de inducción tenemos que

$$ind(\partial_T U) \leq ind(\partial_S \widetilde{U}) \leq k.$$

Así tenemos una base para la topología de T hecha con conjuntos U tal que $ind(\partial_T U) \leq k$. Esto es $ind(T) \leq k+1 = ind(S)$. De esto se sigue el resultado.
□

4.3. Dimensión inductiva fuerte

En la primera sección de este capítulo vimos que la dimensión 0 fue caracterizada en términos de una propiedad de separación. Este hecho será generalizado con la dimensión inductiva fuerte.

Definición 4.3.1. *Sean S un espacio métrico, $A, B \subseteq S$ subconjuntos ajenos. Decimos que $L \subseteq S$ separa a A y B si existen $U, V \subseteq S$ conjuntos abiertos con $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$ y $L = S \setminus (U \cup V)$.*

Lo que se vio en la sección 4.1 es que un espacio tiene dimensión 0 si todo par de conjuntos cerrados y ajenos pueden ser separados por el conjunto vacío. Notemos que podemos relacionar el concepto de separación y la dimensión inductiva débil. Se pueden relacionar en el sentido de que si S es un espacio métrico, entonces $ind(S) \leq k$ si un punto $\{x\}$ y un conjunto cerrado B, $x \notin B$, pueden ser separados por un conjunto L con $ind(L) \leq k-1$. En efecto, existe un conjunto básico U tal que $x \in U \subseteq S \setminus B$ y $L = \partial U$ separa a $\{x\}$ y a B.

La dimensión inductiva fuerte será también definida de forma inductiva. A cada espacio métrico S le será asignado un elemento del conjunto

$$\{-1, 0, 1, 2, 3, ..., \infty\}$$

llamado dimensión inductiva fuerte de S y denotado por $Ind(S)$.
Para empezar asignaremos al vacío, como en la dimensión inductiva débil. Esto es $Ind(\emptyset) = -1$. Además si $S \neq 0$, entonces $Ind(S) \geq 0$.
Ahora, si k es un entero no negativo diremos que $Ind(S) \leq k$ si cualquier par de conjuntos cerrados y ajenos A y B pueden ser separados por un conjunto L con $Ind(L) \leq k-1$. Diremos que $Ind(S) = k$ si $Ind(S) \leq k$ pero $Ind(S) \nleq k-1$. Finalmente, diremos que $Ind(S) = \infty$ si $Ind(S) \leq k$ es falso para toda k.

A continuación veremos algunos teoremas de separación.

Lema 4.3.2. *Sean S un espacio métrico, A y B conjuntos cerrados y ajenos en S y $T \subseteq S$.*
(a) Sean U y V conjuntos abiertos tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Si $L' \subseteq S$ separa en T a los conjuntos $T \cap \overline{U}$ y $T \cap \overline{V}$. Entonces existe un conjunto $L \subseteq S$ que separa A y B en S con $L \cap T \subseteq L'$.
(b) Si además suponemos que T es cerrado, entonces para cualquier conjunto $L' \subseteq T$ que separa a $T \cap A$ y $T \cap B$ en T, existe $L \subseteq S$ que separa a A y B en S con $L \cap T \subseteq L'$.

Demostración. (a) Como L' separa a $T \cap \overline{U}$ y $T \cap \overline{V}$, tenemos que $T \setminus L' = U' \cup V'$, donde U' y V' son abiertos en T, $T \cap \overline{U} \subseteq U'$ y $T \cap \overline{V} \subseteq V'$. Veamos que $A \cap \overline{V'} = \emptyset$.
Tenemos que $U \cap V' = T \cap U \cap V' \subseteq U' \cap V' = \emptyset$, y como $A \subseteq U$ y U es abierto tenemos que $U \cap \overline{V'} = \emptyset$. Así $A \cap \overline{V'} = \emptyset$. Análogamente, $B \cap \overline{U'} = \emptyset$. Además como U' y V' son ajenos y abiertos en $U' \cup V'$, entonces $U' \cap \overline{V'} = \emptyset$ y $\overline{U'} \cap V' = \emptyset$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}(A \cup U') \cup \overline{(B \cup V')} &= (A \cup U') \cap (\overline{B} \cup \overline{V'}) \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap \overline{V'}) \cup (U' \cap B) \cup (U' \cap \overline{V'}) \\ &= \emptyset.\end{aligned}$$

Análogamente tenemos que

$$\overline{(A \cup U')} \cap (B \cup V') = \emptyset.$$

De esta forma tenemos que existen conjuntos abiertos U'' y V'' tal que

$$A \cup U' \subseteq U'' \text{ y } B \cup V' \subseteq V''.$$

Sea $L = S \setminus (U'' \cup V'')$. Así L separa A y B y además tenemos que

$$\begin{aligned}T \cap L &= T \setminus (U'' \cup V'') \\ &\subseteq T \setminus (U' \cup V') \\ &= L'.\end{aligned}$$

(b) Como L' separa $T \cap A$ y $T \cap B$ en T, existen conjuntos U' y V' ajenos y abiertos en T tal que $T \cap A \subseteq U'$, $T \cap B \subseteq V'$ y $T \setminus (U' \cup V') = L'$. Tenemos que los conjuntos A y $(T \setminus U') \cup B$ son cerrados y ajenos. Entonces existe un conjunto abierto U'' tal que

$$A \subseteq U'' \subseteq \overline{U''} \subseteq S \setminus ((T \setminus U') \cup B).$$

Análogamente tenemos que B y $(T \setminus V') \cup \overline{U''}$ son cerrados y ajenos, Así existe un conjunto V'' tal que

$$B \subseteq V'' \subseteq \overline{V''} \subseteq S \setminus ((T \setminus V') \cup \overline{U''}).$$

Así tenemos que $A \subseteq U''$, $B \subseteq V''$ y $\overline{U''} \cap \overline{V''} = \emptyset$. Con este caso aplicamos (a). y se sigue el resultado.

$\square$

Ahora estamos listos para generalizar el caso de dimensión 0 con el siguiente corolario.

Corolario 4.3.3. *Sean S espacio métrico separable, $A, B \subseteq S$ conjuntos cerrados y ajenos y $T \subseteq S$ tal que $indT = 0$. Entonces existe un conjunto L que separa A y B en S tal que $L \cap T = \emptyset$.*

Demostración. Sean U y V conjuntos abiertos tales que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.
Los conjuntos $\overline{U} \cap T$ y $\overline{V} \cap T$ son ajenos y cerrados en T que tiene dimensión 0. Esto es, se pueden separar con $L' = \emptyset$. De esta forma aplicamos el lema anterior para obtener L que separa A y B con $L \cap T \subseteq L' = \emptyset$.

$\square$

Teorema 4.3.4. *Sean S un espacio métrico separable y $A, B \subseteq S$. Entonces, $ind(A \cup B) \leq 1 + ind(A) + ind(B)$*

Demostración. El resultado es evidente si $ind(A) = \infty$ ó $ind(B) = \infty$. De esta forma supongamos que $ind(A) = m$ y $ind(B) = n$. La prueba será por inducción sobre el número $k = m + n$.
Si $n + m = -2$ tenemos que A y B son vacíos y así $A \cup B = \emptyset$, y tenemos que

$$ind(A \cup B) = -1 \leq 1 + (-1) + (-1) = 1 + ind(A) + ind(B).$$

Supongamos que $ind(A \cup B) \leq 1 + ind(A) + ind(B) = 1 + m + n$ es cierto para toda suma $m + n$, con $m + n \leq k$ y $k \geq -2$.
Sean A, B, n y m tales que $ind(A) = m, ind(B) = n$ y $m + n \leq k + 1$. Hay que probar que

$$ind(A \cup B) \leq 1 + m + n.$$

Sea $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ ó $x \in B$, supongamos que $x \in A$ y $V \subseteq A \cup B$ abierto, tal que $x \in V$. Así los conjuntos $\{x\}$ y $A \backslash V$ son cerrados en S y pueden ser separados por un conjunto L' tal que $ind(L') \leq m - 1$. Como vimos en un resultado anterior, existe un conjunto L que separa $\{x\}$ y $(A \cup B) \setminus V$ en $A \cup B$ y $L \cap A \subseteq L'$.

Como $L \cap A \subseteq L'$ entonces

$$ind(L \cap A) \leq ind(L') \leq m - 1.$$

Por lo tanto,

$$ind(L \cap A) + ind(L \cap B) \leq m - 1 + n.$$

Entonces

$$ind(L) = ind((L \cap A) \cup (L \cap B))$$

$$\leq 1 + ind(L \cap A) + ind(L \cap B)$$

$$\leq 1 + (m-1) + n$$

$$= m + n$$

Esto es,

$$ind(A \cup B) \leq m + n + 1 = 1 + ind(A) + ind(B),$$

como se quería demostrar.

□

Corolario 4.3.5. *La unión de $n+1$ conjuntos de dimensión 0 en un espacio métrico separable tiene dimensión inductiva débil menor o igual a n.*

Demostración. Sean S un espacio métrico separable y $A_0, A_1, ..., A_n \subseteq S, n+1$ conjuntos tales que para toda i, $ind(A_i) = 0$. Por el teorema anterior tenemos que

$$\begin{aligned} ind\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) &\leq 1 + ind(A_0) + ind\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\ &\leq 1 + ind(A_0) + (1 + ind(A_1) + ind\left(\bigcup_{i=2}^{n} A_i\right) \\ &\vdots \\ &\leq n + ind(A_n) \\ &= n. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.3.6. *Sea S un espacio métrico. Sean $T_n \subseteq S$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, T_n es cerrado y cumple que $Ind(T_n) = 0$. Entonces*

$$Ind\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = 0.$$

Demostración. Sea $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. Sean $E, F \subseteq T$ cerrados y ajenos. Hay que demostrar que existe un conjunto U clopen en T tal que $E \subseteq U$ y $F \cap U = \emptyset$. Tenemos que $T_1 \cap E$ y $T_1 \cap F$ son cerrados y ajenos en T_1, como $Ind(T_1) = 0$, existe $A_1 \subseteq T_1$ clopen en T_1 tal que $T_1 \cap E \subseteq A_1$ y $T_1 \cap F \subseteq T_1 \setminus A_1$.
Veamos que

$$(E \cup A_1) \cap (F \cup (T_1 \setminus A_1)) = \emptyset.$$

Tenemos que

$$(E \cup A_1) \cap (F \cup (T_1 \setminus A_1)) = (E \cap F) \cup (E \cap (T_1 \setminus A_1)) \cup (A_1 \cap F) \cup (A_1 \cap (T_1 \setminus A_1)),$$

es claro que $E \cap F = \emptyset$ y $A_1 \cap (T_1 \setminus A_1) = \emptyset$.
Tenemos también que

$$\begin{aligned} E \cap (T_1 \setminus A_1) &= E \cap T_1 \cap (T_1 \setminus A_1) \\ &\subseteq A_1 \cap (T_1 \setminus A_1) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Ahora, como $A_1 \subseteq T_1$ se tiene que

$$\begin{aligned} A_1 \cap F &\subseteq T_1 \cap F \\ &\subseteq T_1 \setminus A_1, \end{aligned}$$

esto implíca que

$$A_1 \cap F \subseteq T_1 \setminus A_1.$$

De este modo

$$\begin{aligned} A_1 \cap (A_1 \cap F) &= A_1 \cap F \\ &\subseteq A_1 \cap (T_1 \setminus A_1) \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Con lo anterior concluimos que

$$(E \cup A_1) \cap (F \cup (T_1 \setminus A_1)) = \emptyset.$$

Así, tenemos que $E \cup A_1$ y $F \cup (T_1 \setminus A_1)$ son conjuntos cerrados y ajenos. Entonces existen U_1 y V_1 abiertos en S tales que $E \cup A_1 \subseteq U_1$, $F \cup (T_1 \setminus A_1)$ y $\overline{U_1} \cap \overline{V_1} = \emptyset$.
Observemos que como $E \cup A_1 \subseteq U_1$ y $F \cup (T_1 \setminus A_1) \subseteq V_1$, entonces

$$\begin{aligned} E \cup F \cup (A_1 \cup (T_1 \setminus A_1)) &= E \cup F \cup T_1 \\ &\subseteq U_1 \cup V_1. \end{aligned}$$

Como $Ind(T_2) = 0$, existe $A_2 \subseteq T_2$ clopen en T_2 tal que $T_2 \cap \overline{U_1} \subseteq A_2$ y $T_2 \cap \overline{V_1} \subseteq T_2 \setminus A_2$. De manera análoga, $\overline{U_1} \cup A_2$ y $\overline{V_1} \cup (T_2 \setminus A_2)$ son cerrados y ajenos. Entonces existen U_2 y V_2 abiertos en S tales que $\overline{U_1} \cup A_2 \subseteq U_2$, $\overline{V_1} \cup (T_2 \setminus A_2) \subseteq V_2$ y $\overline{U_2} \cap \overline{V_2} = \emptyset$.

De este modo construimos las sucesiones $\{U_n\}$ y $\{V_n\}$.
Sean $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ y $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Entonces por construcción, U y V son abiertos y ajenos. Además cumplen que $E \subseteq U$, $F \subseteq V$ y además

$$T = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n \subseteq U \cup V$$

ya que para toda i se tiene que $T_i \subseteq U_i \cup V_i$. Además, como $U \cup V = T$ en T, Tenemos que U y V son clopen en T. Por lo tanto $Ind(T) = 0$.

$\square$

Corolario 4.3.7. *Sea S un espacio métrico separable. Sean $T_n \subseteq S$ tal que para toda $n \in \mathbb{N}$, T_n es cerrado y cumple $ind(T_n) = 0$. Entonces*

$$ind\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\right) = 0.$$

Con este resultado, demostraremos ahora un caso más general.

Teorema 4.3.8. *Sea k un entero no negativo y sea S un espacio métrico separable. Sean $T_n \subseteq S$ conjuntos cerrados para toda $n \in \mathbb{N}$ tales que $ind(T_n) \leq k$. Entonces*

$$ind\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n\right) \leq k.$$

Demostración. Sea $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$. El resultado es evidente si $k = \infty$, por lo tanto supongamos que $k < \infty$. La prueba se va a hacer por inducción sobre k
Si $k = -1$ tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \emptyset$ y así $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n = \emptyset$ y por lo tanto tenemos que $ind(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n) = -1$
Sea $k \geq -1$. Supongamos el resultado para valores menores o iguales a k.
Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{B}_n$ una base para la topología de T_n que consiste en conjuntos cuya frontera tiene dimensión menor o igual a k. Por la propiedad de Lindelof podemos asumir que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_n$ es numerable. Así tenemos que para toda $n \in \mathbb{N}$, si $U \in \mathcal{B}_n$ entonces $ind(\partial_{T_n} U) \leq k$.
Por hipótesis de inducción tenemos que la unión numerable

$$Y = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{U\in\mathcal{B}_n} (\partial_{T_n} U)$$

también tiene dimensión $\leq k$, esto es $ind(Y) \leq k$.
El espacio $Z_n = T_n \setminus Y$ tiene a la familia

$$\{U \setminus Y : U \in \mathcal{B}_n\}$$

como base para su topología. Veamos que los conjuntos $U \setminus Y$ son clopen en Z_n.
Notemos que

$$U \setminus Y = U \cap (T_n \setminus Y),$$

veamos que $U \cap (T_n \setminus Y)$ es clopen en $T_n \setminus Y$.
Tenemos que $U \cap (T_n \setminus Y)$ es abierto en $T_n \setminus Y$ ya que U es abierto.
Para ver que es cerrado, recordemos antes que un conjunto A es cerrado si y sólo si $\partial A \subseteq A$.
Sea $x \in \partial(U \cap (T_n \setminus Y))$, notemos que x esta en la frontera en $U \cap T_n \setminus Y$, así tenemos que para toda $\varepsilon > 0$,

$$B(x, \varepsilon) \cap U \cap (T_n \setminus Y) \neq \emptyset$$

y también que

$$B(x, \varepsilon) \cap (T_n \setminus Y) \setminus (U \cap (T_n \setminus Y)) = B(x, \varepsilon) \cap ((T_n \setminus Y) \setminus U)$$

$$\neq \emptyset.$$

De esta forma tenemos que

$$B(x,\varepsilon) \cap U \neq \emptyset$$

y también que

$$B(x,\varepsilon) \cap ((T_n \setminus Y) \setminus U) \neq \emptyset,$$

esto es, $x \in \partial U$. Además $x \in T_n \setminus Y$, entonces $x \in \partial U \cap (T_n \setminus Y)$.
Con esto hemos probado que $\partial(U \cap (T_n \setminus Y)) \subseteq \partial U \cap (T_n \setminus Y) = \emptyset$.
De esta forma tenemos que

$$\partial(U \cap (T_n \setminus Y)) = \emptyset.$$

Así

$$\partial(U \cap (T_n \setminus Y)) \subseteq U \cap (T_n \setminus Y),$$

esto es, $U \cap (T_n \setminus Y)$ es cerrado en $T_n \setminus Y$ y por lo tanto clopen.
Así concluimos que $ind(Z_n) \leq 0$.
Considera la unión

$$Z = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z_n.$$

Cada $Z_n = T_n \setminus Y = T_n \cap Z$ es cerrado en Z. Entonces $ind(Z) \leq 0$. Por el teorema 4.3.4, tenemos

$$ind(T) = ind(Y \cup Z) \leq 1 + k + 0 = k + 1.$$

□

Corolario 4.3.9. *Sea S un espacio métrico separable tal que $ind(S) = k$, entonces S es la unión de $k+1$ conjuntos de dimensión* 0.

Demostración. La prueba será por inducción sobre $ind(S)$.
Supongamos que $ind(S) = 0$. Entonces $S = S$, que es la union de $k+1 = 0+1 = 1$ conjuntos de dimensión 0.
Supongamos el resultado para $ind(S) = k - 1$. Sea S tal que $ind(S) = k$, como S es separable, entonces existe

$$\mathcal{B} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$$

base numerable de S donde cada $U_i \in \mathcal{B}$ cumple que

$$ind(\partial U_i) \leq k - 1.$$

Ahora, como ∂U_i es un conjunto cerrado, tenemos que

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial U_i$$

es tal que $ind(Y) \leq k-1$. Por hipótesis de inducción,

$$Y = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k,$$

donde $ind(A_i) = 0$ si $1 \leq i \leq k$.
De esta forma tenemos que

$$S = (S \setminus Y) \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k,$$

y como vimos en la demostración del teorema anterior, $ind(S \setminus Y) = 0$. Así tenemos que S es la unión de $k+1$ conjuntos de dimensión 0.

□

Teorema 4.3.10. *Sean S un espacio métrico separable, $A, B \subseteq S$ cerrados y ajenos, $k \geq 0$ entero y $T \subseteq S$ tal que $ind(T) = k$. Entonces existe L que separa a A y B tal que $ind(T \cap L) \leq k-1$.*

Demostración. La prueba sigue por inducción sobre $ind(T)$. El caso $k=0$ fue probado en el corolario 4.3.3. Así supongamos que el resultado es cierto para $k \geq 0$, por el corolario 4.3.7 podemos escribir $T = Y \cup Z$ tal que $ind(Y) = k-1$ y tal que $ind(Z) = 0$.
Por el lema 4.3.2, sabemos que existe L que separa A y B tal que $L \cap Z = \emptyset$. Así $L \cap T \subseteq Y$, esto es $ind(L \cap T) \leq indY \leq k-1$.

□

Con esto estamos listos para probar la relación que nos interesa entre estas dos dimensiones.

4.4. Dimensión Topológica

Con esta sección terminaremos este capítulo y veremos que las dimensiones presentadas son equivalentes para nuestros propósitos. Es decir, las dimensiones coinciden en los fractales. Para esto probaremos un resultado previo a demostrar la equivalencia.

Lema 4.4.1. *Sea S un espacio métrico y compacto. Entonces S es separable.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como S es compacto existe un subconjunto $\mathcal{A}_n = \{x_1, ..., x_m\} \subseteq S$ finito donde m depende de n tal que

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B\left(x_i, \frac{1}{n}\right).$$

Tenemos que existe un conjunto así para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta forma considera

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n.$$

Por construcción $\mathcal{A}$ es numerable. Ahora veamos que es denso en S.

Sean $x \in S$ y $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Tenemos que existe $x_k \in \mathcal{A}_{n_0}$ tal que $d(x, x_k) < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Como $x_k \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A}$ es denso en S y por lo tanto S es separable.

$\square$

El resultado anterior es importante, ya que nos permite calcular la dimensión topológica de los fractales de formas distintas ya que los fractales son separables. Ahora probaremos la equivalencia de las dimensiones.

Teorema 4.4.2. *Sea S un espacio métrico separable. Entonces*

$$ind(S) = Ind(S).$$

Demostración. $\leq$)

El resultado es claro si $Ind(S) = \infty$. Supongamos que $Ind(S) = k$ y veamos que es cierto para $k+1$.
Sea S tal que $Ind(S) = k+1$. Sean $x \in S$ y $U \subseteq S$ abierto tal que $x \in U$. Considera $A = \{x\}$ y $B = U^c = S \setminus U$. Veamos que A y B son cerrados ajenos. Por hipótesis existe $L \subseteq S$ que separa A y B tal que $Ind(L) = k$. Por hipótesis de inducción $ind(L) \leq k$. Como L separa A y B tenemos que $S \setminus L = W \cup V$donde W y V son abiertos, además tenemos que $\{x\} \subseteq W$ y $U^c \subseteq V$.
Sea $y \in W$ como $W \cap V = \emptyset$ y $S \setminus U \subseteq V$ tenemos que $y \in U$. Esto es, $W \subseteq U$. Tenemos que $\partial W \subseteq L$ ya que ∂W no está en W ni en V ya que estos conjuntos son abiertos y $W \bigcap V = \emptyset$, de esta forma tenemos que $ind(\partial W) \leq ind(L) \leq k$. Así tenemos que para cada $x \in S$ y cada U abierto tal que $x \in U$, existe $W_{x,U}$ abierto tal que $ind(\partial W) \leq k$. De esta forma la colección

$$\mathcal{B} = \{W_{x,U} \subseteq S : x \in S, U \subseteq S \text{ tal que } U \text{ es abierto}\},$$

es una base para la topología de S.Esto es $ind(S) \leq k+1 = Ind(S)$.

$\geq$)

El resultado es claro si $ind(S) = \infty$. El resto se demostrará por inducción sobre $ind(S)$.
En la primera sección del capítulo vimos el caso $k = 0$, esto es, vimos que $ind(S) = 0$ si y sólo si $Ind(S) = 0$.
Supongamos que el resultado es cierto para $k \geq 0$ y para valores menores a k. Sean $A, B \subseteq S$ cerrados y ajenos. Sabemos que existe L que separa a A y B tal que $ind(L) \leq k$, por hipótesis de inducción tenemos que $Ind(L) \leq k$, esto es,

$$Ind(S) \leq k+1 = ind(S).$$

$\square$

Como vimos en los capítulos anteriores los fractales son conjuntos compactos de espacios métricos, de esta forma, si tenemos un fractal K llamaremos al número $ind(K) = Ind(K)$ la dimensión topológica de K. Notemos que por construcción, la dimensión topológica siempre es un número entero. En el siguiente capítulo veremos una dimensión distinta y veremos que esta dimensión no necesariamente es entera. Este hecho nos dará el criterio de Mandelbrot para decidir si un conjunto es fractal o no.

Ejemplo 4.4.3. *El triángulo de Sierpinski. En este ejemplo veremos que el triángulo de Sierpinski T, tiene dimensión topológica 1, para esto, construiremos una base para la topología de T cuya frontera en T tenga dimensión 0. Es decir, construiremos una base para la topología de T de tal forma que la frontera de cada elemento de la base, al ser intersectada con T, sean sólo puntos. No daremos una base explícita, sólo veremos que está siempre se puede construir a partir de las propiedades geométricas que cumple tanto en Sierpinski como en la sucesión contenida en $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ que converge a T. Veamos como construir una base de vecindades para los puntos en T que no son vértices de algún triángulo en ninguno de los pasos en la construcción de Sierpinski.*
Para construir las vecindades de los puntos en el triángulo de Sierpinski que no fueron vertices para ningúna iteración en la construcción. Notemos que estos puntos estan contenidos en todos los triángulos en todas las iteraciones, así consideremos a la bola con centro en x_0 que es el centro del triángulo con radio igual a la distancia de x_0 a cualquiera de los vertices, el interior de esta bola es una vecindad para todos los puntos del triángulo y su frontera intersecta al triángulo de Sierpinski solo en los vertices.

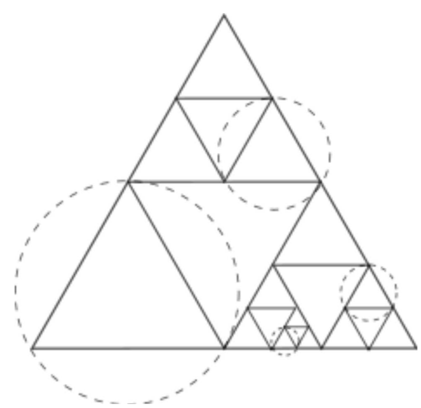

Figura 4.1: Vecindades de puntos que no son vértices.

Veamos cómo construir una base de vecindades para puntos que son vértices del triángulo. En el primer paso de la construcción del triángulo de Sierpinski. Para construir vecindades para alguno de los vértices del triángulo original, consideremos a la bola con centro en x_0, donde x_0 es alguno de estos vértices y radio igual a la longitud de algún lado del triángulo del cual es vertice en cualquier iteración. De esta forma es claro que la frontera de estas vecindades intersectan al triángulo de Sierpinski solo en los vértices.

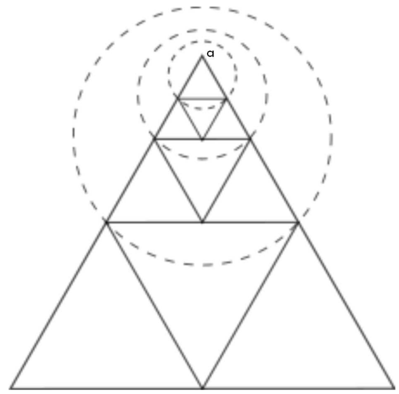

Figura 4.2: Vecindades del vértice a del triángulo más grande.

Veamos cómo construir una base de vecindades para los puntos que son vértices de alguno de los triángulos internos del triángulo más grande en la construcción del triángulo de Sierpinski.

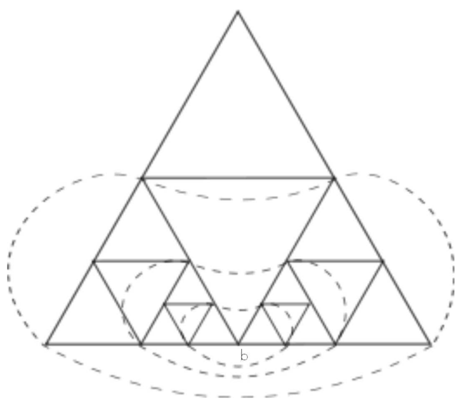

Figura 4.3: Vecindades para el vértice b de un triángulo interno.

Con esto vemos que podemos construir una base de vecindades para el triángulo de Sierpinski, en donde la frontera de cada elemento sólo intersecta al triángulo de Sierpinski en un número finito de puntos, es decir,

$$ind(\partial U \cap T) = 0$$

donde U es cualquier elemento de la base. De esta forma podemos concluir que la dimensión topológica de el triángulo de Sierpinski es 1.

Capítulo 5

Dimensión Fractal

En este capítulo estudiaremos la dimensión de Hausdorff. El concepto de dimensión y medida de Hausdorff son esenciales para el estudio de los fractales. Según Mandelbrot, un fractal es un conjunto con dimensión de Hausdorff estrictamente mayor a su dimensión topológica. Veremos que los ejemplos que hemos visto de fractales, también lo son en el sentido de Mandelbrot. La meta de este capítulo es la de definir la dimensión de Hausdorff, para esto necesitamos antes definir la medida de Hausdorff y para esto tenemos que recordar algunos conceptos de y resultados de teoría de la medida.

5.1. Medida

Definición 5.1.1. *Sea X un conjunto. Una colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X es llamada álgebra si:*

1) $X \in \mathfrak{F}$ y $\emptyset \in \mathfrak{F}$.
2) Si $A \in \mathfrak{F}$, entonces $X \setminus A \in \mathfrak{F}$.
3) Si $A,B \in \mathfrak{F}$, entonces $A \cup B \in \mathfrak{F}$.

Notemos que si $\mathfrak{F}$ es un álgebra, entonces también es cerrado bajo las operaciones $A \bigcap B$ y $A \setminus B$, esto es porque estas operaciones se pueden poner en términos de complementos y uniones finitas.

Definición 5.1.2. *Una colección $\mathfrak{F}$ de subconjuntos de X es llamada σ-álgebra si $\mathfrak{F}$ es un álgebra y si para toda colección $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathfrak{F}$ se tiene que*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{F}.$$

Dado un conjunto X y una colección $\mathfrak{D}$ de subconjuntos de X, llamaremos a $\mathcal{F}$ la σ-álgebra generada por $\mathcal{D}$ si $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a $\mathcal{D}$. Esto es, si $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$ entonces $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. La existencia de esta σ-álgebra no será demostrada. La demostración se puede ver en [2].

Definición 5.1.3. *Sea S un espacio métrico. Decimos que A es un conjunto boreliano si A pertenece a la σ-álgebra generada por la colección de todos los conjuntos abiertos de S.*

Definición 5.1.4. *Sean X un conjunto y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X. Una medida en $\mathcal{F}$ es una función $\mathcal{M} : \mathcal{F} \longrightarrow [0,\infty]$ tal que:*

1) $\mathcal{M}(\emptyset) = 0$,
2) Si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es una colección disjunta de conjuntos, entonces

$$\mathcal{M}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}(A_n).$$

Definición 5.1.5. *Sea X un conjunto. Una medida exterior en X es una función $\overline{\mathcal{M}}$ definida en la potencia de X con valores en $[0,\infty]$ que satisface:*

1) $\overline{\mathcal{M}}(\emptyset) = 0$,
2) Si $A \subseteq B$ entonces $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$,
3) $\overline{\mathcal{M}}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\mathcal{M}}(A_n)$.

A continuación describiremos un método general para construir medidas exteriores, llamaremos a este método *método I* . Comenzaremos dándole valores de medida a una colección de conjuntos (como se hace con los intervalos en la medida de Lebesque) y a partir de ahí, construiremos una medida exterior que extienda a la función que asigna las medidas originales. Esto es, dado X un conjunto, sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos X que cubre a X y $c : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ cualquier función. El siguiente teorema describe la construcción de una medida exterior a partir de estos datos. En el resto de esta sección, sólo se enunciarán los resultados necesarios para continuar con el estudio de los fractales pero estos no serán demostrados, las pruebas se pueden ver en el libro *Measure, Topology And Fractal Measure* de Gerald Edgar [2].

Teorema 5.1.6. *Existe una única medida exterior $\overline{\mathcal{M}}$ en X tal que:*

1) $\overline{\mathcal{M}}(A) \leq c(A)$ para toda $A \in \mathcal{A}$.
2) Si $\overline{\mathcal{N}}$ es cualquier medida exterior en X tal que $\overline{\mathcal{N}}(A) \leq \overline{\mathcal{M}}(A)$ para toda $A \in \mathcal{A}$, entonces $\overline{\mathcal{N}}(B) \leq \overline{\mathcal{M}}(B)$ para toda $B \subseteq X$.

Cuando digamos que una medida exterior se construyó por el *método I*, nos referimos a este teorema, esto es, la medida exterior está dada por

$$\overline{\mathcal{M}}(B) = inf \sum_{A\in\mathcal{D}} c(A),$$

donde $B \subseteq X$ y el ínfimo se toma sobre todas las cubiertas numerables $\mathcal{D}$ de B tal que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$.
Cuando obtenemos una medida por el *método I*, podría ser conveniente saber que las cubiertas $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$ pueden ser tomados de una clase más pequeña de conjuntos.

Definición 5.1.7. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior en el conjunto X, diremos que $A \subseteq X$ es $\overline{\mathcal{M}}$-medible (en el sentido de Caratheodory) si $\overline{\mathcal{M}}(E) = \overline{\mathcal{M}}(E \bigcap A) + \overline{\mathcal{M}}(E \setminus A)$ para todo $E \subseteq X$.*

Se considera este criterio para que un conjunto sea medible ya que en el caso de la medida exterior de Lebesque esta condición es equivalente a que un conjunto sea Lebesque medible.

Teorema 5.1.8. *La colección $\mathcal{F}$ de conjuntos $\overline{\mathcal{M}}$-medible forman una σ-álgebra y $\overline{\mathcal{M}}$ es contablemente aditiva en $\mathcal{F}$.*

Escribiremos simplemente $\mathcal{M}$ para la restricción de $\overline{\mathcal{M}}$ a la σ-álgebra $\mathcal{F}$ de conjuntos medibles. $\mathcal{M}$ es una medida en $\mathcal{F}$, esto es una generalización de la medida de Lebesque.

A menudo es conveniente que los conjuntos con los que se trabajan sean medibles. Con mucha frecuencia, los conjuntos con los que se trabaja son conjuntos abiertos, cerrados, compactos o simplemente conjuntos construidos a partir de este tipo de conjuntos. La mayoría de las veces estos conjuntos resultan ser Borelianos. A continuación veremos una condición para asegurar que los conjuntos Borelianos sean medibles.

Definición 5.1.9. *Sea S un espacio métrico, $A, B \subseteq S$, decimos que A y B tienen una separación positiva si $d(A, B) > 0$, esto es, existe $r > 0$ tal que $d(x, y) \geq r$ para toda $x \in A$ y $y \in B$.*

Definición 5.1.10. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior en el espacio métrico S, decimos que $\overline{\mathcal{M}}$ es una medida exterior métrica si $\overline{\mathcal{M}}(A \cup B) = \overline{\mathcal{M}}(A) + \overline{\mathcal{M}}(B)$ para todo $A, B \subseteq S$ tal que tienen separación positiva.*

A la medida $\mathcal{M}$ obtenida restringiendo la medida exterior métrica $\overline{\mathcal{M}}$ a los conjuntos medibles la llamaremos medida métrica.
Este tipo de medidas resultan ser de interés debido a que con esta medida todos los conjuntos abiertos (y por lo tanto todos los Borelianos) son medibles.

Lema 5.1.11. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior métrica en el espacio métrico S, sean $A_1 \subseteq A_2 \subseteq .....$ y $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, supongamos que $d(A_j, A \setminus A_{j+1}) > 0$ para toda $i \in \mathbb{N}$. Entonces*
$$\overline{\mathcal{M}}(A) = \lim_{n \to \infty} \overline{\mathcal{M}}(A_n).$$

A continuación veremos que las medidas exteriores métricas son adecuadas para nuestro estudio.

Teorema 5.1.12. *Sea $\overline{\mathcal{M}}$ una medida exterior métrica en el espacio métrico S entonces todo subconjunto de S Boreliano es $\overline{\mathcal{M}}$-medible.*

Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de un espacio métrico S, y supongamos que para toda $x \in S$ y toda $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ y $diam A \leq \varepsilon$, supongamos que $\rfloor : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ es una función dada. Construiremos una medida exterior a partir de estos datos. Para $\varepsilon > 0$, sea

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{A} : diam A \leq \varepsilon\}.$$

Sea $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon$la medida exterior obtenida por el *método I* con c y la familia $\mathcal{A}_\varepsilon$. Así tenemos que dado un conjunto E, cuando ε se hace pequeño y tiende a 0, $\overline{\mathcal{M}}_\varepsilon$ crece, así define

$$\overline{\mathcal{M}}(E) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \overline{\mathcal{M}}_\varepsilon(E).$$

Así tenemos que $\overline{\mathcal{M}}$ es una medida exterior, una vez más escribiremos $\mathcal{M}$ para la restricción de $\overline{\mathcal{M}}$ a los conjuntos medibles, a esta construcción de la medida $\mathcal{M}$ la llamaremos *método II*, es más complicada que el *método I*, pero garantiza que los conjuntos Borelianos sean medibles.

Teorema 5.1.13. *La función $\overline{\mathcal{M}}$ definida por el método II es una medida exterior métrica.*

Ahora podemos construir medidas que puedan medir a todos los Borelianos. Este es el marco teórico necesario para construir la medida de Hausdorff y posteriormente la dimensión de Hausdorff.

5.2. Medida de Hausdorff

Sea S un espacio métrico y considera la medida exterior dada por el *método II* con la función

$$c_s(A) = (diamA)^s,$$

donde $s \in \mathbb{R}$ y

$$diamA = \sup\{d(x,y) : x, y \in A\},$$

donde d es la métrica en S. Esta medida es denotada por $\overline{\mathcal{H}}^s$. La restricción a los conjuntos medibles es llamada la medida exterior s-dimensional de Hausdorff, y la denotamos por $\mathcal{H}^s$.
Como vimos en la sección anterior, por construcción, $\overline{\mathcal{H}}^s$ es una medida exterior métrica y por lo tanto todos los conjuntos Borelianos son medibles.

Como vimos en la construcción del *método I* una familia de $\mathcal{A}$ de subconjuntos de S es una cubierta contable para un conjunto F si

$$F \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A,$$

donde $\mathcal{A}$ es una familia contable (incluso finita). Sea $\varepsilon > 0$ y sea $s > 0$. Decimos que una cubierta $\mathcal{A}$ es una ε-cubierta si $diamA \leq \varepsilon$ para toda $A \in \mathcal{A}$. Definimos,

$$\overline{\mathcal{H}}^s_\varepsilon(F) = \inf \sum_{A \in \mathcal{A}} (diamA)^s,$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las ε-cubiertas contables del conjunto F. Si el conjunto F no tiene ninguna ε-cubierta numerable, entonces definimos

$\overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{s}(F) = \infty$. Dado que cuando ε decrece $\overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{s}$ crece debido a que el número de cubiertas disminuye y por lo tanto el ínfimo crece, definimos:

$$\overline{\mathcal{H}}^{s}(F) = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{s}(F) = \sup_{\varepsilon > o} \overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{s}(F).$$

Este valor es la medida exterior s-dimensional de Hausdorff del conjunto F. Este límite siempre existe aunque comunmente es 0 ó ∞.

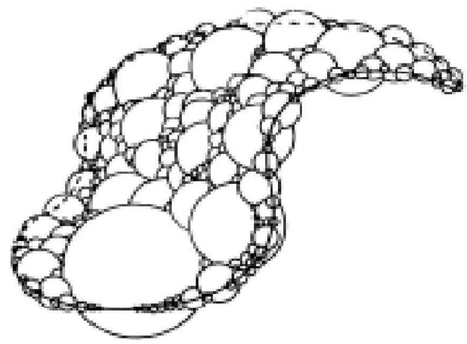

Figura 5.1: Una cubierta para aproximar el área de una superficie.

La medida de Hausdorff generaliza las ideas de longitud, área, volumen, etc. De hecho, se puede probar que en $\mathbb{R}^n$, la medida n-dimensional de Hausdorff es precisamente la medida de Lebesque multiplicado por una constante. A saber, si F es un conjunto Boreliano en $\mathbb{R}^n$, tenemos que,

$$\mathcal{H}^n(F) = c_n^{-1} \mathcal{L}^n(F),$$

donde $\mathcal{L}^n$ denota la medida n-dimensional de Lebesque y c_n es el volumen de la bola n-dimensional de diámetro 1. Este hecho sólo será probado para $n = 1$, esto es, en $\mathbb{R}$ las medidas son iguales. La referencia al caso general se puede ver en [3].

Teorema 5.2.1. *En el espacio métrico $\mathbb{R}$ la medida $\mathcal{H}^1$ de Hausdorff coincide con la medida $\mathcal{L}^1$ de Lebesque.*

Demostración. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene diámetro finito r, entonces $supA - infA = r$, así A está contenido en un intervalo I de longitud r. Además $\overline{\mathcal{L}^1}(A) \leq \overline{\mathcal{L}^1}(I) = r = diamA$, donde $\overline{\mathcal{L}^1}$ es la medida exterior de Lebesque. Por construcción tenemos que $\overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{1}$ es la medida exterior más grande que satisface $\overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{1}(A) \leq diamA$ para todos los conjuntos A con diámetro menor a ε, entonces tenemos que $\overline{\mathcal{L}}^{1}(F) \leq \overline{\mathcal{H}}_{\varepsilon}^{1}(F)$ para toda F y para toda $\varepsilon > 0$, entonces podemos concluir que $\overline{\mathcal{L}}^{1}(F) \leq \overline{\mathcal{H}}^{1}(F)$.

Sea $[a,b)$ un intervalo semiabierto y $\varepsilon > 0$, podemos encontrar una partición $a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b$ del intervalo de tal forma que $x_j - x_{j-1} < \varepsilon$ para toda j. Tenemos así que $[a,b)$ es cubierto por la colección contable

$$\{[x_{j-1}, x_j] : 1 \leq j \leq n\},$$

además

$$\sum_{j=1}^{n} diam[x_{j-1}, x_j] = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) = b - a.$$

Tenemos así que $\overline{\mathcal{H}}^1_\varepsilon([a,b)) \leq b - a$.
Por la construcción de la medida de Lebesque tenemos que $\overline{\mathcal{L}}$ es la medida exterior más grande que satisface $\overline{\mathcal{L}}([a,b)) \leq b - a$ para todos los intervalos semiabiertos $[a,b)$. Como en el caso anterior podemos concluir que $\overline{\mathcal{H}}^1(F) \leq \overline{\mathcal{L}}(F)$ para toda F.

De esta forma tenemos que $\overline{\mathcal{H}}^1(F) = \overline{\mathcal{L}}(F)$ para toda $F \subseteq \mathbb{R}$.
Como la medibilidad de los conjuntos está dada bajo el criterio de Caratheodory, entonces tenemos que las medidas $\overline{\mathcal{L}}$ y $\overline{\mathcal{H}}^1$ también coinciden.

□

A continuación veremos otras propiedades de la medida de Hausdorff.

Lema 5.2.2. *Sea S una homotecia con factor de homotecia $\lambda > 0$. Si $F \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces,*

$$\mathcal{H}^s(S(F)) = \lambda^s \mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Si $\{U_i\}$ es una δ-cubierta de F, entonces tenemos que $\{S(U_i)\}$ es una $\lambda\delta$-cubierta de $S(F)$. Así tenemos que

$$\sum |S(U_i)|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s.$$

De esta forma si tomamos el ínfimo sobre las correspondientes cubiertas tenemos que

$$\mathcal{H}^s_{\lambda\delta}(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s_\delta(F).$$

Si $\delta \to 0$ concluimos que $\mathcal{H}^s(S(F)) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$.
Si reemplazamos a la homotecia S por la homotecia S^{-1} el factor de homotecia λ cambia por el factor $\frac{1}{\lambda}$, obtenemos $\mathcal{H}^s(S(F)) \geq \lambda^s \mathcal{H}^s(F)$ y por lo tanto la igualdad.

□

Proposición 5.2.3. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : F \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una función tal que,*

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha \qquad x, y \in F$$

.
para $c > 0$ y $\alpha > 0$ constantes. Entonces para cada s tenemos que,

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F).$$

Demostración. Si $\{U_i\}$ es una δ-cubierta de F, entonces como $|f(F\bigcap U_i| \leq c|F\bigcap U_i|^\alpha \leq c|U_i|^\alpha$, de esto se sigue que $\{f(F\bigcap U_i)\}$ es una ε-cubierta de $f(F)$ donde $\varepsilon = c\delta^\alpha$.
Así tenemos que $\sum |f(F\bigcap U_i|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha}\sum |U_i|^s$, tomando los respectivos ínfimos tenemos que
$\mathcal{H}^{s/\alpha}_\varepsilon(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s_\delta$, de esta forma si $\delta \to 0$ entonces $\varepsilon \to 0$ y así tenemos $\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha}\mathcal{H}^s(F)$. □

Ahora estamos listos para definir la dimensión de Hausdorff.

5.3. Dimensión de Hausdorff

Veamos como $\mathcal{H}^s(F)$ se comporta como una función de s. Podemos observar que cuando s crece entonces $\mathcal{H}^s(F)$ decrece. Con esta idea vamos al siguiente resultado.

Teorema 5.3.1. *Sean F un conjunto de Borel, $0 < s < t$. Si $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^t(F) = 0$. Si $\mathcal{H}^t(F) > 0$, entonces $\mathcal{H}^s(F) = \infty$.*

Demostración. Sea A tal que $diamA \leq \varepsilon$, entonces

$$\overline{\mathcal{H}^t_\varepsilon}(A) \leq (diamA)^t \leq \varepsilon^{t-s}(diamA)^s,$$

Con estas condiciones obtenemos

$$\overline{\mathcal{H}^t_\varepsilon}(F) \leq \varepsilon^{t-s}\overline{\mathcal{H}^s_\varepsilon}(F)$$

para toda F. Además, como $\mathcal{H}^s(F) < \infty$, entonces tenemos que

$$\mathcal{H}^t(F) \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{t-s}\overline{\mathcal{H}^s_\varepsilon}(F) = (0)(\mathcal{H}^s(F) = 0.$$

La segunda afirmación es simplemente la contrapuesta.

□

Este resultado nos da la idea principal de la dimensión de Hausdorff. El resultado anterior implica que dado un conjunto F existe un único valor crítico $s_0 \in [0,\infty]$ tal que,

$$\mathcal{H}^s(F) = \infty \qquad \text{si} \quad s < s_0,$$

$$\mathcal{H}^s(F) = 0 \qquad \text{si} \quad s > s_0.$$

Al valor s_0 se le conoce como *dimensión de Hausdorff* y es denotada por $dim_H F$.

Formalmente esto es:

$$dim_H F = \text{ínf}\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(F) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(F) = \infty\}.$$

Tenemos que si $s = dim_H F$, entonces $\mathcal{H}^s(F)$ puede ser 0 o puede ser ∞ o puede cumplir $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$.

Con esto vemos que la idea de dimensión está estrechamente relacionada con el concepto de medida. Sabemos que si F es una curva, su dimensión es 1 y su medida o longitud es una buena forma de medir su tamaño pero su área es 0. Así, si $s < 1$ entonces la dimensión es ∞ y si $s > 1$ la dimensión es 0. Lo que mide la dimensión de Hausdorff es precisamente el dar la dimensión del espacio en donde el objeto se puede medir. Esto es, la dimensión de un objeto es la dimensión del espacio en donde dicho objeto se puede medir y esta medida nos diga algo del objeto a pesar de que esta medida sea 0 ó ∞.

Ejemplo 5.3.2. *El conjunto de Cantor.*

Denotemos por F al conjunto de Cantor. Veremos que si $s = \frac{log2}{log3}$, entonces $dim_H F = s$ y además $\frac{1}{2} \leq \mathcal{H}^s(F) \leq 1$.
Claramente el conjunto de Cantor se divide en dos secciones. Digamos la parte izquierda, $F_i = F \bigcap [0, \frac{1}{3}]$, y la parte derecha, $F_d = F \bigcap [\frac{2}{3}, 1]$.
Claramente ambas partes son similares a F pero contraídas por un factor de $\frac{1}{3}$.
Además $F = F_i \bigcup F_d$ que es una unión ajena.
Así tenemos que para toda s,

$$\mathcal{H}^s(F) = \mathcal{H}^s(F_i) + \mathcal{H}^s(F_d) = \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F) + \left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(F).$$

Si asumimos que en el valor crítico $s = dim_H F$ se cumple que $0 < \mathcal{H}^s(F) < \infty$ (este hecho es algo grande de asumir, pero veremos que asumir esto está justificado) podemos dividir entre $\mathcal{H}^s(F)$ para obtener $1 = 2(\frac{1}{3})^s$, esto es, $s = \frac{log2}{log3}$.

Como antes, llamaremos F_k a los conjuntos obtenidos para construir al conjunto de Cantor, esto es, F_k es la k-ésima iteración del SIF que tiene al conjunto de Cantor como atractor. De esta forma F_k consiste de 2^k intervalos de longitud 3^{-k}.

Si tomamos los intervalos de F_k como una 3^{-k}-cubierta del conjunto de Cantor tenemos que

$$\mathcal{H}^s_{3^{-k}}(F) \leq 2^k 3^{-ks} = 1$$

si $s = \frac{log2}{log3}$. De esta forma, si $k \to \infty$ tenemos

$$\mathcal{H}^s(F) \leq 1$$

Para probar que $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{1}{2}$ observemos que

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2} = 3^{-s}$$

para cualquier cubierta $\{U_i\}$ *de* F.
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los elementos de la cubierta $\{U_i\}$ *son intervalos y dado que* F *es compacto, podemos tomar una subcolección finita. Además, un intervalo cerrado tiene la misma medida que uno abierto. De esta forma, podemos decir que* $\{U_i\}$ *es una colección finita de subintervalos cerrados del conjunto* $[0,1]$.
Para cada U_i, *sea* k *el entero tal que*

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Tenemos entonces que U_i *puede intersectar a lo más un intervalo de* F_k *ya que en este conjunto, la separación entre los intervalos es de* 3^{-k}. *Si* $j \geq k$ *tenemos que por construcción,* U_i *intersecta a lo más*

$$2^{j-k} = 2^j 3 - sk \leq 2^j 3^s |U_i|^s$$

intervalos del conjunto F_j.
Si tomamos j *lo suficientemente grande tal que* $3^{-(j+1)} \leq |U_i|$ *para cualquier* U_i, *entonces como* $\{U_i\}$ *intersecta a todos los* 2^j *intervalos de longitud* 3^{-j}, *contando intervalos obtenemos*

$$2^j \leq \sum_i 2^j 3^s |U_i|^s.$$

De lo que podemos concluir que

$$3^{-(k+1)} \leq |U_i| < 3^{-k}.$$

Teorema 5.3.3. *Sean* A *y* B *dos conjuntos Borelianos en* $\mathbb{R}^n$. *Entonces*

1) Si $A \subseteq B$ *entonces* $dim_H(A) \leq dim_H(B)$.
2) $dim_H(A \cup B) = max\{dim_H(A), dim_H(B)\}$

Demostración. (1) Supongamos que $A \subseteq B$. Si $dimB < s$ entonces $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B) = 0$ y por lo tanto $dimA \leq s$. Esto es cierto para toda $s > dimB$. Entonces $dimA \leq dimB$.

(2) Sea $s > max\{dimA, dimB\}$. Entonces $s > dimA$ y así $\mathcal{H}^s(A) = 0$. De manera análoga tenemos que $\mathcal{H}^s(B) = 0$.
Como $\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B) = 0$, entonces $dim(A \cup B) \leq s$, este hecho es cierto para toda $s > max\{dimA, dimB\}$ y así obtenemos que

$$dim(A \cup B) \leq max\{dimA, dimB\}.$$

Tenemos que como $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$, por el inciso anterior podemos concluir que

$$max\{dimA, dimB\} \leq dim(A \cup B).$$

□

Ahora veremos algunos resultados que se desprenden de los resultados vistos en la sección anterior, estos resultados sólo reflejan lo íntimamente relacionados que esta la dimensión con la medida.

Lema 5.3.4. *Sea $f : S \longrightarrow T$ una homotecia con factor de homotecia $\lambda > 0$ y sea $F \subseteq S$. Entonces $dim_H f(F) = dim_H F$.*

Demostración. Sabemos que para todo $F \subseteq S$, tenemos que

$$\overline{\mathcal{H}^s}(f(F)) = \lambda^s \overline{\mathcal{H}^s}(F),$$

Así es claro que el punto S_0 donde la medida cambia de ∞ a 0 debe ser el mismo en ambos casos. Esto es $dim_H f(F) = dim_H F$.

□

Lema 5.3.5. *Sea $\{F_i\}$ una colección de subconjuntos de S. Entonces*

$$dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{dim_H F_i\}.$$

Demostración. $\geq$)

Sabemos que

$$dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \geq dim_H (F_j)$$

para toda $j \in \mathbb{N}$, esto implica que

$$dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \geq sup_{i \in \mathbb{N}} \{dim_H F_i\}.$$

$\leq$)

Sea $s > dim_H(F_i)$ para toda i, entonces $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$, entonces

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(F_i) = 0,$$

de esta forma tenemos que $\mathcal{H}^s(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i) = 0$ y este resultado es cierto para toda $s > dim_H(F_i)$, así podemos concluir que

$$dim_H \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i \right) \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \{dim_H F_i\}.$$

□

Lema 5.3.6. *Sea $F \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, entonces $dim_H F = n$*

Demostración. $\geq$)

Como F es abierto entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subseteq F$ para alguna x, esta es una bola n-dimensional, entonces $dim_H(F) \geq dim_H(B(x,\varepsilon)) = n$

$\leq$)

Sabemos que F puede ser cubierto por una cantidad numerable de bolas abiertas, esto es

$$F \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, r),$$

donde $x_i \in F$ para toda i y $r > 0$, de esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} dim_H(F) &\leq dim_H\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, r)\right) \\ &= \sup_i\{dim_H(B(x_i, r))\} \\ &= n \end{aligned}$$

Así podemos concluir que $dim_H(F) = n$.

□

Ahora veremos un resultado que relaciona a los SIF estudiados en capítulos anteriores y la dimensión de Hausdorff de los fractales, es decir, de los atractores de los SIF. Para esto antes introduciremos algunos conceptos.

Definición 5.3.7. *Sea $\{X, f_1, ..., f_n\}$ un SIF con lista de radios de contracción $(r_i)_i$, considera*

$$\sum_{i=1}^{n} |r_i|^s,$$

existe una única s_0 tal que $\sum_{i=1}^{n} |r_i|^{s_0} = 1$,a dicho valor le llamaremos valor-sim.

Definición 5.3.8. *Diremos que el SIF $\{X, f_1, ..., f_n\}$ cumple la condición de conjunto de Moran abierto si existe un conjunto U abierto y no vacío tal que $f_i(U) \bigcap f_j(U) = \emptyset$ si $i \neq j$ y $f_i[U] \subseteq U$ para toda i.*

Al conjunto U se le llamara conjunto abierto de Moran para el SIF. El siguiente teorema nos permite, en muchos casos, calcular la dimensión de Hausdorff de un conjunto fractal. En este trabajo no presentaremos su demostración ya que en ella se utilizan herramientas que no hemos desarrollado. En el libro *Measure, Topology and Fractal Geometry*, ver [2], el autor presenta una prueba donde utiliza un espacio de símbolos. Otra demostración se puede presentar en el libro *Fractal Geometry*, ver [3]. En este caso el autor utiliza conceptos relacionados con distribución de masa e integrales.

Teorema 5.3.9. *Sea $\{X, f_1, ..., f_n\}$ un SIF en $\mathbb{R}^n$ con una lista de radios de contracción $(r_e)_{e\in E}$ con valor-sim s_0 y K el atractor del SIF, si el SIF cumple la condición de conjunto abierto de Moran entonces $dim_H K = s_0$.*

Ejemplo 5.3.10. *El conjunto de Cantor. Como vimos en el capítulo 2, el SIF que determina al conjunto de Cantor es el que está determinado por las contracciones en $\mathbb{R}$ dadas por*

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x \qquad\qquad f_2(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}.$$

Tenemos que el factor de contracción de ambas contracciones es $r = \frac{1}{3}$.Notemos que el conjunto abierto $S_0^0 = (0, 1)$, es decir, el interior del conjunto S_0, cumple la condición de conjunto abierto de Moran. De esta forma tenemos que la dimensión de Hausdorff es s_0 donde

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{3^{s_0}} = 1,$$

esto es, $\frac{2}{3^{s_0}} = 1$ y por lo tanto

$$s_0 = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

Podemos ver que este resultado es consistente con el que calculamos anteriormente.

Ejemplo 5.3.11. *El triángulo de Sierpinski Como vimos en el capítulo 2, el SIF que determina al triángulo de Sierpinski está dado por las contracciones en $\mathbb{R}^2$ dadas por*

$$f_1(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right),$$

$$f_2(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right).$$

El factor de contracción de estas es $r = \frac{1}{2}$. Notemos que el conjunto S_0^0 dado por el interior del triángulo con vértices en

$$(0, 0), (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

cumple la condición de conjunto abierto de Moran.
Así tenemos que la dimensión de Hausdorff del triángulo de Sierpinski está dada por s_0 donde $1 = \frac{3}{2^{s_0}}$, así tenemos que la dimensión es

$$s_0 = \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

En la siguiente figura podemos observar la imagen de el triángulo de Sierpinski bajo alguna de las tres contracciones. Cada contracción es determinada por alguno de los tres colores.

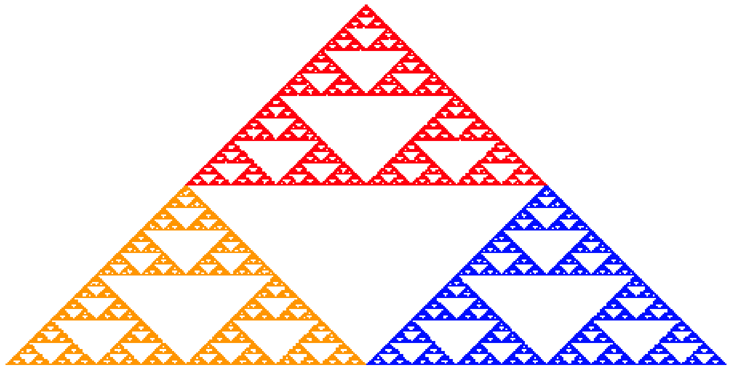

Figura 5.2: Imagen del triángulo de Sierpinski bajo alguna de las tres contracciones.

Podemos observar con los ejemplos anteriores, que estos conjuntos son también fractales según la definición de Mandelbrot, esto es, su dimensión de Hausdorff es estrictamente mayor a su dimensión topológica, podemos observar también que la dimensión de Hausdorff refleja algo de la complejidad geométrica de los objetos estudiados.

Bibliografía

[1] M. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press.inc, Georgia, 1988.

[2] G. Edgar, *Measure, Topology, And Fractal Geometry*, Second Edition, Springer, New York, 2008.

[3] K. Falconer, *Fractal Geometry*, Second Edition, Wiley, Chichester, 2003.

[4] J. E. Hutchinson, *Fractals and Self Similarity*, Indiana University Mathematics Journal, **Vol. 30** (1981), 713-747.

[5] H. L. Royden, *Real Analysis*, Second Edition, The Macmillan Company, New York, 1968.

[6] L. L. Stacho, L. I. Szabo, *A Note of Invariant Sets of Iterated Function Systems*, Acta Math. Hungar., **119** (2008), 159-164.