ALUMNA:

GARCÍA GÁNDARA MIRIAM JANET

TEMAS QUE SE DESARROLLAN

I. INTRODUCCIÓN

1) *LOS MODELOS DE CRECIMIENTO*

Sabemos que la biosfera está constituida de sistemas que cambian con el paso del tiempo. Conocemos ambos sistemas: ambiental y humano, los cuales pueden describirse por la forma de sus cambios.
El modo por el cual el sistema cambia depende de la organización del sistema y del tipo de fuente de energía que se tiene disponible. Por ejemplo, si lo consideramos de esta manera; algunos ecosistemas aumentan en tamaño y complejidad mientras que otros detienen su crecimiento. Así mismo algunas pequeñas ciudades pueden crecer y convertirse en ciudades grandes mientras que por otro lado, otras ciudades parecen permanecer del mismo tamaño durante varias décadas (consideramos entonces, que ellas parecen haber alcanzado un estado de estabilidad). Otras ciudades, por su parte, disminuyen de tamaño y complejidad, las industrias tienden a cerrar, y los habitantes se trasladan de ese lugar.

La organización de un sistema puede, bien estudiarse diseñando un diagrama del sistema (modelo).

A través de los tipos de fuentes de energía en un diagrama, podemos observar el comportamiento del sistema, que puede crece r o disminuir.

II. EL MODELO DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL

1) *EL MODELO DE CRECIMIENTO EXPONENCIAL EN RELACIÓN CON LA DINÁMICA DE LA POBLACIÓN*

Como hemos de saber, el tamaño de las poblaciones de seres vivos se suele mantener en equilibrio, oscilando más o menos ampliamente en torno a un valor medio, en función de variables conocidas como la natalidad o la mortalidad, que a su vez dependen, como es de imaginar, de relaciones más complejas con otras poblaciones de otras especies, variaciones en las condiciones ambientales, etc.

El crecimiento de una población, es decir el incremento en el número de individuos que la componen en cada una de las generaciones, depende como factor importante, de la tasa de natalidad, que es característica de cada especie y es variable en función de ciertos factores ambientales, y del número de individuos reproductores de que se parte.

Esta tasa de natalidad TN se expresa en tanto por uno. Según esta aproximación tan simple, en una generación el número inicial de individuos N0se verá incrementado en N0•TN:

$$N1 = N0 + N0 \cdot TN = N0 \cdot (1 + TN) \qquad (1)$$

Al mismo tiempo, nos damos cuenta que ocurre un hecho completamente contrario, el cual genera que cierto número de individuos mueran. La proporción de muertes respecto al total es la tasa de mortalidad TM. Luego:

$$N1 = N0 \cdot (1 + TN - TM) \qquad (2)$$

La acción conjunta de TN y TM determinan el incremento real de N0. La diferencia entre TN y TM es la tasa intrínseca de crecimiento de una población, cuyo valor máximo se denomina como potencial biótico (r), el cual es característico de cada especie:

$$r = TN - TM \qquad (3)$$

Teniendo en cuenta ambos factores, tenemos que el número de individuos presentes en la población en la siguiente generación será:

$$N1 = N0 \cdot (1 + r) \qquad (4)$$

Y en la siguiente generación tendremos:

$$N2 = N1\ (1 + r) = N0\ (1 + r)\ (1 + r) = N0\ (1 + r)2 \qquad (5)$$

Y generalizando:

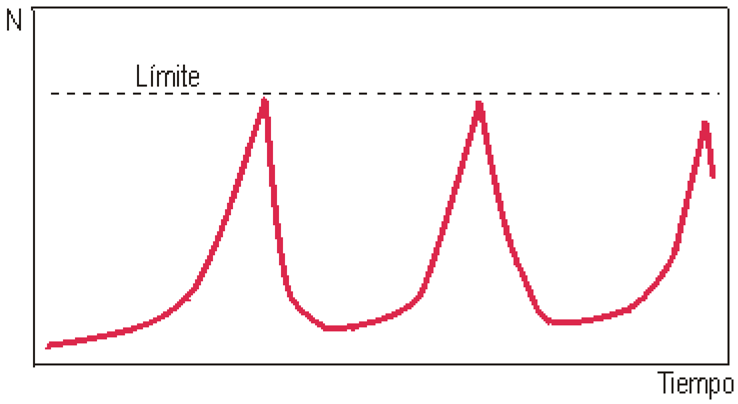
$$Nt = N0\ (1 + r)t \qquad (6)$$

Si TN > TM, significa que la natalidad supera a la mortalidad con la cual se está dando, en este caso, r será mayor que 0 y la población, en consecuencia lógica tiende a crecer.

En estas condiciones y si no existen limitaciones de otro tipo, *la población crece de manera exponencial*.

Un ejemplo para tratar de imaginar lo explicado, es el siguiente el cual muestra este tipo de crecimiento partiendo de N0 = 6 y r = 0,1, o sea una tasa del 10%. Hay que tener muy en cuenta que este tipo de crecimiento sólo es posible en circunstancias muy específicas. Por ejemplo cuando una especie coloniza un nuevo espacio y no hay restricciones en los recursos ni competencia por ellos, es decir, se proporcionan demasiadas facilidades que suelen ser e4scasas en un modelo mas real, tal es el caso de como ocurre en un cultivo bacteriano recién inoculado durante los primeros momentos de su crecimiento.

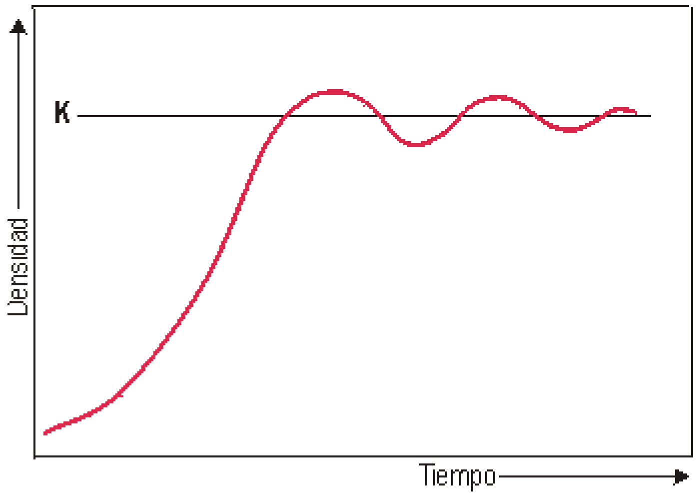
Algunas especies siguen este modelo de crecimiento siguiendo ciclos de explosión demográfica seguidos por elevados índices de mortalidad, por ejemplo al comienzo de la estación reproductora. Presentan curvas de crecimiento en forma de dientes de sierra tal y como se observa a continuación:



Al potencial biótico, como capacidad de una especie para reproducirse en condiciones ideales, se oponen una serie de factores que, en conjunto, constituyen la resistencia ambiental, la cual establece un límite al crecimiento de las poblaciones.

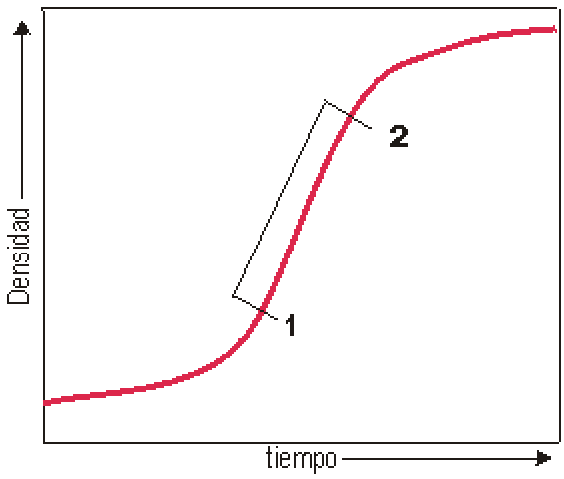
En especies con un comportamiento como el descrito estos factores suelen ser independientes de la densidad de población, como variaciones climáticas, en la cantidad de alimento disponible, tiempo de vida, riesgo natural de la especie, entre otras.

La tasa de natalidad es primero muy elevada y luego va siendo menor hasta igualarse a la de mortalidad cuando la población alcanza el límite de carga. Por encima de éste, la tasa de mortalidad supera la de natalidad e impide que la población continúe creciendo. Sin embargo, nos encontramos con que es frecuente que tras un período de crecimiento rápido este ajuste tarde en ocurrir lo suficiente como para que la población supere el nivel K de forma momentánea, tras lo cual se produce una elevada mortalidad y por tanto, una visible caída de la población. Y puede, ocurrir en este caso, que el valor de N oscile en torno a K hasta alcanzar el equilibrio:



El máximo crecimiento de la población y la máxima producción se da mientras se logra mantener la etapa de crecimiento exponencial, antes que los factores dependientes de la densidad tomen tanta importancia logrando de esta manera, limitar el crecimiento.

En la siguiente figura, podemos observar lo que corresponde al segmento comprendido entre los puntos 1 y 2:

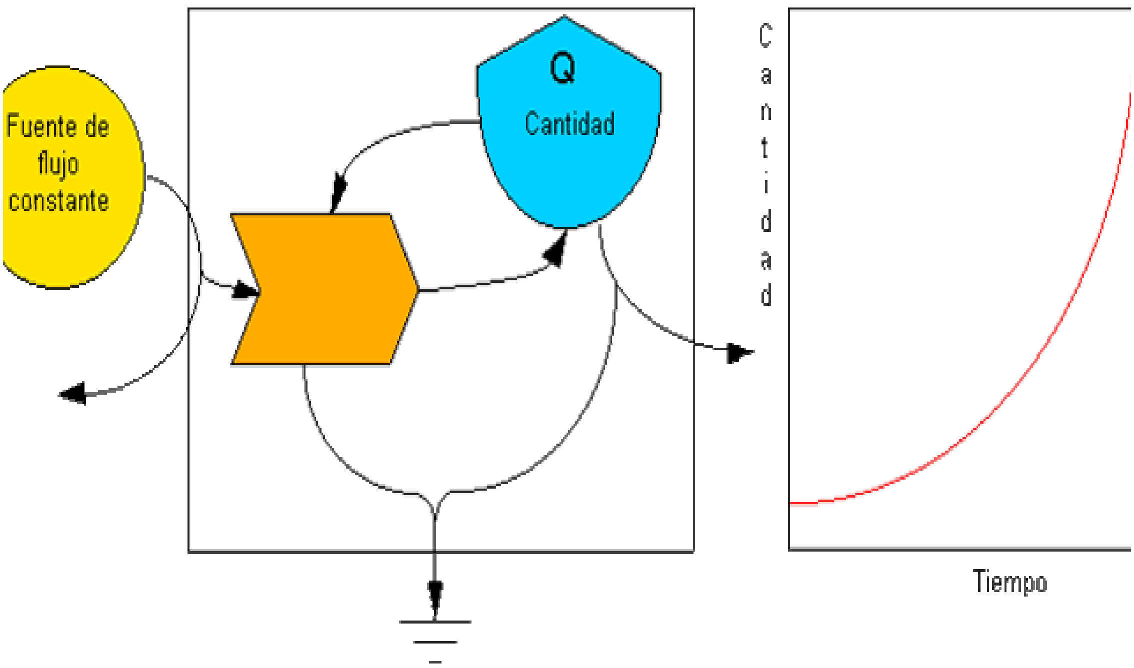


Ya hemos observado un poco acerca de lo que ocurre con la dinámica de la población, interpretada en base al modelo de crecimiento exponencial, por tanto es que a continuación, se representa el crecimiento mismo de la población, pero a hora considerando una *fuente de presión constante*.

La fuente de presión constante puede abastecer tanta energía como se necesita. Para entender mejor este concepto, pensemos en una población de conejos que se encuentran en pleno crecimiento, y que poseen un abastecimiento fértil de alimento que no considera para nada, la rapidez con que ellos suelen alimentarse.

Podemos seguir en este caso el flujo del diagrama que se encuentra mas abajo, para poder ver como la población de conejos tiende a aumentar; esta se retroalimenta para traer mas energía (es decir, a través de más alimentación) para procrear mas conejos.

Tenemos que se el sistema comienza con un conejo macho y una hembra, y ellos producen cuatro conejitos que a su vez producen ocho; y así, en la misma tasa de aumento, entonces la próxima generación producirá 16, la próxima 32, la próxima 64 y así sucesivamente, hasta no sabemos cuando. Como el número de conejos aumenta, ellos usan más de la fuente de energía y el número aumenta rápidamente.



“ Crecimiento exponencial de un sistema con fuente de energía que mantiene una presión constante ”
.

Podemos apreciar de esta manera, que existe una aceleración del crecimiento de la población de conejos a lo largo de la misma concentración de abastecimiento de alimento. La curva de una población bajo estas condiciones es a lo que llamamos más comúnmente como: *crecimiento exponencial.*

Es muy importante observar cuidadosamente que el *crecimiento exponencial* aumenta en un constante porcentual ya que se encuentra en una proporcionante función del tiempo.

A lo que se refiere en la práctica, la fuente de energía a presión constante no puede ser mantenida siempre indefinidamente, entonces tenemos que el crecimiento exponencial infinito es técnicamente imposible.

De cualquier manera, durante el transcurso de las primeras etapas del crecimiento de la población, cuando la demanda de alimento suele ser pequeña (comparada con la cantidad disponible), la energía puede encontrarse disponible a presión constante; entonces el crecimiento puede considerarse de manera exponencial. Pero eventualmente, el alimento podría volverse limitante y la situación lógicamente necesitaría ser representada por un modelo diferente.

Para que nos quede mas claro el papel que juega el modelo del crecimiento exponencial, es preciso poderlo verlo desde otro punto de vista, o mas bien, poder moldearlo de tal manera que no quede duda de su funcionamiento.
Con esto me refiero a que este tipo de crecimiento, también puede ser observado como un “ Interés Compuesto ”
La ecuación general para el crecimiento poblacional se puede deducir como:

Nt = N0 • □

Donde ***Nt*** es el tamaño poblacional en algún momento (*t*), *N0* es la población inicial y □ es la tasa de incremento anual.

Otra forma de presentar esta ecuación es:

Nt = N0 • □t

Cuando no existe suficiente información como para llenar una tabla de vida de la población, □puede ser calculado a partir de la tasa de cambio en un intervalo de tiempo determinado. Por ejemplo:

$$\lambda = Nt+1 / Nt$$

La ecuación ***Nt* = *N0* • *λt*** describe a una población que crece exponencialmente en el tiempo. Este tipo de crecimiento (similar al del interés compuesto en economía) se da cuando λ es mayor que 1, el ambiente es constante y hay exceso de recursos. λ es el responsable de la forma de la curva de crecimiento poblacional. Este parámetro define la velocidad del crecimiento poblacional.

El crecimiento poblacional está influenciado por las características del ciclo vital de las especies tales como: la edad al inicio de la reproducción, el número de descendientes producidos, la supervivencia de los individuos y la longitud del periodo reproductivo.

Una población puede crecer en forma exponencial hasta que sobrepasa la capacidad del ambiente para sostenerla. Justo en ese momento la población entra en un abrupto declive debido precisamente a la inanición, enfermedad o emigración.

La curva en forma de J o exponencial la podemos apreciar mas usualmente en poblaciones de animales introducidos en ambientes nuevos.

La tasa finita de incremento anual (**λ)** puede ser expresada como una tasa de incremento, *r*, que describe el crecimiento poblacional instantáneo. En este caso se asume que la población crece continuamente en el tiempo en vez de que exista una estación de cría discreta.

La tasa de incremento se calcula como:

$$r = \ln \lambda$$

La tasa de incremento depende de si la población a la que nos referimos posee una distribución estable en clases de edad, de las fecundidades y supervivencias de cada edad de la población. Dado que todas estas variables cambian, como es de suponerse, continuamente, los valores de ***r* y λ** cambian también continuamente. A pesar de esto el uso de ***r*** permite comparar el crecimiento de poblaciones que viven bajo diferentes condiciones ambientales, también permite una comparación directa de tasas así como para calcular el tiempo de duplicación de una población.

Aquí podemos permitirnos observar un hecho que es de gran importancia a nivel de la vida de las especies. Con esto hago referencia a las condiciones ambientales que limitan el crecimiento poblacional.

Es decir que, en la naturaleza el ambiente cambia constantemente y los recursos, como es bien sabido, son limitados. Esto nos refleja una situación que se presenta que a medida de que la densidad de una población aumenta, la competencia entre los miembros de la misma población por recursos disponibles también aumenta.

Ante este escenario y la escasez de los elementos, la mortalidad se incrementa y/o la fecundidad disminuye. Como resultado el crecimiento de la población disminuye alcanzando en algunos casos un nivel estable. Este nivel se conoce como la **capacidad de carga** o **K.**
Teóricamente en K la población se encuentra en equilibrio sin crecer ni disminuir.
En los casos en los cuales el crecimiento poblacional no es afectado por los niveles de densidad poblacional se habla de crecimiento <u>denso-independiente.</u>
A este último caso corresponde los modelos de crecimiento poblacional exponencial.
Podemos verificar que para un intervalo de tiempo específico, este modelo se expresa como:

Nt = N0 ert

(Lo único que estamos haciendo, es reemplazar □*t* por el término "ert")
Cuando esta modelo se especifica para tiempo continuo (no para intervalos), se expresa por la ecuación diferencial:

dN / dt = rN

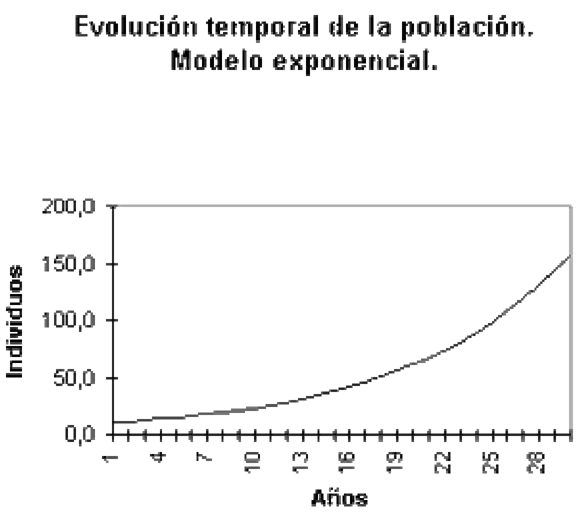
Una última forma de representar el modelo del crecimiento exponencial, y dentro de la dinámica de las poblaciones de manera muy resumida y concreta , además de ser muy sencilla es como se anuncia a continuación:

Se supone un crecimiento continuo e indefinido (que se refiere a la retroalimentación positiva)

$$dN/dt = rN$$

N = # de individuos de la población, t = tiempo durante el cual se dará el crecimiento, índice reproductor neto expresado como tasa diferencial, d = diferencial de...

Por cada unidad de tiempo que pase la población se multiplicara por una cantidad constante, mientras más grande será N mayor será el crecimiento.



Podemos citar ejemplos para terminar de concretar la representación. Véanse a continuación algunos de ellos:

Una población de vizcachas en enero de 1991 tenía 200 individuos y en enero de 1992 se produjeron 40 muertes y 80 nacimientos. Hallar las tasas porcentuales anuales de natalidad y mortalidad y calcule el tamaño final de la población suponiendo que no hubo migración.

Un población de vicuñas presenta un crecimiento exponencial (condiciones óptimas) en cuantos años alcanzará una población de 500 individuos. Si r = 1.2 y No = 50 individuos.

También podemos incluir una nota interesante como lo siguiente:

El economista británico Thomas Malthus propuso en 1798 que el crecimiento de una población se puede considerar como un proceso continuo, cuya velocidad de aumento es proporcional a la población ya existente: tenemos todos los ingredientes para la aparición de nuestro número.

Si P_0 es la población inicial (es decir, la existente cuando comenzamos a contar), existe una constante de crecimiento k en cada población, de manera que el número de individuos al cabo de un tiempo t, viene expresado por una ley del tipo $P(t) = P_0 e^{k t}$. Por ejemplo, supongamos que contabilizamos 500 bacterias en una placa de Petri. Una hora después comprobamos que su número ha aumentado hasta 800: $P(1) = 800 = 500 e^{k \cdot 1}$, tomando logaritmos se calcula fácilmente el valor de k como 0'47 (aproximadamente).

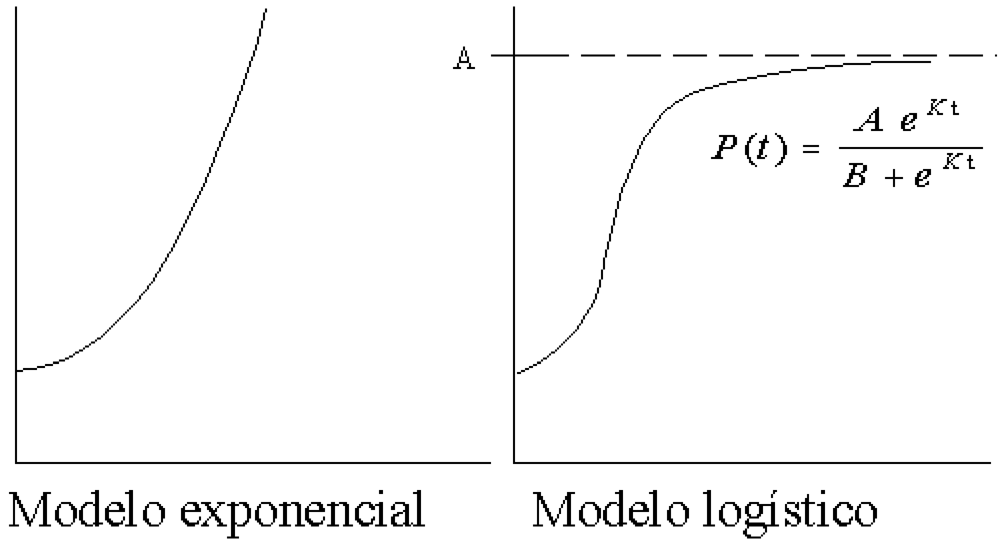
La ley de crecimiento de la población queda como $P(t) = 500 e^{0'47 t}$.

Esto, dejado así, presenta un problema: al cabo de una semana, el número de bacterias será de unos

$500 e^{0'47 \cdot 168} = 10^{37}$ ejemplares, aproximadamente.

Si consideramos una bacteria que tenga un volumen de cuatro micras cúbicas, calcula cuánto ocuparían las anteriores y verás que nos saldrían estos bichos por la boca.

En la realidad ocurre que las poblaciones encuentran un nivel de saturación, que no pueden sobrepasar por dificultades de espacio, de alimento o de otros condicionantes. Los biólogos han perfeccionado la fórmula estableciendola como P(t) $= \frac{A\,e^{Kt}}{B + e^{Kt}}$, llamado modelo logístico donde A (nivel de saturación) B y K son constantes que dependen de cada población particular.



Ya para concluir con este tema, daremos una breve conclusión, que sigue como parte de un ecosistema como los modelos antes citados:

La explotación de los ecosistemas por el hombre, ya hablemos de agricultura, ganadería o pesca, consiste en extraer biomasa manteniendo el ecosistema inmaduro, evitando que progrese la sucesión y el consumo respiratorio suponga una menor producción neta. Desde el punto de vista de la demografía se trataría de mantener la población de crecimiento exponencial, evitando que el aumento de la densidad haga decrecer la producción. Pero la sobreexplotación significa extraer más deprisa de lo que puede crecer la población, se reducirá su densidad a un nivel inferior al de producción óptima. El buscar el máximo beneficio en el menor plazo posible puede conducir a reducir los niveles de la población objeto de explotación por debajo de ese umbral crítico que permita la recuperación de la misma.

En condiciones naturales, no todas las especies utilizan la misma estrategia en la búsqueda de su adaptación a las condiciones ambientales y su permanencia en el tiempo. El tamaño de la población depende del equilibrio entre fertilidad (o potencial biótico) y supervivencia:

- Unas especies presentan elevada fertilidad (gran potencial biótico) aunque su supervivencia sea baja. Se denominan r estrategas, y son propias de ambientes cambiantes o inestables, sometidas a elevados índices de mortalidad, que compensan con crecimientos explosivos en períodos favorables. Son especies oportunistas, pioneras o colonizadoras que basan su éxito en producir un gran número de esporas, huevos, larvas o juveniles aunque su mortalidad sea muy elevada (curva de supervivencia tipo III)

- Otras especies sitúan el número de individuos por debajo de la capacidad de carga K, son los K estrategas, que priman la supervivencia por encima de la fertilidad. Son especies propias de ambientes estables, muy adaptadas a ellos, en general grandes y longevas. Adoptan esta estrategia especies muy territoriales, con marcada organización social. Pero son la densidad de población tiene un gran efecto y presentan mecanismos de regulación social: es decir, que no todos los individuos se reproducen, ya que son muy sensibles a cambios ambientales. Incluso, una población puede llegar a extinguirse, y esto puede ser ocasionado, ya que esta última tiende a ser pequeña, o bien, si la disponibilidad de recursos disminuye considerablemente.

Pero es bien cierto que las poblaciones pueden llegar a la extinción por muchas causas. Una de las causas mas comunes en los últimos años ha sido la destrucción de hábitat. La destrucción del hábitat lleva a que la convivencia se vea restringida a un número cada vez menor de individuos.

En muchos casos las actividades principales de las poblaciones (como escape a depredadores, búsqueda de alimento y apareamiento) dependen de un número crítico de individuos. Si por alguna razón la población decrece a niveles menores que este número crítico entonces es muy probable que ocurra la extinción.
La extinción es un proceso natural y selectivo. Las probabilidades de extinción de una especie dependen de sus características biológicas como de eventos aleatorios. Las características biológicas que favorecen la extinción son: gran tamaño corporal, rango geográfico restringido, especialización en un hábitat, falta de variabilidad genética y baja plasticidad fenotípica y trófica.

En fin, esto es solo una parte muy importante que debemos tener en cuenta para la preservación de estas especies, y para poder seguir llevando a cabo, las diversas actividades, implantando así mismo, métodos y buscando una explicación mas lógica, como con el modelo exponencial, antes citado.

2) *USO EN LA DATACIÓN POR MEDIO DEL CARBONO 14*

En los sistemas cerrados (que pueden ser líquidos o sólidos), no existe aporte continuo de nutrientes, ni drenaje de células ni de sustancias de desecho.

En estos sistemas la *fase exponencial de crecimiento* balanceado no restringido dura sólo unas cuantas generaciones, debido al agotamiento de nutrientes y/o a la acumulación de desechos.

El crecimiento en un sistema cerrado consta de varias fases, que pasamos a comentar:

Fase de retardo (fase "lag"): Es el período de tiempo durante el que el inóculo se adapta a las condiciones del medio fresco sobre el que se ha sembrado. Se trata de un período de ajuste metabólico. Su duración depende de varios factores:

*tamaño del inóculo;

*bondad del inóculo (estado metabólico previo del inóculo):

Pero aun cuando la inoculación se hace desde un cultivo previo en fase logarítmica, cuyo medio sea idéntico al medio fresco, se observa siempre una fase larga.

Fase de transición, de crecimiento acelerado, que conduce a ...

Fase de crecimiento exponencial (= fase logarítmica). La fase 2 se debe a que cada célula entra en la fase exponencial con desfase respecto de sus compañeras. Ello demuestra que las células del inóculo no están todas en las mismas condiciones fisiológicas.

Durante la fase logarítmica se da un crecimiento balanceado no restringido durante unas pocas generaciones (normalmente menos de 10). El tiempo de generación (g) es característico para cada especie o cepa, en cada medio concreto:

El valor del tiempo de generación (g) depende de:

- composición del medio
- temperatura
- ph
- tonicidad, entre otros

Los microorganismos heterótrofos suelen crecer más rápidamente en los medios complejos, ricos, que en los medios sintéticos, y dentro de estos últimos, mejor con glucosa que con otras fuentes de carbono.

Fase de aceleración negativa, de crecimiento desequilibrado, que conduce a...

Fase estacionaria: Esta fase se caracteriza porque el coeficiente neto de crecimiento se hace nulo (□ = 0), pero aún existe crecimiento. Lo que ocurre es que el crecimiento bruto se equilibra con las muertes celulares.

En este período se agotan nutrientes especiales y se acumulan sustancias de desecho. Incluso el pH del medio empieza a hacerse inadecuado para el crecimiento celular.

Si la bacteria crece en un medio complejo, la fase 4 de transición (de aceleración negativa) puede ser relativamente larga, debido a que va recurriendo a fuentes alternativas (por ejemplo, puede recurrir a aminoácidos como fuente de C una vez agotados los hidratos de carbono).

En la fase estacionaria aún existen reacciones metabólicas, pero el metabolismo general es diferente al de la fase logarítmica:

Fase de transición hacia Fase de muerte exponencial: Se da muerte y lisis masiva, exponencial, del cultivo. Se debe a agotamiento.

de reservas de energía. Algunas veces las células aparecen grandes, hinchadas, distorsionadas (formas "fantasmas", "ghost"). La pendiente de esta parte de la curva depende de las especies (por ejemplo, en bacterias entéricas es suave, mientras que en *Bacillus* es más acentuada).

También lo podemos relacionar con una desintegración radiactiva:

Algunos átomos son inestables y se desintegran espontáneamente emitiendo radiaciones. Se ha observado que el tiempo en que determinada sustancia se reduce a la mitad, llamado *vida media*, es una constante característica de ella e independiente de la cantidad que haya. La ley de Rutherford sobre la desintegración radiactiva dice que el número de átomos de un elemento radiactivo transformados en un tiempo determinado es proporcional al número de átomos de ese elemento que estén presentes en la sustancia, en particular, la fórmula que describe la desintegración es de la forma: $N(t) = N_0 \cdot e^{k\,t}$.

La vida media de los elementos radiactivos puede utilizarse a veces para determinar la fecha de sucesos del pasado de la Tierra. Las edades de las rocas de más de 2000 millones de años pueden establecerse mediante la desintegración radiactiva del uranio (de 4500 millones de años de vida media).

En un organismo vivo, cada gramo de carbono contiene 10^{-6} gramos de

C^{14}. Tras su muerte, el organismo deja de absorber carbono y la proporción de C^{14} decrece a medida que se va desintegrando. Su vida media es de unos 5730 años, de modo que es posible estimar la edad de restos orgánicos: los arqueólogos han fechado así conchas, semillas, objetos de madera, o la fecha en que se realizaron pinturas rupestres.

- Hállese k en la fórmula de desintegración del C^{14}.
- El carbón de un árbol muerto en la erupción volcánica que dio origen al Lago Cráter, en Oregón, contenía el 44'5% del C^{14} que se halla en la materia viva. ¿Qué antigüedad aproximada tiene el lago?
- En el año 2000 se encuentra, en el centro de Illinois, un hueso fosilizado con el 17% de su contenido original de C^{14}. ¿En qué año murió el animal? Contéstese en el caso de que las proporciones fuesen 16% y 18% respectivamente (para ver las consecuencias de un pequeño error en la medida del carbono).

Solo como dato curioso para cerrar con esto, me permito decir que el modelo exponencial, además de servir para la datación del carbono 14, y para las dinámicas de las poblaciones, también es de gran utilidad en las finanzas, ya que se relaciona con el interés compuesto y todo lo relacionado a ello. Una aplicación más, puede ser manifestada dentro de la física como parte de la velocidad en relación con el tiempo.

Esto por citar algunas de sus más importantes aplicaciones, sin embargo, también se puede relacionar con mayores áreas.

III. MODELO DE CRECIMIENTO LOGÍSTICO

Para comenzar a hablar acercas del modelo de crecimiento logístico, es necesario indicar que los recursos necesarios deben ser limitados; y una consecuencia inmediata acerca de ello, es que, tanto nacimientos como muertes dependen del tamaño de la población.

Obtenemos de esta manera, la ecuación que nos describe la familia de ecuaciones de crecimiento:

$$\frac{dN}{dt} = (b' - d')N$$

Donde N es el tamaño de la población,
t = punto en el tiempo dado en minutos, horas, años, décadas, etc.

Posteriormente nos damos cuenta la manera en que se define el “decrecimiento de la población”, esto es :

$$b' = b - aN$$

Y de la misma manera, la proporción de incremento, la señalaremos de la siguiente forma:

$$d' = d + cN$$

Ambas se encuentran representadas de una forma muy simple, y esta es la de líneas rectas, que respectivamente decrecen o crecen.
Con esta información, podemos darnos cuenta inmediatamente que el modelo exponencial, anteriormente descrito, es un caso particular del modelo logístico en donde no existe un efecto de nacimientos o muertes, es decir, a=0, o c=0.

Dentro del mundo real, estos modelos no suelen ser tan fáciles, las cosas se comienzan a complicar cuando intentamos ajustarnos lo mas que podamos a la realidad. Para estos efectos, necesitamos que la población sea pequeña y genere un mínimo de crecimiento de población. Los nacimientos y las muertes, aquí van a estar comportadas como denso-dependientes.

Con lo cual, podemos describir ahora, nuestro modelo logístico:

$$\frac{dN}{dt} = [\,(b-aN) - (d+cN)]\,N$$

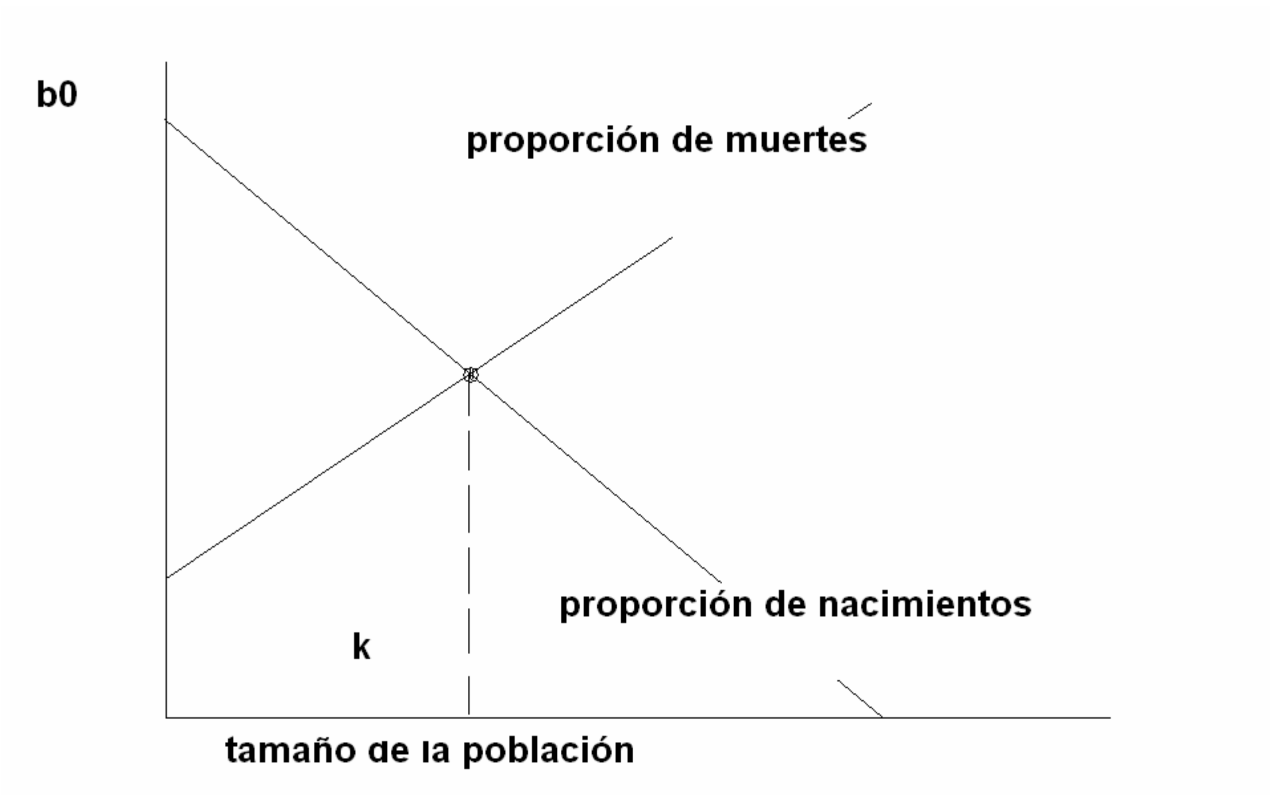
Esto, con una reagrupación de términos la podemos ver así:

$$\frac{dN}{dt} = \left[\,[(b-d)]\;\frac{(b-d)\quad(a-c)}{(b-d)\quad(b-d)}\;N\;\right] N$$

Ahora llamemos r= (b-d), la expresión se simplifica mucho mas:

$$\frac{dN}{dt} = rN\;\left[1 - \frac{(a+c)}{(b-d)}\;N\right]$$

Determinemos, de una manera mucho mas simple nuestra ecuación diferencial para describir el modelo de crecimiento logístico, haciendo un pequño cambio de variables, es decir , haciendo que K= (b-d) / (a+c)
Obteniendo de esta manera : $dN/dt = rN\;(1-(N/K)$

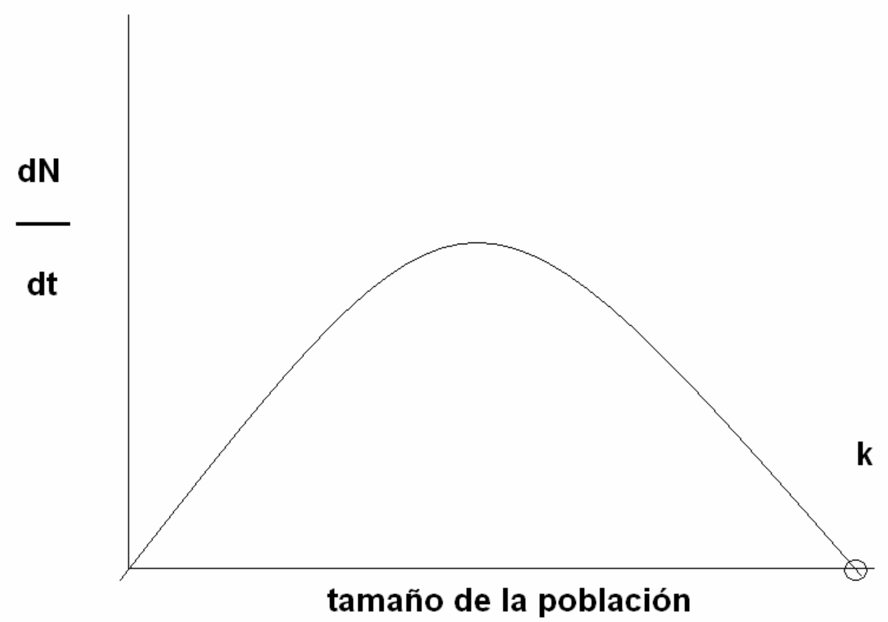


En la figura se nos muestra una visión gráfica de que lo que se representa al decir que las variables, tanto de nacimientos como de muertes, son denso-dependientes. Mostrándonos que las muertes y nacimientos solo son iguales en un punto, que es justo en el lugar en donde se intersectan.

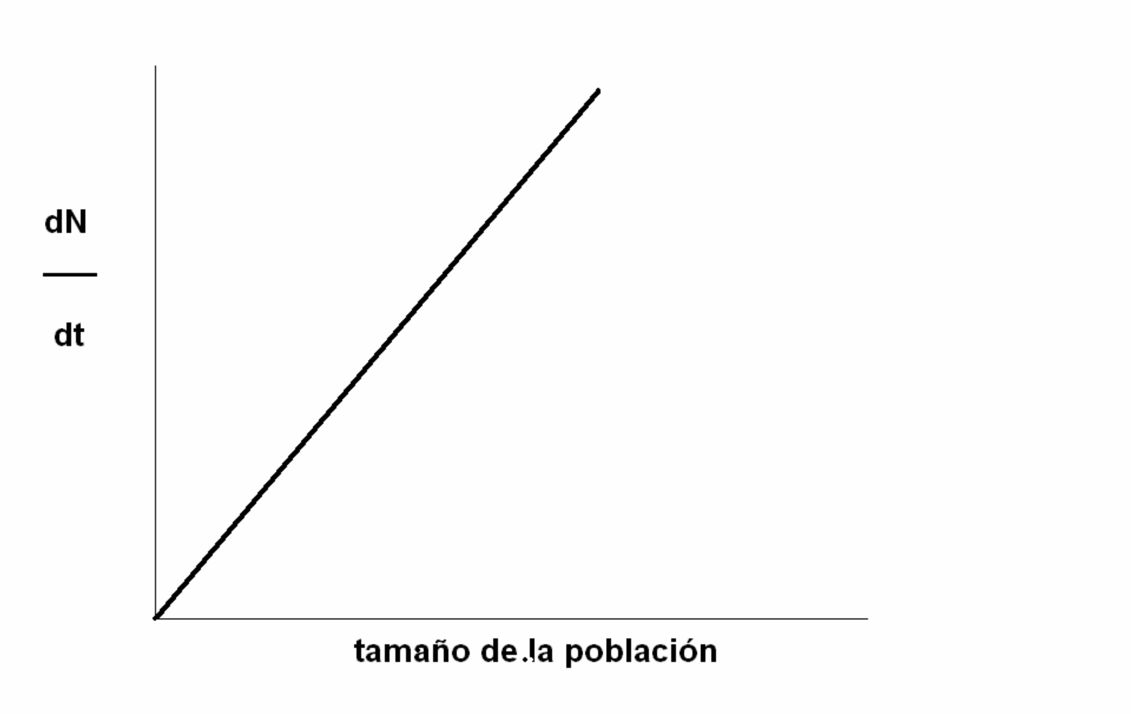
Antes de continuar, es preciso tener en cuenta, que la función exponencial ya que la función a estudiar está relacionada muy cercanamente con ella. Sin embargo, no debemos confundir una con la otra.

A continuación se presenta una representación de cada uno de los modelos para darnos cuenta de lo que la semejanza significa.

CRECIMIENTO LOGÍSTICO



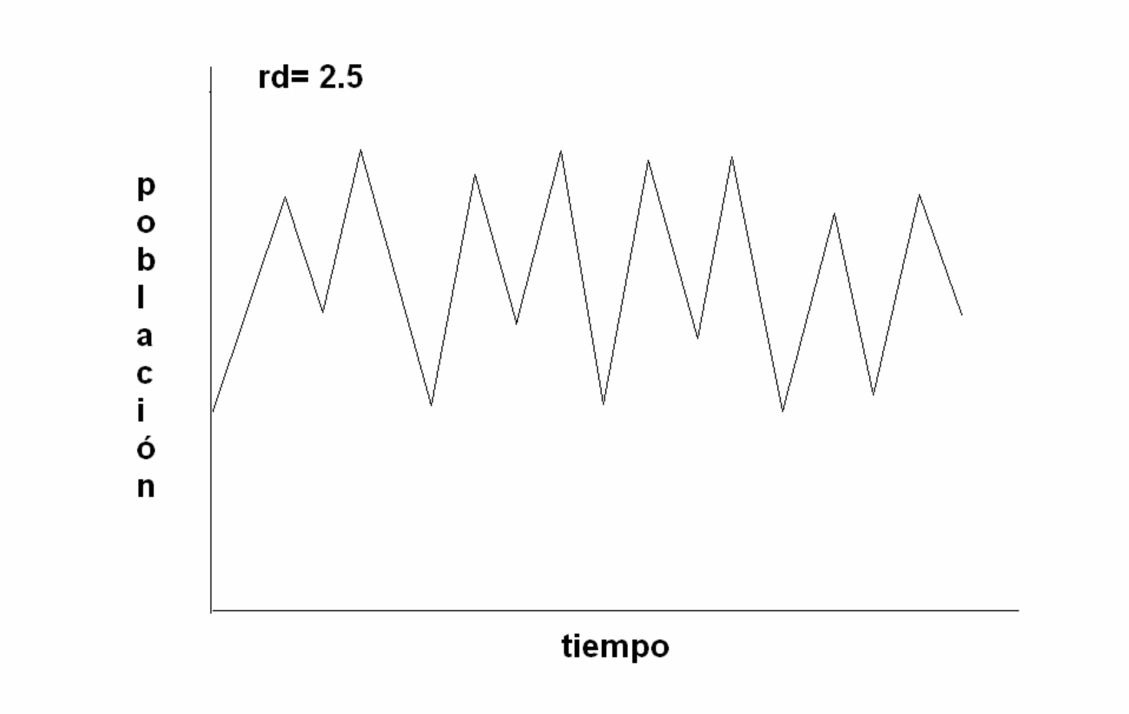
CRECIMIENTO EXPONENCIAL



Es bueno mencionar el modelo de crecimiento discreto de una población, que se define como

$$N_{t+1} = N_t + rd\, N_t \,[\, 1- (N_t/K)$$

Este modelo pareciera ser análogo al modelo continuo y también al modelo original del modelo exponencial. Pero este modelo esta ajustado al tiempo de retrazo de longitud 1.0. La población avanza en el futuro, dependiendo de la población en la fecha inicial; es decir, la dinámica depende únicamente de rd.



Observemos la representación de la gráfica que nos comunica que el tamaño de la población no es muy grande ni muy pequeño, simplemente tiene una medida en término “medio”, lo cual provoca que se cree este modelo de una forma un poco compleja para ciertos puntos que tienen que ver con la rd.

En el estudio de la función exponencial siempre tenemos que tener en cuenta que la base a es siempre positiva y que hay dos tipos claramente diferenciados dependiendo de si $a > 1$ ó $0 < a < 1$.

La función exponencial es un modelo válido para crecimientos o decrecimientos continuos en los que las condiciones son siempre igualmente favorables: aumento del capital ingresado en un banco, desintegración de sustancias radioactivas.

Las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según una curva exponencial pero si no hay catástrofes, llegan a invadir su espacio vital y, debido a la limitación de alimentos, peligro conforme a la especie, entre otras cosas mas, su crecimiento se amortigua, no sobrepasando su población límite. Este tipo de aumento, amortiguado por un nivel de saturación se llama **crecimiento logístico.**

La función logística nos permite apreciar mucho mejor lo que ocurre con las poblaciones ya que describe de manera mas precisa que la exponencial lo que realmente ocurre con los seres vivos.

En general, la función logística asociada a una exponencial es:

FUNCION EXPONENCIAL $y = C \cdot a^x$ donde C es la población inicial, x el tiempo

FUNCION LOGÍSTICA $y = L \cdot \dfrac{1}{1 + K \cdot a^{-x}}$ donde L es la población límite, K = (L / C) - 1

Aquí podemos introducir un ejemplo muy claro que se puede apreciar en la vida real:

En una isla dejamos escapar 100 conejos, especie desconocida hasta entonces en esos parajes. Supongamos que las condiciones para que se reproduzcan son óptimas, por lo que se incrementan en un 10% mensual.

(Hasta aquí sería un modelo exponencial típico)

Supongamos ahora que la isla tuviera un tamaño y unas condiciones tales que, a lo sumo pudieran vivir 1000 conejos. Este es el número que consideraríamos como nuestra población límite. En este caso la función que describe el crecimiento es la función logística asociada. Observa en la siguiente escena sus características. L = 1000 y K = 9.

En la siguiente tabla se observa el número de conejos que habría en la isla según cada modelo.

MES	LOGISTICA	EXPONENCIAL	DIFERENCIA
0	10	10	0
1	10,89108911	11	0,108910891
2	11,85112635	12,1	0,248873653
3	12,88355435	13,31	0,426445649
4	13,99164763	14,641	0,649352367
5	15,178441	16,1051	0,926659001
6	16,44665058	17,71561	1,268959417
7	17,79858848	19,487171	1,688582524
8	19,23607239	21,4358881	2,199815713
9	20,76033237	23,57947691	2,819144541
10	22,37191717	25,9374246	3,565507431

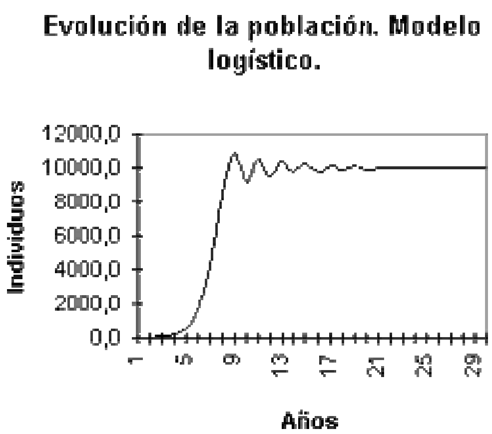
11	24,07060334	28,53116706	4,460563718
12	25,85531075	31,38428377	5,528973019
13	27,72402845	34,52271214	6,798683692
14	29,67375526	37,97498336	8,301228096
15	31,70045912	41,77248169	10,07202257
16	33,79905934	45,94972986	12,15067053
17	35,963435	50,54470285	14,58126785
18	38,18646215	55,59917313	17,41271099
19	40,46008101	61,15909045	20,69900944
20	42,77539323	67,27499949	24,49960626
21	45,12278758	74,00249944	28,87971187
22	47,49209081	81,40274939	33,91065858
23	49,87273923	89,54302433	39,6702851
24	52,25396479	98,49732676	46,24336197

Hay que poner mucha atención como durante los primeros meses los números son casi idénticos: aún estaba lejos el nivel de saturación. Sin embargo, al el tiempo la diferencia es enorme y después los resultados obtenidos para cada modelo no tienen nada que ver

Se supone que la población no crece indefinidamente y mientras mayor sea su densidad más lento será el crecimiento, se detendrá cuando la población alcance un límite denominado capacidad de carga.

Experimenta retroalimentación negativa, la población crece solo hasta un límite, la capacidad de carga, y cuando se supera disminuirá su tamaño.

Una población está influenciada en su mayor o menor grado por el medio ambiente, esto manifiesta en el tamaño y el crecimiento de la población

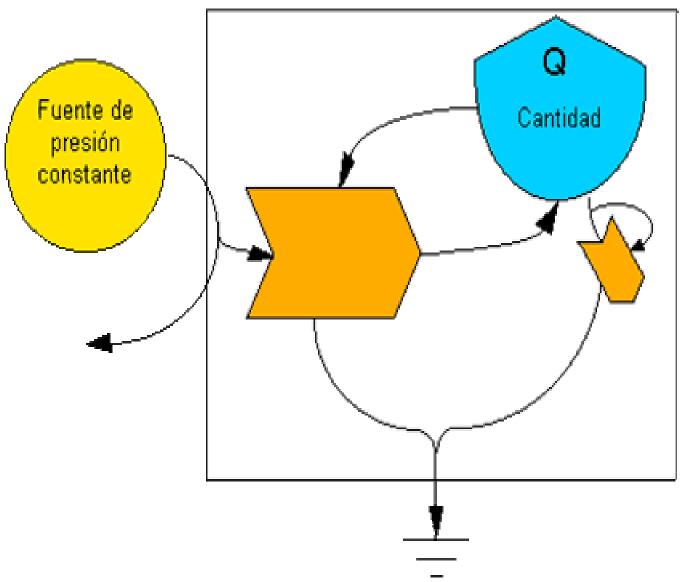


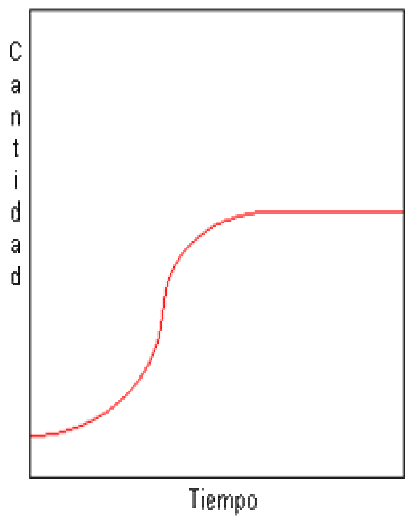
dN/dt = rN[(k-N)/k]

De una manera mas explícita, podemos decir que las poblaciones van creciendo inicialmente rápido en una fuente de presión constante, es decir, se vuelven tan numerosas que pierden su capacidad de crecer debido a interacciones entre los miembros de la población, resultando entonces, como habría de esperarse, un estado de equilibrio. Este tipo de crecimiento se llama *crecimiento logístico.*

Podemos decir que el crecimiento logístico es el balance entre producción en proporción a la población, y a las pérdidas en proporción a la oportunidad de interacciones individuales.

El proceso de crecimiento puede ser entendido con el auxilio del diagrama de símbolos del modelo que podemos observar en la siguiente figura . Un ejemplo es el crecimiento de levadura en el fermento del pan. Primeramente, el crecimiento de la población es casi exponencial. La disponibilidad de alimento es constante y como la población crece esto implica comer más y más. Sin embargo, las células de levaduras se vuelven tan numerosas que sus productos comienzan a interferir con el propio crecimiento. Resultando un estado de equilibrio entre producción y pérdida de células.





Crecimiento logístico: Crecimiento de un sistema con una fuente de energía a presión constante y una auto-interacción en un drenaje de salida.

En esta figura se observa parte de la producción del modelo. El abastecimiento de energía es una fuente de presión constante, y la población está extrayendo energía y retroalimentando para extraer más. El crecimiento de la población es por esta razón, al principio, exponencial. No obstante, en la figura se nos muestra que la población, por interacciones consigo misma, crea un drenaje acelerado de energía, el cual irá eventualmente a extraer energía suficiente para detener el crecimiento de la población. En estas condiciones, el gráfico muestra el crecimiento exponencial que disminuye, y eventualmente se nivela a un estado de equilibrio. Este sistema tiene una fuente de presión constante y un drenaje de auto-interacción.

Observemos que en la figura anteriormente citada, la etiqueta en el símbolo de depósito es "cantidad". Este término genérico lo podemos usar para denominar el contenido del depósito. También recordemos que "cantidad" puede referirse a números de población, biomasa, depósito de energía o para todos ellos.

Otro ejemplo del modelo es el crecimiento de la población humana y sus servicios en la ciudad. El crecimiento puede aumentar exponencialmente hasta que la superpoblación de casas, calles, tiendas, y autos comience a aumentar los factores negativos de suciedad, ruido, crimen, y polución, y el coste de lidiar con esto se torne progresivamente mayor. Cuanto más crece la población, mayor es el drenaje, hasta que el crecimiento de la ciudad se nivela.

1) *ALGO MAS RELACIONADO CON LA LOGÍSTICA*

Consideraciones acerca de la gestión logística

Muchas empresas fabrican o comercializan en la actualidad productos y/o servicios altamente competitivos, sin embargo, no cuentan con la capacidad necesaria para ofertarlos en el tiempo y en el lugar, de acuerdo a los requerimientos de los clientes. Esta falta de capacidad se debe en gran medida al no adecuado diseño del proceso de creación de los productos y/o servicios, dentro del cual la logística desempeña un papel decisivo.

La logística es una función de la organización que abarca el flujo material, financiero y de información asociado al movimiento de los recursos materiales, partiendo de la entrega con calidad y justo a tiempo, desde los proveedores hasta los clientes.

Los tres flujos relacionados con la gestión logística (material, información y financiero) están interrelacionados hasta tal punto, que cada uno de ellos es, en ciertos aspectos, causa y consecuencia de los otros. Por ello, confluyen en la administración logística, junto con su objeto fundamental (el flujo de materiales), componentes de la gestión financiera y de la gestión de información.

El punto de partida para diseñar un sistema logístico son los requerimientos de los clientes. La empresa debe definir e identificar a sus clientes, su ubicación geográfica, las expectativas de servicio de entrega y otras variables. A partir de lo anterior, se deciden las estrategias de almacenamiento, transporte y producción junto a las políticas de aprovisionamiento y distribución.

La logística es una poderosa herramienta gerencial y tiene un profundo efecto en la rentabilidad al permitir que las empresas maximicen los beneficios. Esto sólo se puede lograr integrando y realizando de forma eficiente todos los aspectos de su operación. El apoyo efectivo de la dirección en este sistema puede sustancialmente reducir costos, mejorar el servicio a los clientes y aumentar las ventas. Los directivos deben fijar una estrategia que concilie los deseos reales de su clientela y los costos correspondientes para lograr utilidades razonables.

En las condiciones del socialismo, donde ha desaparecido la esencia explotadora del sistema de producción capitalista y el capital es social, todo incremento en la eficiencia del proceso de cualquier organización tributará a alcanzar los objetivos de satisfacer las necesidades sociales.

Al logro de la eficiencia de una organización contribuye el nivel de eficiencia que se logre en cada una de las fases de su sistema logístico:

Las fases fundamentales del proceso logístico que analizaremos a continuación son: planificación de las compras, selección de proveedores, almacenaje, distribución y comercialización.

La **planificación de las compras** está estrechamente vinculada con las necesidades de los clientes y la realización de las ventas de mercancías anteriormente adquiridas. El no tener en cuenta estos elementos puede conducir a la adquisición de mercancías que luego no tienen salida y hacen crecer los inventarios, provocando deterioros, vencimientos por lo que se pierde parte de la inversión realizada. Crecen también los costos de oportunidad y mantenimiento del stock asociados al **almacenamiento**.

La no adecuada **selección de los proveedores** puede traducirse en el incremento de los gastos de transporte, poca calidad de las mercancías adquiridas, falta de fiabilidad, precios no económicos, demora en los plazos de entrega, todo lo cual conduciría a un incremento en los costos y se puede llegar hasta la no satisfacción de los clientes en calidad, tiempo y precio.